



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

MEDİKAL GÖRÜNTÜLEME VE RADON DÖNÜŞÜMÜ

Hazalcan İBRET

BURDUR, 2021

**T.C
BURBUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MEDİKAL GÖRÜNTÜLEME
VE
RADON DÖNÜŞÜMÜ**

Hazalcan İBRET

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2021

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Medikal Görüntüleme ve Radon Dönüşümü”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13/08/2021
(İmza)
Hazalcan İBRET

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Prof. Dr. Hüseyin TUNA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ağustos, 2021

Hazalcan İBRET



İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. X-ray Işını.....	3
2.1.1. Giriş	3
2.1.2. X-ray Işını ve Beer Yasası.....	4
2.2. Radon Dönüşümü	8
2.2.1. Giriş	8
2.2.2. Örnekler	11
2.2.3. $\mathcal{R}$ 'nin Bazı Özellikleri	15
2.2.4. $\mathcal{R}$ 'nin Tanım Bölgesi	18
2.2.5. Azaltılmış Radon Dönüşümü	18
2.3. Geri Projeksiyon.....	18
2.3.1. Tanım ve Özellikler	18
2.4. Fourier Dönüşümü.....	22
2.4.1. Fourier Dönüşümü Özellikleri.....	22
2.4.2. Fourier Dönüşümünün Tersi.....	25
2.5. Filtreler ve Kıvrım.....	27
2.5.1. Giriş	27
2.5.2. Kıvrım.....	29
2.5.3. Kıvrımın Bazı Özellikleri	30
2.5.4. Filtre Çözünürlüğü.....	32
2.5.5. Kıvrım ve Fourier Dönüşümü	35
2.5.6. Rayleigh-Plancherel Teoremi	37
2.5.7. İki Boyutlu Uzayda Kıvrım	38
2.5.8. Kıvrım, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ ve δ	39
2.5.9. Düşük Geçişli Filtreler	42
3. SONUÇ.....	47
KAYNAKLAR.....	48

ŞEKİL DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Beyaz ve siyah karelerden oluşan ızgaranın her bir satır ve sütunu için saptanmış bir X-ray enerji absorbe edilmesinin şematik gösterimi.....	3
Şekil 2.2. (0, 1) (sol) ve (1, 0) (sağ) merkezli küçük ve parlak çembersel diskler için sinogramlar	12
Şekil 2.3. Bir karenin 5, 25, 100 ve 1000 yönlerine göre geri projeksiyonu	19
Şekil 2.4. $l_{x \cos(\theta)+y \sin(\theta)}$ doğrusunun (x, y) noktasından geçtiği θ kümesi 2α genişliğine sahiptir	41
Şekil 2.5. Her bir şekil azaltma katsayısı fonksiyonunun grafiğinin enine kesiti (düz çizgi) ile onun Radon dönüşümünün geri projeksiyonunun (kesikli çizgi) gösterimi.....	42
Şekil 2.6. 3 popüler düşük geçişli filtre grafiklerinin gösterimi.....	45

SİMGELER VE KISALTMA DİZİNİ

BT	: Bilgisayarlı Tomografi
FWHM	: Tam Genişlikte Yarım Maksimum (Full Width Half Maximum)
FFT	: Hızlı Fourier Dönüşümü (the Fast Fourier Transform)
MRG	: Manyetik Rezonans Görüntüleme
PET	: Pozitron Emisyon Tomografi (Positron Emission Tomography)
SPECT	: Tek Foton Emisyon Bilgisayarlı Tomografi (Single Photon Emission Computerized Tomography)
$A(x)$	: Ortamın x noktasındaki azaltma katsayısı
B_k	: $2^k \times 2^k$ lik matris
B	: Geri projeksiyon operatörü
BR	: Radon dönüşümünün geri projeksiyon operatörü
ds	: Eğrisel integral için yay uzunluğu elemanı
δ	: Dirac delta
ΔI	: Belirli aralıktaki X-ray ışınının yoğunluk kaybı
E	: Her bir fotonun enerji seviyesi
f_Ω	: Karakteristik fonksiyon veya Ω bölgesinin gösterge fonksiyon operatörü
f_{ort}	: Belirli aralıktaki f ' nin ortalama değeri
$f * g$	: f ve g fonksiyonlarının kıvrımı
$\mathcal{F}$	: Fourier dönüşümü operatörü
$\mathcal{F}^{-1}$	: Ters Fourier dönüşümü operatörü
$T_a f(x)$	: Düzlemdeki fonksiyonlar üzerinde çalışan kaydırma operatörü
$I(x)$	: x noktasındaki ışının yoğunluğu
$l_{t,\theta}$	: Düzlemdeki t, θ parametrelili doğru
$N(x)$	: Saniyede x noktasından geçen foton sayısı
$p(x)$	: $[x, x + \Delta x]$ aralığında absorbe edilen bütün fotonların oranı
A	: 2×2 lik dönme matrisi
$\mathcal{R}$	: Radon dönüşümü operatörü
$\mathcal{R}_\mu$	: μ fonksiyonuna göre azaltılmış Radon dönüşümü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Medikal Görüntüleme ve Radon Dönüşümü

Hazalcan İBRET

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ağustos, 2021

Medikal görüntülemede tanı ve tedavi amaçlı X-ray ışını, bilgisayarlı tomografi, ultrason, manyetik rezonans görüntüleme gibi çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler kaliteli bir görüntünün yeniden oluşturulmasında oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu tezde, öncelikle X-ray ışını davranışı hakkında temel bilgiler verilip Beer yasası ile ilişkisi matematiksel olarak ifade edilmiştir. Daha sonra Radon dönüşümünün tanımına ve temel özelliklerine değinilip bazı Radon dönüşümü hesaplamalarına yönelik çalışmalar yapılmıştır. İlerleyen bölümlerde görüntüyü yeniden oluşturmada yöntemlerden biri olan Geri projeksiyon yönteminin tanımına ve özelliklerine değinildikten sonra, bu süreçte gürültü gibi istenmeyen etkileri ortadan kaldırmak amacıyla filtreleme teknikleri ifade edilecektir.

Anahtar Kelimeler: medikal görüntüleme, x-ray, radon dönüşümü, geri projeksiyon, filtreleme teknikleri

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Medical Imaging and Radon Transform

Hazalcan İBRET

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

August, 2021

X-ray, Computed Tomography, Ultrasound and Magnetic Resonance Imaging are some of the methods used in medical imaging for disease diagnosis and treatment planning. These methods play an important role in reconstructing a high-quality image. In this thesis, first of all, some basic information about X-ray behavior is presented, followed by a mathematical expression of the relationship with Beer's law. Then, the definition and basic properties of the Radon transform are mentioned, followed by some research into Radon transform calculations. In the following sections, the definition and features of the Back projection method, which is one of the methods of reconstructing the image, will be mentioned, and filtering techniques will be expressed in order to eliminate undesirable effects such as noise in this process.

Keywords: medical imaging, x-ray, radon transform, back projection, filtering techniques

1. GİRİŞ

Günümüzde medikal görüntüleme alanı ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Medikal görüntüleme, farklı yöntemler kullanarak insan vücudunun içyapısını görülebilir hâle gelmesini sağlayan tıbbî alandır. Bu amaç doğrultusunda Bilgisayarlı tomografi (BT), X-ray, Ultrason ve Manyetik rezonans görüntüleme (MRG) gibi yöntemlerinin yanı sıra Pozitron emisyon tomografisi (PET) ve Tek foton emisyon bilgisayarlı tomografisi (SPECT) gibi yöntemler de tıpta tanı konulması ve tedavi için kullanılmaktadır. Bu görüntüleme yöntemlerinin arasındaki temel fark, farklı fiziksel esaslara dayanıyor olmalarıdır. 1895 yılında, Wilhelm Röntgen tarafından X-ray ışınlarının insan vücudunun içine girdiğini keşfetmesi medikal görüntüleme yöntemleri için önemli bir adım olmuştur (Hanum, 2017: 2). Massachusetts Tufts Üniversitesinde profesör olan Amerikalı fizikçi Allan McLeod Cormack, X-ray ışınlarından bir görüntü oluşturabilmek için bazı matematiksel algoritmalar geliştirmiştir ve 1960' ların ve 1970' lerin başlarında, İngiliz mühendis Godfrey Newbold Hounsfield ile temeli X-ray ışını görüntülerine dayanan Bilgisayarlı tomografinin gelişimine katkılarından dolayı bu iki öncü bilim insanına Nobel Tıp ve Fizyoloji ödülü verilmiştir. Daha sonra Cormack' tan bağımsız olarak çalışan ve aynı zamanda Birleşik Krallık' taki EMI Merkez Araştırma Laboratuvarlarında çalışan Hounsfield, ilk BT cihazını tasarlamıştır. Medikal görüntülemede bilgisayara dayalı matematiksel yöntemler, görüntüyü yeniden oluşturmada önem arz etmektedir. Bu bağlamda, görüntüyü yeniden oluşturmadaki temel sorun esasen matematikselidir. Yani, olası tüm enine kesitler boyunca iki veya üç boyutlu bir fonksiyonun integral değerlerini bilirse, o zaman fonksiyonun kendisini nasıl yeniden oluşturabiliriz (Feeman, 2015)? Bu özel soru Avusturyalı matematikçi Johann Radon tarafından incelenmiştir ve “On the determination of functions from their integrals along ceertain manifolds (Fonksiyonların belli manifoldlar üzerindeki integrallerinden bu fonksiyonların kendilerinin belirlenmesi)” adlı çalışmasında görüntüyü yeniden oluşturabilmek adına bazı sonuçlar ortaya koymuştur (Sevimli, 2019).

Medikal görüntülemede, görüntüyü yeniden oluşturmak için en bilinen uygulamalardan biri ise BT' dir (Bilgisayarlı tomografi). BT tarama işlemi, birçok farklı bölgeden bir nesne veya canlıya gönderilen X-ray ışınlarının geri toplanmasından meydana gelir (Arslan, 2005). X-ray ışını temelli BT' de görüntüyü yeniden oluşturmadaki yöntemlerden biri de geri projeksiyondur. Bu yöntem ile elde edilen her projeksiyon,

bilgisayarda oluşturulan kesit görüntüsü matrisindeki piksellere aynı açıda geri yansıtılır (Hanum, 2017).

Tıbbî görüntü uygulamalarında bir görüntüyü iyi bir şekilde tanımlayabilmek için, görüntünün ayrıntıları gereklidir. Dolayısıyla tıbbî görüntünün net, temiz ve bulanıklardan arınmış olması önem arz etmektedir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak X-ray ışını hakkında temel bilgiler verilip Beer yasası ile ilişkisi matematiksel olarak ifade edilmiştir. Daha sonra Radon dönüşümünün tanımına ve temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra görüntüyü yeniden oluşturmada yöntemlerden biri olan geri projeksiyon yönteminin tanımına ve özelliklerine değinildikten sonra, bu süreçte gürültü gibi istenmeyen etkileri ortadan kaldırmak amacıyla filtreleme teknikleri ifade edilmiştir.

Bu tez hazırlanırken Feeman' ın 2015 yılında Springer yayınları tarafından basılan The Mathematics of Medical Imaging isimli eserinden etraflıca yararlanılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

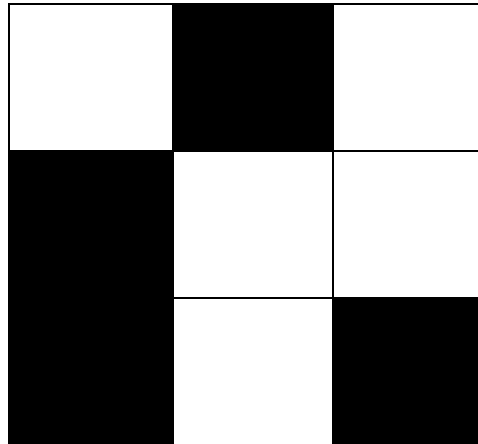
2.1. X-ray Işını

2.1.1. Giriş

Bilgisayarlı eksenel tomografi taraması, 180 derecelik açının her birinde 160 veya daha fazla ışıdan oluşan binlerce X-ray ışını demetinden oluşur. Yoğunluğu bilinen tek bir X-ray ışını kas, beyin dokusu gibi bir ortamdan geçerken ışıdaki mevcut enerjinin bir kısmı ortam tarafından emilir ve bazıları ortamın içinden geçer. Ortamdan çıkan ışının yoğunluğu bir detektör ile ölçülür. Başlangıç ve bitiş arasındaki yoğunluk farkı bize ortamın enerjiyi absorbe etme yeteneğini verir. Yalpaze veya koni şeklindeki X-ray ışınlarının kümesi bir makineden yayılır ve dişler veya kemik tarafından engellenemeyen veya absorbe edilemeyen bu fotonlar filmi açığa çıkarır, böylece içinden geçilen ortamın bir resmi meydana gelir. Fotonları engelleyen bir noktanın arkasına yerleştirilen hiçbir şey görülemeyeceğinden resim aslında derinlikten yoksundur. Bu eksiklik, görüntülemeye önemli bir zorluğu yani, X-ray ışınlarının geçtiği ortamın homojen olmadığını belirtir. Örneğin; kaslar liflidir ve bazı kısımlarda diğerlerinden daha yoğundur; beyin dokusu: gri madde, su, kan ve nöronlardan oluşur.

