



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

MATRİSLERİN ÖZEL ÇARPIMLARI

MEHMET KARACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ÇELEBİ

ŞUBAT – 2025

YOZGAT

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATRİSLERİN ÖZEL ÇARPIMLARI

MEHMET KARACA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ÇELEBİ

ŞUBAT – 2025

YOZGAT



**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU**

**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111315008 numaralı öğrencisi Mehmet KARACA'nın hazırladığı “**Matrislerin Özel Çarpımları**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 04/02/2025 Salı günü saat 13:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ÇELEBİ

(Danışman)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Onur ŞAHİN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr. Ümit BUDAK

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhine doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğini beyan ederim.

Mehmet KARACA

04/02/2025

ÖN SÖZ

Tez çalışmasında, oluşturulmasında, araştırılmasında bilgisini, desteğini esirgemeyen ve özverili bir çalışma ortamı için elinden gelenin en iyisini yapan, tecrübesinden bilfiil yararlandığım danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ÇELEBİ hocama, tezin işleme süresi zarfınca bilgilerinden yararlandığım sayın Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU hocama, hayatımın her noktasında desteğini hissettiren, eşim Göksu KARACA 'ya ve beni büyütüp bugünlere getiren sevgili annem ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet KARACA

04/02/2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATRİSLERİN ÖZEL ÇARPIMLARI

MEHMET KARACA

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ GÖKHAN ÇELEBİ

Bu tez çalışmasında, Hadamard, Kronecker, Tracy-Singh, Khatri-Rao ve bialternate matris çarpımları incelenmiştir. Matris teorisi; mühendislik, istatistik ve kontrol teorisi gibi birçok disiplinde önemli bir yer tutmakta ve bu çarpımların her biri, ilgili alanlarda geniş uygulama olanakları sunmaktadır. Tezde, bu çarpımların tanımları, temel özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca, bu matris çarpımlarının genelleştirilmiş formları, özellikle Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları, karmaşık matris yapılarını analiz etmek için tartışılmıştır.

Bialternate matris çarpımları ve bu çarpımların Kronecker çarpımla olan ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca bialternate matris çarpımlarının, polinom ve matris kararlılığı ile kontrol teorisi uygulamalarında kullanılan özdeğer özellikleri incelenmiştir.

2025, ix + 43 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Hadamard Çarpım, Kronecker Çarpım, Khatri-Rao Çarpım, Bialterne Çarpım, Permanent.

ABSTRACT

MASTER THESIS

SPECIAL PRODUCTS OF MATRICES

MEHMET KARACA

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY

SCHOOL of GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT of MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. GÖKHAN ÇELEBİ

In this thesis, Hadamard, Kronecker, Tracy-Singh, Khatri-Rao and bialternate matrix products are studied. Matrix theory plays an important role in many disciplines such as engineering, statistics and control theory, and each of these products offers a wide range of applications in related fields. In this thesis, the definitions, basic properties and interrelationships of these products are discussed in detail. Furthermore, generalized forms of these matrix products, in particular the Khatri-Rao and Tracy-Singh products, are discussed for analyzing complex matrix structures.

Bialternate matrix products and their relation with Kronecker product are analyzed. In addition, polynomial and matrix stability of bialternate matrix products and their eigenvalue properties used in control theory applications are analyzed.

2025, ix + 43 Pages

Keywords: Hadamard Product, Kronecker Product, Khatri-Rao Product, Bialterne Product, Permanent.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAY SAYFASI.....	ii
TEZ BEYANI.....	iii
ÖN SÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. MATRİSLERİN ÇARPIMI.....	3
2.1. Hadamard Çarpım (Schur Çarpım).....	3
2.2. Kronecker Çarpım.....	4
2.3. Tracy-Singh ve Khatri-Rao Çarpım.....	6
2.3.1. Tracy-Singh Çarpım.....	7
2.3.2. Khatri-Rao Çarpım.....	8
2.4. Çarpımların Birbirleriyle İlişkileri.....	10
2.4.1. Hadamard ile Kronecker Çarpım.....	10
2.4.2. Khatri-Rao ile Tracy-Singh Çarpım.....	11
2.4.3. Tracy-Singh ile Kronecker Çarpım.....	12
2.4.4. Khatri-Rao ile Kronecker Çarpım.....	12
3. BİALTERNE MATRİS ÇARPIMLARI.....	13
3.1. Bialterne Çarpımın Özdeğer Özellikleri.....	28
3.2. Bialterne Çarpım ve Kronecker Çarpım İlişkisi.....	32
3.3. Bialterne Çarpımın İz(Trace) Özellikleri.....	36
4. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	39

5. KAYNAKLAR.....	40
-------------------	----



SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\forall$	: Her
$\in$	: Ait
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	: Elemanları reel sayılar cismine ait olan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
A^T	: A matrisinin transpozu
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
$\det(A)$	: A matrisinin determinanı
$\text{iz}A$	: A matrisinin izi
$A \odot B$	: A ve B matrisinin Hadamard çarpımı
$A \otimes B$	: A ve B matrisinin Kronecker çarpımı
$A \circ B$	: A ve B matrisinin Tracy-Singh çarpımı
$A * B$	: A ve B matrisinin Khatri-Rao çarpımı
$A \cdot B$	: A ve B matrisinin bialterne çarpımı
$A \times B$	: A ve B matrisinin permanentel bialterne çarpımı

1. GİRİŞ

Matrisler ve matris işlemleri mühendislik, doğa ve sosyal bilimler gibi birçok alanda incelenmekte ve uygulanmaktadır. (Barnett, 1990; Bernstein, 2005; Hogben, 2006; Horn & Johnson, 1994; Schott 2016; Schmidt & Trenkler, 2013).

Matrislerin kullanımı çok geniştir ve birçok farklı çarpım türü vardır. Matris çarpımları, bir matrisin diğer bir matris ile çeşitli şekillerde çarpılması anlamına gelir. Bununla birlikte, matrislerin özel çarpımları, daha spesifik ve belirli kurallara dayanan işlemleri içerir. Bu özel çarpımlar, genellikle belirli uygulamalarda veya hesaplamalarda daha verimli çözümler üretmek için kullanılır.

Hadamard (veya Schur) ve Kronecker çarpımları matris teorisi, istatistik, sistem teorisi ve diğer alanlarda yaygın olarak çalışılmaktadır (Horn, 1990; Liu 2000; Neudecker & Liu 1995; Styan 1973; Van Trees 2002; Zhang 2011). Magnus ve Neudecker (1999), Hadamard ve Kronecker çarpımları içeren temel sonuçları ve istatistiksel uygulamaları içermektedir. Hadamard ve Kronecker çarpımları arasındaki eşitlik bağlantısı ilk olarak Browne (1974), Pukelsheim (1977) ve Faliva (1983) tarafından kullanılmıştır.

Bölünmüş matrisler için, genelleştirilmiş bir Hadamard çarpımı olarak bilinen Khatri-Rao çarpımı, Khatri ve Rao (1968), Rao (1970), Horn ve Mathias (1992) ve Liu (1999, 2002) tarafından tartışılmış ve kullanılmıştır. Genelleştirilmiş bir Kronecker çarpımı olarak Tracy-Singh çarpımı ise Singh (1972), Tracy ve Singh (1972), Tracy ve Jinadasa (1989) ve Koning v.d. (1991) tarafından incelenmiştir. Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları arasındaki bir ilişki ve istatistiksel uygulamaları olan pozitif tanımlı matrislerin bu iki çarpımı içeren çeşitli sonuçları Liu (1999) tarafından verilmiştir.

Stéphanos (1900) iki kare matrisin bialternate çarpımı kavramını tanıtmış ve bu çarpımın bazı temel özelliklerini elde etmiştir. Yıllar içinde, bialternate matris çarpımı kararlılık teorisinde, özellikle polinom ve matris kararlılığının incelenmesinde (Fuller, 1968) ve dinamik sistemler teorisinde adi diferansiyel denklem sistemlerinde Hopf çatallanmalarının tespit edilmesi ve hesaplanmasında etkili bir araç olarak kullanılmıştır (Govaerts & Sijnave, 1999; Guckenheimer v.d., 1997). Matrislerin özdeğer analizine dayalı uygulamalarda bialternate çarpımının sunduğu avantajlar, bu çarpımın daha geniş bir teorik ve pratik çerçeveye entegre edilmesini gerektirmektedir.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde Hadamard, Kronecker, Tracy-Singh ve Khatri-Rao matris çarpımlarının tanımı, özellikleri ve bu çarpımların birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca her bir çarpım için örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise bialterne çarpım ve permanentel bialterne çarpımın tanımı, özellikleri ve birbiriyle olan ilişkisi teoremlerle verilmiştir. Son bölümde ise bialterne çarpımın Kronecker çarpımla ilişkisi, özdeğer özellikleri ve bu çarpımların iz(trace) özellikleri incelenmiştir.



2. MATRİSLERİN ÇARPIMLARI

2.1. Hadamard Çarpım (Schur Çarpım)

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ $m \times n$ tipinde iki matris olsun. O halde $A \odot B$ Hadamard çarpımı da aynı tipte bir matristir ve $A \odot B = C$ ve $C = c_{ij}$, $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$ olarak tanımlanır. Yani bu çarpım aşağıdaki gibi yapılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

olmak üzere

$$A \odot B = C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

olarak bulunur. (Horn & Johnson, 1994)

Örnek 2.1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ ve $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 9 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ olsun. Bu iki matrisin

Hadamard çarpımı

$$A \odot B = C = \begin{bmatrix} 5 \cdot 6 & 2 \cdot 3 & 3 \cdot 0 & 7 \cdot 4 \\ 4 \cdot 5 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 & 1 \cdot 7 \\ 6 \cdot 9 & 2 \cdot 0 & 4 \cdot 3 & 0 \cdot (-2) \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 0 & 28 \\ 20 & 0 & 0 & 7 \\ 54 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ elemanları kompleks sayılar cisminde ait olan $m \times n$ tipinde iki matris olsun. O halde $A \odot B = B \odot A$ dır.

