

MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ
VE
HURWITZ KÜMESİNE YAKLAŞIMLAR

Nilgün DEMİRTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Aralık - 2010

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Nilgün DEMİRTAŞ'ın **Matris Eşitsizlikleri ve Hurwitz Kümesine Yaklaşımlar** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı) :	Yard.Doç.Dr. TANER BÜYÜKKÖROĞLU	
Üye :	Prof.Dr. VAKIF CAFER	
Üye :	Doç.Dr. METİN KUL	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr.
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ VE HURWITZ KÜMESİNE YAKLAŞIMLAR

NİLGÜN DEMİRTAŞ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

2010, 55 Sayfa

Bu tez çalışmasında n . dereceden Hurwitz kararlı monik polinomlar kümesi $(H_n \subset \mathbb{R}^n)$ ele alınmıştır. Tüm kökleri $D \subset \mathbb{C}$ kümesinde olan n . dereceden monik polinomların kümesinin konveks zarfı, D belli koşulları sağladığında bir politoptur. Bazı D kümeleri için bu özelliklerle ilgili sonuçlar incelenmiş ve bu yolla Hurwitz kümesine bir dıştan yaklaşım yöntemi araştırılmıştır. Hurwitz kararlı polinomlar kümesi açık bir kümedir. Hurwitz kararlı bir polinom verildiğinde, bu polinom merkezli, küme içerisinde kalan bir elipsoid belirlenebilir. Lineer matris eşitsizliklerini kullanarak böyle bir elipsoidi veren bir yöntem incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Hurwitz kararlılık, Elipsoidal iç yaklaşım,
Hurwitz kararlı polinomların konveks zarfı.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE MATRIX INEQUALITIES AND APPROXIMATIONS TO THE HURWITZ SET

NİLGÜN DEMİRTAŞ

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assist. Yrd. Doc. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

2010, 55 Pages

In this thesis, Hurwitz stable set of monic polynomials of n -th degree is considered. Convex hull of set of monic polynomials of n -th degree, having roots in the set of $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ is a polytope if it satisfies certain conditions. For some $\mathcal{D}$, results related with this property are investigated and by this way, an outer approximation method to Hurwitz set is studied. The set of Hurwitz stable polynomials is open. If a Hurwitz stable polynomial is given, an ellipsoid that is located in the set can be determined. A method which uses linear matrix inequality is investigated.

Keywords : Hurwitz stability, Ellipsoidal inner approximation,
Convex hull of Hurwitz stable polynomials.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
1 GİRİŞ	1
2 HURWITZ KÜMESİNE DIŞ YAKLAŞIM	7
3 KARARLILIK BÖLGESİNE İÇ YAKLAŞIM	37
KAYNAKLAR	54

1. GİRİŞ

Bir lineer sistemin kararlılığı, bu sistemin karakteristik polinomu incelenerek belirlenir.

Tanım 1.1 *n. dereceden bir*

$$p(s) = a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n, \quad (a_n \neq 0) \quad (1.1)$$

polinomunun tüm kökleri kompleks düzlemin sol açık yarı düzleminde ise bu polinoma Hurwitz kararlıdır denir.

(1.1) polinomunun köklerinin tam olarak belirlenmesi ise genelde mümkün değildir, ancak nümerik yöntemler yardımıyla kökler belirli hassasiyette hesaplanabilir. Katsayıları kullanılarak, polinomun Hurwitz kararlılığının belirlenebilmesiyle ilgili bilinen bazı özellikleri verelim.

(1.1) polinomunun Hurwitz kararlı ($\text{Re}(s_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n$) olduğunu varsayalım.

$$p(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. (1.2) deki ifade düzenlendiğinde (1.1) polinomunun tüm katsayılarının aynı işaretli olduğu görülür. Buna göre (1.1) polinomu Hurwitz kararlı ise, tüm katsayıları aynı işaretlidir.

Tanım 1.2 *(1.1) polinomu verilsin.*

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

matrisine p(s) polinomunun Hurwitz matrisi denir.

Teorem 1.1 ([1]) (1.1) polinomunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}
H_1 &= (a_{n-1}) \\
H_2 &= \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix} \\
H_3 &= \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
H_n &= H(p)
\end{aligned}$$

olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\det H_i > 0$ olmasıdır.

$$q(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n \quad (b_n \neq 0)$$

n . dereceden polinomu verilsin.

$$q(s) = \frac{1}{b_n}(a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n)$$

şeklinde ifade edilebildiğinden $q(s)$ ile $a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ (monik) polinomunun kökleri aynıdır.

$$p(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (1.3)$$

polinomu n -boyutlu

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$$

vektörü ile temsil edilebilir. n . dereceden Hurwitz kararlı monik polinomların kümesini H_n ile gösterelim.

Teorem 1.1 kullanılarak (1.3) polinomunun kararlılığını ele alalım. Bu polinom Hurwitz kararlı ise $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ katsayıları pozitifdir.

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ katsayılarının pozitif olduğunu varsayalım. Teorem 1.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

- i) $n = 1$ veya $n = 2$ ise (1.3) polinomu Hurwitz kararlıdır.
- ii) $n = 3$ için (1.3) polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $a_0 < a_1a_2$ olmasıdır.
- iii) $n = 4$ için (1.3) polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $a_1^2 + a_0a_3^2 < a_1a_2a_3$ olmasıdır.
- iv) $n = 5$ için (1.3) polinomunun Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}
a_2 &< a_3a_4, \\
a_2^2 + a_1a_4^2 &< a_0a_4 + a_2a_3a_4, \\
a_0^2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_4^2 + a_0a_3^2a_4 &< a_0a_2a_3 + 2a_0a_1a_4 + a_1a_2a_3a_4
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Görüldüğü gibi, $n \geq 3$ olmak üzere $H_n \subset \mathbb{R}^n$ kümesi lineer olmayan eşitsizlikler ile ifade edilebilmektedir.

H_n kümesi $n \geq 3$ için konveks değildir.

$$p_1(s) = 0.057 + 0.6s + 0.1s^2 + s^3, \quad p_2(s) = 0.157 + 0.8s + 0.2s^2 + s^3$$

3. dereceden Hurwitz kararlı polinomları için

$$\frac{1}{2}p_1(s) + \frac{1}{2}p_2(s) = 0.107 + 0.7s + \frac{3}{20}s^2 + s^3$$

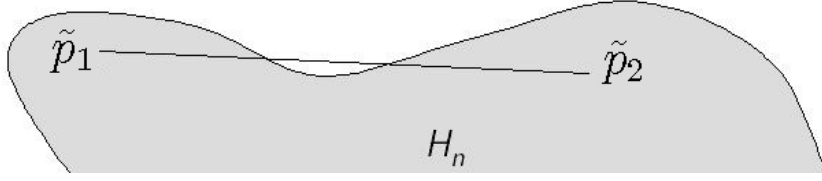
toplamıyla elde edilen polinom Hurwitz kararlı değildir.

$$\tilde{p}_1(s) = p_1(s)(s+1)^{(n-3)}, \quad \tilde{p}_2(s) = p_2(s)(s+1)^{(n-3)}$$

Hurwitz kararlı, fakat

$$\frac{1}{2}\tilde{p}_1(s) + \frac{1}{2}\tilde{p}_2(s) = \left(\frac{1}{2}p_1(s) + \frac{1}{2}p_2(s)\right)(s+1)^{(n-3)}$$

polinomu Hurwitz kararlı olmadığından H_n konveks bir küme değildir [1].



Şekil 1.1: H_n kümesi ($n > 2$ için) konveks küme değildir.

Kararlılık problemlerinde genellikle polinomun katsayıları, sınırlı aralıklarda değişen parametrelerin fonksiyonlarından oluşur. Bu parametrelere belirsizlik parametreleri, parametrelerin bulunduğu kümeye ise belirsizlik kümesi denir.

$a_i : Q \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) olmak üzere

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \dots + a_{n-1}(\mathbf{q})s^{n-1} + s^n \quad (1.4)$$

polinomlarından oluşan

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\} \quad (1.5)$$

kümesine n . dereceden polinomlar ailesi denir.

Tanım 1.3 (1.5) polinomlar ailesindeki tüm polinomlar Hurwitz kararlı ise $\mathcal{P}$ ye gürbüz (robust) Hurwitz kararlıdır denir.

$\mathcal{P}$ polinom ailesinin gürbüz kararlılığını araştırmada her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(s, \mathbf{q})$ polinomunun kararlılığının kontrol edilmesi genelde mümkün değildir. Bazı polinom ailelerinde $\mathcal{P}$ 'nin bir alt kümesinin gürbüz kararlılığı, $\mathcal{P}$ 'nin gürbüz kararlılığını gerektirir. Bu alt kümeler $\mathcal{P}$ 'nin test kümesi olarak adlandırılır.

Her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $q_i^- \leq q_i^+$ olacak şekilde $q_i^-, q_i^+ \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 0, 1, \dots, n-1\} \quad (1.6)$$

kutusu ele alalım. Her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $a_i(\mathbf{q}) = q_i$ olarak tanımlayalım Bu durumda

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : p(s, \mathbf{q}) = q_0 + q_1s + \dots + q_{n-1}s^{n-1} + s^n, \mathbf{q} \in Q\} \quad (1.7)$$

aralık polinom ailesine karşılık

$$K_1(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots$$

$$K_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots$$

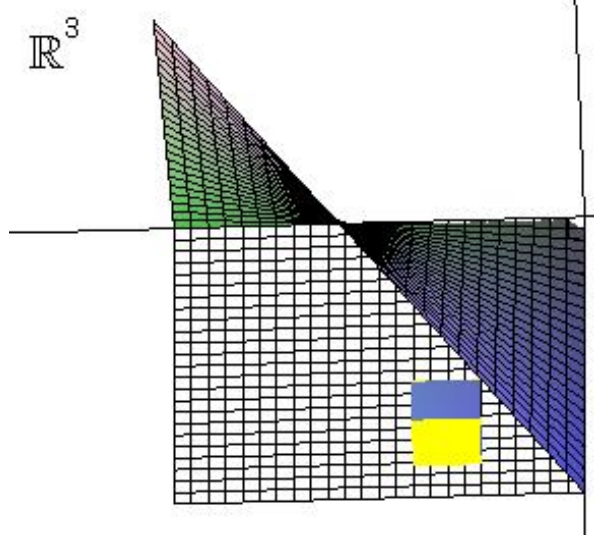
$$K_3(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots$$

$$K_4(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots$$

şeklinde verilen n . dereceden $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ polinomlarına Kharitonov polinomları denir.

Teorem 1.2 ([1]) $\mathcal{P}$ aralık polinom ailesinin gürbüz (Hurwitz) kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{P}$ 'ye karşılık gelen $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ Kharitonov polinomlarının (Hurwitz) kararlı olmasıdır.

Bu teorem gösteriyor ki $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ polinomlarına karşılık gelen vektörler H_n kümesine aitse $\mathcal{P} \subset H_n$ dir.



Şekil 1.2: Q nun belirli dört köşesi H_n de ise $Q \subset H_n$ dir.

Her $i = 1, 2, \dots, m$ için $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^l$ olmak üzere

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l : \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{q}_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m)\}$$

kümesini ele alalım. Bu kümeye $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m\}$ kümesinin konveks zarfı denir ve $Q = \text{conv}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m\}$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbb{R}^l$ 'deki sonlu sayıda noktadan oluşan bir kümenin konveks zarfı da politop olarak adlandırılır.

Bir politopun köşe ve kenar kavramlarını tanımlayalım. $\mathbf{q} \in Q$ verilsin. $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$ olacak şekilde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ve $\lambda \in (0, 1)$ bulunamıyor ise $\mathbf{q}$ noktasına Q politopunun köşe noktası denir. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ noktaları Q politopunun birbirinden farklı iki köşe noktası olsun.

$$E = \{\mathbf{q} \in Q : \mathbf{q} = \lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}, \lambda \in [0, 1]\}$$

olarak tanımlayalım. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ köşe noktalarından farklı ve $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ doğru parçası üzerinde bulunmayan her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ için

$$E \cap \{\mathbf{q} \in Q : \mathbf{q} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}, \lambda \in [0, 1]\} = \emptyset$$

ise E kümesine Q politopunun bir kenarıdır denir. (1.6) kutusu, köşe noktaları $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_l)$, $q_i = q_i^-$ veya $q_i = q_i^+$ ($i = 1, 2, \dots, l$) formundadır. Buna göre (1.6) kutusunun 2^l tane köşesi vardır. Ayrıca bu kutunun herhangi bir kenarı $E = \{\mathbf{q} \in Q : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, q_j = q_j^- \text{ veya } q_j = q_j^+\}$ formunda olduğundan Q nun $l \cdot 2^{l-1}$ tane kenarı vardır. Ancak genel bir politopun köşelerinin ve kenarlarının belirlenmesi ayrı bir problemdir.

Belirsizlik kümesi Q politopu olan (1.4) polinom ailesi polinomlar politopu olarak adlandırılır. Bir $\mathcal{P}$ polinomlar politopunun kararlılığı aşağıda verilen Kenar teoremi [2] kullanılarak araştırılabilir.

Teorem 1.3 ([2]) $\mathcal{P}$ 'nin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul Q politopunun her bir kenarı için bu kenara karşılık gelen Q 'nun $\mathbf{q}^{i_1}$, $\mathbf{q}^{i_2}$ köşe noktalarının belirlediği polinomlar $p(s, q_{i_1}), p(s, q_{i_2})$ olmak üzere

$$p_{i_1, i_2}(s, \lambda) = \lambda p(s, q^{i_1}) + (1 - \lambda) p(s, q^{i_2}), \quad \lambda \in [0, 1]$$

polinomlarının kararlı olmasıdır.