BT taramasındaki temel fikir şudur: farklı yönlerden gelip ortamdan geçen X-ray ışınlarında meydana gelen yoğunluk farklarını ölçerek ve sonrasında bu ölçümleri karşılaştırarak, ortam içindeki hangi konumların diğerlerinden daha fazla emici veya daha az emici olduğunu belirlenebilmesidir.

Şimdi basit bir modelle başlayalım (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Beyaz ve siyah karelerden oluşan ızgaranın her bir satır ve sütunu için saptanmış bir X-ray enerji absorbe edilmesinin şematik gösterimi

Bir santimetre kalınlığındaki kare şeklinde bir dilim materyalimiz olduğunu varsayalım. Kare her biri siyah veya beyaz olan daha küçük karelerden oluşan 3x3 lük dikdörtgen ızgaraya bölünür. Siyah kareler X-ray enerjisini absorbe etmezken, her bir beyaz kare X-ray enerjisini 1 birim absorbe eder. (Beyaz karelerin kemik, siyah karelerin hava gibi davrandığını söyleyebiliriz.) Şimdi, bir X-ray ışınının ızgaranın ilk satırı boyunca geçip 2 birim enerji kaybettiğini varsayalım. Bu ızgaranın ilk satırında iki kare beyaz ve bir kare siyah olması gerektiği anlamına gelir. Eğer bir X-ray ışını ızgaranın ilk sütunu boyunca geçip 1 birim enerji kaybederse, o zaman ilk sütun yalnızca bir beyaz kare içerir. Bu noktada, ilk satır ve sütunun durumu için yalnızca 4 ihtimal vardır, (Bu beş kare için ilk $2^5 = 32$ olasılık yerine) yani, 1. satır = BBS ve 1. sütun = BSS; 1. satır = BSB ve 1. sütun = BSS; 1. satır = SBB ve 1. sütun = SBS; veya 1. satır = SBB ve 1. sütun = SSB. Bu şekilde devam ederek, ızgaranın çeşitli satır ve sütunları için X-ray enerjisindeki kayıpları aşağıdaki gibi ölçtüğümüzü varsayalım; 1. satır $\rightarrow$ 2 birim kayıp, 2. satır $\rightarrow$ 2 birim kayıp, 3. satır $\rightarrow$ 1 birim kayıp; 1. sütun $\rightarrow$ 1 birim kayıp, 2. sütun $\rightarrow$ 2 birim kayıp, 3. sütun $\rightarrow$ 2 birim kayıp.

Diğer olası durumlar nelerdir? Izgaradaki toplam beyaz ve siyah karelerin sayısını belirlemenin kolay bir yolu var mı? Birden fazla tutarlı model var mı? Eğer varsa, hangi ek bilgiler benzersiz bir gölgeleme desenini belirlemeye yardımcı olabilir?

Bazı bakımlardan; BT taramasından bir görüntü oluşturmak, binlerce küçük karelere bölünmüş dikdörtgen bir resim ızgarasında olduğu gibi bir şema yürütmekten meydana gelir. Sadece siyah ya da beyaz yerine -siyah 0 ve beyaz 1' dir- ızgaradaki karelerde konumlanmış ortamın enerjiiyi absorbe etme yeteneğine bağlı olarak gri tonlama değeri atanır. - 0 ile 1 arasında bir sayı- Ortam boyunca geçen her bir X-ray ışını ölçülür ve yoğunluktaki değişim bize ışın yolu boyunca karşılaşılan gri miktarı hakkında bilgi verir. Tam olarak bilinmeyen şey, enerjideki azalma yol boyunca nerede meydana geldiğidir. Yeterli X-ray ışınları için yoğunluktaki değişimleri bildiğimizde, tutarlı ölçümleri olan gri tonlama değerlerine sahip bir görüntü oluşturmaya çalışırız. Görüntü yapılandırılmaya yönelik bu yaklaşım, Hounsfield tarafından onun ilk BT tarayıcılarında uygulanan temel fikre benzemektedir.

2.1.2. X-ray Işını ve Beer Yasası

BT taramaları için kullanacağımız matematiksel modeli kurarken, bir nesnenin yoğunluğu ve azaltma katsayısı için matematiksel tanımlara ihtiyacımız vardır (Beatty, 2012). Fotonlardan oluşan bir X-ray ışını demeti düşünüldüğünde, her bir foton aynı E enerji seviyesine sahiptir ve demet, ışın yolunun her santimetresi boyunca geçen saniyede aynı

sayıda fotona sahip sabit bir frekansta yayılır. Eğer $N(x)$, saniyede x noktası boyunca geçen foton sayısını gösterirse o zaman x noktasındaki ışının yoğunluğu

$$I(x) = E \cdot N(x)$$

ile bulunur. Ayrıca bir X-ray ışınının genişliğinin olmadığını (sıfır genişlik) ve kırılarak yayılmadığını varsayabiliriz.

X-ray ışını boyunca geçen her madde, maddenin her bir milimetresinden geçen fotonların belirli bir oranını absorbe etme özelliğine sahiptir. Maddeye özgü olan bu oran, ortamın azaltma katsayısı olarak adlandırılır. Azaltma katsayısının birimleri, “ortamın her milimetresi boyunca absorbe edilen fotonların oranı” olarak verilir.

Şimdi, bir X-ray ışınının x ve $x + \Delta x$ konumları arasında tespit edilen bazı ortamlar boyunca geçtiğini ve $A(x)$ 'nin orada tespit edilen ortamın azaltma katsayısı olduğunu varsayalım. O zaman $[x, x + \Delta x]$ aralığında absorbe olacak tüm fotonların oranı

$$p(x) = A(x) \cdot \Delta x$$

eşitliği ile bulunur. Böylece $[x, x + \Delta x]$ aralığında tespit edilen ortamlar tarafından absorbe olacak fotonların sayısı

$$p(x) \cdot N(x) = A(x) \cdot N(x) \cdot \Delta x$$

ile bulunur. Eğer; her iki tarafı her bir fotonun E enerji seviyesi ile çarparsak, bu aralık boyunca X-ray ışınının karşılık gelen yoğunluk kaybının

$$\Delta I \approx -A(x) \cdot I(x) \cdot \Delta x \quad (2.1)$$

olduğunu görürüz. (2.1) ifadesinde $\Delta x \rightarrow 0$ olarak alınırsa

$$\frac{dI}{dx} = -A(x) \cdot I(x) \quad (2.2)$$

elde edilir.

Beer Yasası: Bir ortam boyunca geçen kırılmayan, tek renkli ve sıfır genişlikli bir X-ray ışınının her milimetresindeki yoğunluk değişim hızı, ışının yoğunluğu ve ortamın azaltma katsayısı ile birlikte orantılıdır. Bu durum (2.2) diferansiyel denklemi ile ifade edilir.

(2.2) diferansiyel denklemi ayrılabilir ve

$$\frac{dI}{I} = -A(x)dx$$

olarak yazılabilir (Feeman, 2015).

Eğer ışın, başlangıç yoğunluğu $I_0 = I(x_0)$ ile x_0 konumunda başlar ve ortam boyunca geçtikten sonra, nihai yoğunluğu $I_1 = I(x_1)$ ile x_1 konumunda tespit edilirse; o zaman

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I} = - \int_{x_0}^{x_1} A(x)dx$$

olur. Buradan

$$\ln(I(x_1)) - \ln(I(x_0)) = - \int_{x_0}^{x_1} A(x)dx$$

böylelikle

$$\ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = - \int_{x_0}^{x_1} A(x)dx$$

eşitliğin her iki tarafını -1 ile çarparsak

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x)dx = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \quad (2.3)$$

sonucu elde edilir.

Klasik olarak katsayı fonksiyonunu bilinir ve I fonksiyonunu bulmak için integralleme kullanılır. Fakat burada, I' 'nın başlangıç ve nihai değerleri bilinen ancak X-ray ile örneklenen ortamın temel bir özelliğini açıklayan A katsayı fonksiyonu ise bilinmemendir.

Böylelikle, X-ray' in ölçülen yoğunluğundan, A' 'nın kendi değerinden çok, X-ray doğrusu boyunca A' 'nın integral değerlerinin belirlenebildiği görülür.

Örnek 2.1.2.1. Basit bir örnek için, A azaltma katsayısının bir örnek boyunca sabit olduğunu varsayalım. O zaman, herhangi bir X-ray ışını boyunca absorbe etme miktarı yalnızca ışın hattı boyunca örneğin genişliğine bağlıdır. Bu yüzden; eğer ışın x_0 noktasında örneğe girip x -ekseni boyunca hareket ediyor ve örneği x_1 noktasında terk ediyorsa, absorbe etme miktarı $A(x_1 - x_0)$ olur. (2.3) takip edildiğinde

$$A = \frac{\ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right)}{x_1 - x_0}$$

yazılır. Burada ki I_0 ve I_1 X-ray' in başlangıç ve nihai yoğunluklarıdır (Feeman, 2015).

Örnek 2.1.2.2. Farz edelim ki

$$A(x) := \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

ve X-ray ışını $x_0 < -1$ için x_0 noktasında I_0 başlangıç yoğunluğu ile başlayıp örnek boyunca ilerleyip $x_1 > 1$ için x_1 noktasında dedektörle ölçülen nihai yoğunluğun I_1 olduğunu varsayalım. O halde

$$\int_{x_0}^{x_1} (1 - |x|) dx = 1$$

olur ki buradan

$$\ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) = 1$$

olduğunu görürüz. Eşitlik takip edildiğinde $I_1 = e^{-1} \cdot I_0$ elde edilir. Örneğin; $I_0 = 1$ iken $I_1 = e^{-1}$ dir. $\frac{dI}{dx} = -A(x) \cdot I(x)$ diferansiyel denkleminin $I_0 = I(-1) = 1$ başlangıç koşulu ile çözümü

$$I(x) := \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ e^{-x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2} & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{-x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

verir (Feeman, 2015).

I_0 ve I_1 değerlerini ölçebilen bir X-ray emisyon-belirleme makinesi dizayn edilerek X-ray yolu boyunca azaltma katsayısı fonksiyonunun integrali olan $\int_{x_0}^{x_1} A(x) dx$ hesaplanabilir.

Bölgeden geçen her doğru boyunca A' nın ortalama değerini bilirsek, $A(x, y, z)$ (bazı sonlu bölgeler içinde) fonksiyonunu yeniden oluşturabilir miyiz? Sorusu aklımıza gelir. 1917 yılında bu soru J. Radon tarafından ele alınmış ve çözülmüştür (Radon, 1917).

2.2. Radon Dönüşümü

2.2.1. Giriş

Herhangi bir t ve θ reel sayıları için; $l_{t,\theta}$ doğrusu, $(t \cos(\theta), t \sin(\theta))$ noktası boyunca geçen ve $\vec{n} = \langle \cos(\theta), \sin(\theta) \rangle$ birim vektörüne dik olan doğrudur. Düzlemdeki tüm doğrular t ' nin ve θ ' nin bazı değerleri için $l_{t,\theta}$ olarak karakterize edilebilir. Bir örneğin enine kesitinde azaltma katsayısı fonksiyonunu temsil edebilen düzlemde tanımlanmış belirli bir f fonksiyonu için yeniden görüntü oluşturma'nın esas sorusu bizi tipik bir $l_{t,\theta}$ doğrusu boyunca f nin integral değerini düşünmeye çağırır. t ve θ değerlerinin her bir çifti için farklı bir doğru boyunca f fonksiyonu integre edilir. Böylece, elimizde gerçekten yeni bir fonksiyona sahip oluruz. Burada, girdiler t ve θ nın değerleridir ve çıktılar ise $l_{t,\theta}$ doğrusu boyunca karşılık gelen f fonksiyonunun integral değeridir. Bir f fonksiyonu seçerek başlayalım. O halde, f seçildiğinde t ve θ nın karşılık gelen bir fonksiyonunu elde ederiz. Şematik olarak

$$f \text{ girdisi} \mapsto \text{çıktı} \left\{ (t, \theta) \mapsto \int_{l_{t,\theta}} f ds \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu çok aşamalı sürece, özelliklerini inceleyen Avusturyalı matematikçi Johann Carl August Radon' un adı verilmiştir. f girdisi için, şemada gösterilen t ve θ nın karşılık gelen fonksiyonu $\mathcal{R}(f)$ ile ifade edilir. Radon dönüşümü ile ilgili daha ayrıntılı

bilgiler için Helgason, 1999; Deans, 1983; Debnath ve Bhatta, 2015; Natterer, 2001; Feeman, 2015; Kuchment, 2014; Toft, 1996; Epstein, 2008 kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.2.1.1. Tanım bölgesi düzlem olan belli bir f fonksiyonu için, f ' nin 2 boyutlu Radon dönüşümü (t, θ) reel sayılarının her bir çifti için

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(t, \theta) &:= \int_{l_{t, \theta}} f \, ds \\ &= \int_{s=-\infty}^{\infty} f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) \, ds\end{aligned}\quad (2.4)$$

ile tanımlanır.