İspat: Kompleks sayılarda iki sayının çarpımı değişme özelliğine sahip olduğundan ispat kolaylıkla gösterilebilir. Yani $(A \odot B)_{ij} = (a_{ij})(b_{ij}) = (b_{ij}a_{ij}) = (B \odot A)_{ij}$ olur.

Teorem 2.2. Hadamard çarpım altındaki birim matris tüm elemanları 1 e eşit olan $m \times n$ tipinde bir matristir ve J_{mn} şeklinde gösterilir.

İspat: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ matrisini ele alalım. O halde $(J_{mn} \odot A)_{ij} = (1)(a_{ij}) = (a_{ij})$ ve dolayısıyla $J_{mn} \odot A = A$ olur. Hadamard çarpım değişme özelliğine sahip olduğundan

$J_{mn} \odot A = A \odot J_{mn} = A$ olur. Böylece J_{mn} matrisi Hadamard çarpımı altında birim matris olur.

Teorem 2.3. $F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $\forall \alpha \in F, A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(F)$ için aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

- 1- $(\alpha A) \odot B = A \odot (\alpha B) = \alpha(A \odot B)$ dir.
- 2- $(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$ dur.
- 3- $(A \odot B)^* = A^* \odot B^*$ dur.
- 4- $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$ dir.
- 5- $(A + B) \odot C = (A \odot C) + (B \odot C)$ dir.
- 6- $A \odot (B + C) = (A \odot B) + (A \odot C)$ dir.
- 7- $\mathbf{0}$ sıfır matrisi olmak üzere $A \odot \mathbf{0} = \mathbf{0} \odot A = \mathbf{0}$ dır.

2.2. Kronecker Çarpım

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{p \times q}$ tipinde iki matris olsun. O halde $A \otimes B$ şeklinde gösterilen Kronecker çarpım $mp \times nq$ tipinde bir matristir ve şu şekilde hesaplanır.

$A \otimes B = C$ ve $C = (c_{ij})_{mp \times nq}$ olmak üzere $C_{ij} = a_{ij} \times B$ olarak bulunur. Yani;

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$$

olur. (Horn & Johnson, 1994)

Örnek 2.2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$ iki matris olsun. Bu matrislerin

Kronecker çarpımı;

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ -4 & 10 & -10 & 25 & -6 & 15 \\ 6 & 14 & 15 & 35 & 9 & 21 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -14 & 35 & -2 & 5 & 8 & -20 \\ 21 & 49 & 3 & 7 & -12 & -28 \\ 7 & 7 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}_{8 \times 6}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.4. $F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- 1- $\forall \alpha \in F, A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B \in \mathcal{M}_{p,q}(F)$ için $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$ dir.
- 2- $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B \in \mathcal{M}_{p,q}(F)$ için $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ dur.
- 3- $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B \in \mathcal{M}_{p,q}(F)$ için $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ dur.
- 4- $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B \in \mathcal{M}_{p,q}(F), C \in \mathcal{M}_{r,s}(F)$ için $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ dir.
- 5- $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(F), C \in \mathcal{M}_{p,q}(F)$ için $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$ dir.
- 6- $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(F)$ için $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$ dir.
- 7- $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), \mathbf{0}$ sıfır matrisi olmak üzere $A \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes A = \mathbf{0}$ dir.

Teorem 2.5. $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B \in \mathcal{M}_{p,q}(F), C \in \mathcal{M}_{n,k}(F)$ ve $D \in \mathcal{M}_{q,r}(F)$ olmak üzere

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

dir.

İspat: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(F), B \in \mathcal{M}_{p,q}(F), C \in \mathcal{M}_{n,k}(F)$ ve $D \in \mathcal{M}_{q,r}(F)$ olsun.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$$

ve

$$C \otimes D = \begin{bmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \dots & c_{1k}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \dots & c_{2k}D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & c_{n2}D & \dots & c_{nk}D \end{bmatrix}_{nq \times kr}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{n1})BD & \dots & (a_{11}c_{1k} + \dots + a_{1n}c_{nk})BD \\ (a_{21}c_{11} + \dots + a_{2n}c_{n1})BD & \dots & (a_{21}c_{1k} + \dots + a_{2n}c_{nk})BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}c_{11} + \dots + a_{mn}c_{n1})BD & \dots & (a_{m1}c_{1k} + \dots + a_{mn}c_{nk})BD \end{bmatrix}_{mp \times kr} \end{aligned}$$

olur.

$$AC = \begin{bmatrix} (a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{n1}) & \dots & (a_{11}c_{1k} + \dots + a_{1n}c_{nk}) \\ (a_{21}c_{11} + \dots + a_{2n}c_{n1}) & \dots & (a_{21}c_{1k} + \dots + a_{2n}c_{nk}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}c_{11} + \dots + a_{mn}c_{n1}) & \dots & (a_{m1}c_{1k} + \dots + a_{mn}c_{nk}) \end{bmatrix}_{m \times k}$$

ve

$$(AC) \otimes (BD) =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{n1})BD & \dots & (a_{11}c_{1k} + \dots + a_{1n}c_{nk})BD \\ (a_{21}c_{11} + \dots + a_{2n}c_{n1})BD & \dots & (a_{21}c_{1k} + \dots + a_{2n}c_{nk})BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}c_{11} + \dots + a_{mn}c_{n1})BD & \dots & (a_{m1}c_{1k} + \dots + a_{mn}c_{nk})BD \end{bmatrix}_{mp \times kr}$$

olup buradan

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.6. $A \in \mathcal{M}_m(F)$ ve $B \in \mathcal{M}_n(F)$ matrisleri ters çevrilebilir matrisler olsun. O halde $A \otimes B$ de ters çevrilebilirdir ve $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ dir.

İspat: Teorem 2.5 eşitliği kullanılırsa

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = AA^{-1} \otimes BB^{-1} = I_m \otimes I_n = I_{mn \times mn}$$

olur. Buradan

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

olarak bulunur.

2.3. Tracy-Singh ve Khatri-Rao Çarpım

Mertebesi $m \times n$ olan A ve C matrislerini ve mertebesi $p \times q$ olan B matrisini ele alalım. $A = (A_{ij})$, ij -inci alt matris olarak $m_i \times n_j$ mertebesinden A_{ij} ile $C = (C_{ij})$ ij -inci alt matris olarak $m_i \times n_j$ mertebesinden C_{ij} ile ve $B = (B_{kl})$ kl -inci alt matris olarak $p_k \times q_l$ mertebesinden B_{kl} ile bölünmüş olsun. Burada $m = \sum_{i=1}^r m_i$, $n = \sum_{j=1}^s n_j$, $p = \sum_{k=1}^t p_k$, $q = \sum_{l=1}^h q_l$ ifadeleri m, n, p, q pozitif tamsayılarının parçalanışlarıdır (Al Zhou & Kilicman, 2006).

2.3.1 Tracy-Singh Çarpım

İki matrisin Tracy-Singh çarpımı

$$A \circ B = (A_{ij} \circ B)_{ij} = \left((A_{ij} \otimes B_{kl})_{kl} \right)_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. $A_{ij} \circ B$ matrisi $m_{ip} \times n_{jq}$ mertebeden ij -nci alt matris $A_{ij} \otimes B_{kl}$ matrisi $m_{ip_k} \times n_{jq_l}$ mertebeden kl -inci alt matris ve $A \circ B$ de $m_p \times n_q$ mertebeden matristir.

Eğer; A bölünmüş bir matris değilse, $A \circ B = A \otimes B$ dir. Yani $A = (a_{ij})$ için

$$\begin{aligned} A \circ B &= (a_{ij} \circ B)_{ij} \\ &= \left((a_{ij} \otimes B_{kl})_{kl} \right)_{ij} \\ &= \left((a_{ij} B_{kl})_{kl} \right)_{ij} = (a_{ij} B)_{ij} \\ &= A \otimes B \end{aligned}$$

olur (Al Zhour & Kilicman,2006).

Örnek 2.3.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 8 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 7 \end{array} \right] \quad \text{ve} \quad B = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & -6 \end{array} \right] \text{ iki matris olmak üzere bu matrislerin}$$

Tracy-Singh çarpımını bulalım. A ve B matrisleri

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, A_{21} = [6 \quad 0], A_{22} = [7] \text{ ve } B_{11} = [1], B_{12} = [-3 \quad 8],$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} \text{ şeklinde bölünmüş olsunlar.}$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B_{11} & A_{11} \otimes B_{12} & A_{12} \otimes B_{11} & A_{12} \otimes B_{12} \\ A_{11} \otimes B_{21} & A_{11} \otimes B_{22} & A_{12} \otimes B_{21} & A_{12} \otimes B_{22} \\ A_{21} \otimes B_{11} & A_{21} \otimes B_{12} & A_{22} \otimes B_{11} & A_{22} \otimes B_{12} \\ A_{21} \otimes B_{21} & A_{21} \otimes B_{22} & A_{22} \otimes B_{21} & A_{22} \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -9 & -3 & 24 & 8 & 4 & -12 & 32 \\ 8 & -2 & -24 & 6 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -15 & -3 & 40 & 8 & -3 & 9 & -24 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 12 & 4 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 32 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 20 & 4 & 0 & -3 & -12 \\ 15 & 5 & 21 & 7 & -18 & -6 & 20 & 28 & -24 \\ 40 & -10 & 56 & -14 & -48 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 5 & 35 & 7 & -30 & -6 & -15 & -21 & 18 \\ 6 & 0 & -18 & 48 & 0 & 0 & 7 & -21 & 56 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 0 & 0 & 0 & 7 & 28 \\ 30 & 0 & 42 & -36 & 0 & 0 & 35 & 49 & -42 \end{bmatrix}_{12 \times 9}$$

olarak bulunur.