Bir Q politopunun kenarlarına karşılık gelen polinomlar H_n kümesinde ise $\mathcal{P} \subset H_n$ olduğunu bu teorem yardımıyla ifade edebiliriz.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bazı özelliklerini verdiğimiz H_n kümesine iç ve dış yaklaşımları ele alacağız.

2 HURWITZ KÜMESİNE DIŞ YAKLAŞIM

2. HURWITZ KÜMESİNE DIŞ YAKLAŞIM

Bu bölümde, kökleri $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı kümesinde olan n . dereceden monik polinomların katsayı uzayındaki kümesi incelenmiştir. D kümesi belirli koşulları sağladığında, kökleri D kümesinde olan polinomların konveks zarfının elde edilmesi ile ilgili bilinen sonuçlar ifade edilmiştir. Bu sonuçlar yardımıyla, $r_0 > 0$ olmak üzere $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |z| < r_0\}$ için H_n kümesinin herhangi bir alt kümesinin konveks zarfı araştırılmıştır.

2.1 Schur Kararlı Polinomların Konveks Zarfı

$$p(s) = x_0 + x_1s + \dots + x_{n-1}s^{n-1} + s^n, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

polinomunun tüm kökleri

$$D = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$$

kümesinde ise $p(s)$ polinomuna Schur kararlı polinom denir. İkinci dereceden monik Schur kararlı polinomların kümesini belirlemeye çalışalım.

$\alpha_1 = x + iy, \alpha_2 = x - iy \in \mathbb{C}$ olmak üzere ikinci dereceden reel katsayılı, kökleri α_1 ve α_2 olan bir polinom

$$p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) = s^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)s + \alpha_1\alpha_2$$

şeklinde ifade edilir.

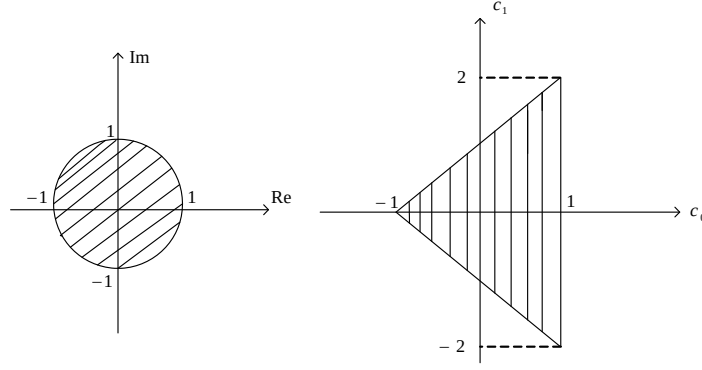
$c_0 = \alpha_1\alpha_2, c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{cases} c_0 &= x^2 + y^2 \\ c_1 &= -2x \end{cases}$$

olur.

$$c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (c_0, c_1)$$

dönüşümü ile D kümesi $\mathbb{R}^2$ 'ye (katsayı uzayı) resmedildiğinde köşeleri $(1, 2)$, $(-1, 0)$ ve $(1, -2)$ olan üçgen elde edilir.



Şekil 2.1: Birim diskin c dönüştürme altındaki görüntüsü

Bu köşeler

$$(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1 \rightarrow (1, 2)^T$$

$$(s - 1)(s + 1) = s^2 - 1 \rightarrow (-1, 0)^T$$

$$(s - 1)^2 = s^2 - 2s + 1 \rightarrow (1, -2)^T$$

polinomlarının çarpımlarına karşılık gelmektedir. İkinci dereceden monik Schur kararlı polinomlar için elde edilen bu sonucun n .dereceden monik Schur kararlı polinomlara nasıl genelleştirilebileceğini inceleyelim [3]. Derecesi n olan Schur kararlı monik polinomların kümesini $\mathcal{D}_n$ ile gösterelim.

Yardımcı Teorem 2.1 Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{D}_n$ kümesi büzülebilirdir.

Kanıt. $F : \mathcal{D}_n \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_n$,

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, r) = (rx_0, \dots, r^{n-1}x_{n-2}, r^n x_{n-1})$$

dönüştürmeyi ele alalım.

$p(s)$ polinomunun kökleri $s_1, s_2, \dots, s_n$ olsun. Bu polinomda x_j ($j = 0, \dots, n - 1$) katsayıları yerine $r^{j+1}x_j$ katsayıları yazıldığında, bu yeni polinomun kökleri $rs_1, rs_2, \dots, rs_n$ olacaktır. Bu nedenle

$$\mathbf{x} \in \mathcal{D}_n \implies F(\mathbf{x}, r) \in \mathcal{D}_n, \quad (0 \leq r \leq 1)$$

olur.

Ayrıca $F(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ ve $F(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}$ olduğundan $\mathcal{D}_n$ kümesi orijine sürekli bir şekilde büzülebilir. ■

Uyarı 2.1 *Büzülebilir uzay bağlantılı olduğundan, her $n \in N$ için $\mathcal{D}_n$ kümesi bağlantılıdır.*

$x \in \partial\mathcal{D}_n$ olması için gerekli ve yeterli koşul x 'e karşılık gelen polinomun kökleri $s_1, \dots, s_n$ olmak üzere en az bir s_i için $|s_i| = 1$ olmasıdır.

$\mathcal{D}_n$ nin sınırı üzerindeki her nokta, en az bir kökü birim disk üzerinde olan polinoma karşılık gelir. S ile bu tür polinomların kümesi gösterilsin. S ile $\partial\mathcal{D}_n$ ye ait polinomların kümesini gösterelim.

$p \in S$ olsun. p polinomunun $|s_*| = 1$ olacak şekilde bir s_* kökü vardır.

$$s_* = |s_*| (\cos \theta_* + i \sin \theta_*) = e^{i\theta_*}, \quad 0 \leq \theta_* \leq 2\pi$$

olduğundan

$$p(e^{i\theta_*}) = 0$$

dır. Buna göre S kümesi

$$e^{in\theta} + \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{ij\theta} = 0, \quad \theta \in [0, \pi]$$

veya

$$1 + \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-i(n-j)\theta} = 0, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (2.1)$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklem $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ için $(n-1)$ boyutlu hiperdüzlem, $\theta \in (0, \pi)$ için elde edilen noktalar bir yüzey belirtir.

Dolayısıyla, S kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayını açık kümelerin bir koleksiyonuna parçalamış olur.

Sonuç 2.1

$$\tilde{E} := \mathbb{R}^n - S$$

açık kümelerin koleksiyonudur. $\mathcal{D}_n$ kümesi, $\tilde{E}$ daki bu açık kümelerden bir tanesi tarafından kapsanır.

Kanıt.

$$S \supset \partial \mathcal{D}_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{E} \cap \partial \mathcal{D}_n &= (\mathbb{R}^n - S) \cap \partial \mathcal{D}_n \\ &= (\mathbb{R}^n \cap \partial \mathcal{D}_n) - (S \cap \partial \mathcal{D}_n) \\ &= \partial \mathcal{D}_n - \partial \mathcal{D}_n \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

dir. $S \cap \mathcal{D}_n = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{D}_n \subset \tilde{E}$ dir. $\mathcal{D}_n$ bağlantılı olduğundan, $\tilde{E}$ nin açık ayrık kümeleri içinde öyle bir $A \in \tilde{E}$ vardır ki $\mathcal{D}_n \subset A$ dir.

$$\mathcal{D}_n \subset A \text{ ve } A \cap S = \emptyset \implies A \cap \partial \mathcal{D}_n = \emptyset$$

dir ve buradan

$$A = \mathcal{D}_n$$

olur. ■

Örnek 2.1 $n = 1$ için,

$$\begin{aligned} p(s) &= x_0 + s \\ p(e^{i\theta}) &= x_0 + e^{i\theta} = 0 \quad (x_0 \in \mathbb{R} \text{ olduğundan } \theta = 0 \text{ veya } \theta = \pi) \\ \text{olacağından } \partial \mathcal{D}_1 &= \{-1, 1\} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$n = 2$ için $\partial \mathcal{D}_2$ (2.1) denklemi kullanılarak şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{j=0}^1 x_j e^{-i(2-j)\theta} &= 0, \theta \in [0, \pi] \\ 1 + x_0 e^{-i2\theta} + x_1 e^{-i\theta} &= 0, \theta \in [0, \pi] \\ 1 + x_0 (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + x_1 (\cos \theta - i \sin \theta) &= 0, \theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$1 + x_0 \cos 2\theta + x_1 \cos \theta = 0 \quad (2.2)$$

$$-x_0 \sin 2\theta - x_1 \sin \theta = 0 \quad (2.3)$$

denklem sistemi elde edilir.

$\theta \in (0, \pi)$ için (2.3) denklemi düzenlendiğinde

$$x_1 = -x_0 2 \cos \theta$$

şeklindedir. Bu ifade (2.2) denklemine yazıldığında denklem sisteminin çözümü

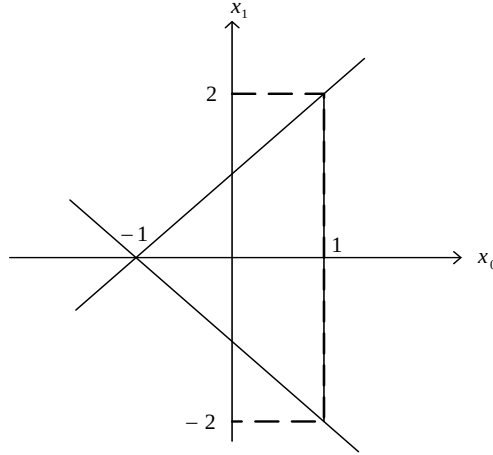
$$x_0 = 1, \quad |x_1| \leq 2$$

koşulunu sağlayan (x_0, x_1) ikililerdir. $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ için denklem sisteminin çözümü sırasıyla

$$x_1 = -1 - x_0$$

$$x_1 = 1 + x_0$$

koşulunu sağlayan noktalar. $\partial \mathcal{D}_2$ kümesi, köşeleri $(-1, 0)$, $(1, 2)$ ve $(1, -2)$ olan üçgendir.



n . dereceden bir polinom 1. ve 2. dereceden polinomların çarpımları şeklinde ifade edilebileceğinden, $\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$ ile ilgili elde edilen sonuçlar kullanılarak $\mathcal{D}_n$ kümesinin konveks zarfı belirlenebilir. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1 ([3]) *Kökleri D kümesinde olan n . dereceden monik polinomların konveks zarfı, kökleri $\{-1, 1\}$ olan n . dereceden polinomların konveks zarfına eşittir.*

$$\begin{aligned}
P_n^1(s) &= \overbrace{(s-1)(s-1)\dots(s-1)}^{n \text{ tane}}, \\
P_n^2(s) &= \underbrace{(s-1)(s-1)\dots(s-1)}_{(n-1) \text{ tane}}(s+1), \\
&\vdots \\
P_n^n(s) &= (s-1)(s+1)\dots(s+1), \\
P_n^{n+1}(s) &= (s+1)(s+1)\dots(s+1).
\end{aligned}$$

polinomlarının katsayı vektörleri sırasıyla

$$(1, 1, \dots, 1)^T, (1, \dots, 1, -1)^T, \dots, (1, -1, \dots, -1)^T, (-1, -1, \dots, -1)^T$$

olur. Teorem 2.1'e göre

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{conv} \left\{ (1, 1, \dots, 1)^T, \dots, (-1, -1, \dots, -1)^T \right\}$$

dir.

Kanıt. D_1 ve D_2 için teoremin doğru olduğu açıktır. D_j , $1 \leq j \leq m$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani;

$$\text{conv} D_j = \text{conv} \left\{ \phi_{ji} : \phi_{ji} = (s-1)^{j-i} (s+1)^i, i = 0, \dots, j \right\}$$

($\text{conv} D_j$ ile D_j ye karşılık gelen katsayıların konveks zarfını gösterelim.)

$$\begin{aligned}
\phi_{j0} &= (s-1)^j, \\
\phi_{j1} &= (s-1)^{j-1} (s+1), \\
&\vdots \\
\phi_{j(j-1)} &= (s-1)(s+1)^{j-1}, \\
\phi_{jj} &= (s+1)^j.
\end{aligned}$$

$p_j(s) \in D_j$ ise, $a_i \geq 0$ ve $\sum a_i = 1$ olmak üzere

$$p_j(s) = \sum_{i=0}^j a_i \phi_{ji}(s)$$

dir.

m çift olsun. $p_2(s)$ ve $p_m(s)$ reel katsayılı olduğundan

$$\begin{aligned} p_{m+2}(s) &= p_2(s) \cdot p_m(s) \\ &= \left(\sum_{l=0}^2 b_l \phi_{2l}(s) \right) \left(\sum_{i=0}^m a_i \phi_{mi}(s) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada

$$\sum_{l=0}^2 b_l = \sum_{i=0}^m a_i = 1$$

ve

$$\left(\sum_{l=0}^2 b_l \right) \left(\sum_{i=0}^m a_i \right) = 1 \quad (2.5)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \phi_{2l} \phi_{mi} &= (s-1)^{2-l} (s+1)^l (s-1)^{m-i} (s+1)^i \\ &= (s-1)^{(2+m)-(l+i)} (s+1)^{(l+i)} = \phi_{(2+m),(l+i)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Teoremin $m+2$ (tüm çift pozitif sayılar) için doğru olduğu (2.4), (2.5) ve (2.6) denklemlerinden elde edilmiş olur.

m nin tek sayı olması durumunu ele alalım. m çift iken p_{m+1} polinomunun en az bir reel kökü vardır. Bu nedenle

$$p_{m+1}(s) = p_1(s) p_m(s)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem p_1 ve p_m polinomları için geçerli olduğundan, p_{m+1} için de geçerlidir. ■

Kökleri birim açık diskte olan 3. dereceden Schur kararlı monik polinomların konveks zarfı Teorem 2.1'e göre şu şekildedir.