θ ve t ' yi dikdörtgen koordinatlar olarak ele aldığımızda belirli bir fonksiyonun Radon dönüşümünü görselleştirebiliriz. Radon dönüşümünün değerlerini gri değerlerin sürekliliği üzerinde onların parlaklıklarına göre gösteririz, yani, 0 değeri siyah rengi, 0.5 nötr griyi ve 1 değeri beyazı temsil eder. Böyle bir grafik sinogram olarak adlandırılır ve temelde örneğin belirli bir dilimi için, emisyon-algılama X-ray makinesi tarafından tüm verileri gösterir. Sinogram teriminin seçimi, şüphesiz $\mathcal{R}f(-t, \theta + \pi) = \mathcal{R}f(t, \theta)$ simetrisinin yanı sıra daha sonra keşfedeceğimiz bazı basit örnekler için grafiklerin görünümü için önerilir. Sinogramlar ayrıca gri ölçekteki (tondaki) uygun bir gökkuşağı segmenti kullanılarak renkli resmedilebilir (Feeman, 2015).

Şimdi n -boyutlu uzayda Radon dönüşümünü verelim.

Tanım 2.2.1.2. n -boyutlu Radon dönüşümü $\mathbb{R}^n$ uzayından bir fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ nin hiperdüzlemleri üzerinden integrallerinin kümesine bir dönüşümdür (Natterer, 2001).

Radon dönüşümü ile ilgili hesaplamalar yapabilmek için hiperdüzlemleri (doğruların uzayını) parametrik hale getirmeliyiz. Keyfi bir hiperdüzlem $\omega \in S^{n-1}$ normal birim vektörü ve $t \in \mathbb{R}$ orjinden işaretli uzaklık ve x bir vektörü göstermek üzere $x \cdot \omega = t$ ile ifade edilir. O halde Radon dönüşümü

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = g(t, \omega) := \int_{x \cdot \omega = t} f(x) \, dx$$

ile verilir. (2.4) ifadesi aşağıdaki gibi de yazılabilir

$$(\mathcal{R}f)(t, \omega) = g(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\omega^{\perp}) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - x \cdot \omega) dx$$

Burada δ Dirac delta fonksiyonu, $\omega^{\perp}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$: $\omega^{\perp} = (-\omega_2, \omega_1)$ nin 90 derece boyunca saat yönünün tersine rotasyonudur (Kuchment, 2014; Debnath ve Bhatta, 2015).

Önerme 2.2.1.3 $a \in \mathbb{R}^2$ ve $T_a f(x) = f(x + a)$ düzlemdeki fonksiyonlar üzerinde çalışan kaydırma operatörü olmak üzere

$$\mathcal{R}T_a f(t, \omega) = (T_{a \cdot \omega} \mathcal{R})f(t, \omega)$$

bağıntısı sağlanır (Kuchment, 2014).

İspat.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}T_a f(t, \omega) &= \int_{x \cdot \omega = t} f(x + a) dx \\ &= \int_{y \cdot \omega = t + a \cdot \omega} f(y) dy = \mathcal{R}f(t + a \cdot \omega, \omega) = (T_{a \cdot \omega} \mathcal{R})f(t, \omega). \end{aligned}$$

Önerme 2.2.1.4. A , 2x2 dönme matrisi ve $M_A f(x) = f(Ax)$ operatörü de bu matrise karşılık gelen dönme operatörü olmak üzere

$$\mathcal{R}M_A = M_A \mathcal{R}$$

bağıntısı sağlanır (Kuchment, 2014).

İspat.

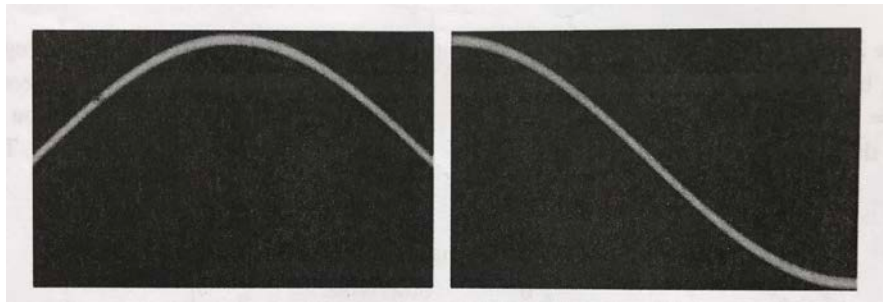
$$\begin{aligned} \mathcal{R}M_A f(t, \omega) &= \int_{x \cdot \omega = t} f(Ax) dx = \int_{A^{-1} \cdot y \cdot \omega = t} f(y) dy \\ &= \int_{y \cdot A\omega = t} f(y) dy = \mathcal{R}f(t, A\omega) = M_A \mathcal{R}f(t, \omega). \end{aligned}$$

2.2.2. Örnekler

Örnek 2.2.2.1. İlk örnek olarak; hastamızın $(0,1)$ merkezli, $0,05$ yarıçaplı küçük bir çembersel tümöre sahip olduğunu ve f azaltma katsayısı fonksiyonunun oradaki değerinin sabit 10 olduğunu varsayalım. Şimdi keyfi bir θ değeri alalım. Bu durumda, $t = \sin(\theta)$ iken, $l_{t,\theta}$ doğrusu $(0,1)$ boyunca geçer ve çembersel tümöre bir çap oluşturur. Bu diskin çapı $2 \cdot (0,05) = 1$ olduğundan $\mathcal{R}f(\sin(\theta), \theta) = 10 \cdot (0,1) = 1$ elde edilir. Daha da fazlası; herhangi bir θ değeri için, $\mathcal{R}f(t, \theta)$ nin değeri, $\sin(\theta) - 0,05 < t < \sin(\theta) + 0,05$ dar bandı hariç 0 olur.

Böylece, $0'$ dan π' ye θ değerleri için grafik; $t = \sin(\theta)$ merkez civarı, 0.1 genişliğinde dar, daha parlak bir gri şerit olarak görülür. Başka bir ifadeyle, (θ, t) düzlemindeki $\mathcal{R}f'$ nin grafiği, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiğine benzer. Benzer biçimde, $(1,0)$ konumlu küçük, parlak bir diskin Radon dönüşümünün (θ, t) düzlemindeki grafiği $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiğine benzer. Şekil 2.2, bu iki parlak disk için sinogramlar gösterir. Belki bu örnekler bir Radon dönüşümünün grafiği için sinogram teriminin kullanılmasına yönelik bir yardım sağlar (Feeman, 2015).

Örnek 2.2.2.1' de düzlemin sonlu bir bölgesi üzerinde sabit (sıfır olmayan) bir değere ve bu bölgenin dışında kalan yerlerde 0 değerine sahip bir azaltma katsayısı fonksiyonunu ele aldık. Bu tip fonksiyonlara bazı terminolojileri eklemek için, varsayalım ki Ω düzlemde sonlu bir bölgede olsun ve f_Ω yı Ω yı içeren her bir noktada 1 , Ω da olmayan her bir noktada 0 değerine sahip olan bir fonksiyon olarak ele alalım.



Şekil 2.2. $(0,1)$ (sol) ve $(1,0)$ (sağ) merkezli küçük ve parlak çembersel diskler için sinogramlar, sırasıyla, $\sin$ ve $\cos$ fonksiyonlarının grafiklerine benzer (Feeman, 2015)

Bu f_Ω fonksiyonu, karakteristik fonksiyon veya Ω bölgesinin gösterge fonksiyonu olarak bilinir. Böylece, önceki örneğimizde, küçük bir diskin karakteristik fonksiyonunun katına bakmış olduk.

Azaltma katsayısı fonksiyonu, f_Ω karakteristik fonksiyonu olduğunda; onun Radon dönüşümünün anlaşılması özellikle kolaydır. Aslında, herhangi bir $l_{t,\theta}$ doğrusu boyunca, doğrunun değerinin 1 olduğu Ω bölgesinin içinden geçmesi dışında f_Ω nin değeri 0 olur. Böylece t ve θ değerlerinin her bir çifti için, $\mathcal{R}f_\Omega(t, \theta)$ nın değeri, $l_{t,\theta}$ doğrusu ile Ω bölgesinin kesişiminin uzunluğuna eşittir.

Genellikle, test ettiğimiz nesne her biri kendine özgü azaltma katsayısına sahip çeşitli malzemelerin damlalarının bir koleksiyonunu içerebilir. Yakında görebileceğimiz gibi tüm koleksiyonun Radon dönüşümü ayrı ayrı damlaların dönüşümlerinin bir bileşimi olacaktır. Sonuç olarak; örneğinin bu temel türünü anlama, görüntünün yeniden yapılandırılması için, çeşitli yaklaşımların doğruluğunun değerlendirilmesinde merkezi bir rol oynayacaktır.

Örnek 2.2.2.2. $a > 0$ olmak üzere, $\mathcal{R}[\exp\{-a^2(x^2 + y^2)\}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-a^2 p^2)$, olduğunu gösterelim.

$m = u_1 x + u_2 y$ ve $n = -u_2 x + u_1 y$ bağıntılarını kullanarak

$$x^2 + y^2 = m^2 + n^2$$

$$f(m, n) = \{-a^2(m^2 + n^2)\}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{R}f(p, \mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-a^2(m^2 + n^2)\} \delta(p - m) dm dn$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 m^2) \delta(m - p) dm \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 n^2) dn$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-a^2 p^2) \text{ (Debnath ve Bhatta, 2015).}$$

Örnek 2.2.2.3. Orijin merkezli, $R > 0$ yarıçaplı kapalı çembersel disk olan Ω bölgesini ele alalım. O zaman Ω nın karakteristik fonksiyonu

$$f_{\Omega} := \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq R \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile elde edilir.

Eğer t' nin değerini $|t| > R$ olarak seçersek, o zaman, θ' nin değerini düşünmeksizin, $l_{t,\theta}$ doğrusu Ω diski ile kesişmeyecektir. Böylece, $l_{t,\theta}$ doğrusu üzerindeki her noktada $f_{\Omega} = 0$ dır ve böylelikle, böyle bir t için $\mathcal{R}f_{\Omega}(t, \theta) = 0$ olur. Diğer taraftan; eğer t' yi $|t| \leq R$ olarak ele alırsak, o zaman; $l_{t,\theta}$ doğru için parametreleştirmede $-\sqrt{R^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{R^2 - t^2}$ parametre değerlerine karşılık gelen segment boyunca Ω' yı keser. Bu segmentin uzunluğu $2\sqrt{R^2 - t^2}$ dir. f_{Ω}' nin değeri ise bu aralıktaki noktalarda 1, aksi halde 0' dır. Bu yüzden, böyle bir t için $\mathcal{R}f_{\Omega}(t, \theta)$ nin değeri segmentin uzunluğu ile aynıdır. Yani, $\mathcal{R}f_{\Omega}(t, \theta) = 2\sqrt{R^2 - t^2}$ dir. Özet olarak

$$\mathcal{R}f_{\Omega}(t, \theta) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - t^2} & |t| \leq R \\ 0 & |t| > R \end{cases}$$

elde edilir (Feeman, 2015).

Örnek 2.2.2.4. Aşağıda verilen fonksiyonların Radon dönüşümlerini bulalım.

(a) $f(x, y) = x \exp[-a(x^2 + y^2)], \quad a > 0$

(b) $g(x, y) = y \exp[-a(x^2 + y^2)], \quad a > 0$

İspat. (a) Tanımdan

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} (t \cos \theta - s \sin \theta) \exp[-a(t^2 + s^2)] ds$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} t \cos \theta \exp(-at^2)$$

elde edilir.

(b) Benzer şekilde

$$\mathcal{R}g(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} (t \cos \theta + s \sin \theta) \exp[-a(t^2 + s^2)] ds$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} t \sin \theta \exp(-at^2).$$

buradan

$$\mathcal{R}\{(x+y) \exp[-a(x^2+y^2)]\} = \mathcal{R}f(t, \theta) + i\mathcal{R}g(t, \theta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} t e^{i\theta} \exp(-at^2)$$

elde edilir (Debnath ve Bhatta, 2015).

Örnek 2.2.2.5. Karakteristik fonksiyon temasıyla devam edersek; S' yi kenarları $x = \pm 1$ dikey doğruları ve $y = \pm 1$ yatay doğruları boyunca uzanan karenin çevrelediği bölge olarak ele alalım. O zaman

$$f_S(x, y) = \begin{cases} 1, & \max\{|x|, |y|\} \leq 1 \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak gösterilir.

Yukarıda anlatıldığı gibi, her bir t ve θ için; f_S 'nin Radon dönüşümüne karşılık gelen $\mathcal{R}f_S(t, \theta)$ değeri, $l_{t,\theta}$ doğrusu ile S kare bölgesinin kesişme uzunluğuna eşit olur. Bu kesişimin uzunluğunu görmek kolaydır ve bunun için θ ' nın iki değeri vardır. Bunlar $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir. Bu durumda; $l_{t,\theta}$ doğruları sırasıyla dikey ve yataydır. Böylece, $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için, $-1 \leq t \leq 1$ iken $\mathcal{R}f(t, \theta) = 2$ ve $|t| > 1$ iken $\mathcal{R}f(t, \theta) = 0$ dır. Genel olarak; $\mathcal{R}f_S(t, \theta)$ fonksiyonu θ ' nin sabit her bir değeri için t ' de parçalı doğrusal olur.