2.3.2 Khatri-Rao Çarpım

İki matrisin Khatri-Rao çarpımı

$$A * B = (A_{ij} \otimes B_{ij})_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpım $\sum m_i p_i \times \sum n_j q_j$ tipinde bir matristir. $A_{ij} \otimes B_{ij}$ matrisi $m_i p_i \times n_j q_j$ mertebeden ij -nci alt matris ve $A * B$ matrisi de $\sum_{i=1}^r m_i p_i \times \sum_{j=1}^s n_j q_j$ mertebeden matristir.

Eğer; A bölünmüş bir matris değilse $A * B = A \otimes B$ dir. Yani; $A = (a_{ij})$ için

$$\begin{aligned} A * B &= (a_{ij} \otimes B_{ij})_{ij} \\ &= (a_{ij} B)_{ij} = A \otimes B \end{aligned}$$

dir. Eğer A ve B nin her ikisi de bölünmüş matris değilse $A * B = A \circ B$ dir.

$$\begin{aligned} A * B &= (a_{ij} \otimes b_{ij})_{ij} \\ &= (a_{ij} b_{ij})_{ij} = A \circ B \end{aligned}$$

olarak bulunur (Al Zhou & Kilicman,2006).

Örnek 2.4. $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 2 \end{array} \right]$ ve $B = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right]$ iki matris olsun. Bu iki matrisin

Khatri-Rao çarpımı;

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1 \quad 1], \quad A_{22} = [2]$$

$$B_{11} = [2], \quad B_{12} = [0 \quad -1], \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bölünmüş olsun. $m_1 = 3, m_2 = 1, n_1 = 2, n_2 = 1, p_1 = 1, p_2 = 2, q_1 = 1, q_2 = 2$ olmak üzere, $A * B$ çarpımı $(m_1 p_1 + m_2 p_2) \times (n_1 q_1 + n_2 q_2) = 5 \times 4$ tipindedir.

$$A * B = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B_{11} & A_{12} \otimes B_{12} \\ A_{21} \otimes B_{21} & A_{22} \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 4}$$

olur.

Teorem 2.7. A, B, C, D ve F matrisleri uygun şekilde bölünmüş olsunlar. O halde

- 1- $(A \circ B)(C \circ D) = (AC) \circ (BD)$
- 2- $(A \circ B)^T = A^T \circ B^T$
- 3- $(A \circ B)^* = A^* \circ B^*$
- 4- $(A + C) \circ (B + D) = (A \circ B) + (A \circ D) + (C \circ B) + (C \circ D)$
- 5- $(A \circ B) \neq B \circ A$ (genel olarak)
- 6- $(A * B) \neq B * A$ (genel olarak)
- 7- $(A * B)^* = A^* * B^*$
- 8- $(A + C) * (B + D) = (A * B) + (A * D) + (C * B) + (C * D)$
- 9- $(A * B) \circ (C * D) = (A \circ B) * (C \circ D)$

eşitlikleri geçerlidir. (Liu, 1999)

İspat: 3. Maddenin ispatı yapılırsa

$$\begin{aligned} (A \circ B)^* &= \left((A_{ij} \circ B)_{ij} \right)^* = \left(\left((A_{ij} \otimes B_{kl})_{kl} \right)_{ij} \right)^* = \left(\left((A_{ij} \otimes B_{kl})_{kl} \right)^* \right)_{ji} \\ &= \left(\left((A_{ij} \otimes B_{kl})^* \right)_{lk} \right)_{ji} = \left((A_{ij}^* \otimes B_{kl}^*)_{lk} \right)_{ji} = (A_{ij}^* \otimes B^*)_{ji} \\ &= A^* \circ B^* \end{aligned}$$

2.4. Çarpımların Birbirleriyle İlişkileri

2.4.1. Hadamard ile Kronecker Çarpım

Teorem 2.8. $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ olsun. O halde

$$(A \otimes B) \odot (C \otimes D) = (A \odot C) \otimes (B \odot D)$$

eşitliği sağlanır. (Das & Vashist, 2017)

İspat: $A = (a_{ij})$ ve $C = (c_{ij})$ olsun.

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \odot (C \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \dots & c_{1n}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \dots & c_{2n}D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & c_{n2}D & \dots & c_{nn}D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}B \odot D & a_{12}c_{12}B \odot D & \dots & a_{1n}c_{1n}B \odot D \\ a_{21}c_{21}B \odot D & a_{22}c_{22}B \odot D & \dots & a_{2n}c_{2n}B \odot D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}c_{n1}B \odot D & a_{n2}c_{n2}B \odot D & \dots & a_{nn}c_{nn}B \odot D \end{bmatrix} \\ &= (A \odot C) \otimes (B \odot D) \end{aligned}$$

Teorem 2.9. P_n seçim matrisi;

$$P_n^T = [E_{11}^{(n)}, E_{22}^{(n)}, \dots, E_{nn}^{(n)}]$$

şeklinde tanımlanan $n^2 \times n$ tipinde bir matris olsun. Burada E_{ii} matrisleri, $n \times n$ tipinde (i, i) . elemanı 1 ve diğer elemanları 0 olan matrisler olsun. Boyutları $m \times n$ olan A ve B matrisleri için

$$A \odot B = P_n^T (A \otimes B) P_m$$

dir. (Visick, 2000)

İspat:

$$P_n^T (A \otimes B) P_m = [E_{11}^{(n)}, E_{22}^{(n)}, \dots, E_{nn}^{(n)}] \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}^{(m)} \\ E_{22}^{(m)} \\ \vdots \\ E_{mm}^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \text{diag}(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}) B E_{kk}^{(m)} \\
&= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ij} \delta_{jk} \right] = [a_{ij} b_{ij}] \\
&= A \odot B
\end{aligned}$$

Sonuç 2.1. Boyutları $n \times n$ olan A ve B matrisleri için

$$A \odot B = P_n^T (A \otimes B) P_n$$

dir. (Visick, 2000)

2.4.2. Khatri-Rao ile Tracy-Singh Çarpım

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

olsun. Burada $A, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B, B_{11}, B_{12}, B_{21}$ ve B_{22} matrisleri sırasıyla $m \times n, m_1 \times n_1, m_1 \times n_2, m_2 \times n_1, m_2 \times n_2, p \times q, p_1 \times q_1, p_1 \times q_2, p_2 \times q_1$ ve $p_2 \times q_2$ boyutlu matrislerdir ve $m_1 + m_2 = m, n_1 + n_2 = n, p_1 + p_2 = p, q_1 + q_2 = q$ dir.

Ayrıca;

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

olmak üzere Burada $M, M_{11}, M_{22}, N, N_{11}$ ve N_{22} matrisleri sırasıyla $m \times m, m_1 \times m_1, m_2 \times m_2, p \times p, p_1 \times p_1$ ve $p_2 \times p_2$ tipinde simetrik matrislerdir. M_{12} ve N_{12} sırasıyla $m_1 \times m_2$ ve $p_1 \times p_2$ tipinde matrislerdir.

$Z_1, k_1 \times r$ tipinde ve $Z_2, k_2 \times s$ tipindeki seçim matrisleri tanımlansın;

$$Z_1 = \begin{bmatrix} I_{11} & 0_{11} & 0_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{21} \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} I_{12} & 0_{12} & 0_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{22} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Burada $Z_1^T Z_1 = I_1$ ve $Z_2^T Z_2 = I_2$ birim matrisleri ve $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}, I_1$ ve I_2 sırasıyla $m_1 p_1 \times m_1 p_1, m_2 p_2 \times m_2 p_2, n_1 q_1 \times n_1 q_1, n_2 q_2 \times n_2 q_2, r \times r$ ve $s \times s$ tipinde birim matrislerdir. ($k_1 = mp, k_2 = nq, m = m_1 + m_2, n = n_1 + n_2, p = p_1 + p_2, q = q_1 + q_2$,

$r = m_1 p_1 + m_2 p_2$ ve $s = n_1 q_1 + n_2 q_2$ dir. $0_{11}, 0_{12}, 0_{21}$ ve 0_{22} sırasıyla $m_1 p_1 \times m_1 p_2$, $m_1 p_1 \times m_2 p_1$, $n_1 q_1 \times n_1 q_2$ ve $n_1 q_1 \times n_2 q_1$ tipinde sıfır matrisleridir.

Özellikle eğer (2.3) denkleminde $i = 1, 2$ için $k = k_i$, $m_i = n_i$ ve $p_i = q_i$

$$Z = Z_1 = Z_2 \quad (2.4)$$

olarak bulunur. Burada Z , $Z^T Z = I$ şartını sağlayan $k \times r$ tipinde seçilen bir matristir.

Teorem 2.10. (2.1)'deki gibi bölünmüş A ve B ve (2.2)'deki gibi bölünmüş M ve N matrisleri için

$$A * B = Z_1^T (A \circ B) Z_2 \quad (2.5)$$

$$M * N = Z^T (M \circ N) Z \quad (2.6)$$

eşitlikleri sağlanır. (Liu & Trenkler, 2008)

İspat: İki eşitlikte Tracy-Singh ve Khatri-Rao çarpımlarının özellikleri kullanılarak ispatlanabilir.