Örnek 2.2 D_3 kümesinin konveks zarfını bulalım. Üçüncü dereceden, kökleri $\{-1, 1\}$ olan polinomlar ve bu polinomların katsayı vektörleri

$$\begin{aligned} (s-1)(s-1)(s-1) &\longmapsto (-1, 3, -3)^T \\ (s-1)(s-1)(s+1) &\longmapsto (1, -1, -1)^T \\ (s-1)(s+1)(s+1) &\longmapsto (-1, -1, 1)^T \\ (s+1)(s+1)(s+1) &\longmapsto (1, 3, 3)^T \end{aligned}$$

olduğundan

$$\text{conv}D_3 = \text{conv}\{(-1, 3, -3)^T, (1, -1, -1)^T, (-1, -1, 1)^T, (1, 3, 3)^T\}$$

olarak elde edilir.

2.2 Yansıma Katsayıları Kullanılarak Dış Yaklaşım

Schur kararlı polinomlar kümesine daha iyi bir dış yaklaşım yansıma katsayıları kullanılarak verilebilir [9]. Yansıma katsayıları, literatürde Schur-Szegö parametreleri, kısmi korelasyon katsayıları [10] veya k-parametreleri olarak bilinir.

$$p(s) = x_0 + x_1s + \dots + x_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

polinomu için $k_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) yansıma katsayıları rekürsiv olarak

$$k_i = -x_i^{(i)}, \quad (2.7)$$

$$x_i^{(i)} = \frac{x_{n-i}}{x_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

$$x_j^{(i-1)} = \frac{x_j^{(i)} + k_i x_{i-j}^{(i)}}{1 - k_i^2}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \quad (i \geq 2) \quad (2.9)$$

ifadeleri ile tanımlanır [11].

Örnek 2.3 ([12])

$$p(s) = 0.1 + 0.2s + 0.4s^2 + 0.3s^3 + s^4$$

polinomunun yansıma katsayıları

$$k_1 = -0.171428, \quad k_2 = -0.324642, \quad k_3 = -0.1\overline{7}, \quad k_4 = -0.1$$

dir.

Teorem 2.2 ([9]) $p(s)$ polinomunun Schur kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $i = 1, 2, \dots, n$ için $-1 < k_i < 1$ olmasıdır.

Burada k_i katsayılarından bir tanesi 1 ya da -1 ise $p(s)$ polinomu kararlılık bölgesinin sınırındadır.

Monik, Schur kararlı polinomlar için $(x_n = 1)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$ katsayı vektörleri ile $k = (k_1, \dots, k_n)^T$ yansıma katsayıları vektörleri arasında bire-bir eşleme yapılabilir. Yansıma katsayılarından polinom katsayılarına olan dönüşüm (2.7), (2.8) ve (2.9) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} x_i &= x_{n-i}^{(n)}, \\ x_i^{(i)} &= -k_i, \\ x_j^{(i)} &= x_j^{(i-1)} - k_i x_{i-j}^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i-1 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Bu dönüşüm matris formunda şu şekilde ifade edilir. I_n ile $n \times n$ birim matris, E_n ile $n \times n$ birim Hankel matrisi

$$\left(\text{yani } E_n = (e_{ij}), \quad e_{ij} = \begin{cases} 1, & i + j = n + 1 \\ 0, & i + j \neq n + 1 \end{cases} \right)$$

gösterilsin.

$R_j(k_j) = I_{j+1} - k_j E_{j+1}$ ve $\mathbf{0}^T$ sıfır vektörü olmak üzere,

$$x(k) = R_n(k_n) \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ R_{n-1}(k_{n-1}) \end{pmatrix}_{(n+1) \times n} \cdots \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ R_1(k_1) \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} \quad (2.10)$$

dir.

Burada $x(k)$ ile, $k = (k_1, \dots, k_n)^T$ yansıma katsayıları vektörüne karşılık gelen Schur kararlı polinomun katsayı vektörü gösterilmiştir.

$\mathcal{K}_i$ ($i = 1, \dots, n$) yansıma katsayılarından polinom katsayılarına olan bu dönüşüm multilineerdir. $(x_0, x_1, x_2)^T$ verildiğinde $(k_1, k_2)^T$ yansıma katsayıları vektörünün bileşenleri

$$k_1 = \frac{x_0 x_1^2 - x_1 x_2^2}{x_2^3 - x_0^2 x_2}, \quad k_2 = -\frac{x_0}{x_2}$$

şeklinde elde edilir.

$(k_1, k_2)^T$ yansıma katsayılarına karşılık gelen $x_0 + x_1s + s^2$ polinomunun katsayıları ise

$$\begin{aligned}
x(k_1, k_2) &= R_2(k_2) \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ R_1(k_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
R_2(k_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 1 - k_2 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R_1(k_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{pmatrix} \\
x(k_1, k_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 1 - k_2 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_1 k_2 & -k_2 \\ 1 - k_2 & -k_1(1 - k_2) \\ -k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1(k_2 - 1) \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$x_0 = -k_2, \quad x_1 = k_1(k_2 - 1), \quad x_2 = 1$$

olarak bulunur. Teorem 2.2'ye göre n.dereceden monik Schur kararlı polinomların kümesi

$$K = \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T \in \mathbb{R}^n : -1 < k_i < 1, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

açık kübünün (2.10) dönüşümü altındaki görüntüsüdür.

Schur kararlı (monik) bir polinomun katsayı vektörü $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$ ve bu polinomun yansıma katsayıları vektörü k^x olsun.

Bu durumda $k_i^x \in (-1, 1)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ dir. Bu polinom için $x^{(i)}(\pm 1)$ ile $k^x = (k_1^x, k_2^x, \dots, k_i^x, \dots, k_n^x)^T$, $-1 < k_i^x < 1$ yansıma katsayıları vektörlerine

karşılık gelen katsayı vektörlerinin konveks zarfını gösterelim. Yani,

$$x^{(i)}(\pm 1) = \{x(k_1, \dots, k_n) : -1 < k_i < 1, \quad k_j = k_{i,j}^x, \quad (i \neq j)\}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} x^{(i)}(1) &= \{x(k_1, \dots, k_n) : k_i = 1, \quad k_j = k_{i,j}^x, \quad (i \neq j), \quad i = 1, \dots, n\} \\ x^{(i)}(-1) &= \{x(k_1, \dots, k_n) : k_i = -1, \quad k_j = k_{i,j}^x, \quad (i \neq j), \quad i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

vektörlerine $p(s)$ Schur kararlı polinomunun yansıma vektörleri denir.

Örnek 2.4

$$p(s) = \frac{1}{2} + s + s^2$$

Schur kararlı polinomunu ele alalım. Bu polinomun yansıma katsayıları

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(1/2) \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1 - (1/4) \cdot 1} = \frac{-(1/2)}{(3/4)} = -\frac{2}{3}, \\ k_2 &= -\frac{(1/2)}{1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

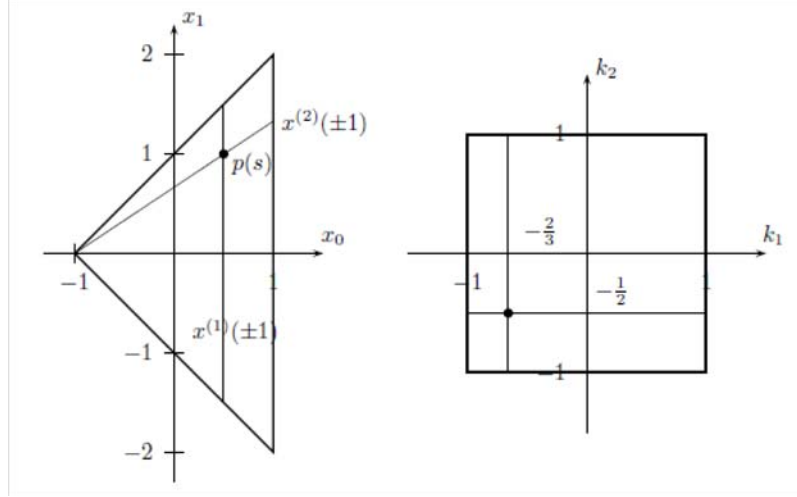
dır.

$$\begin{aligned} x^{(1)}(\pm 1) &= \left\{x = (x_0, x_1, 1)^T : x_0 = -k_2, \quad x_1 = k_1(k_2 - 1)\right\} \\ &= \left\{x = (x_0, x_1, 1)^T : x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = k_1\left(-\frac{3}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x^{(2)}(\pm 1) &= \left\{x = (x_0, x_1, 1)^T : x_0 = -k_2, \quad x_1 = k_1(k_2 - 1)\right\} \\ &= \left\{x = (x_0, x_1, 1)^T : x_0 = -k_2, \quad x_1 = -\frac{2}{3}k_2 + \frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

olur (Şekil 2.2).



Şekil 2.2: $p(s)$ polinomunun yansımaya katsayıları ve yansımaya vektörleri

Katsayı uzayındaki x noktası, uç noktaları $x^i(1)$ ve $x^i(-1)$ yansımaya vektörleri olan Schur kararlı $x^i(\pm 1)$ doğru parçası üzerindedir. Bu tanımlama ve sonuçlara göre aşağıdaki ifadeler verilebilir.

1. Her Schur kararlı polinom için $2n$ tane yansımaya vektörü vardır

$$x^i(1), x^i(-1), (i = 1, 2, \dots, n).$$

2. Tüm yansımaya vektörleri kararlılık bölgesinin sınırındadır

$$(k_i = 1 \text{ veya } k_i = -1).$$

3. $x^i(1)$ ve $x^i(-1)$ yansımaya vektörleri arasındaki doğru parçası

Schur kararlıdır.

$\mathcal{A}$, kökleri $D = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ kümesinde olan monik polinomların kümesini gösterebilir.

$$\mathcal{K} = \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : -1 \leq k_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

kübünü k_i eksenleri boyunca N_i tane $k_i = k_i^*$, $k_i^* \in (-1, 1)$ hiperdüzlemleri ile N_i parçaya bölelim. Örneğin; $-1 < k_{1,1}^* < \dots < k_{1,N_1}^* < 1$ olmak üzere $\mathcal{K}_1$ kümesi k_1 eksenini bölündüğünde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{1,1} &= \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : -1 \leq k_1 \leq k_{1,1}^*, \quad -1 \leq k_2 \leq 1, \dots, -1 \leq k_n \leq 1 \right\} \\
\mathcal{K}_{1,2} &= \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : k_{1,1}^* \leq k_1 \leq k_{1,2}^*, \quad -1 \leq k_2 \leq 1, \dots, -1 \leq k_n \leq 1 \right\} \\
&\vdots \\
\mathcal{K}_{1,N_1} &= \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : k_{1,N_1}^* \leq k_1 \leq 1, \quad -1 \leq k_2 \leq 1, \dots, -1 \leq k_n \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

ve genel olarak k_i eksenini boyunca bölündüğünde

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{i,1} &= \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : -1 \leq k_i \leq k_{i,1}^*, \quad -1 \leq k_j \leq 1, \quad i \neq j \right\} \\
&\vdots \\
\mathcal{K}_{i,m} &= \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : k_{i,m}^* \leq k_i \leq k_{i,m+i}^*, \quad -1 \leq k_j \leq 1, \quad i \neq j \right\} \\
&\vdots \\
\mathcal{K}_{i,N} &= \left\{ (k_1, \dots, k_n)^T : k_{i,N_i}^* \leq k_i \leq 1, \quad -1 \leq k_j \leq 1, \quad i \neq j \right\}
\end{aligned}$$

kümeleri (dikdörtgenler prizması) elde edilir.

Teorem 2.3 (*Dönüşüm Teoremi*, [15]) *Köşe noktaları $\{q^1, q^2, \dots, q^k\}$ olan bir $Q \subset \mathbb{R}^m$ kutusu verilsin.*

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

multilineer olsun. Bu durumda

$$f(Q) = \{f(q) : q \in Q\}$$

olmak üzere

$$\text{conv} f(Q) = \text{conv} \{f(q^1), \dots, f(q^k)\}$$

dır.

(2.10) ile verilen dönüşüm multilineer olduğundan, kanıtı Teorem 2.3'e dayanan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.4 $\mathcal{A}_m^\nu(k_i)$, $\mathcal{K}_{i,m}$ kümesinin köşelerine karşılık gelen polinomların kümesi olmak üzere

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{m=1}^{N_i+1} \text{conv} \{ \mathcal{A}_m^\nu(k_i) \}, \quad \begin{cases} i \neq 2, 4, 6, \dots, n-2, & n \text{ çift ise} \\ i \neq 2, 4, 6, \dots, n-1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\mathcal{A} \subset \bigcap_i \mathcal{A}_i$$

dır.

Burada $(i = 1, 2, \dots, n)$ için $N_i \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{A}_i$ olacağından, Schur kararlı polinomlar kümesine dışarıdan istenildiği kadar hassas bir yaklaşım elde edilebilir. Bu sonuç önceki bölümde verilen sonuca göre daha iyidir.

Teorem 2.3'ü kullanarak $\mathcal{D}_3$ için bir dış yaklaşım şu şekilde elde edilebilir.