Örnek 2.2.2.6. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\mathcal{R}\{e^{-x^2-y^2}\} = \sqrt{\pi} e^{-t^2}$$

olarak bulunur (Deans, 1983).

Örnek 2.2.2.7. Karakteristik fonksiyon olmayan bir örnek için; f fonksiyonu

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

olarak tanımlansın. O zaman

$$f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), (t \sin(\theta) + s \cos(\theta))) := \begin{cases} 1 - \sqrt{t^2 + s^2} & t^2 + s^2 \leq 1 \\ 0 & t^2 + s^2 > 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

elde edilir ve buradan görebiliriz ki, $\mathcal{R}f(t, \theta)$ 'nin değeri θ 'ya bağlı değildir yalnızca t 'ye bağlıdır ve $|t| > 1$ olduğu durumlarda $\mathcal{R}f(t, \theta) = 0$ 'dır. t 'nin sabit bir değeri için öyle ki $|t| \leq 1$ olduğunda, $t^2 + s^2 \leq 1$ koşulu $s^2 \leq 1 - t^2$ şartını sağlar. Böylece, herhangi bir θ ve t değeri için öyle ki $|t| \leq 1$ olsun

$$f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) \quad (2.7)$$

$$= \begin{cases} 1 - \sqrt{t^2 + s^2} & -\sqrt{1 - t^2} \leq s \leq \sqrt{1 - t^2} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

buradan

$$\int_{l_{t,\theta}} f \, ds = \int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) \, ds \quad (2.8)$$

elde edilir. O zaman

$$\int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) \, ds = \sqrt{1 - t^2} - \frac{1}{2} t^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{1 - \sqrt{1 - t^2}} \right) \quad (2.9)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{R}f(t, \theta) := \begin{cases} \sqrt{1 - t^2} - \frac{1}{2} t^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{1 - \sqrt{1 - t^2}} \right) & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

elde edilir (Feeman, 2015).

2.2.3. $\mathcal{R}$ 'nin Bazı Özellikleri

Önerme 2.2.3.1. f ve g fonksiyonları ve herhangi α ve β sabitleri için

$$\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R}f + \beta \mathcal{R}g, \quad (2.11)$$

yani, Radon dönüşüm lineer dönüşümdür (Feeman, 2015).

İspat. f ve g fonksiyonlarının düzlemde tanımlı olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f + g)(t, \theta) &= \int_{s=-\infty}^{\infty} (f + g)(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds \\ &= \int_{s=-\infty}^{\infty} \{f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) \\ &\quad + g(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta))\} ds \\ &= \int_{s=-\infty}^{\infty} f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds \\ &\quad + \int_{s=-\infty}^{\infty} g(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds \\ &= \mathcal{R}f(t, \theta) + \mathcal{R}g(t, \theta). \end{aligned}$$

Diğer yandan $\int \alpha f = \alpha \int f$ olduğundan $\mathcal{R}(\alpha f) = \alpha \mathcal{R}f$ dir.

Önerme 2.2.3.2. $L_2([-1,1] \times S^1, (1 - t^2)^{-1/2})$,

$$\int_{-1}^1 \int_{S^1} |g(t, \omega)|^2 \frac{d\omega dt}{\sqrt{1-t^2}} < \infty$$

koşulunu sağlayan sonlu silindir $[-1,1] \times S^1$ üzerindeki fonksiyonlardan oluşan uzay olsun. $\mathbb{R}^2$ de orijin merkezli birim çemberi Ω ile gösterelim ve fonksiyonun Ω da destekli (supported) olduğunu varsayalım. O zaman $\mathcal{R}$ Radon dönüşümü, $L_2(\Omega)$ dan $L_2([-1,1] \times S^1, (1 - t^2)^{-1/2})$ ye sürekli lineer bir operatördür.

İspat. $f \in L_2(\Omega)$ olsun. O halde

$$|\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 = \left| \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\omega + s\omega^\perp) ds \right|^2.$$

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leq \sqrt{1-t^2} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda, son integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) f(t\omega + s\omega^\perp) ds$$

olarak yeniden yazılabilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$|\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 \leq 2\sqrt{1-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t\omega + s\omega^\perp)|^2 ds$$

elde edilir.

Şimdi her iki tarafı $\sqrt{1-t^2}$ ye bölerek ve ω ve t ' ye göre integral alarak, gereken eşitsizliğe ulaşılır (Kuchment, 2014).

Önerme 2.2.3.3. Düzlemde tanımlı f fonksiyonunu, a ve b keyfi reel sayılarını ve pozitif bir c reel sayısını ele alalım. g fonksiyonu; $g(x, y) = f(x - a, y - b)$ ile ve h fonksiyonu ise $h(x, y) = f(cx, cy)$ ile tanımlansın. O zaman, bütün t ve θ reel sayıları için

$$\mathcal{R}g(t, \theta) = \mathcal{R}f(t - a \cos(\theta) - b \sin(\theta), \theta) \quad (2.12)$$

ve

$$\mathcal{R}h(t, \theta) = (1/c) \cdot \mathcal{R}f(ct, \theta) \quad (\text{Feeman, 2015}). \quad (2.13)$$

Örnek 2.2.3.4. Orijin merkezli, $R > 0$ yarıçaplı bir diskin karakteristik fonksiyonu için Radon dönüşümünü zaten biliyoruz. Şimdi varsayalım ki; Ω , f_Ω karakteristik fonksiyonuna sahip (a, b) merkezli, $R > 0$ yarıçaplı disk. (2.12) takip edildiğinde, f_Ω ' nin Radon dönüşümü

$$\mathcal{R}f_\Omega(t, \theta) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - \hat{t}^2} & |\hat{t}| \leq R \\ 0 & |\hat{t}| > R \end{cases}$$

ile elde edilir. Burada ki $\hat{t} := t - a \cos(\theta) - b \sin(\theta)$ eşittir (Feeman, 2015).

2.2.4. $\mathcal{R}$ 'nin Tanım Bölgesi

Tanım 2.2.1.1' den görebileceğimiz gibi, bir f fonksiyonun $\mathcal{R}f$ Radon dönüşümü, $l_{t,\theta}$ doğrusu boyunca f' nin integralinin t ve θ değerlerinin her bir çifti için mevcut olması koşuluyla sağlanır. Bu integrallerin her biri görünüşte sonsuz bir aralık üzerinde değerlendirilen uygunsuz bir integraldir. Böylece, genel olarak, f fonksiyonu, böyle her doğru boyunca integrallenebilir olmalıdır.

Medikal görüntüleme bağlamında, f fonksiyonu, materyalin görüntüsü ne olursa olsun bir diliminin azaltma katsayısı fonksiyonunu veya yoğunluğunu temsil eder. Böylece, fonksiyonunun kompakt desteğe sahiptir, bunun anlamı şudur ki; fonksiyonun sıfır değerine sahip olduğu yerler dışında bazı sonlu diskler vardır. Bu durumda, uygun olmayan integraller $(\int_{l_{t,\theta}} f ds)$ sonlu aralıklar boyunca düzenli integraller haline gelirler. O zaman, $\mathcal{R}f'$ nin varlığı için tek şart f' nin desteklendiği sonlu disk üzerinde integrallenebilir olmasıdır. Örneğin bu, f' nin disk üzerinde parça parça sürekli olduğu durumlarda söz konusu olur.

2.2.5. Azaltılmış Radon Dönüşümü

Tanım 2.2.5.1. Tanım kümesi düzlem olan bir f fonksiyonu ve μ fonksiyonu için, f fonksiyonunun μ fonksiyonuna göre azaltılmış Radon dönüşümü, her bir (t, θ) reel sayı çifti için

$$\mathcal{R}_\mu f(t, \theta) := \int_{l_{t,\theta}} \mathcal{A}_\mu(x, y, t, \theta) f(x, y) ds \quad (2.14)$$

ile tanımlanır.

2.3. Geri Projeksiyon

Bu bölümde f azaltma katsayısı fonksiyonu $\mathcal{R}f$ Radon dönüşümünden elde edilecektir.

2.3.1. Tanım ve Özellikler

Beatty (2012), ilgili çalışmasında geri projeksiyonun, görüntünün yeniden oluşturulmasındaki önemine değinmiştir. $\mathcal{R}f(t, \theta)$ Radon dönüşümünün bize bir $l_{t,\theta}$ doğrusu boyunca f nesnesinin toplam yoğunluğunu verdiğini biliyoruz. Bu doğru boyunca nesneden çekilen bir X-ray demetinin ilk ve son yoğunluklarını ölçerek bu yoğunluk belirlendi. Bunu birden fazla ve farklı doğrular boyunca yaparak, başlangıç nesnemizin tek

bir dilimini oluşturabiliriz ve bu X-ray ışınlarının θ açısını değiştirerek birçok dilim tanımlayabiliriz. Bu yoğunlukları bir şekilde düzleme “geri yansıtabilirsek”, belki de başlangıç nesnemizi yeniden oluşturabiliriz.

Tanım 2.3.1.1. $h = h(t, \theta)$ olsun. Bh ile gösterilen (x, y) noktasındaki h fonksiyonunun geri projeksiyonu

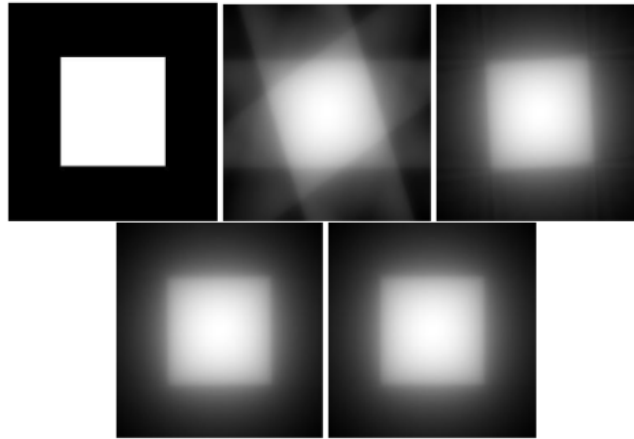
$$Bh(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta$$

şeklinde tanımlanır. Geri projeksiyon operatörü Radon dönüşümün formal adjoint operatörüdür.

Bu formül Radon dönüşümüne uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$B\mathcal{R}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta. \quad (2.15)$$

Medikal görüntüleme bağlamında, f azaltma katsayısı fonksiyonunu temsil eder. Ölçtüğümüz dilimler üzerinden geri projeksiyon yapabiliriz. Şekil 2.3’ de gösterildiği gibi, yalnızca birkaç θ yönde geri yansıtma basit bir nesneyi bile yeniden oluşturmanın yanlış bir yoludur.



Şekil 2.3. Bir karenin 5, 25, 100 ve 1000 yönlerine göre geri projeksiyonu (Beatty, 2012)

Kullandığımız geri yansıtma sayısını önemli ölçüde arttırsak bile (Örneğin 1000 yöne kadar), yeniden oluşturulan görüntüde hâlâ büyük miktarda bulanık görüntü bulunur. Ne kadar geri yansıtma yaparsak yapalım, yine de Denklem 2.15’ in geri yansıtma formülünü

kullanarak mükemmel bir şekilde görüntüyü yeniden oluşturamayacağız. Bu işlemin yararlı olması için filtrelenmiş geri projeksiyon formülü tanımlanır.

Teorem 2.3.1.2. $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlı ve integrallenebilen bir f fonksiyonu için, filtrelenmiş geri projeksiyon

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}\{\mathcal{F}^{-1}[|S|\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]\}(x, y) \quad (2.16)$$

olarak tanımlanır (Beatty, 2012).

İspat. İlk önce, 2 boyutlu Fourier dönüşümü ve tersi için aşağıdaki denklemi hatırlayalım.

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(X, Y) e^{i(xX+yY)} dXdY \quad (2.17)$$

Şimdi, (X, Y) Kartezyen koordinatlardan (S, θ) kutupsal koordinatlara bir değişken değişikliği yapalım. $S \in \mathbb{R}$ için X yerine $S \cos(\theta)$ ($X = S \cos(\theta)$) ve $\theta = [0, \pi]$ için Y yerine $S \sin(\theta)$ ($Y = S \sin(\theta)$) yazalım. Bu bize aşağıdaki Jacobian determinantını verir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = |S|$$

ki buradan, $dX/dY = |S|dSd\theta$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu değişken değişikliği (2.16) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) e^{iS(x \cos(\theta)+y \sin(\theta))} |S|dSd\theta$$

elde edilir.

Merkezi dilim teoremini (Teorem 2.4.2.5) kullanarak yukarıdaki denklemin aslında (2.18)'e eşit olduğunu görürüz.

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta) e^{iS(x \cos(\theta)+y \sin(\theta))} |S|dSd\theta \quad (2.18)$$

Şimdi Denklem 2.18' in iç integraline daha yakından bakalım ve aşağıdakilere dikkat edelim.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |S| dS \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |S| dS \right) \\
&= 2\pi \mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)](x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta)
\end{aligned}$$

Yani Denklem 2.18' in iç integrali, $(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta)$ noktasında $|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)$ nın Fourier dönüşümünün tersinin 2 katıdır. O zaman, (2.18)' in aslında

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)](x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta$$

eşit olduğunu görebiliriz.