2.4.3. Tracy-Singh ile Kronecker Çarpım

Teorem 2.11 Tracy-Singh ve Kronecker çarpımları için ;

$$A \circ B = P_1^T (A \otimes B) P_2 \quad (2.7)$$

olacak şekilde P_i ($i = 1, 2$) permütasyon matrisleri vardır. (Liu & Trenkler, 2008)

2.4.4. Khatri-Rao ile Kronecker Çarpım

Teorem 2.12 Khatri-Rao ve Kronecker Çarpımları için

$$A * B = Q_1^T (A \otimes B) Q_2 \quad (2.8)$$

Burada Q_i , $Q_i = P_i Z_i$ şeklinde bir seçim matrisidir. P_i matrisleri Teorem 2.11 de olduğu gibi ve Z_i matrisleri de Teorem 2.10 daki gibi tanımlanmıştır. (Liu & Trenkler, 2008)

3. BİALTERNE MATRİS ÇARPIMLARI

$i < j$ olmak üzere herhangi bir $n \geq 2$ tamsayısı için $Q_{2,n}$; $i, j \in (1, 2, \dots, n)$ olacak şekilde tüm (i, j) çiftlerinin kümesi ve $i \leq j$ olmak üzere $G_{2,n}$; $i, j \in (1, 2, \dots, n)$ olacak şekilde tüm (i, j) çiftlerinin kümesi olsun. Burada hem $Q_{2,n}$ hem de $G_{2,n}$ in elemanlarının leksikografiksel olarak sıralandığı varsayılmaktadır. $Q_{2,n}$ kümesi $\binom{n}{2}$ elemandan, $G_{2,n}$ kümesi ise $\binom{n+1}{2}$ elemandan oluşur.

Bir $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ matrisi verildiğinde $k = 1, 2, 3, \dots, r$, $r = \min\{m, n\}$ olmak üzere A nın k _inci bileşik matrisi $C_k(A)$ ve A nın k _inci indüklenmiş matrisi $P_k(A)$ kavramları matris teorisinde iyi bilinmektedir (Marcus & Minc, 1992; Wedderburn, 1934).

Burada sadece ikinci bileşik ve ikinci indüklenmiş matrisleri dikkate alınacaktır. (i, j) ve (k, l) çiftlerinin verilen indis kümelerinin elemanları olduğunda, bu matrislerin satırlarını göstermek için ij ve sütunlarını göstermek için kl kullanılacaktır.

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ matrisi için $C_2(A)$ matrisinin girdileri $(i, j) \in Q_{2,m}$, $(k, l) \in Q_{2,n}$ olmak üzere;

$$C_2(A)_{ij,kl} = \det \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. $P_2(A)$ matrisinin girdileri ise $(i, j) \in G_{2,m}$ ve $(k, l) \in G_{2,n}$ olmak üzere;

$$P_2(A)_{ij,kl} = \frac{1}{\sqrt{\mu(i, j) \cdot \mu(k, l)}} \text{per} \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada "per" ifadesi permanent fonksiyonudur. $\mu(.,.)$ değeri ise

$$\mu(p, q) = \begin{cases} 1, & p \neq q \\ 2, & p = q \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

Tanım 3.1. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere bu iki matrisin bialterne çarpımı $F = A \cdot B$ şeklinde gösterilir ve bu F matrisinin girdileri $(i, j) \in Q_{2,n}$ ve $(k, l) \in Q_{2,n}$ olmak üzere;

$$f_{ij,kl} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{ik} & b_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \right) \quad (3.3)$$

şeklinde verilir (Elsner & Monov, 2011).

Tanım 3.2. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere bu iki matrisin permanentel bialterne çarpımı $G = A \times B$ şeklinde gösterilir ve bu G matrisinin girdileri $(i, j) \in G_{2,n}$ ve $(k, l) \in G_{2,n}$ olmak üzere;

$$g_{ij,kl} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(i,j) \cdot \mu(k,l)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{ik} & b_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \right) \quad (3.4)$$

şeklinde verilir (Elsner & Monov, 2011).

Bu çarpımların $n = 3$ için genel formu aşağıdaki şekilde bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere A ve B matrislerinin bialterne çarpımı $F = A \cdot B$ olmak üzere

$$F = \begin{bmatrix} f_{12,12} & f_{12,13} & f_{12,23} \\ f_{13,12} & f_{13,13} & f_{13,23} \\ f_{23,12} & f_{23,13} & f_{23,23} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada (1,2), (1,3), (2,3) ikilileri kullanılarak;

$$f_{12,12} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{12,13} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{12,23} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{13,12} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{13,13} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{13,23} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{32} & a_{23} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{23,12} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{23,13} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right)$$

$$f_{23,23} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right)$$

şeklinde bulunur.

A ve B matrislerinin permanentel bialterne çarpımı ise $G = A \times B$ olmak üzere

$$G = \begin{bmatrix} g_{11,11} & g_{11,12} & g_{11,13} & g_{11,22} & g_{11,23} & g_{11,33} \\ g_{12,11} & g_{12,12} & g_{12,13} & g_{12,22} & g_{12,23} & g_{12,33} \\ g_{13,11} & g_{13,12} & g_{13,13} & g_{13,22} & g_{13,23} & g_{13,33} \\ g_{22,11} & g_{22,12} & g_{22,13} & g_{22,22} & g_{22,23} & g_{22,33} \\ g_{23,11} & g_{23,12} & g_{23,13} & g_{23,22} & g_{23,23} & g_{23,33} \\ g_{33,11} & g_{33,12} & g_{33,13} & g_{33,22} & g_{33,23} & g_{33,33} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) ikililerini kullanarak,

$$\begin{aligned} g_{11,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ b_{11} & b_{11} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} \\ a_{11} & a_{11} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (4a_{11}b_{11}) = a_{11}b_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,12} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2a_{11}b_{12} + 2b_{11}a_{12}) = \frac{a_{11}b_{12} + b_{11}a_{12}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{11} & b_{13} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ a_{11} & a_{13} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2a_{11}b_{13} + 2b_{11}a_{13}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{11}b_{13} + b_{11}a_{13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ b_{12} & b_{12} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{12} \\ a_{12} & a_{12} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (4a_{12}b_{12}) = a_{12}b_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{12} & b_{13} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2a_{12}b_{13} + 2b_{12}a_{13}) = \frac{a_{12}b_{13} + b_{12}a_{13}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$g_{11,33} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{13} & a_{13} \\ b_{13} & b_{13} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{13} & b_{13} \\ a_{13} & a_{13} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4}(4a_{13}b_{13}) = a_{13}b_{13}$$

$$\begin{aligned} g_{12,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ b_{21} & b_{21} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{11}b_{21} + 2b_{11}a_{21}) = \frac{a_{11}b_{21} + b_{11}a_{21}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12,12} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_{11}b_{22} + a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} + a_{21}b_{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_{11}b_{23} + a_{13}b_{21} + b_{11}a_{23} + b_{13}a_{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{12}b_{22} + 2b_{12}a_{22}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{12}b_{22} + b_{12}a_{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_{12}b_{23} + a_{13}b_{22} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12,33} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{13} & a_{13} \\ b_{23} & b_{23} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{13} & b_{13} \\ a_{23} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{13}b_{23} + 2b_{13}a_{23}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{13}b_{23} + b_{13}a_{23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{13,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ b_{31} & b_{31} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} \\ a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{11}b_{31} + 2b_{11}a_{31}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{11}b_{31} + b_{11}a_{31}) \end{aligned}$$

$$g_{13,12} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(a_{11}b_{32} + b_{31}a_{12} + b_{11}a_{32} + b_{12}a_{31}) \\
g_{13,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}(a_{11}b_{33} + b_{31}a_{13} + b_{11}a_{33} + a_{31}b_{13}) \\
g_{13,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ b_{32} & b_{32} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{12} \\ a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{12}b_{32} + 2b_{12}a_{32}) = \frac{a_{12}b_{32} + b_{12}a_{32}}{\sqrt{2}} \\
g_{13,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}(a_{12}b_{33} + a_{13}b_{32} + b_{12}a_{33} + a_{32}b_{13}) \\
g_{13,33} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{13} & a_{13} \\ b_{33} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{13} & b_{13} \\ a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{13}b_{33} + 2b_{13}a_{33}) = \left(\frac{a_{13}b_{33} + b_{13}a_{33}}{\sqrt{2}} \right) \\
g_{22,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21} \\ b_{21} & b_{21} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{21} \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{4}(4a_{21}b_{21}) = a_{21}b_{21} \\
g_{22,12} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{21}b_{22} + 2a_{22}b_{21}) = \left(\frac{a_{21}b_{22} + a_{22}b_{21}}{\sqrt{2}} \right) \\
g_{22,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ b_{21} & b_{23} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{21}b_{23} + 2a_{23}b_{21}) = \frac{a_{21}b_{23} + a_{23}b_{21}}{\sqrt{2}} \\
g_{22,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{22} \\ b_{22} & b_{22} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{22} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(4a_{22}b_{22}) = a_{22}b_{22} \\
g_{22,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{22}b_{23} + 2a_{23}b_{22}) = \frac{a_{22}b_{23} + a_{23}b_{22}}{\sqrt{2}} \\
g_{22,33} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{23} & a_{23} \\ b_{23} & b_{23} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{23} & b_{23} \\ a_{23} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{4}(4a_{23}b_{23}) = a_{23}b_{23} \\
g_{23,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21} \\ b_{31} & b_{31} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{21} \\ a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{21}b_{31} + 2b_{21}a_{31}) = \frac{a_{21}b_{31} + b_{21}a_{31}}{\sqrt{2}} \\
g_{23,12} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}(a_{21}b_{32} + b_{31}a_{22} + b_{21}a_{32} + b_{22}a_{31}) \\
g_{23,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}(a_{21}b_{33} + a_{23}b_{31} + b_{21}a_{33} + b_{23}a_{31}) \\
g_{23,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{22} \\ b_{32} & b_{32} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{22}b_{32} + 2b_{22}a_{32}) = \frac{a_{22}b_{32} + b_{22}a_{32}}{\sqrt{2}} \\
g_{23,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}(a_{22}b_{33} + a_{23}b_{32} + b_{22}a_{33} + b_{23}a_{32}) \\
g_{23,33} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{23} & a_{23} \\ b_{33} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{23} & b_{23} \\ a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{23}b_{33} + 2b_{23}a_{33}) = \frac{a_{23}b_{33} + b_{23}a_{33}}{\sqrt{2}} \\
g_{33,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{31} \\ b_{31} & b_{31} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{31} \\ a_{31} & a_{31} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{4}(4a_{31}b_{31}) = a_{31}b_{31} \\
g_{33,12} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{31}b_{32} + 2a_{32}b_{31}) = \frac{a_{31}b_{32} + a_{32}b_{31}}{\sqrt{2}} \\
g_{33,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{33} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{33} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{31}b_{33} + 2b_{31}a_{33}) = \frac{a_{31}b_{33} + b_{31}a_{33}}{\sqrt{2}} \\
g_{33,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{32} & a_{32} \\ b_{32} & b_{32} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{32} & b_{32} \\ a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{4}(4a_{32}b_{32}) = a_{32}b_{32} \\
g_{33,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{32} & b_{33} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2a_{32}b_{33} + 2a_{33}b_{32}) = \frac{a_{32}b_{33} + a_{33}b_{32}}{\sqrt{2}} \\
g_{33,33} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} a_{33} & a_{33} \\ b_{33} & b_{33} \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} b_{33} & b_{33} \\ a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{4}(4a_{33}b_{33}) = a_{33}b_{33}
\end{aligned}$$

dir.