Örnek 2.5

$$\mathcal{D}_3 \subseteq \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3$$

olduğundan $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ kümelerini belirleyelim. $\mathcal{A}_1^\nu(k_1)$; $\mathcal{K}_{1,1}$ in köşelerine karşılık gelen polinomlar, $\mathcal{A}_2^\nu(k_1)$; $\mathcal{K}_{1,2}$ nin köşelerine karşılık gelen polinomlar olmak üzere

$$\mathcal{A}_1 = \text{conv} \{ \mathcal{A}_1^\nu(k_1) \} \cup \text{conv} \{ \mathcal{A}_2^\nu(k_1) \}$$

dir.

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ (k_1, k_2, k_3)^T : -1 \leq k_i \leq 1, \ i = 1, 2, 3 \right\}$$

için $k_{1,1}^* = k_{2,1}^* = k_{3,1}^* = 0$ alalım.

$$\mathcal{K}_{1,1} = \left\{ (k_1, k_2, k_3)^T : -1 \leq k_1 \leq 0, \ -1 \leq k_2 \leq 1, \ -1 \leq k_3 \leq 1 \right\}$$

kutusunun köşeleri

$$\begin{aligned} & (-1, -1, -1)^T, (-1, -1, 1)^T, (-1, 1, -1)^T, (-1, 1, 1)^T, (0, -1, -1)^T, \\ & (0, -1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (0, 1, 1)^T \end{aligned}$$

dir.

Bu köşelere karşılık gelen polinomların katsayıları (2.8) dönüşümü kullanılarak

$$x(k) = \begin{pmatrix} -k_3 \\ k_1k_3 - k_2 - k_1k_2k_3 \\ -k_1 + k_1k_2 + k_2k_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dönüşümü ile elde edilir ve

$$\mathcal{A}_1^\nu(k_1) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 3, 3, 1)^T, (-1, -1, 1, 1)^T, (1, -1, -1, 1)^T, \\ (1, 1, 1, 1)^T, (-1, 1, -1, 1)^T \end{array} \right\}$$

dir.

$$\mathcal{K}_{1,2} = \left\{ (k_1, k_2, k_3)^T : 0 \leq k_1 \leq 1, \quad -1 \leq k_2 \leq 1, \quad -1 \leq k_3 \leq 1 \right\}$$

kümesinin köşeleri

$$\begin{aligned} (0, -1, -1)^T, (0, -1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, -1, -1)^T, (1, -1, 1)^T, \\ (1, 1, -1)^T, (1, 1, 1)^T \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\mathcal{A}_2^\nu(k_1) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1, 1)^T, (-1, 1, -1, 1)^T, (1, -1, -1, 1)^T, \\ (-1, -1, 1, 1)^T, (-1, 3, -3, 1)^T \end{array} \right\}$$

dir. Benzer şekilde

$$\mathcal{A}_3 = \text{conv} \{ \mathcal{A}_1^\nu(k_3) \} \cup \text{conv} \{ \mathcal{A}_2^\nu(k_3) \}$$

olacağından $\mathcal{A}_1^\nu(k_3)$ ve $\mathcal{A}_2^\nu(k_3)$ aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\mathcal{K}_{3,1} = \left\{ (k_1, k_2, k_3)^T : -1 \leq k_1 \leq 1, \quad -1 \leq k_2 \leq 1, \quad -1 \leq k_3 \leq 0 \right\}$$

kümesinin köşeleri

$$\begin{aligned} (-1, -1, -1)^T, (-1, -1, 0)^T, (-1, 1, -1)^T, (-1, 1, 0)^T, (1, -1, -1)^T, \\ (1, -1, 0)^T, (1, 1, -1)^T, (1, 1, 0)^T \end{aligned}$$

dir.

$$\mathcal{A}_1^\nu(k_3) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 3, 3, 1)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (1, -1, -1, 1)^T, \\ (0, -1, 0, 1)^T, (0, 1, -2, 1)^T \end{array} \right\}$$

olarak elde edilir.

$$\mathcal{K}_{3,2} = \left\{ (k_1, k_2, k_3)^T : -1 \leq k_1 \leq 1, \quad -1 \leq k_2 \leq 1, \quad 0 \leq k_3 \leq 1 \right\}$$

kümesinin köşeleri

$$\begin{aligned} &(-1, -1, 0)^T, (-1, -1, 1)^T, (-1, 1, 0)^T, (-1, 1, 1)^T, (1, -1, 0)^T, (1, -1, 1)^T, \\ &(1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T \end{aligned}$$

dir.

$$\mathcal{A}_2^\nu(k_3) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1, 2, 1)^T, (-1, -1, 1, 1)^T, (0, -1, 0, 1)^T, \\ (0, 1, -2, 1)^T, (-1, 3, -3, 1)^T \end{array} \right\}$$

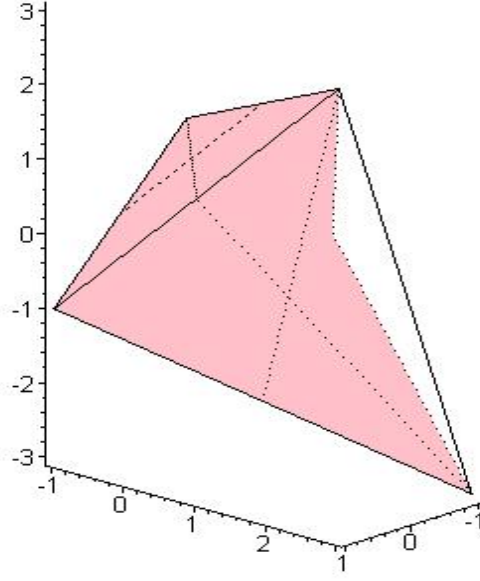
olarak bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \text{conv} \left\{ (1, 3, 3)^T, (-1, -1, 1)^T, (1, -1, -1)^T, (1, 1, 1)^T, (-1, 1, -1)^T \right\} \cup \\ &\quad \text{conv} \left\{ (1, 1, 1)^T, (-1, 1, -1)^T, (1, -1, -1)^T, (-1, -1, 1)^T, (-1, 3, 3)^T \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \text{conv} \left\{ (1, 3, 3)^T, (0, 1, 2)^T, (1, -1, -1)^T, (0, -1, 0)^T, (0, 1, -2)^T \right\} \cup \\ &\quad \text{conv} \left\{ (0, 1, 2)^T, (-1, -1, 1)^T, (0, -1, 0)^T, (0, 1, -2)^T, (-1, 3, -3)^T \right\} \end{aligned}$$

dır. $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3$ kümesi şekil (2.3) deki gibidir.



Şekil 2.3: $\mathcal{D}_3$ kümesine dış yaklaşım

2.3 Polinomların Konvekslik Özelliği

D kümesi birim açık diskten farklı bir küme olduğunda da kararlılık bölgesinin konveks zarfını belirleyebileceğimiz başka özel bölgeler de vardır. [4] çalışmasında verilen bu tür bölgeleri ele alalım.

$$\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} : \text{Im}(s) \geq 0\}$$

$$R = \{s \in \mathbb{C} : \text{Im}(s) = 0\}$$

kümelerini tanımlayalım. $\mathbb{C}_+$ kompleks düzlemin üst yarısına, R ise kompleks düzleminin reel eksenine karşılık gelir.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ kapalı, reel eksene göre simetrik bir bölge, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$ basit bağlantılı bir küme olsun.

Ω kümesi belli koşulları sağladığında kökleri Ω kümesinde olan n . dereceden monik polinomların konveks zarfı ile ilgili önemli bir teoremi vereceğiz [4].

Tanım 2.1 $\mathbf{P}_n$ ile n . dereceden monik polinomların bir kümesini gösterelim.

$$\mathbf{P}_n \subseteq \text{conv} \{p_n^1(s), \dots, p_n^q(s)\}$$

olacak şekilde $p_n^1(s), \dots, p_n^q(s) \in \mathbf{P}_n$ polinomları varsa $\mathbf{P}_n$ kümesine sonlu üreteçli küme denir. $p_n^1(s), \dots, p_n^q(s)$ polinomları $\mathbf{P}_n$ nin üreteçleri olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 2.2 ([4]) $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n_1} \cdot \mathbf{P}_{n_2} = \{p_{n_1+n_2}(s) : p_{n_1+n_2}(s) = p_{n_1}(s) \cdot p_{n_2}(s)\}$ olsun. $\mathbf{P}_{n_1}$ ve $\mathbf{P}_{n_2}$ sonlu üreteçli ise, $\mathbf{P}_n$ kümesi de sonlu üreteçlidir.

Kanıt. $\mathbf{P}_{n_1}$ ve $\mathbf{P}_{n_2}$ sonlu üreteçli ise, öyle $P_{n_1}^{(i)}$, ($i = 1, \dots, q_1$) ve öyle $P_{n_2}^{(j)}$, ($j = 1, \dots, q_2$) polinomları vardır ki

$$\begin{aligned} p_{n_1} \in \mathbf{P}_{n_1} &\implies p_{n_1}(s) = \sum_{i=1}^{q_1} \lambda_i p_{n_1}^{(i)}(s), \quad \sum_{i=1}^{q_1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \\ p_{n_2} \in \mathbf{P}_{n_2} &\implies p_{n_2}(s) = \sum_{j=1}^{q_2} \mu_j p_{n_2}^{(j)}(s), \quad \sum_{j=1}^{q_2} \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, her $p_n(s) \in \mathbf{P}_n$ için,

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \left(\sum_{i=1}^{q_1} \lambda_i p_{n_1}^{(i)}(s) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{q_2} \mu_j p_{n_2}^{(j)}(s) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \lambda_i \mu_j P_{n_1}^{(i)}(s) P_{n_2}^{(j)}(s) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\sum_{ij} \lambda_i \mu_j = 1$, $0 \leq \lambda_i \mu_j \leq 1$ olduğundan

$$p_n^{(ij)}(s) = p_{n_1}^{(i)}(s) \cdot p_{n_2}^{(j)}(s), \quad (i = 1, \dots, q_1, j = 1, \dots, q_2)$$

üreteçleri ile $\mathbf{P}_n$ sonlu üreteçli bir kümedir. ■

Uyarı 2.2 $\mathbf{P}_{n_1}$ veya $\mathbf{P}_{n_2}$ sonlu üreteçli olmadığı halde $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n_1} \cdot \mathbf{P}_{n_2}$ çarpımı sonlu üreteçli olabilir.

$\epsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \{P_1(s) = s - \alpha_1, \quad \alpha_1 \in [-\epsilon, \epsilon]\}, \\ \mathbf{P}_2 &= \{P_2(s) = s^2 + c_1 s + c_0, \quad c_1^2 - 4c_0 \leq 0, \quad c_0 \leq \epsilon^2\}. \end{aligned}$$

kümelerini ele alalım. $\mathbf{P}_2$ sonlu üreteçli olmadığı halde $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$ kümesi için

$$\mathbf{P}_3 \subset \text{conv} \{ (s - \epsilon)^3, (s - \epsilon)^2 (s + \epsilon), (s - \epsilon) (s + \epsilon)^2, (s + \epsilon)^3 \}$$

olur.

n . dereceden bir polinom birinci ve ikinci dereceden asal polinomların çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Buna göre $\mathcal{P}_n(\Omega)$ polinomlar kümesini kökleri sırasıyla $\Omega \cap R$ ve Ω kümelerinde olan birinci ve ikinci dereceden polinomların çarpımı şeklinde ifade edebiliriz

$$\mathcal{P}_n(\Omega) = \begin{cases} \mathcal{P}_1(\Omega \cap R) \cdot \overbrace{\mathcal{P}_2(\Omega) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}_2(\Omega)}^{(n-1)/2}, & n \text{ tek ise} \\ \overbrace{\mathcal{P}_2(\Omega) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}_2(\Omega)}^{n/2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (2.11)$$

Teorem 2.5 ([4]) $\mathcal{P}_n(\Omega)$ polinomlarının kümesinin sonlu üreteçli olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{P}_2(\Omega)$ kümesinin sonlu üreteçli olmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) n tek olsun. $\mathcal{P}_n(\Omega)$ kümesi sonlu üreteçli olduğundan

$$\mathcal{P}_n(\Omega) \subseteq \text{conv} \{ \mathcal{P}_n(\Omega) \} = \text{conv} \{ p_n^1(s), \dots, p_n^m(s) \}$$

olacak şekilde $p_n^1(s), \dots, p_n^m(s) \in \mathcal{P}_n(\Omega)$ vardır.

Ω_+ , basit bağlantılı olduğundan $\Omega \cap R$ arakesit kümesi $[a, b]$ gibi bir kapalı aralık verir. $\mathcal{P}_1(\Omega \cap R)$ kümesi $(s - a)$ ve $(s - b)$ polinomları ile üretilen bir kümedir.

$\mathcal{P}_2(\Omega)$ kümesinin sonlu üreteçli olmadığını varsayalım.

Bu durumda öyle bir $\hat{p}_2 \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ polinomu vardır ki (kompleks köklere sahip) $p_2^j(s)$ ($j = 1, 2, \dots, \hat{m}$) polinomları $p_n^{(i)}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) polinomunun ikinci dereceden çarpanları olmak üzere

$$\hat{p}_2(s) \notin \text{conv} \{ \hat{p}_2^1(s), \dots, \hat{p}_2^{(\hat{m})}(s) \}$$

dir.

$$\hat{p}_n(s) \doteq \hat{p}_1(s) \cdot \overbrace{\hat{p}_2(s) \dots \hat{p}_2(s)}^{(n-1)/2}$$

olmak üzere $\hat{p}_1(s) \in \mathcal{P}_1(\Omega \cap R)$ ve $\hat{p}_n(s) \in \mathcal{P}_n(\Omega)$ polinomlarını ele alalım.