Son olarak, yukarıdaki integralin, $\mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]$ için Tanım 2.3.1.1' de verilen geri projeksiyonunun 1/2 olduğunu görürüz. Bu nedenle yukarıdaki denklemi

$$\frac{1}{2} \mathcal{B}\{\mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]\}(x, y)$$

olarak sadeleştiririz.

Bu da bizi istediğimiz sonuca götürür, yani

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}\{\mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]\}(x, y).$$

$|S|$ çarpanının Fourier dönüşümü ile tersi arasında meydana gelmesi önemli bir faktördür. Bu faktör olmadan, bu iki terim birbirinin etkisini yok ederdi ve Radon dönüşümü için bize doğrudan $f(x, y)$ ' yi geri vermeyen standart geri projeksiyon formülüyle kalacaktık. Buna ilaveten, filtrelenmiş geri projeksiyon formülünü veren $|S|$ ' yi Radon dönüşümü için bir filtre olarak adlandırırız.

Önerme 2.3.1.3 Geri projeksiyon bir lineer dönüşümdür. Yani, herhangi iki h_1, h_2 fonksiyonları ve keyfi c_1, c_2 sabitleri için

$$\mathcal{B}(c_1 h_1 + c_2 h_2)(x, y) = c_1 \mathcal{B}h_1(x, y) + c_2 \mathcal{B}h_2(x, y) \quad (2.19)$$

eşitliği x ve y 'nin tüm değerleri için sağlanır (Feeman, 2015).

2.4. Fourier Dönüşümü

Bu bölümde sinyal analizinde oldukça sık kullanılan ve bir zaman fonksiyonunu bir frekans fonksiyonuna dönüştürmek için bir araç olan Fourier dönüşümü ve bazı özellikleri verilecektir. Bu konu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Hörmander, 2003; Tolstov, 1962; Stein, 2003; Stein ve Weis, 1971; Strichartz, 2003; Körner, 1989; Natterer, 2001 kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.4.1. $\mathbb{R}$ ' de tanımlı integrallenebilen bir f fonksiyonunun $\mathcal{F}f$ ile gösterilen Fourier dönüşümü, her reel ξ sayısı için

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır.

Fourier dönüşümünde x değişkeni saniye cinsinden zamanı temsil ederken, ξ değişkeni Hertz' de fonksiyonun frekansını temsil eder. $\omega = 2\pi\xi$ olmak üzere ω açısal frekansı kullanan alternatif bir tanım vardır

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (2.21)$$

(2.21) ile verilen tanım mühendislik ve medikal (tıbbi) görüntülemelerde daha yaygın olarak kullanılmaktadır (Beatty, 2012).

2.4.1. Fourier Dönüşümü Özellikleri

Toplanabilirlik. İntegrallenebilen bütün f ve g fonksiyonları ve her reel ω sayısı için

$$\mathcal{F}(f + g)(\omega) = \mathcal{F}f(\omega) + \mathcal{F}g(\omega) \quad (2.22)$$

dir.

Sabit Katsayı. Bütün integrallenebilen f fonksiyonları, bütün c karmaşık sayıları ve her ω reel sayıları için

$$\mathcal{F}(cf)(\omega) = c \cdot \mathcal{F}f(\omega) \quad (2.23)$$

dir.

Önerme 2.4.1.1. Fourier dönüşümü, integrallenebilen fonksiyonlar üzerinde lineer bir dönüşümdür. Yani, integrallenebilen f ve g fonksiyonları ve herhangi α ve β katsayıları için

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g) \quad (2.24)$$

dir (Feeman, 2015).

Kaydırma – Öteleme. İntegrallenebilen bir f fonksiyonu ve sabit α sayısı için, $g(x) = f(x - \alpha)$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}g(\omega) = e^{-i\omega\alpha} \mathcal{F}f(\omega) \quad (2.25)$$

elde edilir (Feeman, 2015).

İspat. Her bir ω için

$$\mathcal{F}g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha) e^{-i\omega x} dx$$

u yerine $x - \alpha$ yazıldığında

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+\alpha)} du$$

$$= e^{-i\omega\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du$$

$$= e^{-i\omega\alpha} \mathcal{F}f(\omega)$$

bulunur.

Kaydırma – Modülasyon. Verilen f fonksiyonu ve sabit ω_0 sayısı için, $h(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}h(\omega) = \mathcal{F}f(\omega - \omega_0) \quad (2.26)$$

elde edilir (Feeman, 2015).

İspat. Her bir ω için

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 x} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega - \omega_0)x} dx \\
&= \mathcal{F}f(\omega - \omega_0)
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da istenileni kanıtlar.

Bu iki kaydırma özelliği, f' nin bir modülasyonu $\mathcal{F}f'$ nin ötelenmesini oluştururken, f' nin ötelenmesi $\mathcal{F}f'$ nin bir modülasyonu ile sonuçlandığını göstermektedir.

Ölçekleme. Verilen bir f fonksiyonu ve sıfırdan farklı sabit reel a sayısı için, $\phi(x) = f(ax)$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}\phi(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}f(\omega/a) \text{ (Feeman, 2015)}. \quad (2.27)$$

İspat. a' nın sıfırdan büyük bir reel sayı olduğunu varsayalım. O halde her bir ω sayısı için,

$$\mathcal{F}\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\omega x} dx$$

u yerine ax yazıldığında

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} du \\
&= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(\omega/a)u} du \\
&= \frac{1}{a} \mathcal{F}f(\omega/a)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.4.1.2. $\mathbb{R}'$ de tanımlı, integrallenebilen bir f fonksiyonu ve her reel ω sayısı için

$$\mathcal{F}\bar{f}(\omega) = \overline{\mathcal{F}f}(-\omega) \text{ (Feeman, 2015)}. \quad (2.28)$$

İspat.

$$\mathcal{F}\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i(-\omega)x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \overline{e^{-i(-\omega)x}} dx$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(-\omega)x} dx}$$

$$= \overline{\mathcal{F}f(-\omega)}$$

$$= \overline{\mathcal{F}f}(-\omega).$$

2.4.2. Fourier Dönüşümünün Ters

Tanım 2.4.2.1. Mutlak integrallenebilir bir f fonksiyonu için, $\mathcal{F}^{-1}f$ ile gösterilen f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü, her bir x reel sayısı için

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (2.29)$$

ile tanımlanır (Beatty, 2012).

Bu bizi aşağıdaki teoreme yönlendirir.

Teorem 2.4.2.2. Ters Fourier Teoremi. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ tanımlı ve reel doğru üzerinde sürekli ise, o zaman tüm x ' ler için

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = f(x) \quad (2.30)$$

eşitliğini sağlar (Beatty, 2012).

Şimdiye kadar Fourier dönüşümünü sadece bir boyutta inceledik. Daha yüksek boyutlarda karşılık gelen tanımlar vardır, ancak amaçlarımız için sadece iki boyutlu analogları kullanacağız.

Tanım 2.4.2.3. $\mathbb{R}^2$ ' de tanımlı kesinlikle integrallenebilir bir g fonksiyonu için, $\mathcal{F}_2 g$ ile gösterilen g ' nin 2-boyutlu Fourier dönüşümü tüm $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\mathcal{F}_2 g(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(xX+yY)} dx dy \quad (2.31)$$

olarak tanımlanır (Beatty, 2012).

Benzer olarak $\mathbb{R}^2$ ' de ters Fourier dönüşümünü de tanımlayabiliriz.

Tanım 2.4.2.4. $\mathbb{R}^2$ ' de tanımlı kesinlikle integrallenebilir bir g fonksiyonu için, $\mathcal{F}_2^{-1} g(x, y)$ ile gösterilen (x, y) noktasındaki 2-boyutlu ters Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}_2^{-1} g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y) e^{-i(xX+yY)} dx dy \quad (2.32)$$

olarak tanımlanır (Beatty, 2012).

Son olarak Radon dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilişkiyi verelim.

Teorem 2.4.2.5. Merkezi Dilim Teoremi. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki bir $f(x)$ fonksiyonu uygun koşullar altında (örneğin, L_2 ' de olmak yeterlidir), aşağıdaki bağıntıyı sağlar

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\sigma, \omega) = \tilde{f}(\sigma\omega) \text{ (Kuchment, 2014).}$$

İspat. f fonksiyonunun Radon dönüşümünü aşağıdaki gibi yazalım.

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\omega^\perp) ds$$

O halde

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\sigma, \omega) = \int dt \int ds f(t\omega + s\omega^\perp) e^{-i\sigma t} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i\sigma x \omega} dx = \tilde{f}(\sigma\omega).$$

elde edilir.

2.5. Filtreler ve Kırım

2.5.1. Giriş

Sinyallerin analizinde endişe duyulan şey gürültünün varlığıdır. Buradaki gürültü terimi, bir sinyali bozan daha çok veya daha az herhangi bir etki anlamına gelir. Bu bozulma arka plan radyasyonundan, ana sinyale müdahale eden başıboş sinyallerden, gerçek sinyalin ölçümündeki hatalardan veya sizden kaynaklı olarak meydana gelebilir. Gürültünün etkilerini ortadan kaldırmak ve gerçek sinyalin daha net bir resmini oluşturmak için bir filtre uygulanır.

Bir filtrenin ilk örneği için, bir sinyalde var olan gürültünün genellikle rastgele olduğunu düşünelim. Bunun anlamı şudur ki; gürültünün ortalama miktarı zamanla 0 olmalıdır. Ayrıca, gürültünün genellikle yüksek bir frekansa sahip olduğunu, dolayısıyla gürültü sinyalinin grafiğinin bulanık ve pürüzlü olduğunu da göz önünde bulunduralım. Bu, gürültü miktarı oldukça kısa bir zaman aralığında sıfıra ortalanması gerektiği anlamına gelir. Bu yüzden, $T > 0$ pozitif bir reel sayı olsun ve f bir gürültü sinyalini temsil etsin. Her bir sabit x değeri için, $x - T \leq t \leq x + T$ aralığındaki f' nin ortalama değeri

$$f_{\text{ort}}(x) = \frac{1}{2T} \int_{t=x-T}^{x+T} f(t) dt \quad (2.33)$$

ile elde edilir.

Henüz tanımlanmış olan f_{ort} fonksiyonu, orijinal sinyal f' nin filtrelenmiş bir versiyonunu temsil eder. T' nin uygun bir değeri için, gürültünün aralık boyunca ortalamasının 0 olması gerekir, dolayısıyla f , kurtarmaya çalıştığımız gürültüsüz sinyale yakın olacaktır.

Şimdi, $\phi = \Pi_T/(2T)$ fonksiyonunu

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (2.34)$$

ile tanımlayalım. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Pi_T(t) dt = 1$$

elde edilir. Ayrıca, sabit her bir x değeri için

$$\phi(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & x-T \leq t \leq x+T \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (2.35)$$

dolayısıyla, herhangi bir f fonksiyonu ve herhangi sabit x değeri için

$$f(t) \phi(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} f(t) & x-T \leq t \leq x+T \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (2.36)$$

elde edilir. Buradan, (2.33)' teki integral aşağıdaki integrale özdeşdir

$$f_{\text{ort}}(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \phi(x-t) dt. \quad (2.37)$$

Sayısal olarak, f_{ort} fonksiyonu, $2T$ genişliğindeki aralıklar üzerindeki f değerinin hareketli bir ortalamasını temsil eder. Bu teknik, her tür sinyalin analizi -radyo, elektriksel, mikrodalga, ses- ve ayrıca borsa fiyatlarının uzun vadeli davranışı gibi sinyal olarak düşüneyebileceğimiz şeyler için kullanılır.

Örnek 2.5.1.1.

$$f(t) = \Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

olsun. $\phi = \Pi_T/(2T)$ olarak alalım. Ayrıca, $a \geq T$ olduğunu varsayalım.

Herhangi bir x değeri için, $f(t) \cdot \phi(x-t)$ çarpımı, $x-T \leq t \leq x+T$ ve $-a \leq t \leq a$ aralıklarının kesişimi dışında sıfır olur.

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(x-t) dt$$

integralinin değeri $1/(2T)$ ile çarpılmış bu örtüşmenin uzunluğuna eşit olur.

Eğer $|x| > T + a$ ise, o zaman hem $|t| \leq a$ hem de $|x-t| \leq T$ durumlarının olması muhtemeldir. Dolayısıyla, bu durumdaki tüm t ' ler için

$$f(t) \cdot \phi(x - t) = 0$$

olur. Eğer $|x| \leq a - T$ ise

$$f(t) \cdot \phi(x - t) = 1/(2T)$$

olur. Böylece

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(x - t) dt = \int_{t=x-T}^{x+T} \left(\frac{1}{2T}\right) dt = 1.$$

Son olarak $a - T \leq |x| \leq a + T$ olsun. Bu durumda, $[x - T, x + T]$ ve $[-a, a]$ aralıklarının kesişimi, x ' in sırasıyla pozitif veya negatif olup olmadığına bağlı olarak, ya $[x - T, a]$ aralığı ya da $[-a, x + T]$ aralığıdır. Her iki durumda da, bu kesişim $a + T - |x|$ genişliğinin bir aralığıdır. Böylece, böyle bir x için

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(x - t) dt = \frac{1}{2T} (a + T - |x|)$$

elde edilir. Bu durumları birleştirerek, (2.37)' de olduğu gibi filtrelenmiş f_{ort} fonksiyonu

$$f_{\text{ort}}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a - T \\ \frac{1}{2T} (a + T - |x|) & a - T \leq |x| \leq a + T \\ 0 & |x| > a + T \end{cases} \quad (2.38)$$

elde edilir.