$F \in M_{\binom{n}{2}}(\mathbb{C})$, $G \in M_{\binom{n+1}{2}}(\mathbb{C})$ bialterne ve permanentel bialterne çarpımlarının tanımı ve (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$A \cdot A = C_2(A) \quad \text{ve} \quad A \times A = P_2(A) \quad (3.5)$$

eşitlikleri vardır.

Teorem 3.1. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$2(A \cdot B) = C_2(A + B) - C_2(A) - C_2(B) \quad (3.6)$$

$$2(A \times B) = P_2(A + B) - P_2(A) - P_2(B) \quad (3.7)$$

Bu teorem ispatı (3.1), (3.2), (3.3) ve (3.4) deki denklemler yardımıyla gösterilebilir.

Teorem 3.2. $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere;

(a) $A \cdot B = B \cdot A$ ve $A \times B = B \times A$;

(b) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $(\alpha A) \cdot (\beta B) = \alpha\beta(A \cdot B)$ ve $\alpha A \times \beta B = \alpha\beta(A \times B)$;

€ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ve $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;

(d) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$ ve $(A \times B)^T = A^T \times B^T$;

€ $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$ ve $(A \times B)^* = A^* \times B^*$;

(f) $AB \cdot AB = (A \cdot A) \cdot (B \cdot B)$ ve $AB \times AB = (A \times A)(B \times B)$;

(g) $k = 1, 2, 3, \dots$ için $(A \cdot A)^k = A^k \cdot A^k$ ve $(A \times A)^k = A^k \times A^k$

(h) A tersi olan bir matris olmak üzere $A \cdot A$ ve $A \times A$ matrislerinin de tersleri vardır. Yani $(A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$ ve $(A \times A)^{-1} = A^{-1} \times A^{-1}$ dir.

(i) Eğer A ve B üst üçgen(alt üçgen, köşegen) matrisler olup, A ve B matrislerinin köşegen elemanları a_{ii} ve b_{ii} ile verilmişse ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) o zaman $F = A \cdot B$ ve $G = A \times B$ matrisleri de üst üçgen(alt üçgen, köşegen) matrisler olup bu matrislerin köşegen elemanları da sırasıyla;

$$f_{ij,ij} = \frac{1}{2}(a_{ii}b_{jj} + b_{ii}a_{jj}), \quad ij \in Q_{2,n} \quad (3.8)$$

$$g_{ij,ij} = \frac{1}{2}(a_{ii}b_{jj} + b_{ii}a_{jj}), \quad ij \in G_{2,n} \quad (3.9)$$

İspat: (a)–(c) numaralı ifadeler doğrudan (3.3) ve (3.4) denklemlerinden elde edilebilir. Ardından, (d) ve € ifadeleri, (2.6) ve (2.7) denklemleri ile $C_2(A)^T = C_2(A^T)$, $P_2(A)^T = P_2(A^T)$, $C_2(A)^* = C_2(A^*)$, $P_2(A)^* = P_2(A^*)$ özellikleri kullanılarak kolayca görülebilir. (3.5) denklemine bakıldığında, (f) de bileşik ve indüklenmiş matrisler hakkında bilinen

sonuçları ifade etmektedir. (g) özelliği, (f) kullanılarak ve $B = AB$ seçilerek tümevarım yoluyla elde edilebilir. (h) ise (f) de $B = A^{-1}$ olarak alındığında elde edilir. (i) maddesinin ispatı için, önce A ve B matrislerinin üst üçgen matrisler olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, (3.8) ve (3.9) denklemleri, (3.3) ve (3.4) denklemlerinden elde edilebilir. Çünkü A ve B matrislerinin girdileri, $a_{pq} = b_{pq} = 0$ koşulunu sağlar; burada $1 \leq q \leq n - 1$ ve $p > q$. F ve G matrislerinin de üst üçgen matrisler olduğunu göstermek için F ve G matrislerinin girdilerinin şu şartları sağladığını göstermeliyiz: $f_{ij,kl} = 0$ $g_{ij,kl} = 0$ tüm (i, j) ve (k, l) çiftleri için, böylece $(i, j) > (k, l)$ leksikografiksel sıraya göre $Q_{2,n}$ ve $G_{2,n}$ kümelerinin elemanlarıdır. $(i, j) > (k, l)$ ifadesi ancak ve ancak ya $i > k$ ya da $i = k$ ve $j > l$ olduğunda sağlanır. Bu durumda, $f_{ij,kl} = 0$ ve $g_{ij,kl} = 0$ eşitliklerinin (3.3) ve (3.4) denklemlerinden doğrudan elde edilebileceği kolayca görülür, çünkü A ve B matrislerinin üst üçgen yapısı göz önünde bulundurulmuştur.

Teorem 3.3. $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$$(A \cdot B)(C \cdot D) = \frac{1}{2}(AC \cdot BD + AD \cdot BC) \quad (3.10)$$

$$(A \times B)(C \times D) = \frac{1}{2}(AC \times BD + AD \times BC) \quad (3.11)$$

eşitlikleri sağlanır (Elsner & Monov, 2011).

İspat: (3.6) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} (A \cdot B)(C \cdot D) &= \frac{1}{4}[C_2(A + D) - C_2(A) - C_2(B)][C_2(C + D) - C_2(C) - C_2(D)] \\ &= \frac{1}{4}[2A(C + D) \cdot B(C + D) - 2AC \cdot BC - 2AD \cdot BD] \\ &= \frac{1}{2}[(AC + AD) \cdot (BC + BD) - AC \cdot BC - AD \cdot BD] \\ &= \frac{1}{2}(AC \cdot BD + AD \cdot BC) \end{aligned}$$

olur. Şimdi (3.7) denklemini kullanarak

$$(A \times B)(C \times D) = \frac{1}{4}[P_2(A + B) - P_2(A) - P_2(B)][P_2(C + D) - P_2(C) - P_2(D)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} [2A(C + D) \times B(C + D) - 2AC \times BC - 2AD \times BD] \\
&= \frac{1}{2} [(AC + AD) \times (BC + BD) - AC \times BC - AD \times BD] \\
&= \frac{1}{2} (AC \times BD + AD \times BC)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 3.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrislerinin bialterne ve permanentel

bialterne çarpımları bulunursa;

A ve B matrislerinin bialterne çarpımları $F = A \cdot B$ olmak üzere F matrisi $n = 3$ olduğu için $\binom{3}{2} = 3$ olup 3×3 tipindedir. $n = 3$ için leksikografiksel olarak $(1,2), (1,3), (2,3)$ ikilileri seçilerek;

$$f_{12,12} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (10 + 55) = \frac{65}{2}$$

$$f_{12,13} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (2 + 0) = 1$$

$$f_{12,23} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (-20 + 0) = -10$$

$$f_{13,12} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (0 + 58) = 29$$

$$f_{13,13} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (-20 + 40) = 10$$

$$f_{13,23} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (0 + 5) = \frac{5}{2}$$

$$f_{23,12} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (-42 - 22) = -32$$

$$f_{23,13} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (2 - 13) = \frac{-11}{2}$$

$$f_{23,23} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} (14 + 1) = \frac{15}{2}$$

olur. Bulunan elemanlar F matrisinde yerine yazılırsa;

$$F = \begin{bmatrix} 65/2 & 1 & -10 \\ 29 & 10 & 5/2 \\ -32 & -11/2 & 15/2 \end{bmatrix}$$

olur.

A ve B matrislerinin permanentel bialterne çarpımları $G = A \times B$ olmak üzere G matrisi $n = 3$ olduğu için $\binom{3+1}{2} = 6$ olup 6×6 tipinde olur.