Bu durumda

$$\hat{p}_n(s) \notin \text{conv} \{ \mathcal{P}_1(\Omega \cap R) \}.$$

$$\overbrace{\text{conv} \{ \hat{p}_2^1(s), \dots, \hat{p}_2^{(\hat{m})}(s) \} \cdot \dots \cdot \text{conv} \{ \hat{p}_2^1(s), \dots, \hat{p}_2^{(\hat{m})}(s) \}}^{(n-1)/2} \quad (2.12)$$

olur. Diğer taraftan;

$$\text{conv} \{ \mathcal{P}_n(\Omega) \} = \text{conv} \{ \mathcal{P}_1(\Omega \cap R) \}.$$

$$\overbrace{\text{conv} \{ p_2^1(s), \dots, p_2^{(\hat{m})}(s) \} \cdot \dots \cdot \text{conv} \{ p_2^1(s), \dots, p_2^{(\hat{m})}(s) \}}^{(n-1)/2} \quad (2.13)$$

dir. (2.12) ve (2.13) denklemlerinden

$$\hat{p}_n(s) \in \mathcal{P}_n(\Omega) \text{ olduğu halde } \hat{p}_n(s) \notin \text{conv} \{ \mathcal{P}_n(\Omega) \}$$

çelişkisi elde edilir. n nin çift olma durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

($\Leftarrow$) $\mathcal{P}_1(\Omega \cap R)$, $(s - a)$ ve $(s - b)$ polinomları tarafından üretildiğinden (2.11) ve Yardımcı Teorem 2.2 kullanılarak ispat yapılabilir. ■

Teorem 2.4 kullanılarak $\text{conv} \mathcal{P}_2(\Omega)$ politop olan Ω kümeleri için $\mathcal{P}_n(\Omega)$ kümesinin konveks zarfının da politop olduğu gösterilmiş oldu.

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}_+$ verilsin. $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{C}_+$ ile reel eksene göre simetrik olan çemberin α_1 ve α_2 yi birleştiren yay parçasını gösterelim. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ yay parçası, merkezi $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ ve yarıçapı $|\alpha_1 - \alpha_2|/2$ olan çembere aittir.

$c^1, c^2 \in \mathbb{R}^2$ verilsin. $\sigma(c^1, c^2)$ ile uçları c^1 ve c^2 olan doğru parçasını gösterelim.

$$\begin{aligned} \tau &: \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ c &= \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \tau(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dönüşümünü ele alalım. Burada (α_1, α_2) ikilisi $c_0 + c_1s + s^2$ polinomunun kökleridir.

τ dönüşümünün $C = \{z \in \mathbb{C}_+ : \text{Im}(z) > 0\}$ kümesine kısıtlanmış (polinom reel katsayılı olduğundan) $\alpha_1 = \bar{\alpha}_2$ olmak üzere

$$\tau_C : \alpha_1 \longrightarrow c = \begin{pmatrix} \alpha_1 \bar{\alpha}_1 \\ -(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1) \end{pmatrix}$$

dir ve bu dönüşüm C kümesinden $\Pi_C = \{c : c_0 \geq \frac{1}{4}c_1^2\}$ kümesine bire-birdir.

τ dönüşümünün $\mathbb{R}^2$ kümesine kısıtlanmış, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\Pi_R = \{c : c_0 \leq \frac{1}{4}c_1^2\}$ olmak üzere

$$\tau_R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Pi_R$$

bire-birdir.

$\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (çakışık kökler) durumunda ise $\Pi = \{c : c_0 = \frac{1}{4}c_1^2\}$ olmak üzere $\tau_R(\alpha_1, \alpha_1) = \tau_C(\alpha_1)$ dönüşümü $\mathbb{R}$ ile Π arasında bire-bir dönüşümdür.

Uyarı 2.3 $\tau_R(\alpha_1, \alpha_2)$ noktası π parabolüne $\tau_R(\alpha_1, \alpha_1)$ ve $\tau_R(\alpha_2, \alpha_2)$ noktalarında teğet olan doğruların ara kesitidir.

Yardımcı Teorem 2.3 $\alpha_1, \alpha_2 \in C_+$ ve $\mathbf{c}^1 = \tau_C(\alpha_1)$, $\mathbf{c}^2 = \tau_C(\alpha_2)$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2) = \tau_C(\Gamma(\alpha_1, \alpha_2))$$

dir. Yani $\sigma(\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2)$ doğru parçası τ_C dönüşümü altında $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ yayının görüntüsüdür.

Teorem 2.6 ([4]) $\Omega \cap R = [a, b] \neq \emptyset$ olsun.

i) Ω_+ kümesi $[a, b] \cup \Gamma(a, b)$ kapalı eğri ile dıştan sınırlandırılabilirse $\mathcal{P}_2(\Omega)$ sonlu üreteçlidir ve $\mathcal{P}_2(\Omega)$ kümesinin minimal üreteçleri kümesi

$$\{(s-a)^2, (s-a)(s-b), (s-b)^2\}$$

dir.

- ii) Ω_+ kümesi $[a, b] \cup \Gamma(a, b)$ tarafından dıştan sınırlandırılmıyorsa, $\mathcal{P}_2(\Omega)$ 'nın sonlu üreteçli olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul öyle $\alpha_i \in \partial\Omega_+ \setminus [a, b]$, $i = 1, \dots, v$ kompleks sayılarının var olmasıdır ki

$$\Gamma(a, \alpha_1) \cup \Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \cup \dots \cup \Gamma(\alpha_v, b) \cup [a, b]$$

kapalı eğrisi Ω_+ kümesini dıştan sınırlar. Bu durumda $\mathcal{P}_2(\Omega)$ 'nın bir üreteç kümesi

$$\{(s-a)^2, (s-a)(s-b), (s-b)^2, (s-\alpha_1)(s-\bar{\alpha}_1), \dots, (s-\alpha_v)(s-\bar{\alpha}_v)\}$$

dir.

Kanıt.

- i) Ω kümesi $[a, b] \cup \Gamma(a, b)$ ile dıştan sınırlandırılabilir olduğundan, Uyarı 2.3 ve Yardımcı Teorem 2.3' e göre $\mathcal{P}_2(\Omega)$ kümesi katsayı uzayında $\sigma(\tau_R(a, a), \tau_R(b, b))$, $\sigma(\tau_R(b, b), \tau_R(a, b))$ ve $\sigma(\tau_R(a, b), \tau_R(a, a))$ doğru parçaları tarafından sınırlandırılmıştır. Buna göre $\mathcal{P}_2(\Omega)$ kümesi katsayı uzayındaki $\tau_R(a, a)$, $\tau_R(a, b)$, $\tau_R(b, b)$ noktalarına karşılık gelen $(s-a)^2$, $(s-a)(s-b)$, $(s-b)^2$ köşe polinomları tarafından üretilir.

- ii) Ω_+ kümesi $[a, b] \cup \Gamma(a, b)$ ile dıştan sınırlandırılmıyorsa

$$\mathcal{P}_2(\Omega) \not\subseteq \text{conv} \{(s-a)^2, (s-a)(s-b), (s-b)^2\}$$

dir.

$\mathcal{P}_2$ kümesi sonlu üreteçlidir $\iff$ öyle sonlu sayıda $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^v \in \mathcal{P}_2(\Omega \setminus [a, b])$ vardır ki

$$\mathcal{P}_2(\Omega) \subseteq \text{conv} \{\tau_R(a, a), \mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^v, \tau_R(b, b), \tau_R(a, b)\}$$

dir.

$$\begin{aligned} & \sigma(\tau_R(a, a), \mathbf{c}^1) \cup \sigma(\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2) \cup \dots \cup \sigma(\mathbf{c}^v, \tau_R(b, b)) \cup \\ & \cup \sigma(\tau_R(b, b), \tau_R(a, b)) \cup \sigma(\tau_R(a, b), \tau_R(a, a)) \end{aligned}$$

doğru parçalarının birleşimi $\mathcal{P}_2(\Omega)$ kümesini dıştan sınırlar.

$\alpha_i = \tau_C^{-1}(\mathbf{c}^i)$, $(i = 1, \dots, v)$ alalım. τ_C^{-1} , bire-bir ve sürekli bir dönüşüm olduğundan $\alpha_i \in \partial C_+ \setminus [a, b]$ dır ve

$$\Gamma(a, \alpha_1) \cup \Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \cup \dots \cup \Gamma(\alpha_v, b) \cup [b, a]$$

Ω^+ kümesini dıştan sınırlar. Eğer böyle $\mathbf{c}^i$ ($i = 1, \dots, v$) köşeleri varsa bu durumda $\mathcal{P}_2(\Omega)$,

$$\{(s-a)^2, (s-a)(s-b), (s-b)^2, (s-\alpha_1)(s-\bar{\alpha}_1), \dots, (s-\alpha_v)(s-\bar{\alpha}_v)\}$$

üreteçlerinin kümesi ile üretilir.

■

Uyarı 2.4

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2) \cup \dots \cup \Gamma(\alpha_v, \alpha_1)$$

kümesi Ω_+ kümesini dıştan sınırlayacak şekilde $\alpha_i \in \partial\Omega_+$ ($i = 1, \dots, v$) noktaları varsa, Teorem 2.6 daki sonuç $\Omega \cap R = \emptyset$ durumuna da genişletilebilir. Bu durumda $\mathcal{P}_2(\Omega)$ nın üreteçlerinin kümesi $\{(s-\alpha_i)(s-\bar{\alpha}_i), i = 1, \dots, v\}$ olur.

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.5 ve Teorem 2.6 dan elde edilir.

Sonuç 2.2 Ω_+ kümesi $[a, b] \cup \Gamma(a, b)$ ile dıştan sınırlandırılabilir ise

$$\left\{ P_n^{(i)}(s) = (s-a)^i (s-b)^{n-i}, i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

minimal üreteç kümesi ile $\mathcal{P}_n(\Omega)$ sonlu üreteçlidir.

Uyarı 2.5 Ω kümesi Sonuç 2.2 de ki koşulları sağladığında $\text{conv}\{\mathcal{P}_n(\Omega)\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ de $(n+1)$ köşeli bir politoptur.

$\Omega = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ olması durumunu bir önceki alt bölümde incelemiştik.

Örnek 2.6 $r_0 > 0, \theta_0 < \pi$ olmak üzere

$$\Omega = \Omega(r_0, \theta_0) = \{s : s = re^{i\theta}, 0 \leq r \leq r_0, |\theta| \leq \theta_0\}$$

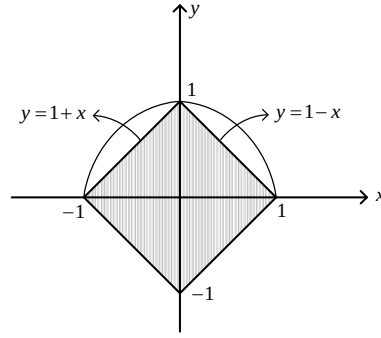
sektörünü ele alalım.

$$\Omega(r_0, \theta_0) \cap R = [0, r_0]$$

dır. $\Omega_+(r_0, \theta_0)$ kümesi $\Gamma(0, r_0) \cup [0, r_0]$ ile dıştan sınırlandırılmaz. Diğer taraftan $\theta_0 \leq \pi/2$ ise $\Omega_+(r_0, \theta_0)$ kümesi $\Gamma(0, r_0 e^{i\theta_0}) \cup \Gamma(r_0 e^{i\theta_0}, r_0) \cup [0, r_0]$ eğrisi ile dıştan sınırlandırılabilir.

$\pi/2 \leq \theta_0 < \pi$ olduğunda $\Omega(r_0, \theta_0)$ kümesi için Teorem 2.5 ii) koşulunu sağlayan $\alpha_1, \dots, \alpha_v$ noktaları mevcut değildir.

Örnek 2.7 $\Omega = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ kümesini ele alalım.



Ω_+ kümesi $[-1, 1] \cup \Gamma(-1, 1)$ kapalı eğrisi ile dıştan sınırlandırılabilir. Bu nedenle $\mathcal{P}_2(\Omega)$ sonlu üreteçlidir yani,

$$P_2(\Omega) \subset \text{conv} \{(s+1)^2, (s-1)(s+1), (s-1)^2\}$$

$P_2(\Omega)$ kümesini belirlemeye çalışalım.

i) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ olsun $(\text{Im}(\alpha_1) \neq 0)$.

$\alpha_1 = x + i(1-x)$ ve $\bar{\alpha}_1 = x - i(1-x)$ olmak üzere,

$$p(s) = (s - \alpha_1)(s - \bar{\alpha}_1) = s^2 - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)s + \alpha_1 \bar{\alpha}_1$$

dir.