2.5.2. Kıvrım (Convolution)

(2.37)' deki integralde $\Pi_T/(2T)$ ' nin yerine başka bir g fonksiyonu kullanıldığında, elde edilen fonksiyon, ardışık aralıklar üzerindeki f ' nin ortalama değerinin basit bir hareketi değildir. Ama g fonksiyonu ile belirlenmiş bir yolda filtrelenmiş f fonksiyonunun modifiye edilmiş bir versiyonunu elde ederiz.

Tanım 2.5.2.1. Reel doğru üzerinde tanımlı ve integrallenebilen f ve g fonksiyonlarının kıvrımı $f * g$ ile ifade edilir ve $x \in \mathbb{R}$ için $f * g$

$$(f * g)(x) := \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt \quad (2.39)$$

ile tanımlanır.

2.5.3. Kıvrımın Bazı Özellikleri

Değişme Özelliği. Uygun f ve g fonksiyonları için

$$f * g = g * f.$$

İspat. Her bir x reel sayısı için

$$(f * g)(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt$$

integralinde $u = x - t$ ile değişken değişimi yapılırsa $du = -dt$ ve $t = (x - u)$ elde edilir. Ayrıca, $t = -\infty$ olduğunda $u = \infty$ ve $t = \infty$ olduğunda ise $u = -\infty$ elde edilir. Böylece, önceki integral

$$\int_{u=\infty}^{-\infty} f(x - u) g(u) (-du)$$

haline gelir, ki bu da

$$\int_{u=-\infty}^{\infty} g(u) f(x - u) du$$

integrali ile aynıdır.

Bu son integral tam olarak $(g * f)(x)$ ' in tanımıdır. Sonuç olarak; istenildiği gibi, $f * g = g * f$ dir.

Lineerlik Özelliği. Uygun f , g_1 ve g_2 fonksiyonları ve α , β skalerleri için

$$f * (\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha(g_1 * f) + \beta(g_2 * f)$$

$$(\alpha g_1 + \beta g_2) * f = \alpha(g_1 * f) + \beta(g_2 * f)$$

elde edilir.

Kaydırma Özelliği. Bir f fonksiyonu ve a reel sayısı için, f_a kaydırılmış fonksiyonu ifade etsin.

$$f_a(x) = f(x - a)$$

O zaman, uygun bir g için

$$(g * f_a)(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) f_a(x - t) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) f(x - t - a) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) f((x - a) - t) dt$$

$$= (g * f)(x - a)$$

$$= (g * f)_a(x)$$

elde edilir.

Benzer biçimde

$$(g_a * f)(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} g_a(t) f(x - t) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t - a) f(x - t) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t - a) f((x - a) - (t - a)) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} g(s) f((x - a) - s) ds; s = t - a$$

$$= (g * f)(x - a)$$

$$= (g * f)_a(x)$$

diyebiliriz.

Dirac delta fonksiyonu ile kıvrım. Her bir x reel sayısı için

$$(f * \delta)(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(x - t) dt = f(x)$$

hesaplanır, burada $t = x$ ve $\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(s) ds = 1$ olmadığı sürece $\delta(x - t) = 0$ eşitliğini kullandık. Diğer bir ifadeyle, Dirac delta fonksiyonu ile kıvrım özdeşlik dönüşümü gibi davranır.

$$(f * g)(x) = f(x), \text{ tüm } x' \text{ ler için; } f * \delta = f \quad (2.40)$$

2.5.4. Filtre Çözünürlüğü

Bir f fonksiyonunun kıvrımı ile δ fonksiyonu tam olarak f' yi yeniden üretir; yani bu filtre mükemmel bir çözünürlüktür. Daha genel olarak, ϕ , $x = 0$ ' da elde edilen tek bir M maksimum değerine sahip negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $x < 0$ için artan ve $x > 0$ için azalan olduğunu varsayalım. x_1 ve x_2 sayıları, $x_1 < 0 < x_2$ aralığını ve $\phi(x_1) = \phi(x_2) = M/2$

$-\phi'$ nin yarı maksimum değeri- eşitliğini sağlasın. $(x_2 - x_1)$ ifadesi, $\text{FWHM}(\phi)$ olarak ifade edilen ϕ fonksiyonunun tam genişlikte yarı maksimumu olarak adlandırılır. ϕ ile kıvrım filtresi için, filtre çözünürlüğü $\text{FWHM}(\phi)$ ' ye eşit olmasıyla tanımlanır.

Daha küçük FWHM ' ye sahip bir ϕ fonksiyonu, daha büyük FWHM ' ye sahip bir fonksiyondan daha sivri uçludur. Bu yüzden daha çok δ fonksiyonu gibi görünür. Dolayısıyla, eğer ϕ filtre fonksiyonu daha küçük bir FWHM ' ye sahip ise çözünürlük daha iyidir.

Burada bir filtrenin çözünürlüğünün, filtre fonksiyonunun FWHM ' si ile nasıl ilişkili olduğunu görmenin grafiksel bir yolu vardır. Bir S sinyalinin iki dürtüden $-a$ pozitif mesafesi

ile ayrılmış iki anlık sinyal- oluştuğunu varsayalım. Kıvrım için grafiksel yaklaşımı kullanarak ϕ filtre fonksiyonunun yansıyan grafiğini S' nin grafiği boyunca kaydığımız yerde eğer $a > \text{FWHM}(\phi)$ ise o zaman ϕ' nin kayan kopyası gerçekten ikincisine ulaşmadan önce ilk dürtüyü geçeceğini görürüz. Böylece, $(\phi * S)'$ nin grafiği, S gibi iki belirgin tepeye sahip olur. Ama eğer a , $\text{FWHM}(\phi)$ ' dan daha az ise, o zaman ϕ' nin kayan kopyası aynı anda her iki dürtü ile örtüşür, bu yüzden iki tepe birbirine karışmaya başlar. Orijinal sinyaldeki detay giderek bulanıklaşır. Yeterince küçük a için, $(\phi * S)$ grafiğinin sadece bir tepesi vardır, bu yüzden S' deki detay tamamen kaybolur. $(\phi * S)$ filtrelenmiş sinyalde hala belirgin olan S sinyalindeki belirgin özellikler (sivri uçlar) arasındaki en küçük mesafenin $a = \text{FWHM}(\phi)$ ' ye eşit olduğunu görürüz.

Hesaba dayalı bir perspektif için, $a > 0$ alalım ve $S, S(x) = \delta(x) + \delta(x - a)$ sinyali olsun. Ayrıca, ϕ filtre fonksiyonunun $x = 0$ civarında simetrik olduğunu ve orada M maksimum değerine ulaştığını varsayalım. Böylece, $x = \pm(1/2)$ olduğunda; ϕ , $M/2$ yarı maksimum değerini elde eder. Ayrıca, ϕ grafiğinin 0 ' dan oldukça hızlı bir şekilde daraldığını varsayalım, yani, $|x| \geq \text{FWHM}(\phi)$ olduğunda $\phi(x) \approx 0$ olur. Bu kurulumla, kıvrım, biri sağa doğru a birim kaydırılmış olan ϕ' nin iki kopyasının toplamıdır. Yani; $\phi * S(x) = \phi(x) + \phi(x - a)$. (Burada kıvrımın kaydırma özelliği ile birlikte yukarıdaki (4.8) formülünü kullandık.) Peki $a = \text{FWHM}(\phi)$ ' ya eşit olursa ne olur? O zaman $\phi * S(a/2) = \phi(a/2) + \phi(-a/2) = M/2 + M/2 = M$ elde ederiz. Ayrıca, ϕ grafiği hakkındaki varsayımlarımıza göre, her ikisi de değer olarak M ' ye yakın olan $\phi * S(0) = M + \phi(-a)$ ve $\phi * S(a) = \phi(a) + M$ eşitliklerini elde ederiz. Başka bir ifadeyle; $a = \text{FWHM}(\phi)$ olduğunda $(\phi * S)$ filtrelenmiş sinyal, $0 \leq x \leq a$ aralığında M değerine yakın olur. S' deki iki belirgin sivri uç bir aralık boyunca lekelenir veya bulanıklaşır. Eğer $a < \text{FWHM}(\phi)$ ise, bulanıklık giderek daha kötü olur. Sinyaldeki detay kaybolur. Diğer taraftan, $a = 2.\text{FWHM}(\phi)$ olduğunu varsayalım. O halde, ϕ , $\pm a/4$ ' de $M/2$ yarı maksimum değerine ulaşır. Bu yüzden, $\phi * S(0) = \phi(0) + \phi(-a) \approx M$ ve $\phi * S(a) = \phi(a) + \phi(0) \approx M$ ' dir. Filtrelenmiş sinyal, $x = 0$ ve $x = a$ noktalarında veya yakınlarında iki belirgin tepeye sahip olur ve de $x = a/2$ noktasında aralarında bir vadi olacak şekilde şekillenir. Orijinal detay korunmuştur.

Böylece, filtre fonksiyonunun seçimi, filtrelenmiş sinyalin çözünürlüğünde (kararlılığında) direkt bir etkiye sahiptir.

Örnek 2.5.4.1. Bir kutunun FWHM' sı.

$$\Pi_T(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq T \\ 0 & |x| > T \end{cases}$$

Kutu fonksiyonu, filtrenin tek bir noktada maksimumuna ulaşması gerektiği konusunda yukarıda belirtilen koşulu sağlamaz. Yine de, bu fonksiyonlar uygulamada iyi filtreler yaparlar. Bu yüzden, hile yapacağız ve bir kutunun FWHM' sını kutunun genişliği olarak ilan edeceğiz. Yani; $\text{FWHM}(\Pi_T) = 2T$.

Örnek 2.5.4.2. Bir çadırın FWHM' sı. $T > 0$ için,

$$\phi_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & |x| \leq T \\ 0 & |x| > T \end{cases}$$

olarak ele alalım.

ϕ ' nin grafiği, $x = 0$ ' da elde edilen, $M = 1$ maksimum yüksekliğe ulaşan bir çadırıdır. $\phi(\pm T/2) = 1/2$ olduğu için, $\text{FWHM}(\phi) = T$ ' ye eşit olur.

Örnek 2.5.4.3. Gauss FWHM' sı. ω reel sayısı için, $F(\omega) = e^{-B\omega^2}$ olsun. Buradaki B pozitif bir sabittir. F ' nin maksimum değeri $F(0) = 1$ ' dir. Böylece, $e^{-B\omega^2}$ veya $\omega = \pm\sqrt{\ln(2)/B}$ olduğunda yarım maksimuma ulaşılır. Dolayısıyla bu fonksiyon için

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln(2)/B}$$

Örnek 2.5.4.4. Lorentzian FWHM' sı. T_2 ' nin pozitif bir sabit olduğu ve ω_0 açısız frekans civarında merkezlenmiş sinyalin

$$g(\omega) = \frac{T_2}{1 + 4\pi^2 T_2^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

formundaki bir sinyal Lorentzian olarak adlandırılır. Bu sinyaller, sözde gevşeme sabitlerinden biri olan T_2 sabiti bağlamındaki manyetik rezonans görüntülemeye önemlidir.

2.5.5. Kıvrım ve Fourier Dönüşümü

f ve g uygun fonksiyonları için, ω ' de değerlendirilen Fourier dönüşümlerinin çarpımı şöyledir

$$\mathcal{F}f(\omega) \cdot \mathcal{F}g(\omega) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \cdot \int_{y=-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y} dy. \quad (2.41)$$

Unutmamamız gerekir ki, x ve y burada sadece “kukla” değişkenlerdir. Şimdi, yeni bir değişken tanıtalım, sabit her bir x değeri için $y = s - x$ dir. Böylece $dy = ds$ ve sonuç olarak (2.41)' in sağ tarafı

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \cdot \int_{s=-\infty}^{\infty} g(s-x)e^{-i\omega(s-x)} ds \quad (2.42)$$

haline gelir.

(2.42)' deki ilk integral, s ' den bağımsızdır, dolayısıyla onu diğer integralin içine taşıyabiliriz. $e^{-i\omega x} \cdot e^{-i\omega(s-x)} = e^{-i\omega s}$ için

$$\int_{s=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) g(s-x) dx \right) e^{-i\omega s} ds \quad (2.43)$$

elde edilir.

ω ' de değerlendirilen içerdeki integralin Fourier dönüşümü, dışarıdaki integralken; (2.43)' ün içindeki integralin tam olarak $(f * g)(s)$ olduğuna dikkat edin. Yani (2.43)

$$\int_{s=-\infty}^{\infty} (f * g)(s) e^{-i\omega s} ds = \mathcal{F}(f * g)(\omega) \quad (2.44)$$

ile aynıdır.

Böylece, aşağıdaki teoremi kanıtladık.