$(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$ ikilileri seçilerek;

$$\begin{aligned} g_{11,11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (16 + 16 + 16 + 16) = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,12} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2 + 0 + 0 + 2) = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,13} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (32 + 0 + 32 + 0) = \frac{32}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,22} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,23} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + 4 + 4 + 0) = \frac{4}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11,33} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,1)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

$$g_{12,11} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2 + 2 + 8 + 8) = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$g_{12,12} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (10 + 0 + 56 + 1) = \frac{67}{2}$$

$$g_{12,13} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (6 + 4 + 0 + 0) = 5$$

$$g_{12,22} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + 0 + 7 + 7) = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$g_{12,23} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (0 + 20 + 0 + 0) = 10$$

$$g_{12,33} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,2)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (12 + 12 + 0 + 0) = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$g_{13,11} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (12 + 12 + 48 + 48) = \frac{60}{\sqrt{2}}$$

$$g_{13,12} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (0 + 0 + 64 + 6) = 35$$

$$g_{13,13} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (4 + 24 + 40 + 0) = 34$$

$$g_{13,22} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + 0 + 8 + 8) = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$g_{13,23} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (0 + 0 + 5 + 0) = \frac{5}{2}$$

$$g_{13,33} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(1,3)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (8 + 8 + 0 + 0) = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$g_{22,11} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1 + 1 + 1) = 1$$

$$g_{22,12} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (5 + 7 + 7 + 5) = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$g_{22,13} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (3 + 0 + 0 + 3) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$g_{22,22} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (35 + 35 + 35 + 35) = 35$$

$$g_{22,23} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (21 + 0 + 0 + 21) = \frac{21}{\sqrt{2}}$$

$$g_{22,33} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,2)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$g_{23,11} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (6 + 6 + 6 + 6) = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$g_{23,12} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (0 + 42 + 8 + 30) = 40$$

$$g_{23,13} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (2 + 0 + 5 + 18) = \frac{25}{2}$$

$$g_{23,22} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + 0 + 40 + 40) = \frac{40}{\sqrt{2}}$$

$$g_{23,23} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (14 + 0 + 25 + 24) = \frac{63}{2}$$

$$g_{23,33} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(2,3)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + 0 + 15 + 15) = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$g_{33,11} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(1,1)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (36 + 36 + 36 + 36) = 36$$

$$g_{33,12} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(1,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (0 + 48 + 48 + 0) = \frac{48}{\sqrt{2}}$$

$$g_{33,13} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(1,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (12 + 30 + 30 + 12) = \frac{42}{\sqrt{2}}$$

$$g_{33,22} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(2,2)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$g_{33,23} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(2,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (16 + 0 + 0 + 16) = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$g_{33,33} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(3,3)\mu(3,3)}} \left(\text{per} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \text{per} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (10 + 10 + 10 + 10) = 10$$

olur. Sonuç olarak G matrisi;

$$G = \begin{bmatrix} 16 & 2/\sqrt{2} & 32/\sqrt{2} & 0 & 4/\sqrt{2} & 0 \\ 10/\sqrt{2} & 67/2 & 5 & 7/\sqrt{2} & 10 & 12/\sqrt{2} \\ 60/\sqrt{2} & 35 & 34 & 8/\sqrt{2} & 5/2 & 8/\sqrt{2} \\ 1 & 12/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 35 & 21/\sqrt{2} & 0 \\ 12/\sqrt{2} & 40 & 25/2 & 40/\sqrt{2} & 63/2 & 15/\sqrt{2} \\ 36 & 48/\sqrt{2} & 42/\sqrt{2} & 0 & 16/\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

3.1. Bialterne Çarpımın Özdeğer Özellikleri

$A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi ve $h_{pq} \in \mathbb{C}, p, q = 0, 1, \dots, m$ skalerleri verildiğinde $\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \cdot A^q$ toplamının özdeğerleri A nın özdeğerleri cinsinden ifade edilebilir (Fuller, 1968; Marcus & Minc, 1992). Teorem 3.2'den görüldüğü üzere, bialterne çarpım ve permanental bialterne çarpım benzer özelliklere sahiptir ve $\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \times A^q$ toplamının özdeğerleri için benzer bir sonuç elde edilebilir.

Teorem 3.4. $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $h_{pq} \in \mathbb{C}, p, q = 0, 1, \dots, m$ olsun. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise o zaman

(i)

$$\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \cdot A^q \quad (3.12)$$

matrisinin özdeğerleri

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p), \quad (i, j) \in Q_{2,n} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

(ii)

$$\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \times A^q \quad (3.14)$$

matrisinin özdeğerleri ise

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p), \quad (i, j) \in G_{2,n} \quad (3.15)$$

şeklindedir (Elsner & Monov, 2011).

İspat: Schur üçgenleştirme teoremi gereği öyle bir $U \in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisi vardır ki $T = U^* A U$ matrisi üst üçgen matristir.

$$\begin{aligned}
(U \cdot U)^* \left(\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \cdot A^q \right) (U \cdot U) &= \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (U^* A^p U) \cdot (U^* A^q U) \\
&= \sum_{p,q=0}^m h_{pq} T^p \cdot T^q
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
(U \times U)^* \left(\sum_{p,q=0}^m h_{pq} A^p \times A^q \right) (U \cdot U) &= \sum_{p,q=0}^m h_{pq} (U^* A^p U) \times (U^* A^q U) \\
&= \sum_{p,q=0}^m h_{pq} T^p \times T^q
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak bulunur. T^p ve T^q matrisleri köşegen elemanları $\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p$ ve $\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q$ olan üst üçgen matris olduklarından (3.16), (3.17) eşitlikleri ve Teorem 3.2 (i) özelliği ile birlikte (3.12) toplamının özdeğerlerinin (3.13) ile ve (3.14) toplamının özdeğerlerinin (3.15) ile verildiğini gösterir.

Teorem 3.4 (i) de $m = 1$ seçilirse (3.12) denklemi

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=0}^1 h_{pq} A^p \cdot A^q &= h_{00} A^0 \cdot A^0 + h_{10} A^1 \cdot A^0 + h_{01} A^0 \cdot A^1 + h_{11} A^1 \cdot A^1 \\
&= h_{00} I \cdot I + h_{10} A \cdot I + h_{01} I \cdot A + h_{11} A \cdot A
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olur. Burada $h_{00} = h_{01} = h_{10} = 0$ ve $h_{11} = 1$ seçilirse (3.18) denklemi $A \cdot A$ halini alır. O halde $A \cdot A$ matrisinin özdeğerleri ise (3.13) denkleminden $(i, j) \in Q_{2,n}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^1 h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p) = \frac{1}{2} (\lambda_i \lambda_j + \lambda_j \lambda_i) = \lambda_i \lambda_j$$

olur. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise o zaman $A \cdot A$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \dots, \lambda_1 \lambda_n, \lambda_2 \lambda_3, \dots, \lambda_2 \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} \lambda_n$$

şeklindedir. $h_{00} = h_{11} = 0$ ve $h_{01} = h_{10} = 1$ seçilirse (3.18) denklemi $A \cdot I = I \cdot A$ olduğundan $2A \cdot I$ halini alır. O halde $2A \cdot I$ matrisinin özdeğerleri ise (3.13) denkleminde $(i, j) \in Q_{2,n}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^1 h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p) = \frac{1}{2} ((\lambda_i + \lambda_j) + (\lambda_j + \lambda_i)) = \lambda_i + \lambda_j$$

olur. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise o zaman $2A \cdot I$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \dots, \lambda_1 + \lambda_n, \lambda_2 + \lambda_3, \dots, \lambda_2 + \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} + \lambda_n$$

şeklindedir.

Benzer şekilde Teorem 3.4 (ii) de $m = 1$ seçilirse (3.14) denklemi

$$\begin{aligned} \sum_{p,q=0}^1 h_{pq} A^p \times A^q &= h_{00} A^0 \times A^0 + h_{10} A^1 \times A^0 + h_{01} A^0 \times A^1 + h_{11} A^1 \times A^1 \\ &= h_{00} I \times I + h_{10} A \times I + h_{01} I \times A + h_{11} A \times A \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur. Burada $h_{00} = h_{01} = h_{10} = 0$ ve $h_{11} = 1$ seçilirse (3.19) denklemi $A \times A$ halini alır. O halde $A \times A$ matrisinin özdeğerleri ise (3.15) denkleminde $(i, j) \in G_{2,n}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^1 h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p) = \frac{1}{2} (\lambda_i \lambda_j + \lambda_j \lambda_i) = \lambda_i \lambda_j$$

olur. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise o zaman $A \cdot A$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 \lambda_1, \lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_1 \lambda_n, \lambda_2 \lambda_2, \dots, \lambda_2 \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} \lambda_n, \lambda_n \lambda_n$$

şeklindedir. $h_{00} = h_{11} = 0$ ve $h_{01} = h_{10} = 1$ seçilirse (3.19) denklemi $A \times I = I \times A$ olduğundan $2A \times I$ halini alır. O halde $2A \times I$ matrisinin özdeğerleri ise (3.15) denkleminde $(i, j) \in G_{2,n}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^1 h_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p) = \frac{1}{2} ((\lambda_i + \lambda_j) + (\lambda_j + \lambda_i)) = \lambda_i + \lambda_j$$

olur. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise o zaman $2A \times I$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_1 + \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_1 + \lambda_n, \lambda_2 + \lambda_2, \dots, \lambda_2 + \lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} + \lambda_n, \lambda_n + \lambda_n$$

şeklindedir.

$2A \cdot I$ matrisinin özdeğerleri kararlılık problemlerinin incelenmesinde (Buyukkoroglu vd., 2015; Çelebi, 2016; Fuller, 1968) ve adi diferansiyel denklem sistemlerinde Hopf çatallanmalarının hesaplanmasında önemli bir rol oynar (Govaerts & Sijnave, 1999; Guckenheimer v.d., 1997). $2A \times I$ matrisinin özdeğer özelliğinin de kararlılık analizinde yararlı olduğu görülmektedir.

Örnek 3.2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için $A \cdot A$, $2A \cdot I$, $A \times A$ ve $2A \times I$ matrislerinin özdeğerlerini hesaplayalım.

İlk olarak A matrisinin özdeğerleri hesaplanırsa, $x \neq 0$ olmak üzere

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (\lambda I - A)x = 0$$

eşitliğinden özdeğerler $\det(\lambda I - A) = 0$ denkleminin kökleridir. Buradan

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 9\lambda - 18 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

olup A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ olarak bulunur.