$c_0 = \alpha_1 \bar{\alpha}_1$, $c_1 = -(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} c_1 &= -2x \implies x = -\frac{c_1}{2} \\ c_0 &= x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} c_0 &= 2\left(-\frac{c_1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{c_1}{2}\right) + 1 \\ c_0 &= \frac{c_1^2}{2} + c_1 + 1, \quad (-2 \leq c_1 \leq 0) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha_1 = x + i(x+1)$ ve $\bar{\alpha}_1 = x - i(x+1)$ durumunda,

$$\begin{aligned} c_0 &= x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1 \\ c_0 &= 2\left(-\frac{c_1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{c_1}{2}\right) + 1 \\ c_0 &= \frac{c_1^2}{2} - c_1 + 1, \quad (0 \leq c_1 \leq 2) \end{aligned}$$

bulunur.

ii) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1 = \alpha_2$ olsun.

$$\begin{aligned} c_1 &= -2\alpha_1, \\ c_0 &= \alpha_1^2 \implies c_0 = \frac{c_1^2}{4} \quad (-2 \leq c_1 \leq 2). \end{aligned}$$

iii) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$

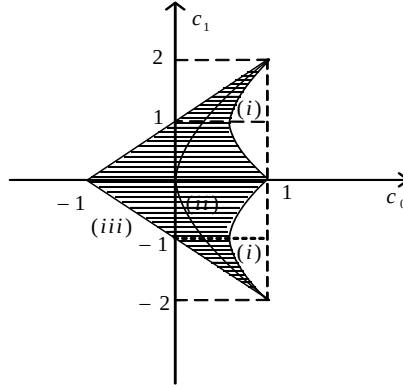
$\alpha_2 = -1$ alalım.

$$\begin{aligned} c_1 &= -\alpha_1 + 1 \implies \alpha_1 = -c_1 + 1 \\ c_0 &= (-c_1 + 1)(-1) = c_1 - 1, \quad (0 \leq c_1 \leq 2). \end{aligned}$$

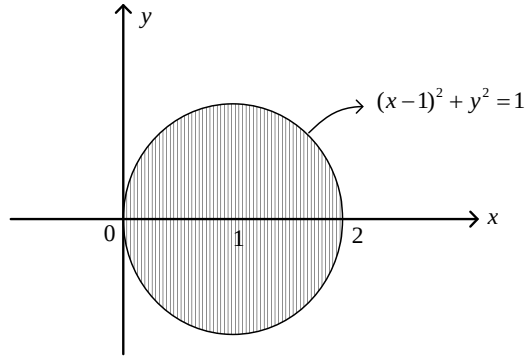
$\alpha_2 = 1$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} c_1 &= -\alpha_1 - 1 \implies \alpha_1 = -c_1 - 1 \\ c_0 &= (-c_1 - 1)(1) = -c_1 - 1, \quad (-2 \leq c_1 \leq 0) \end{aligned}$$

elde edilir. $P_2(\Omega)$ kümesi aşağıdaki taralı bölgedir.



Örnek 2.8 $\Omega = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ kümesini ele alalım.



Ω_+ kümesi $\Gamma(0, 2) \cup [0, 2]$ kapalı eğrisiyle dıştan sınırlandırılabilir.

Buna göre,

$$\begin{aligned} P_2(\Omega) &\subset \text{conv} \{(s-0)^2, (s-0)(s-2), (s-2)^2\} \\ s^2 &\longrightarrow (0, 0)^T \\ s^2 - 2s &\longrightarrow (0, -2)^T \\ s^2 - 4s + 4 &\longrightarrow (4, -4)^T \end{aligned}$$

olduğundan $P_2(\Omega)$ kümesi, düzlemde köşeleri $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(4, -4)$ olan üçgen tarafından kapsanır.

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere kökleri α_1, α_2 olan ikinci dereceden polinomların kümesini düzlemde belirleyelim.

i) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\alpha_1 = x + i\sqrt{1 - (x - 1)^2}, \alpha_2 = x - i\sqrt{1 - (x - 1)^2} \text{ ve } \alpha_1 = \bar{\alpha}_2 \text{ olmak üzere,}$$

$$p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) = s^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)s + \alpha_1\alpha_2$$

$$c_0 = \alpha_1\alpha_2, c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ diyelim. Bu durumda,}$$

$$c_1 = -2x$$

$$c_0 = x^2 + 1 - (x - 1)^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1 = 2x$$

ve buradan

$$c_0 = -c_1, \quad (-4 \leq c_1 \leq 0)$$

dir.

ii) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1 = \alpha_2$ olsun.

$$c_1 = -2\alpha_1,$$

$$c_0 = \alpha_1^2 \implies c_0 = \frac{c_1^2}{4}, \quad (-4 \leq c_1 \leq 0)$$

olur.

iii) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$\alpha_2 = 0 \text{ alalım.}$$

$$c_1 = -\alpha_1$$

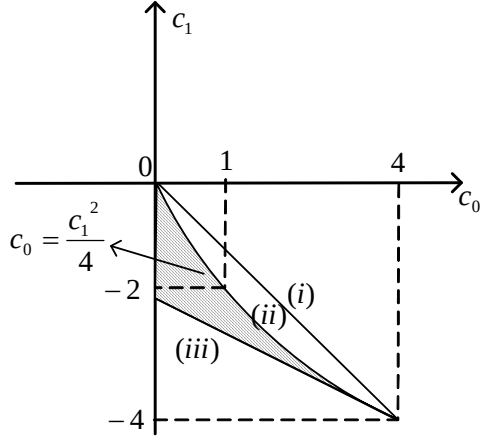
$$c_0 = 0, \quad (-2 \leq c_1 \leq 0).$$

$$\alpha_2 = 2 \text{ alalım. Bu durumda,}$$

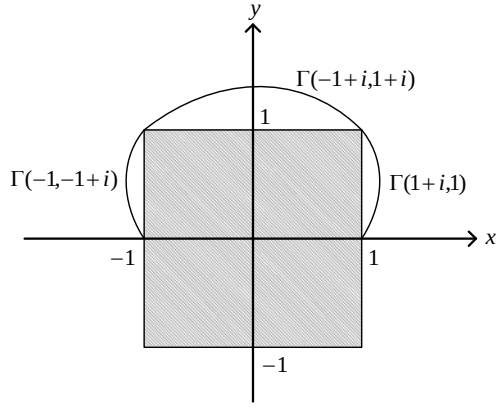
$$c_1 = -\alpha_1 - 2 \implies \alpha_1 = -c_1 - 2$$

$$c_0 = (-c_1 - 2)(2) = -2c_1 - 4, \quad (-4 \leq c_1 \leq -2)$$

elde edilir. Buna göre $P_2(\Omega)$ kümesi şekildeki taralı bölgedir.



Örnek 2.9 Ω kümesi aşağıdaki gibi verilsin. Ω_+ kümesi, merkezi x ekseninde olacak şekilde $[-1, 1] \cup \Gamma(-1, 1)$ tarafından dıştan sınırlandırılmaz.



$P_2(\Omega)$ kümesini düzlemde belirleyelim.

i) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ olsun.

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

olacağından

a) $y = 1$,

$\alpha_1 = x + i, \alpha_2 = x - i$ alınırsa

$$c_1 = -2x$$

$$c_0 = x^2 + 1 \implies c_0 = \frac{c_1^2}{4} + 1, \quad (-2 \leq c_1 \leq 2).$$

b) $x = -1, 0 \leq y \leq 1,$

$\alpha_1 = -1 + iy, \alpha_2 = -1 - iy$ olmak üzere

$$c_1 = 2$$

$$c_0 = 1 + y^2, \quad (1 \leq c_0 \leq 2).$$

c) $x = 1, 0 \leq y \leq 1,$

$\alpha_1 = 1 + iy, \alpha_2 = 1 - iy$ için,

$$c_1 = -2$$

$$c_0 = 1 + y^2, \quad (1 \leq c_0 \leq 2).$$

ii) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1 = \alpha_2$ durumunda

$$c_1 = -2\alpha_1$$

$$c_0 = \alpha_1^2 \implies c_0 = \frac{c_1^2}{4} \quad (-2 \leq c_1 \leq 2).$$

iii) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$

a) $-1 \leq \alpha_1 \leq 1, \alpha_2 = -1$ için

$$c_1 = -\alpha_1 + 1$$

$$c_0 = -\alpha_1 \implies c_1 = c_0 + 1, \quad (-1 \leq c_0 \leq 1).$$

b) $-1 \leq \alpha_1 \leq 1, \alpha_2 = 1$ için

$$c_1 = -\alpha_1 - 1$$

$$c_0 = \alpha_1 \implies c_1 = -c_0 - 1, \quad (-1 \leq c_0 \leq 1).$$

$$\Gamma(-1, -1 + i) \cup \Gamma(-1 + i, 1 + i) \cup \Gamma(1 + i, 1) \cup [-1, 1]$$

kapalı eğrisi Ω_+ kümesini dıştan sınırlar.

Bu durumda

$$(s+1)^2 \longrightarrow (1, 2)$$

$$(s-1)(s+1) \longrightarrow (-1, 0)$$

$$(s-1)^2 \longrightarrow (1, -2)$$

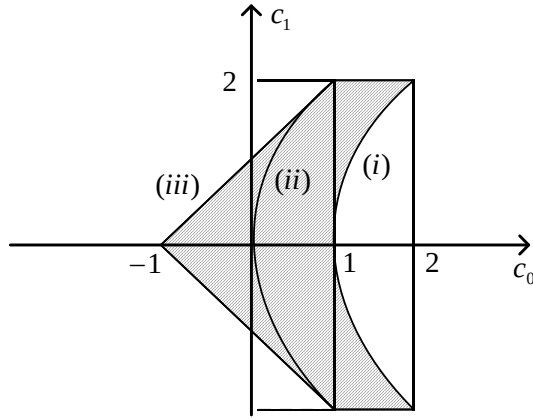
$$(s - (-1 + i))(s - (-1 - i)) \longrightarrow (2, 2)$$

$$(s - (1 + i))(s - (1 - i)) \longrightarrow (2, -2)$$

olduğundan

$$P_2(\Omega) \subset \text{conv} \left\{ (1, 2)^T, (-1, 0)^T, (1, -2)^T, (2, 2)^T, (2, -2)^T \right\}$$

dir. $P_2(\Omega)$ kümesi şekildeki taralı bölgedir.



3 KARARLILIK BÖLGESİNE İÇ YAKLAŞIM

3. KARARLILIK BÖLGESİNE İÇ YAKLAŞIM

Bölüm 1 de tanımladığımız H_n kümesi (n . dereceden, monik, Hurwitz kararlı polinomların kümesi) $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir alt kümesidir. Dolayısıyla H_n kümesine ait bir nokta verildiğinde, bu noktanın H_n içerisinde kalacak şekilde bir komşuluğu vardır. Bu bölümde H_n kümesinden bir nokta verildiğinde, simetri merkezi bu nokta olan "en büyük" elipsoidi belirleyen bir yöntemi inceleyeceğiz [5].

3.1 Merkezi Konikler ve Kuadratikler

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik bir matris olsun ($P = P^T$) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^T P x$ ifadesine P matrisine karşılık gelen kuadratik form denir.

Örneğin

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ise } x^T P x = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

kuadratik formunu elde ederiz.

Teorem 3.1 [15]: $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisi verilsin. Bu durumda $Q^T P Q$ diagonal matris olacak şekilde bir Q ortogonal matrisi ($Q^T = Q^{-1}$) vardır.

$D = Q^T P Q$ diyelim. $Q^T = Q^{-1}$ olduğundan P ile D diagonal matrisleri benzer matrislerdir. Yani P ile D matrisleri aynı özdeğerlere sahiptirler. (P , simetrik matris olduğundan tüm özdeğerleri gerçeldir ve bu özdeğerler D matrisinin diagonalini oluştururlar).

Diğer taraftan

$$1 = \det I = \det Q^T Q = \det Q^T \det Q = (\det Q)^2$$

olduğundan $\det Q = +1$ veya $\det Q = -1$ dir.

$\det Q = -1$ olsun.

K diagonal matrisini $k_{11} = -1$ ve $k_{ii} = 1$ ($i = 2, 3, \dots, n$) şeklinde tanımlayalım. $Q_1 = Q K$ olmak üzere $Q_1^T P Q_1 = D$ olur. Burada Q_1 ortogonal matristir ve $1 = \det Q_1$ dir. Dolayısıyla $\det Q = 1$ olduğunu varsayabiliriz.

$n = 2$ durumu: $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ve $P \neq 0$ olsun. $x^T P x = 1$ denkleminin belirlediği eğriyi inceleyelim;

$$x^T P x = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 = 1 \quad (3.1)$$

Bu tür eğrilere merkezi koni denir (orjin simetri merkezidir).

$Q^T P Q = D = \text{diag}(d_1, d_2)$ olacak şekilde $\det Q = 1$ olan Q ortogonal matrisini alalım. $y = Q^T x$ diyelim. Bu durumda (3.1) denklemi

$$1 = x^T P x = y^T Q^T P Q y = y^T D y$$

veya

$$1 = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 \quad (3.2)$$

olur.

i) $d_1 < 0$ ve $d_2 < 0$ ise (3.2) denklemini hiç bir $y \in \mathbb{R}^2$ sağlamaz.

ii) $d_1 > 0$ ve $d_2 > 0$ olsun. $d_1 = 1/a_1^2$, $d_2 = 1/a_2^2$ olarak alalım. (3.2) denklemi $y_1^2/a_1^2 + y_2^2/a_2^2 = 1$ olur. Yani $x^T P x = 1$ denklemi bir elipstir.

iii) $d_1 > 0$ ve $d_2 < 0$ olsun. $d_1 = 1/a_1^2$, $d_2 = -1/a_2^2$ diyelim. (3.2) denklemi $y_1^2/a_1^2 - y_2^2/a_2^2 = 1$ olur ve $x^T P x = 1$ bir hiperboldür.

iv) $d_1 > 0$ ve $d_2 = 0$ olsun. $d_1 = 1/a_1^2$ diyelim. (3.2) denklemi $y_1^2/a_1^2 = 1$ olur. Yani $y_1 = a_1$ ve $y_1 = -a_1$ doğrularını belirler.

Örnek 3.1 $P = \begin{pmatrix} 7/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix}$ olsun.

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ için } D = Q^T P Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$d_1 = 1 > 0$, $d_2 = 2 > 0$ dir ve (3.2) denklemi

$$y_1^2 + y_2^2 / \left(1/\sqrt{2}\right)^2 = 1 \quad (3.3)$$

elipsini verir. $y = Q^T x$ olduğundan

$$x^T P x = 7/4 x_1^2 - \sqrt{3}/2 x_1 x_2 + 5/2 x_2^2 = 1$$

kuadratik formu, (3.3) denkleminin belirlediği elipsin koordinat eksenlerinin $\pi/3$ kadar döndürülmesiyle elde edilen elipsi verir.