Teorem 2.5.5.1. Uygun f ve g fonksiyonları için

$$\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g = \mathcal{F}(f * g) \quad (\text{Feeman, 2015}). \quad (2.45)$$

Teorem 2.5.5.2. Uygun f ve g fonksiyonları için

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g) \text{ (Feeman, 2015).} \quad (2.46)$$

İspat. Keyfi bir ω reel sayısı için

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(\omega)$$

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)g(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{v=-\infty}^{\infty} F(v)e^{ivx} dv \right) \left(\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} G(\zeta)e^{i\zeta x} d\zeta \right) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{v=-\infty}^{\infty} F(v) \left(\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} G(\zeta) \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(v+\zeta-\omega)x} dx \right) d\zeta \right) dv.$$

İç integralin, $\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(v+\zeta-\omega)x} dx$, $(v + \zeta - \omega)$ ' da değerlendirilen 1 sabit fonksiyonunun ters Fourier dönüşümünün (2π) defa çarpımını ifade eder. Ama $\mathcal{F}^{-1}(1) = \delta$, dolayısıyla

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(v+\zeta-\omega)x} dx = (2\pi) \cdot \delta(v + \zeta - \omega).$$

Daha da fazlası, $\zeta = \omega - v$ durumu dışında $\delta(v + \zeta - \omega) = 0$ ' dır. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dH = f(0)$ olduğunu biliyoruz ve buradan

$$\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} G(\zeta) \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(v+\zeta-\omega)x} dx \right) d\zeta$$

$$= 2\pi \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} G(\zeta) \delta(v + \zeta - \omega) d\zeta = 2\pi G(\omega - v)$$

elde edilir.

Kaldığımız yerden devam edersek

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(\omega)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{v=-\infty}^{\infty} F(v) \left(\int_{\zeta=-\infty}^{\infty} G(\zeta) \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i(v+\zeta-\omega)x} dx \right) d\zeta \right) dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{v=-\infty}^{\infty} F(v) G(\omega - v) dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot (F * G)(\omega)$$

sonucu elde edilir ki bu da istenileni kanıtlar.

2.5.6. Rayleigh-Plancherel Teoremi

Teorem 2.5.6.1. Rayleigh-Plancherel. f integrallenebilen bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu ya da onun $\mathcal{F}f$ Fourier dönüşümü reel doğru üzerinde kare integrallenebilirse, o zaman diğeri ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega \quad (2.47)$$

de öyledir (Feeman, 2015).

Bu ifadenin kanıtına bakmadan önce, f veya $\mathcal{F}f$ karmaşık sayı değerlerine sahip olsalar bile her iki integral negatif olmayandır. $|\mathcal{F}f(\omega)|^2$ fonksiyonu, f 'nin güç spektrumu olarak adlandırılır ve aslında bazı fiziksel uygulamalarda belirli bir frekansta bir sinyalin toplam gücünü (örneğin, watt cinsinden ölçülenler) temsil eder.

Örnek 2.5.6.2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

olarak ele alalım. O zaman

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

elde edilir.

$\mathcal{F}f(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, (2.47)'yi kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} d\omega = \pi$$

elde edilir.

Rayleigh, 1889' da, bu sonucu kanıtladı ve kara cisim ışıması analizinde kullandı.

Teorem 2.5.6.1' in Kanıtı. f integrallenebilen bir fonksiyon olsun ve f ya da $\mathcal{F}f$ nin kare integrallenebilir olduğunu varsayalım. O halde

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} e^{-i(0)x} dx \\ &= \mathcal{F}(f \cdot \bar{f})(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} [(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}\bar{f})](0) \dots (2.46)' \text{ dan} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) \mathcal{F}\bar{f}(0 - \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) \overline{\mathcal{F}f(\omega)} d\omega \dots (2.29)' \text{ dan} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, bu integrallerden birinin sonlu olması şartıyla, diğeri de öyle olur ve istenilen ilişki gerçekleşir.

2.5.7. İki Boyutlu Düzlemde Kıvrım

Düzlemde girdileri kutupsal koordinatlar olan iki fonksiyon için, kıvrım sadece radyal değişken olarak tanımlanır. Yani, $f(t, \theta)$ ve $g(t, \theta)$ için

$$(f * g)(t, \theta) = \int_{s=-\infty}^{\infty} f(s, \theta) \cdot g(t - s, \theta) ds \quad (2.48)$$

olarak tanımlanır.

Düzlemde girdileri kartezyen koordinatlar olan iki fonksiyon için kıvrım, her iki değişkeni de içerir. Yani, $F(x, y)$ ve $G(x, y)$ için

$$(F * G)(x, y) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} F(s, t) \cdot G(x - s, y - t) ds dt \quad (2.49)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir boyutta olduğu gibi, kıvrım değişme özelliğine sahiptir

$$f * g = g * f \text{ ve } F * G = G * F.$$

2.5.8. Kıvrım, $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ ve δ

Kutupsal koordinatlarda verilen $g(t, \theta)$ ve kartezyen koordinatlarda verilen $f(x, y)$ fonksiyonları, geri projeksiyon ve Radon dönüşümünü şu şekilde tanımladığını hatırlayın

$$\mathcal{B}g(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} g(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta \quad (2.50)$$

ve

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{s=-\infty}^{\infty} f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds. \quad (2.51)$$

Önerme 2.5.8.1. Uygun $g(t, \theta)$ ve $f(x, y)$ fonksiyonları ve keyfi X ve Y reel sayıları için

$$(\mathcal{B}g * f)(X, Y) = \mathcal{B}(g * \mathcal{R}f)(X, Y) \text{ (Natterer, 2001)}. \quad (2.52)$$

İspat. (2.49) ve (2.50)' den

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}g * f)(X, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}g(X - x, Y - y) \cdot f(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} g((X - x) \cos(\theta) + (Y - y) \sin(\theta), \theta) d\theta \right] f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

hesaplanır.

Şimdi, x yerine $t \cos(\theta) - s \sin(\theta)$ ve y yerine $t \sin(\theta) + s \cos(\theta)$ yazalım. Unutmayınız ki, $ds dt = dx dy$ eşitliği ve (2.51) kullanılarak, öndeki integral

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty g(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta) - t, \theta) \cdot \mathcal{R}f(t, \theta) dt d\theta$$

(2.48) ile

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (g * \mathcal{R}f)(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta), \theta) d\theta$$

(2.50) ile

$$= \mathcal{B}(g * \mathcal{R}f)(X, Y)$$

haline gelir ki bu da istenileni kanıtlar.

Daha önce bir azaltma fonksiyonunun Radon dönüşümüne geri projeksiyon uygulanması, azaltma fonksiyonunun yumuşatılmasıyla sonuçlandığını gözlemledik. Şimdi, bunu daha somut hale getirmek için Önerme 2.5.8.1' i kullanabiliriz. Aslında, (2.52)' deki g' yi iki boyutlu Dirac δ fonksiyonu olarak kabul ettiğimizi varsayalım. $\delta * \mathcal{R}f = \mathcal{R}f$ olduğu için, sonucun sol tarafı $\mathcal{B}\delta * f$ iken, sağ tarafı sadece $\mathcal{B}(\mathcal{R}f)$ ' dir. Böylece, bir fonksiyonun Radon dönüşümüne geri projeksiyonu uyguladığımızda, $\mathcal{B}\delta$ filtresi ile kırımını alarak fonksiyonu düzeltir. Dolayısıyla şimdi, δ fonksiyonunun geri projeksiyonunun ne olduğunu araştıralım. Cevabı bulmak için, $\delta(r) =$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq r \leq a \\ 0 & |r| > a \end{cases} \text{ limitine ve kolaylık için ise}$$

$$h_a(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq r \leq a \\ 0 & |r| > a \end{cases}$$

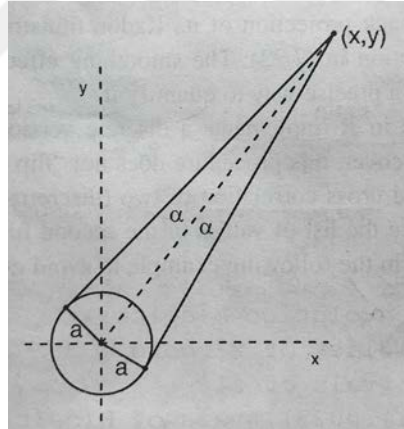
fonksiyonuna bakılır.

Düzlemdeki her bir (x, y) noktası ve her bir θ değeri için, $l_{x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta}$ doğrusunun (x, y) noktası boyunca geçtiğini biliyoruz. Bu yüzden a 'nın küçük bir pozitif değeri verildiğinde, $|x \cos(\theta) + y \sin(\theta)| \leq a$ daki θ değerleri ile ilgileniriz. Şekil 2.4' te, α etiketli açının $\sin(\alpha) = a/\sqrt{x^2 + y^2}$ yi sağladığını görürüz. a küçük olduğu için α açısı da küçüktür ve dolayısıyla, $\alpha \approx \sin(\alpha)$ dır. İstedğimiz θ değerlerinin aralığı $2\alpha \approx 2a/\sqrt{x^2 + y^2}$ genişliğine sahip olur. Böylece

$$\mathcal{B}h_a(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_a(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta$$

$$\approx \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2a}\right) \cdot \frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}$$

elde edilir.



Şekil 2.4. $l_{x \cos(\theta) + y \sin(\theta)}$ doğrusunun (x, y) noktasından geçtiği θ kümesi 2α genişliğine sahiptir (Feeman, 2015)

Buradan

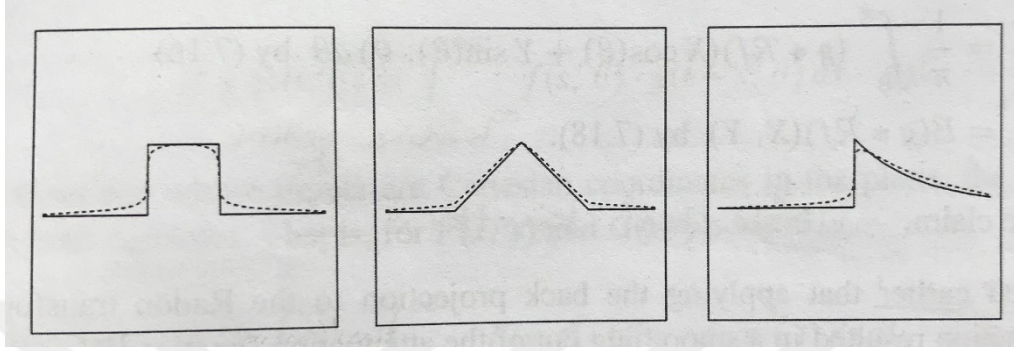
$$\mathcal{B}\delta(x, y) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.53)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 6.8.2. Uygun bir f azaltma katsayısı fonksiyonu için

$$\mathcal{B}(\mathcal{R}f) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) * f. \quad (2.54)$$

Şekil 2.5, bir azaltma katsayısı fonksiyonunun Radon dönüşümünün geri projeksiyonunu içeren birkaç eşleşmesi için enine kesitleri göstermektedir.



Şekil 2.5. Her bir şekil, bir azaltma katsayısı fonksiyonunun grafiğinin enine kesiti (düz çizgi) ile onun Radon dönüşümünün geri projeksiyonunu (kesikli çizgi) gösterir (Feeman, 2015)

2.5.9. Düşük Geçişli Filtre

Filtrelenmiş geri projeksiyon formülüne ele alalım

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)] \} (x, y) \quad (2.55)$$

buradaki f , xy düzleminde tanımlanmış bazı uygun fonksiyondur.

$\mathcal{F}_\phi(S) = |S|$ eşitliğini sağlayan Fourier dönüşümünün bir $\phi(t)$ fonksiyonu olduğunu varsayalım. Yani, $\mathcal{F}_\phi$ nun mutlak değer fonksiyonuna eşit olduğunu varsayalım. O zaman

$$|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta) = [\mathcal{F}_\phi \cdot \mathcal{F}(\mathcal{R}f)](S, \theta)$$

elde edilir.

Bu iki fonksiyonunun kıvrımının Fourier dönüşümüne eşit olduğunu bildiğimiz iki Fourier dönüşümünün çarpımıdır. Böylelikle

$$|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta) = \mathcal{F}(\phi * \mathcal{R}f)(S, \theta).$$

buradan

$$\mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\phi * \mathcal{R}f)(S, \theta)] = (\phi * \mathcal{R}f)(t, \theta)$$

gelir ki, bunu (2.55)' te yerine yazdığımızda

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\phi * \mathcal{R}f)(x, y) \quad (2.56)$$

elde edilir.

Bu yüzden, f' yi yeniden oluşturma $\mathcal{R}f'$ nin X-ray ışını makinesinden gelen verilerin kırılımını veya filtrelenmesini, ardından ϕ ile buna geri projeksiyon uygulanmasını gerektirir. Böyle bir ϕ fonksiyonunun olmaması dışında kulağa o kadar da kötü gelmiyor. Mutlak değer fonksiyonunu herhangi bir fonksiyonun Fourier dönüşümü değildir.

Böylelikle, belki de, önceki tartışmaların hepsini görmezden gelebiliriz, değil mi? O kadar hızlı değil. (2.55) filtrelenmiş geri projeksiyon formülü f' yi yeniden oluşturmak için bir tarif verir, ama uygulamada, tarifin bir problemi vardır. Formüldeki $|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)$ fonksiyonu gürültüye karşı oldukça hassastır. S' nin değeri bir sinyalde var olan bir frekansı temsil eder. Bu yüzden, eğer X-ray ışını verilerini temsil eden $\mathcal{R}f$ Radon dönüşümü yüksek bir frekansta bir bileşene sahip ise o zaman bu bileşen $|S|$ faktörü ile büyütülür. Bu verilerde var olan gürültünün abartıldığı anlamına gelir ki bu da yeniden oluşturulmuş görüntüyü bozan etkidir. Bu yüzden, yine de uygulamada $|S|$ faktörünü kullanmak istemeyiz.