$A \cdot A$ ve $2A \cdot I$ matrisleri (3.3) denklemi yardımıyla hesaplanırsa

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix} \text{ ve } 2A \cdot I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$A \cdot A$ matrisinin özdeğerleri $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = -9$, $\mu_3 = -6$ dır. Bunlar ise A matrisinin özdeğerlerinin çarpımına eşittir. Yani;

$$\mu_1 = \lambda_1 \lambda_2, \quad \mu_2 = \lambda_1 \lambda_3, \quad \mu_3 = \lambda_2 \lambda_3$$

olur. $2A \cdot I$ matrisinin özdeğerleri ise $\nu_1 = -5$, $\nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$ dir. Bunlar ise A matrisinin özdeğerlerinin toplamına eşittir. Yani;

$$\nu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_3, \quad \nu_3 = \lambda_2 + \lambda_3$$

olur. Benzer şekilde $A \times A$ ve $2A \times I$ matrisleri (3.4) denklemi yardımıyla hesaplanırsa

$$A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 4 & -3 & -4\sqrt{2} & 6 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2 & -1 & 4\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 1 & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4 & -6\sqrt{2} & 9 \\ 2\sqrt{2} & -2 & 7 & -4\sqrt{2} & 4 & 3\sqrt{2} \\ 4 & 4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$2A \times I = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -3 & 3 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -4 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2\sqrt{2} & -1 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$A \times A$ matrisinin özdeğerleri $\alpha_1 = 9, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = -9, \alpha_4 = 4, \alpha_5 = -6, \alpha_6 = 9$ dur. Bunlar ise A matrisinin özdeğerlerinin çarpımına eşittir. Yani;

$$\alpha_1 = \lambda_1 \lambda_1, \alpha_2 = \lambda_1 \lambda_2, \alpha_3 = \lambda_1 \lambda_3, \alpha_4 = \lambda_2 \lambda_2, \alpha_5 = \lambda_2 \lambda_3, \alpha_6 = \lambda_3 \lambda_3$$

olur. $2A \times I$ matrisinin özdeğerleri ise $\beta_1 = -6, \beta_2 = -5, \beta_3 = 0, \beta_4 = -4, \beta_5 = 1, \beta_6 = 6$ dir. Bunlar ise A matrisinin özdeğerlerinin toplamına eşittir. Yani;

$$\beta_1 = \lambda_1 + \lambda_1, \beta_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \beta_3 = \lambda_1 + \lambda_3, \beta_4 = \lambda_2 + \lambda_2, \beta_5 = \lambda_2 + \lambda_3, \beta_6 = \lambda_3 + \lambda_3$$

olur.

3.2. Bialterne Çarpım ve Kronecker Çarpım İlişkisi

$\mathbb{C}^n$ deki birim vektörlerin standart tabanları $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ olsun. Kronecker çarpımı kullanarak, $\mathbb{C}^{n^2}$ deki birim vektörlerin standart tabanı, $\{e_i \otimes e_j : 1 \leq i, j \leq n\}$ olarak verilir. P ile $n^2 \times n^2$ boyutunda tanımlanan permütasyon matrisi aşağıdaki denklemlerle gösterilsin.

$$P(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i, 1 \leq i, j \leq n \quad (3.20)$$

Permütasyon matrisinin özelliklerinden $P = P^T = P^{-1}, \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $P(x \otimes y) = y \otimes x$ ve $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$ için $P(A \otimes B) = (B \otimes A)P$ dir. P matrisinin özdeğeri olan -1 'in

cebirsel ve geometrik katlılığı $\frac{1}{2}n(n-1)$ ve $+1$ 'in cebirsel ve geometrik katlılığı ise $\frac{1}{2}n(n+1)$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özuzaylar sırasıyla şu şekilde verilir;

$$E_{(-1)} = \text{span}\{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i : (i, j) \in Q_{2,n}\} \quad (3.21)$$

$$E_{(+1)} = \text{span}\{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i : (i, j) \in G_{2,n}\} \quad (3.22)$$

(3.21) ve (3.22) özuzayları $\mathbb{C}^{n^2}$ uzayındaki iç çarpıma göre birbirlerine ortogondur. Yani ; $\forall u \in E_{(-1)}$ ve $\forall v \in E_{(+1)}$ için $\langle u, v \rangle = u^*v = 0$ olur.

Teorem 3.5. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Öyle bir $U \in M_{n^2}(\mathbb{R})$ ortogonal matrisi vardır ki;

$$U^T(A \otimes B + B \otimes A)U = 2 \left[\begin{array}{c|c} A \cdot B & 0 \\ \hline 0 & A \times B \end{array} \right] \quad (3.23)$$

dir (Elsner & Monov, 2011).

İspat: V ve W matrisleri aşağıdaki şekilde oluşturulsun. V 'nin sütunları

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i), \quad (i, j) \in Q_{2,n} \quad (3.24)$$

denklemleriyle, W nun sütunları ise

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu(i,j)}}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i), \quad (i, j) \in G_{2,n} \quad (3.25)$$

denklemleriyle verilsin.

V ile W 'nin sütunları, sırasıyla $(i, j) \in Q_{2,n}$ ve $(i, j) \in G_{2,n}$ çiftlerinin leksikografiksel sırasına karşılık gelmektedir. $U = [V \mid W]$ dir.

V ve W matrisinin sütunları sırasıyla $E_{(-1)}$ ve $E_{(+1)}$ alt uzaylarının ortogonal tabanlarıdır dolayısıyla $U^T U = I$ olur. $P(A \otimes B) = (B \otimes A)P$ olduğundan $x \in E_{(-1)}$ ise $Px = -x$ olur. Buradan

$$P(A \otimes B + B \otimes A)x = -(A \otimes B + B \otimes A)x \quad (3.26)$$

elde edilir. Benzer şekilde eğer $x \in E_{(+1)}$ ise $Px = x$ olur ve şu sonuç elde edilir.

$$P(A \otimes B + B \otimes A)x = (A \otimes B + B \otimes A)x \quad (3.27)$$

$V^T W = 0$ ve $W^T V = 0$ olduğundan (3.26) ve (3.27) eşitliklerinden $E_{(-1)}$ ve $E_{(+1)}$ uzayları $(A \otimes B + B \otimes A)$ matrisinin alt uzaylarıdır. Buradan şu sonuç elde edilir,

$$V^T(A \otimes B + B \otimes A)W = 0 \text{ ve } W^T(A \otimes B + B \otimes A)V = 0 \quad (3.28)$$

(3.23) ifadesini ispatlamak için

$$V^T(A \otimes B + B \otimes A)V = 2A \cdot B \text{ ve } W^T(A \otimes B + B \otimes A)V = 2A \times B \quad (3.29)$$

$(i, j) \in Q_{2,n}$ ve $(k, l) \in Q_{2,n}$ için $V^T(A \otimes B + B \otimes A)V$ matrisinin ij -inci satırında ve kl -inci sütunundaki elemanlar

$$\begin{aligned} V^T(A \otimes B + B \otimes A)V_{ij,kl} &= \\ &= \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)^T (A \otimes B + B \otimes A)(e_k \otimes e_l - e_l \otimes e_k) \\ &= \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)^T (Ae_k \otimes Be_l - Ae_l \otimes Be_k + Be_k \otimes Ae_l - Be_l \otimes Ae_k) \\ &= a_{ik}b_{jl} - a_{il}b_{jk} + b_{ik}a_{jl} - b_{il}a_{jk}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde $(i, j) \in G_{2,n}$ ve $(k, l) \in G_{2,n}$ için $W^T(A \otimes B + B \otimes A)W$ matrisinin ij -inci satırında ve kl -inci sütunundaki elemanlar şu şekilde verilir.

$$\begin{aligned} W^T(A \otimes B + B \otimes A)W_{ij,kl} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\mu(i,j)\mu(k,l)}}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)^T (A \otimes B + B \otimes A)(e_k \otimes e_l - e_l \otimes e_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu(i,j)\mu(k,l)}}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk} + b_{ik}a_{jl} + b_{il}a_{jk}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

(3.30) ile (3.3)'ü ve (3.31) ile (3.4)'ü karşılaştırarak, (3.29) eşitliklerinin geçerli olduğu sonucuna varılır ki bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.3. Örnek 3.1 de verilen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri göz

önünde bulundurulursa

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 65/2 & 1 & -10 \\ 29 & 10 & 1 \\ -32 & -11/2 & 15/2 \end{bmatrix},$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 16 & \sqrt{2} & 16\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 5\sqrt{2} & 67/2 & 5 & 7/\sqrt{2} & 10 & 6\sqrt{2} \\ 30\sqrt{2} & 35 & 34 & 4\sqrt{2} & 5/2 & 4\sqrt{2} \\ 1 & 12\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 35 & 21/\sqrt{2} & 0 \\ 6\sqrt{2} & 40 & 25/2 & 20\sqrt{2} & 63/2 & 15/\sqrt{2} \\ 36 & 24\sqrt{2} & 21\sqrt{2} & 0 & 8\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix},$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 4 & 20 & 12 \\ 12 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 0 & 56 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 & 35 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 42 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 6 & 0 & 64 & 8 & 0 & 40 & 5 & 0 \\ 6 & 30 & 18 & 8 & 40 & 24 & 5 & 25 & 15 \\ 36 & 0 & 12 & 48 & 0 & 16 & 30 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 32 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 56 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 64 & 40 & 6 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 10 & 0 & 20 & 6 & 0 & 12 \\ 1 & 7 & 0 & 5 & 35 & 0 & 3 & 21 & 0 \\ 6 & 8 & 5 & 30 & 40 & 25 & 18 & 24 & 15 \\ 12 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 6 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 14 & 0 \\ 36 & 48 & 30 & 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca Teorem 3.5 deki V ve W matrisleri de hesaplanırsa

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.24) ve (3.25) eşitliklerinden

$$U = [V_{9 \times 3} \mid W_{9 \times 6}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$U^T(A \otimes B + B \otimes A)U = 2 \left[\begin{array}{c|c} A \cdot B & 0 \\ \hline 0 & A \times B \end{array} \right]$$

eşitliği sağlanır.