$n = 3$ durumu: $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, simetrik matrisi verilsin. $x^T P x = 1$ denklemini ele alalım. Bu denklem

$$p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{33}x_3^2 + 2p_{12}x_1x_2 + 2p_{13}x_1x_3 + 2p_{23}x_2x_3 = 1$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.1'e göre $Q^T P Q = D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$ olacak şekilde $\det Q = 1$ olan bir Q ortogonal matris vardır. $y = Q^T x$ diyelim. Bu durumda denklem

$$1 = x^T P x = y^T Q^T P Q y = y^T D y,$$

$$1 = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + d_3 y_3^2 \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada d_1, d_2 ve d_3 P matrisinin özdeğerleridir.

$d_1 > 0, d_2 > 0$ ve $d_3 > 0$ olsun. $d_i = 1/a_i^2, i = 1, 2, 3$ diyelim.

(3.4) denklemi

$$y_1^2/a_1^2 + y_2^2/a_2^2 + y_3^2/a_3^2 = 1$$

olur. $x^T P x = 1$ denklemiyle verilen yüzey bir elipsoiddir.

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisini ele alalım. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \neq 0$) için $x^T P x > 0$ ise P matrisine pozitif belirli matris denir ve $P \succ 0$ ile gösterilir. Ayrıca, bir P matrisi pozitif belirli ise P matrisinin tüm özdeğerleri pozitiftir.

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P \succ 0$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla $u^1, u^2, \dots, u^n$ olsun.

$x^T P x = 1$ denklemi; asal eksenleri $u^1, u^2, \dots, u^n$ vektörleri ile belirlenen, eksenleri kestiği noktaların orjine olan uzaklıkları $\sqrt{1/\lambda_1}, \sqrt{1/\lambda_2}, \dots, \sqrt{1/\lambda_n}$ olan merkezi bir elipsoidin denklemdir.

3.2 Lineer Matris Eşitsizlikleri

Bir lineer matris eşitsizliği (LMI), $x \in \mathbb{R}^m$ ve $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) (sabit matrisler) olmak üzere

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir. (3.5) denklemi ile verilen bir (LMI), (x) değişkeninin polinomlarından oluşan n tane eşitsizliğe denktir.

$A, B, Q = Q^T, R = R^T \succ 0$ (boyutları uygun) matrisleri verilsin. $P = P^T$ olmak üzere

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q \prec 0$$

kuadratik matris eşitsizliği

$$\begin{pmatrix} -A^T P - P A - Q & P B \\ B^T P & R \end{pmatrix} \succ 0$$

lineer matris eşitsizliğine denktir. Lineer olmayan bu tür eşitsizliklerin LMI şeklinde ifade edilebilmesi, uygulamada kolaylıklar sağlamaktadır.

Bazı standart problemlerin LMI kullanılarak ele alınması ile ilgili örnekler [8] de yer almaktadır.

3.3 Elipsoidal İç Yaklaşım

$$p(s) = x_0 + x_1 s + \dots + x_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

n . dereceden bir monik polinomun katsayı vektörünü $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ ve

$$p(s) = x_0 + x_1 s + \dots + x_{n-1} s^{n-1} + x_n s^n \quad (x_n \neq 0) \quad (3.6)$$

polinomunun katsayı vektörünü $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ile gösterelim.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : a + b(s + \bar{s}) + cs\bar{s} < 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $s = x + iy$ alınırsa,

$$\mathcal{D} = \{a, b, c \in \mathbb{R} : a + 2bx + c(x^2 + y^2) < 0\}$$

elde edilir.

$a = 0, b = 1, c = 0$ alındığında $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < 0\}$ yani Hurwitz kararlılık,

$a = -1, b = 0, c = 1$ alındığında $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ Schur kararlılık bölgesi elde edilir.

(3.1) polinomunun köklerinin $\mathcal{D}$ kümesinde olması için standart Routh-Hurwitz veya Schur-Cohn kararlılık kriterinin [13] bilinen bir formülasyonunu ifade edelim.

Yardımcı Teorem 3.1 ([5]) $p(s)$ (3.1) polinomunun köklerinin $\mathcal{D}$ bölgesinde olması için gerek ve yeter koşul

$$H(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i x_j H_{ij} \succ 0 \quad (3.7)$$

olmasıdır. Burada $H_{ij} = H_{ji}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sabit matrisleri sadece $\mathcal{D}$ bölgesine bağlıdır.

$H(x)$ matrisi $p(s)$ polinomunun Hermite matrisi olarak adlandırılır [14]. $H(x)$ matrisi aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\tilde{p}(s) = \left(\frac{b + cs}{\sqrt{b^2 - ac}} \right)^n x \left(-\frac{a + bs}{b + cs} \right)$$

polinomunu tanımlayalım. $\tilde{p}(s)$ polinomunun katsayı vektörü $\tilde{\mathbf{x}}$ ve

$$R_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times (n + 1)$ boyutlu matrislerini alalım. $n(n + 1)/2$ tane bileşeni olan $H(x)$ matrisi

$$\mathbf{xx}^T - \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T = aR_l^T H(x) R_l + b(R_l^T H(x) R_r + R_r^T H(x) R_l) + cR_r^T H(x) R_r$$

lineer denklem sistemini sağlar [7]. Bu sistemin denklem sayısı $n(n+1)/2$ dir. n . dereceden $p(s)$ polinomu verildiğinde, bu denklem çözülerek $p(s)$ polinomunun Hermite matrisi bulunmuş olur.

$\mathcal{D}$ bölgesi sol açık yarı-düzlem ($a = 0, b = 1, c = 0$) olduğunda

$$p(s) = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3$$

polinomuna karşılık gelen Hermite matrisi

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2x_0x_1 & 0 & 2x_0x_3 \\ 0 & 2x_1x_2 - 2x_0x_3 & 0 \\ 2x_0x_3 & 0 & 2x_2x_3 \end{pmatrix}$$

dır.

$\mathcal{D}$ bölgesi birim disk ($a = -1, b = 0, c = 1$) olduğunda, üçüncü dereceden $p(s)$ polinomunun Hermite matrisi

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_3^2 - x_0^2 & x_2x_3 - x_0x_1 & x_1x_3 - x_0x_2 \\ x_2x_3 - x_0x_1 & x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 - x_1^2 & x_2x_3 - x_0x_1 \\ x_1x_3 - x_0x_2 & x_2x_3 - x_0x_1 & x_3^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

olarak belirlenir.

Kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde olan n . dereceden polinomların kümesi $\mathcal{S}$ ile gösterilirse bu küme

$$\mathcal{S} = \{x : H(x) \succ 0\} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathcal{S}$ kümesi kuadratik bir eşitsizlikle belirlenmektedir. Bu bölümde, amacımız bir $x_c \in \mathcal{S}$ verildiğinde

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{S} \quad (3.9)$$

olacak şekilde

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1 \right\} \quad (3.10)$$

elipsoidini belirlemektir. Bu yolla, genellikle konveks olmayan $\mathcal{S}$ kümesine içten bir elipsoidle (konveks bir küme) yaklaşımda bulunulabilir. $\mathcal{E}$ elipsoidini

P pozitif belirli matrisi karakterize ettiğinden (3.9) koşulunu sağlayacak şekilde bu P pozitif belirli matrisini araştıralım.

$\mathcal{S}$ kümesi kuadratik bir eşitsizlikle ifade edildiğinden (3.7)

$$H(x) = (I_n \otimes x)^T \mathbf{H} (I_n \otimes x) \succ 0 \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\otimes$ sembolü Kronecker çarpımını, I_n ise n -boyutlu birim matrisi göstermektedir. Denklemdaki $\mathbf{H}$ matrisi $n(n+1) \times n(n+1)$ boyutlu reel matristir ve $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $x^T \mathbf{H}_{ij} x = H(x)_{ij}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{H}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ matrisleri yardımıyla

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \dots & \mathbf{H}_{1n} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \dots & \mathbf{H}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{n1} & \dots & \dots & \mathbf{H}_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde oluşturulur.

$\mathcal{D}$ bölgesi sol açık yarı-düzlem ve $n = 2$ için,

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{12} = \mathbf{H}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. $(x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1$ eşitsizliği

$$x_c = -P_{11}^{-1} P_{12} \quad (3.13)$$

$$P = -P_{11} / (P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12})$$

olmak üzere $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^n$ ve $P_{22} \in \mathbb{R}$ altmatrisleri ile oluşturulan

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

matrisi ile

$$P(x) = x^T \mathbf{P} x \geq 0 \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilebilir [8].

$$(x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1, \quad (P \succ 0)$$

verilsin. Bu eşitsizliği sağlayan x ler için,

$$P_{11} = -P \prec 0, \quad P_{12} = Px_c, \quad P_{22} = 1 - x_c^T Px_c$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} &= x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} + P_{22} \\ &= x^T (-P) x + 2x^T Px_c + 1 - x_c^T Px_c \\ &= -x^T Px + x_c^T Px + x^T Px_c - x_c^T Px_c + 1 \\ &= 1 - (x - x_c)^T P (x - x_c) \end{aligned}$$

dir. $(x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1$ olduğundan $x^T \mathbf{P} x \geq 0$ dir.

$x^T \mathbf{P} x \geq 0$ olsun. Bu eşitsizliği sağlayan x ler için,

$$P_{11} \prec 0, \quad P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} > 0$$

$$\begin{aligned} x_c &= -P_{11}^{-1} P_{12} \\ P &= \frac{-1}{P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12}} P_{11} \end{aligned}$$

alınırsa ($\alpha = P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12}$ diyelim)

$$\begin{aligned} (x - x_c)^T P (x - x_c) &= \alpha (x^T P_{11} x - x^T P_{11} x_c - x_c^T P_{11} x + x_c^T P_{11} x_c) \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x^T P_{11} x + x^T P_{11} P_{11}^{-1} P_{12} + P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{11} x + \\ + P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{11} P_{11}^{-1} P_{12} \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} + P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12}) \\ &= \frac{1}{-P_{22} + P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12}} \begin{pmatrix} x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} + P_{22} - \\ -P_{22} + P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} - P_{22}} (x^T P_{11} x + 2x^T P_{12} + P_{22}) + 1 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{E}$ elipsoidinin iyi tanımlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul P_{11} matrisinin pozitif belirli olması ve $P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} > 0$ olmasıdır. Buna göre $x_c \in \mathcal{S}$ için

$$P_{11} = -P \prec 0, \quad P_{12} = P x_c, \quad P_{22} = 1 - x_c^T P x_c \quad (3.16)$$

koşulları elde edilir. Dolayısıyla pozitif belirli P matrisi bulma problemi (3.16) koşullarını sağlayan P_{11} , P_{12} ve P_{22} parametrelerini bulma problemine dönüşmüş olur.

$\mathcal{S}$ ve $\mathcal{E}$ kümeleri (3.11) ve (3.15) eşitsizlikleri ile yeniden ifade edilirse,

$$P(x) \geq 0 \text{ koşulunu sağlayan her } x \text{ için } H(x) \succ 0 \text{ dır.} \quad (3.17)$$

P matrisinin elde edilişi ile ilgili teoremleri ifade edelim.

Yardımcı Teorem 3.2 ([7])

$$(\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) \mathbf{H} = \mathbf{H} (\mathbf{D} \otimes I_{n+1}), \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) \mathbf{H} \succ I_n \otimes \mathbf{P} + \mathbf{G}$$

koşulları sağlanacak şekilde $\mathbf{D} \succ 0$, $\mathbf{G}_{ij} = -\mathbf{G}_{ij}^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ olmak üzere

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{G}_{21}^T & \cdots & \mathbf{G}_{n1}^T \\ \mathbf{G}_{21} & 0 & & \mathbf{G}_{n2}^T \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n1} & \mathbf{G}_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

blok matrisi varsa (3.17) ifadesi gerçekleşir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} (I_n \otimes \mathbf{x})^T ((\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) \mathbf{H}) (I_n \otimes \mathbf{x}) &= \\ (\mathbf{D} \otimes \mathbf{x}^T) \mathbf{H} (\mathbf{D} \otimes \mathbf{x}) &= \\ (\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) H(x) \succ (I_n \otimes \mathbf{x})^T (I_n \otimes \mathbf{P} + \mathbf{G}) (I_n \otimes \mathbf{x}) \\ &= I_n \otimes P(x). \end{aligned}$$

$\mathbf{F}^2 = \mathbf{D}^{-1}$ koşulunu sağlayan simetrik $\mathbf{F}$ matrisi için

$$(\mathbf{F} \otimes I_{n+1}) [(\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) H(x) - (I_n \otimes P(x))] (\mathbf{F} \otimes I_{n+1}) \succ 0.$$

Eşitliğin sol tarafındaki matrisin öz değerleri

$$(\mathbf{F} \otimes I_{n+1}) (\mathbf{F} \otimes I_{n+1}) [(\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) H(x) - (I_n \otimes P(x))] = H(x) - \mathbf{D}^{-1} \otimes P(x)$$

matrisinin özdeğerlerine eşittir. Buna göre en az bir x vektörü için

$$H(x) \succ \mathbf{D}^{-1} \otimes P(x)$$

olur. $\mathbf{D}$ matrisi pozitif belirli olduğundan (3.17) ifadesi geçerlidir. ■

Bir $x_c \in \mathcal{S}$ verildiğinde, x_c merkezli $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ koşulunu sağlayan elipsoidler içerisinde asal eksenleri en büyük olanını bulalım. Bir matrisin öz değerlerinin toplamı bu matrisin iz 'ine eşittir. En büyük uzunluklu asal eksenleri olan matrisi bulmak için aşağıdaki teoremden ifade edilen optimizasyon problemi çözülmelidir.