$|S|$ nin yerine, 0'a yakın S için mutlak değer fonksiyonuna yakın olan ancak S' nin değeri büyük olduğunda yok olan bir fonksiyon kullanırız. Böyle bir fonksiyon alçak geçişli bir filtre olarak adlandırılır, çünkü gürültü dâhil daha yüksek frekanslar kesilirken, daha düşük frekanslar varlıklarından etkilenmezler. Ayrıca, filtrelenmiş geri projeksiyon formülünün (2.56) versiyonunu kullanmak için, bir şeyin Fourier dönüşümü olan, $|S|$ yerine geçen fonksiyon isteriz. Yani, $|S|$ yi $A = \mathcal{F}_\phi$ formülündeki bir fonksiyon ile yer değiştirmek istiyoruz. Buradaki A , bazı sonlu aralıklarda sıfırdan farklıdır ve bu aralık dışında sıfırdır.

Tanım 2.5.9.1. Bazı sonlu aralıklarda sıfırdan farklı ve bu aralık dışında sıfır olan Fourier dönüşümüne sahip bir ϕ fonksiyonu, sınırlı bant fonksiyonu olarak adlandırılır.

Bu yüzden, bu terminoloji kullanılarak, sınırlı bir bant fonksiyonunun Fourier dönüşümü olan düşük geçişli bir filtre ile filtrelenmiş geri projeksiyon formülünde $|S|$ yi

değiştirmek istiyoruz. Bunu yapmanın bedeli şudur ki; (2.56) formülü artık kesin değildir, ama f için yalnızca bir yaklaşım verir.

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathcal{F}^{-1}A * \mathcal{R}f)(x, y) \quad (2.57)$$

Mutlak değer fonksiyonunun yerine geçen düşük geçişli bir filtre tasarlamak için, genellikle, bazı $L > 0$ sayıları için, (2.58) formunun bir fonksiyonunu kullanırız

$$A(\omega) = |\omega| \cdot F(\omega) \cdot \Pi_L(\omega) \quad (2.58)$$

Sonuç olarak, $|\omega| > L$ için $A(\omega)$ ortadan kaybolur ve $|\omega| \leq L$ olduğunda ise $|\omega| \cdot F(\omega)$ değerine sahip olur. Köke yakın, A' 'nın değeri mutlak değere yakın olmalıdır, bu yüzden $F(0) = 1$ için bile F' 'nin bir fonksiyon olmasını isteriz. Ayrıca, A' 'nın çift fonksiyon olarak seçilmesi, $\phi = \mathcal{F}^{-1}A'$ 'nın gerçek değerli olduğunu garanti eder. Genel olarak, $|\cdot|$ ile çarpılan $F \cdot \Pi_L$ fonksiyonu pencere fonksiyonu olarak adlandırılır.

Örnek 2.5.9.2. Düşük Geçişli Filtreler. Medikal görüntülemelerde en yaygın olarak kullanılan düşük geçişli filtrelerin grafikleri Şekil 2.6' da gösterilmiştir.

- Ram-Lak Filtresi

$$A_1(\omega) = |\omega| \cdot \Pi_L(\omega) = \begin{cases} |\omega| & |\omega| \leq L \\ 0 & |\omega| > L \end{cases} \quad (2.59)$$

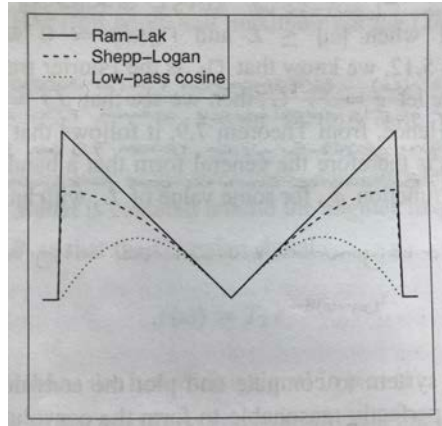
burada L sıfırdan büyüktür ($L > 0$). Bu sadece sonlu bir aralıkta mutlak değer fonksiyonunun kesilmesidir. Sınırlı bir bant fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Bu filtre, Bracewell ve Riddle tarafından kullanılmıştır, aynı zamanda Ramachandran ve Lakshminarayanan da kullanmıştır.

- Shepp-Logan Filtresi

$$A_3 = |\omega| \cdot \left(\frac{\sin(\pi\omega/(2L))}{\pi\omega/(2L)} \right) \cdot \Pi_L(\omega) \quad (2.60)$$

$$= \begin{cases} \frac{2L}{\pi} \cdot |\sin(\pi\omega/(2L))| & |\omega| \leq L \\ 0 & |\omega| > L \end{cases}$$

Bu filtre Shepp ve Logand tarafından tanıtılmıştır.



Şekil 2.6. 3 popüler düşük geçişli filtrenin grafikleri gösterilmiştir (Feeman, 2015)

- Düşük Geçişli Cosine Filtresi

$$A_2(\omega) = |\omega| \cdot \cos(\pi\omega/(2L)) \cdot \Pi_L(\omega)$$

$$= \begin{cases} |\omega| \cos(\pi\omega/(2L)) & |\omega| \leq L \\ 0 & |\omega| > L \end{cases} \quad (2.61)$$

Bu filtre, genellikle sinyal analizinde kullanılır.

Bu bölümü, sınırlı bir bant fonksiyonunun genel formuna bakarak sonuçlandırıyoruz. Bu yüzden, f sınırlı bant fonksiyonu olsun ve $|\omega| > L$ olduğu zamanlarda $\mathcal{F}f(\omega) = 0$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı seçelim. Bu özellik

$$\mathcal{F}f(\omega) = \Pi_L(\omega) \cdot G(\omega)$$

olacak şekilde bir G fonksiyonunun var olduğu anlamına gelir. Yeniden, $|\omega| \leq L$ olduğunda $\Pi_L(\omega) = 1$ dir ve $|\omega| > L$ olduğunda ise $\Pi_L(\omega) = 0$ dir. Π_L 'nin $\phi(x) = \sin(Lx)/(\pi x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olduğunu biliyoruz. Eğer $g = \mathcal{F}^{-1}G$ olarak alırsak, o zaman $\mathcal{F}f$ 'nin iki Fourier dönüşümünün çarpımına, $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_\phi \cdot \mathcal{F}_g$, eşit olduğunu görürüz. Bu yüzden, Teorem 2.5.5.1' den $\mathcal{F}f$ 'nin $\mathcal{F}(\phi * g)$ 'ye, $\mathcal{F}f = \mathcal{F}(\phi * g)$, eşit olduğu takip edilir ve dolayısıyla $f = \phi * g$ dir. Bu nedenle sınırlı bir bant fonksiyonunun genel formu:

L' nin bazı değerleri için ϕ fonksiyonunun kıvrımı ile integrallenebilir bir g fonksiyonuna sahip olmasını gerektirir.



3. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak X-ray ışını hakkında temel bilgiler verilip Beer yasası ile ilişkisi matematiksel olarak ifade edilmiştir. Daha sonra Radon dönüşümünün tanımına ve temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra görüntüyü yeniden oluşturmadaki yöntemlerden biri olan geri projeksiyon yönteminin tanımına ve özelliklerine değinildikten sonra, bu süreçte gürültü gibi istenmeyen etkileri ortadan kaldırmak amacıyla filtreleme teknikleri ifade edilmiştir.



KAYNAKLAR

- Arslan, B., 2005. Bilgisayarlı Tomografi ile Görüntüleme Yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Beatty, J., 2012. The Radon Transform and the Mathematics of Medical Imaging, Ph.D. Dissertation. Colby College, USA.
- Deans, S.R., 1983. *The Radon Transform and Some of Its Applications*, John Wiley & Sons, New York, USA, 295 s.
- Debnath, L., Bhatta, D., 2015. *Integral Transforms and Their Applications*, Third Edition, CRC Press LLC, Edinburg, Scotland, 818 s.
- Epstein, C.L., 2008. *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*, Second Edition, SIAM, Pennsylvania, USA, 753 s.
- Feeman, T., 2015. *The Mathematics of Medical Imaging*, Second Edition, Springer, London, UK, 197 s.
- Hanum, M., 2017. Tıbbi Görüntülemede Radon Dönüşümü Kullanılarak Görüntüyü Oluşturma Üzerine Bir Çalışma, Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, Türkiye.
- Helgason, S., 1999. *The Radon Transform*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 193 s.
- Hörmander, L., 2003. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 440 s.
- Kuchment, P., 2014. *The Radon Transform and Medical Imaging*, SIAM, Philadelphia, 256 s.
- Körner, T.W., 1989. *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 591 s.
- Natterer, F., 1986. *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley, New York, 222 s.
- Radon, J., 1917. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. *Berichte Sächsiche Akademie der Wissenschaften*, 69, 262-277.
- Sevimli, G., 2019. Radon Dönüşümü ve Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak, Türkiye.
- Stein, E.M., 2003. *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 308 s.

- Stein, E.M., Weiss, G., 1971. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 312 s.
- Strichartz, R.S., 2003. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific, River Edge, NJ, 226 s.
- Toft, P., 1996. The Radon transform theory and implementation, Ph.D. Dissertation. Technical University of Denmark Institute of Technology, Lyngby.
- Tolstov, G.P., 1962. *Fourier Series*, Dover, New York, 338 s.



TEZ TESLİM KONTROL LİSTESİ

1. Tez metni 21x29,7cm boyutlarında standart, birinci hamur beyaz A4 kağıdına (80-120 gram) hazırlandı mı? ☐
2. Tezin dış kapağı **Ek-1**'e göre hazırlandı mı? ☐
3. Tez dış kapağına 2,5 cm ölçülerinde üniversitenin amblemi yerleştirildi mi? ☐
4. Tez sayfaları lazer yazıcı kullanılarak yalnızca kağıdın tek yüzüne basıldı mı? ☐
5. Tez metninin yazılmasında yazı karakteri olarak **Times New Roman** kullanıldı mı? ☐
6. Yazımda her sayfanın sol kenarında 3cm, diğer kenarlarda 2,5cm boşluk bırakıldı mı? ☐
7. Yazım kurallarında belirtilen satır ve paragraf aralıklarına uyuldu mu? ☐
8. Ana ve ara başlıklar uygun puntoda ve belirtilen özelliklerde yazıldı mı? ☐
9. Sayfa numaralandırılması belirtilen şekilde yapıldı mı? ☐
10. Tezin dış kapağı sonrası boş sayfa konuldu mu? ☐
11. Tezin iç kapağı **Ek-2**'ye göre hazırlandı mı? ☐
12. Jüri onay sayfası **Ek-3**'e uygun olarak yazıldı mı? ☐
13. Etik kurallara uygunluk beyanı **Ek-4**'e uygun olarak hazırlandı mı? ☐
14. Önsöz ve/veya Teşekkür sayfası **Ek-5**'e uygun olarak yazıldı mı? ☐
15. İçindekiler sayfası **Ek-6**'ya uygun olarak hazırlandı mı? ☐
16. Şekil ve Çizelge dizinleri **Ek-7**'ye uygun olarak hazırlandı mı? ☐
17. Simgeler ve kısaltmalar **Ek-8**'e uygun olarak yazıldı mı? ☐
18. Türkçe özet tezin içeriğini yansıtıyor mu? ☐
19. Türkçe özet sayfası **Ek-9**'a göre hazırlandı mı? ☐
20. Türkçe özete önerilen şekilde anahtar kelimeler konuldu mu? ☐
21. Türkçe ve İngilizce özet birbiri ile uyumlu mu? ☐
22. İngilizce özet sayfası **Ek-10**'a göre hazırlandı mı? ☐
23. İngilizce özete anahtar kelimeler konuldu mu? ☐
24. Şekil ve çizelgeler uygun şekilde hazırlandı mı? ☐
25. Şekil ve çizelgelerin üst, alt başlık ve açıklamaları uygun şekilde yazıldı mı? ☐
26. Tez içinde varsa, alıntılar belirtilen şekilde yazıldı mı? ☐
27. Tez içinde varsa, dipnotlar belirtilen şekilde yazıldı mı? ☐
28. Kaynaklar metin içinde doğru şekilde kullanıldı mı? ☐
29. Metin içerisinde kullanılan kaynakların tamamı kaynaklar listesine yazıldı mı? ☐
30. Kaynaklar **Ek-11**'de belirtilen şekilde yazıldı mı? ☐
31. Ekler uygun başlık seçilerek, tez içindeki sunuş sırasına göre ve her biri ayrı sayfadan başlamak üzere, tez arkasında verildi mi? ☐
32. Özgeçmiş sayfası **Ek-12**'ye göre hazırlandı mı? ☐
33. Tez çalışmasından yayın yapıldı mı? ☐

Tez Enstitü'ye teslim için UYGUNDUR.

Öğrenci
Hazalcan
İBRET

Danışman
Prof. Dr. Hüseyin
TUNA