

**MERKEZİ PARAMETRELERİN
DOĞRU SIRALANMASI OLASILIĞININ
TESPİT EDİLMESİ ÜZERİNE
BİR ÇALIŞMA**

Ferhat ŞENTÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EYLÜL 2010

ANKARA

**MERKEZİ PARAMETRELERİN
DOĞRU SIRALANMASI OLASILIĞININ
TESPİT EDİLMESİ ÜZERİNE
BİR ÇALIŞMA**

Ferhat ŞENTÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2010
ANKARA**

Ferhat ŞENTÜRK tarafından hazırlanan “MERKEZİ PARAMETRELERİN DOĞRU SIRALANMASI OLASILIĞININ TESPİT EDİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ufuk EKİZ
Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İstatistik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hamza GAMGAM
İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ufuk EKİZ
İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Aslıhan ALHAN
İstatistik Anabilim Dalı, Ufuk Üniversitesi

Tarih17/09/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ferhat ŞENTÜRK

**MERKEZİ PARAMETRELERİN
DOĞRU SIRALANMASI OLASILIĞININ
TESPİT EDİLMESİ ÜZERİNE
BİR ÇALIŞMA
(Yüksek Lisans Tezi)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Eylül 2010

ÖZET

Bu çalışmada yığınların merkezi parametrelerinin doğru sıralanması olasılığının tespit edilmesi için iki yaklaşım incelenmiştir. Kayıtsızlık alanı ve alt küme seçimi yaklaşımları olarak bilinen bu yöntemler ile yığın merkezi parametrelerinin doğru sıralanması tahmin edilmeye çalışılmıştır. Alt küme seçimi yaklaşımında tek aşamalı yöntem kullanılırken kayıtsızlık alanı yaklaşımında varyanslar bilinmiyorken iki aşamalı yöntem kullanılmıştır. Ayrıca her iki yöntemde de ağırlıklandırılmış örnek ortalamaları kullanılmış ve doğru sıralama olasılığının varyanslardan bağımsız olduğu gösterilmiştir. Yapılan uygulama çalışması ile farklı yığın sayıları için simülasyon yöntemi kullanılarak doğru sıralama olasılık değerleri bulunmuştur.

Bilim Kodu	:205.1.066
Anahtar Kelimeler	:Doğru sıralama olasılığı, tek aşamalı yöntem, iki aşamalı yöntem, alt küme seçme yaklaşımı, kayıtsızlık alanı yaklaşımı
Sayfa Adedi	:48
Tez Yöneticisi	:