Teorem 3.2 ([8]) $\mathcal{D}$ kararlılık bölgesi verilsin ve $\mathbf{H}$ ise bu bölgeye karşılık gelen (3.12) matrisi olsun. (3.14), (3.16), (3.18) ve (3.19) lineer matris eşitsizlikleri ile verilen bölge üzerinde P_{11} in özdeğerlerinin toplamının maksimizasyonu probleminin çözümünden elde edilen P matrisi için $(x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1$ koşulunu sağlayan x lere karşılık gelen polinomların tüm kökleri $\mathcal{D}$ kümesindedir.

Teorem 3.1'de ifade edilen optimizasyon probleminin çözümü MatLab programı altında çalışan SeDuMi 1.05 paketi yardımı ile çözülebilir. Aşağıdaki örneklerin çözümünde bu paket kullanılmıştır.

Örnek 3.2 $\mathcal{D}$ bölgesi birim disk ($a = -1, b = 0, c = 1$) ve $n = 2$ için

$$p(s) = 0.2 + s^2$$

polinomunu ele alalım. $p(s) = x_0 + x_1 s + x_2 s^2$ polinomuna karşılık gelen Hermite matrisi

$$\begin{pmatrix} x_2^2 - x_0^2 & x_1 x_2 - x_0 x_1 \\ x_1 x_2 - x_0 x_1 & x_2^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$i, j = 1, 2$ için $x^T \mathbf{H}_{ij} x = H(x)_{ij}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{H}_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matrisleri

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_{12} = \mathbf{H}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

olsun. $x_c = (0.2, 0)^T$ için

$$P_{11} = \begin{pmatrix} -u_1 & -u_2 \\ -u_2 & -u_3 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 0.2u_1 \\ 0.2u_2 \end{pmatrix} \text{ ve } P_{22} = 1 - 0.04u_1 \text{ olur.}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -u_4 & -u_5 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 & 0 & -u_6 \\ 0 & 0 & 0 & u_5 & u_6 & 0 \\ 0 & u_4 & u_5 & 0 & 0 & 0 \\ -u_4 & 0 & u_6 & 0 & 0 & 0 \\ -u_5 & -u_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -u_1 & -u_2 & 0.2u_1 \\ -u_2 & -u_3 & 0.2u_2 \\ 0.2u_1 & 0.2u_2 & 1 - 0.04u_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u_7 & u_9 \\ u_9 & u_7 \end{pmatrix}$$

matrisleri için

$$Q = (\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) \mathbf{H} - I_n \otimes \mathbf{P} - \mathbf{G} \text{ diyelim.}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -u_7+u_1 & -\frac{1}{2}u_9+u_2 & -0.2u_1 & -u_9 & -\frac{1}{2}u_7+u_4 & u_5 \\ -\frac{1}{2}u_9+u_2 & u_3 & \frac{1}{2}u_9-0.2u_2 & -\frac{1}{2}u_7-u_4 & 0 & \frac{1}{2}u_7+u_6 \\ -0.2u_1 & \frac{1}{2}u_9-0.2u_2 & u_7-1+0.04u_1 & -u_5 & \frac{1}{2}u_7-u_6 & u_9 \\ -u_9 & -\frac{1}{2}u_7-u_4 & -u_5 & -u_7+u_1 & -\frac{1}{2}u_9+u_2 & -0.2u_1 \\ -\frac{1}{2}u_7+u_4 & 0 & \frac{1}{2}u_7-u_6 & -\frac{1}{2}u_9+u_2 & u_3 & \frac{1}{2}u_9-0.2u_2 \\ u_5 & \frac{1}{2}u_7+u_6 & u_9 & -0.2u_1 & \frac{1}{2}u_9-0.2u_2 & u_7-1+0.04u_1 \end{pmatrix}$$

olur. Burada

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
F_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
F_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_9 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
Q &= (\mathbf{D} \otimes I_{n+1}) \mathbf{H} - I_n \otimes \mathbf{P} - \mathbf{G} \\
&= F_0 + \sum_{i=1}^9 u_i F_i \\
&= F_0 + u_1 F_1 + \dots + u_9 F_9
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\max_{Q>0, D>0} iz(P_{11})$$

problemi çözüldüğünde

$$u_1 = 1.5625,$$

$$u_2 = 0,$$

$$u_3 = 1.25,$$

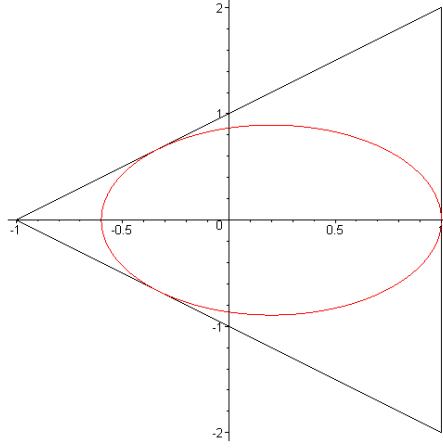
sonuçları elde edilir. Teorem 3.2' ye göre elde edilen elipsoid

$$x_c = (0.2, 0)^T, P = \begin{pmatrix} 1.5625 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$(x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1 \text{ eşitsizliğinden}$$

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1.5625x_0^2 + 1.25x_1^2 - 0.625x_0 + 0.0625 \leq 1\}$$

dir (şekil 3.1).



Şekil 3.1: İkinci dereceden Schur kararlı monik polinomlar (üçgen) ve bulunan elipsoid.

Örnek 3.3 $\mathcal{D}$ bölgesi birim disk ve $n = 3$ için $x_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1459 \\ 0 \end{pmatrix}$ verilsin.

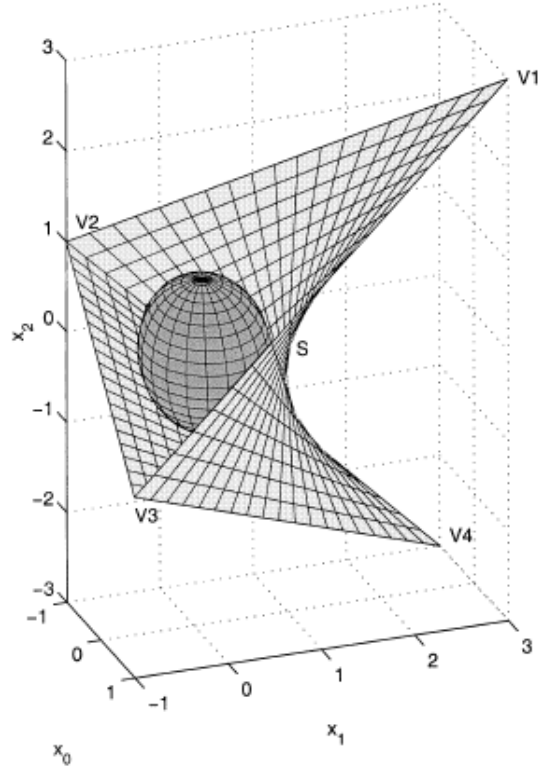
Teorem 3.2’de ifade edilen problem çözüldüğünde

$$P = \begin{pmatrix} 2.3189 & 0 & 0.4458 \\ 0 & 2.0180 & 0 \\ 0.4458 & 0 & 1.7998 \end{pmatrix}$$

bulunur. $(x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1$ eşitsizliğinden

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2.3189x_0^2 + 2.0180x_1^2 + 1.7998x_2^2 + 0.8917x_0x_2 - 0.5890x_1 \leq 0.9570 \right\} \subset S$$

dir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2: Üçüncü dereceden monik, Schur kararlı polinomlar (hiperbolik paraboloid) ve elde edilen elipsoid [6].

S kararlılık bölgesi, köşeleri

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

olan $V_1V_2V_3$ ve $V_2V_3V_4$ üçgenleri ile sınırlıdır.

Örnek 3.4 $\mathcal{D}$ sol-açık yarı düzlem ($a = 0, b = 1, c = 0$) olsun.

$p(s) = 1 + 2s + s^2$ Hurwitz polinomu verilsin. Merkezi $x_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ olan ve S (2.dereceden Hurwitz kararlı polinomlar kümesi) tarafından kapsanan elipsoid için

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_0^2 + 0.25x_1^2 - 2x_0 - x_1 + 2 \leq 1\} \subset S$$

dir.

$$\begin{aligned} x_c &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ için } P = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0 \\ 0 & 0.0625 \end{pmatrix}, \\ x_c &= \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ için } P = \begin{pmatrix} 0.0123 & 0 \\ 0 & 0.0278 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Karşılık gelen elipsoidler sırasıyla

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0.0625x_0^2 + 0.0625x_1^2 - 0.50x_0 - 0.50x_1 + 2 \leq 1\} \subset S$$

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0.0123x_0^2 + 0.0278x_1^2 - 0.2214x_0 - 0.3336x_1 + 1.9971 \leq 1\} \subset S$$

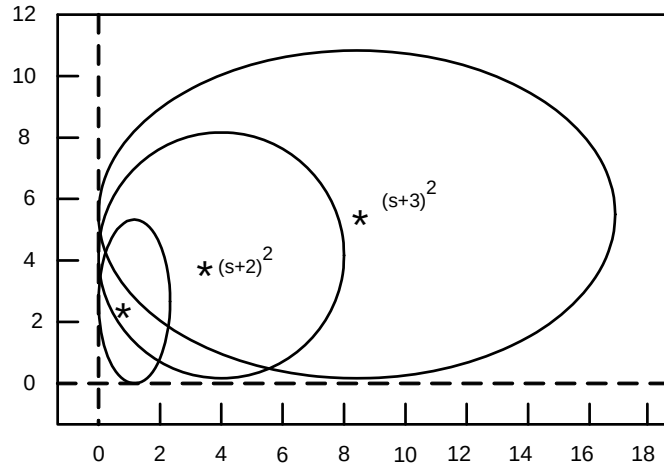
dir (şekil 3.3)

Örnek 3.5 $\mathcal{D}$ sol-açık yarı düzlem ve $p(s) = 2 + 4s + 3s^2 + s^3$ olsun.

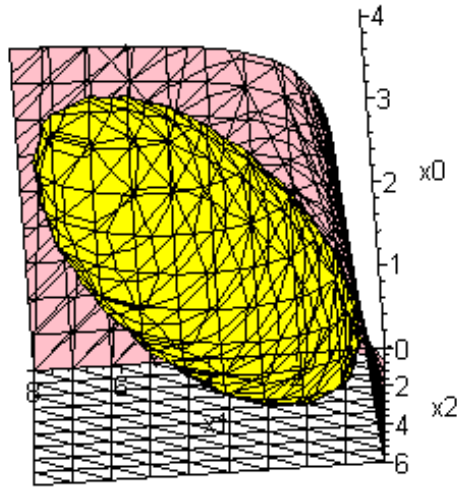
$x_c = (2, 4, 3)^T$ için benzer işlemlerden sonra aradığımız P matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 0.3881 & -0.109 & -0.0131 \\ -0.109 & 0.1074 & 0.0214 \\ -0.0131 & 0.0214 & 0.2029 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu matrisin belirlediği elipsoid şekil 3.4 te verilmiştir.



Şekil 3.3: Hurwitz kararlı polinomlar kümesi tarafından kapsanan elipsoid



Şekil 3.4: Üçüncü dereceden Hurwitz kararlı monik polinomların kümesi ve bulunan elipsoid.

KAYNAKLAR

1. Barmish, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, New York (1994).
2. Barlett A.C., Hollot C.V. ve Huang L., *Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges*, Mathematics of Control, **1**, 61-71, 1988.
3. Fam A.T. ve Meditch J.S., *A canonical parameter space for linear systems design*, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-23**, 3, 454-458, 1978.
4. Tesi A. Vicino A. ve Zappa G., *Convexity properties of polynomials with assigned root location*, IEEE Trans. on Automatic Control, **39**, 3, 668-672, 1994.
5. Henrion D., Peaucelle D., Arzelier D. ve Sebek M., *Ellipsoidal approximation of the stability domain of a polynomial*, IEEE Trans. on Automatic Control, **48**, 12, 2255-2259, 2003.
6. Schinoder, H. ve Barker, G.P., *Matrices and Linear Algebra*, Dover, New-York (1989).
7. Lev-Ari H., Bistritz Y. ve Kailath T., *Generalized bezoutians and families of efficient zero-location procedures*, IEEE Trans. Circuits Systems, **38**, 170-186, 1991.
8. Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E. ve Balakrishnan V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA:SIAM, 1994.
9. Ü.Nurges , *New stability conditions via reflection coefficients of polynomials*, IEEE Trans. on Automatic Control, 50, 9, 1354-1360, 2005.
10. J.L. Diaz-Barrero and J. J. Egozcue, *Characterization of polynomials using reflection coefficients*, Appl. Math. E-Notes, 4, 114-121, 2004.

11. Ü. Nurges ,*Some new stability margins for discrete-time systems*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. ,52, 2, 186-197, 2003.
12. S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.
13. E.I. Jury, *Inners and Stability of Dinamic System*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1981.
14. D. Hinrichsen, A. J. Pritcard, *Mathematical System Theory I*, Springer, 2000.
15. F.Amato, F.Garofalo, L.Glielmo, and L.Verde, *An algorithm to cover the image of a function with a polytope: Applications to robust stability problems*, in Proc.12th IFAC World Congr., vol.6, 1993, pp.423-427.