3.3. Bialterne Çarpımın İz(Trace) Özellikleri

Teorem 3.6. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. O halde

$$2 \operatorname{iz}(A \cdot B) = \operatorname{iz}A \operatorname{iz}B - \operatorname{iz}(AB) \quad (3.32)$$

ve

$$2 \operatorname{iz}(A \times B) = \operatorname{iz}A \operatorname{iz}B + \operatorname{iz}(AB) \quad (3.33)$$

dir (Elsner & Monov, 2011).

İspat: (3.3) denkleminde

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{iz}(A \cdot B) &= \sum_{(i,j) \in Q_{2,n}} f_{ij,ij} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ii}b_{jj} + b_{ii}a_{jj} - a_{ij}b_{ji} - b_{ij}a_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ii}b_{jj} - a_{ij}b_{ji}) \end{aligned}$$

$$= izA izB - iz(AB)$$

olur ve benzer olarak (3.4) denkleminde

$$\begin{aligned} 2 iz(A \times B) &= \sum_{(i,j) \in G_{2,n}} g_{ij,ij} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{2\sqrt{\mu(i,j)}} (a_{ii}b_{jj} + b_{ii}a_{jj} + a_{ij}b_{ji} + b_{ij}a_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ii}b_{jj} + a_{ij}b_{ji}) \\ &= izA izB + iz(AB) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır. (Elsner & Monov, 2011).

$$2 iz(A \cdot I) = (n-1)izA, \quad 2 iz(A \times I) = (n+1)izA \quad (3.34)$$

$$2 iz C_2(A) = iz^2 A - iz A^2, \quad 2 iz P_2(A) = iz^2 A + iz A^2 \quad (3.35)$$

$$4 iz[(A \cdot I)(B \cdot I)] = izA izB + (n-2) iz(AB) \quad (3.36)$$

$$4 iz[(A \times I)(B \times I)] = izA izB + (n+2) iz(AB) \quad (3.37)$$

Teorem 3.5. ve Teorem 3.6. daki eşitlikler kullanıldığında

$$iz(A \cdot B) + iz(A \times B) = izA izB = iz(A \otimes B) \quad (3.38)$$

ve

$$2^{n^2} \det(A \cdot B) \det(A \times B) = \det(A \otimes B + B \otimes A) \quad (3.39)$$

denklemleri elde edilir.

Örnek 3.4. Örnek 3.1 de verilen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri ele

alındığında

$$iz(A \cdot B) = 50, \quad iz(A \times B) = 160, \quad izA = 14, \quad izB = 15, \quad iz(A \otimes B) = 210$$

olduğundan bu değerler (3.38) denkleminde yerine yazıldığında eşitliklerin sağlandığı görülür. Benzer şekilde

$$n = 3, \quad \det(A \cdot B), \quad \det(A \times B), \quad \det(A \otimes B + B \otimes A)$$

değerleri hesaplanıp (3.39) denkleminde yerine yazıldığında eşitliğin sağlandığı görülür.



4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Hadamard, Kronecker, Tracy-Singh, Khatri-Rao ve bialterne matris çarpımlarının tanım, özellikler ve karşılıklı ilişkilerinin detaylı bir incelemesi verilmiştir. Bu çarpımlar, matris teorisinde ve uygulamalı matematik alanlarında temel araçlar olarak geniş bir kullanım alanına sahiptir.

Bu tezde ele alınan matris çarpımları ve bunların ilişkileri, gelecekteki araştırmalara ışık tutacak birçok potansiyel alan sunmaktadır. Özellikle, matris teorisinin farklı alanlarla ilişkisi, daha ileri düzeyde matematiksel ve uygulamalı modellerin geliştirilmesine olanak tanıyacaktır. Ayrıca, matris çarpımlarının sayısal çözümler üzerindeki etkisi, modern hesaplama yöntemleri ve algoritmalar geliştirilirken dikkate alınması gereken önemli bir konudur.

Sonuç olarak, Hadamard, Kronecker, Tracy-Singh, Khatri-Rao ve bialternate matris çarpımlarının her biri ve birbiriyle olan ilişkileri sayesinde daha geniş bir uygulama alanı oluşturmaktadır. Bu çarpımların ve bunlarla ilişkili özelliklerinin anlaşılması, matematikteki ve mühendislikteki problemlerin çözümünde yeni yöntemlerin geliştirilmesine olanak sağlayacağı düşünülmektedir.



5. KAYNAKLAR

- Al Zhour, Z. A. A., & Kilicman, A. (2006). Matrix equalities and inequalities involving Khatri-Rao and Tracy-Singh sums, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 7
- Barnett, S. (1990). *Matrices: methods and applications*. Oxford University Press.
- Bernstein, D. S. (2009). *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton university press.
- Browne, M. W. (1974). Generalized least squares estimators in the analysis of covariance structures. *South African Statistical Journal*, 8(1), 1-24.
- Buyukkoroglu, T., Celebi, G., & Dzhafarov, V. (2015). On the robust stability of polynomial matrix families. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 30, 905-915.
- Çelebi, G. (2016). *Belirsiz doğrusal sistemlerin kararlılık bölgelerinin bulunması yöntemleri* (Yayın No. 450281) [Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi].
- Das, P. K., & Vashisht, L. K. (2017). Traces of Hadamard and Kronecker products of matrices. *Math. Appl*, 6, 143-150.
- Elsner, L., & Monov, V. (2011). The bialternate matrix product revisited. *Linear algebra and its applications*, 434(4), 1058-1066.
- Faliva, M. (1983). *Identificazione e stima nel modello lineare ad equazioni simultanee: un approccio generale in presenza di informazioni a priori*. Vita e pensiero.
- Fuller, A. T. (1968). Conditions for a matrix to have only characteristic roots with negative real parts. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23(1), 71-98.
- Govaerts, W., & Sijnave, B. (1999). Matrix manifolds and the Jordan structure of the bialternate matrix product. *Linear Algebra and its Applications*, 292(1-3), 245-266.
- Guckenheimer, J., Myers, M., & Sturmfels, B. (1997). Computing hopf bifurcations i. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1), 1-21.
- Hogben, L. (Ed.). (2006). *Handbook of linear algebra*. CRC press.
- Horn, R. A. (1990). The hadamard product. In *Proc. Symp. Appl. Math*, 40, 87-169.
- Horn, R. A., & Mathias, R. (1992). Block-matrix generalizations of Schur's basic theorems on Hadamard products. *Linear Algebra and its Applications*, 172, 337-346.

- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (1994). *Topics in matrix analysis*. Cambridge university press
- Khatri, C. G., & Rao, C. R. (1968). Solutions to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions. *Sankhyā: the Indian journal of statistics, series A*, 167-180.
- Koning, R. H., Neudecker, H., & Wansbeek, T. (1991). Block Kronecker products and the vecb operator. *Linear algebra and its applications*, 149, 165-184.
- Liu, S. (1999). Matrix results on the Khatri-Rao and Tracy-Singh products. *Linear algebra and its applications*, 289(1-3), 267-277.
- Liu, S. (2000). Inequalities involving Hadamard products of positive semidefinite matrices. *Journal of mathematical analysis and applications*, 243(2), 458-463.
- Liu, S. (2002). Several inequalities involving Khatri–Rao products of positive semidefinite matrices. *Linear algebra and its applications*, 354(1-3), 175-186.
- Liu, S., & Trenkler, G. (2008). Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 4(1), 160-177.
- Magnus, J. R., & Neudecker, H. (1999). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons.
- Marcus, M., & Minc, H. (1992). *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, 14, Courier Corporation.
- Neudecker, H., & Liu, S. (1995). Matrix Trace Inequalities Involving Simple, Kronecker, and Hadamard Product. *Econometric Theory*, 11(3), 669-670.
- Pukelsheim, F. (1977). On Hsu's model in regression analysis. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 8(3), 323-331.
- Rao, C. R. (1970). Estimation of heteroscedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, 65(329), 161-172.
- Schmidt, K., & Trenkler, G. (2013). *Moderne Matrix-Algebra: mit Anwendungen in der Statistik*. Springer-Verlag.
- Schott, J. R. (2016). *Matrix analysis for statistics*. John Wiley & Sons.

- Singh, R. P. (1972). *Some generalizations in matrix differentiation with applications in multivariate analysis*. [Doctoral Thesis, University of Windsor].
- Stéphanos, C. (1900). Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *Journal de Mathématiques pures et Appliquées*, 6, 73-128.
- Styan, G. P. (1973). Hadamard products and multivariate statistical analysis. *Linear algebra and its applications*, 6, 217-240.
- Tracy, D. S., & Jinadasa, K. G. (1989). Partitioned Kronecker products of matrices and applications. *The Canadian Journal of Statistics/La Revue Canadienne de Statistique*, 107-120.
- Tracy, D. S., & Singh, R. P. (1972). A new matrix product and its applications in partitioned matrix differentiation. *Statistica Neerlandica*, 26(4), 143-157.
- Van Trees, H. L. (2002). *Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory*. John Wiley & Sons.
- Visick, G. (2000). A quantitative version of the observation that the Hadamard product is a principal submatrix of the Kronecker product. *Linear Algebra and Its Applications*, 304(1-3), 45-68.
- Wedderburn, J. H. M. (1934). *Lectures on matrices*, 17, American Mathematical Soc..
- Zhang, F. (2011). *Matrix theory: basic results and techniques*. Springer Science & Business Media.

Mehmet KARACA

Yüksek Lisans Tezi

YOZGAT 2025



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

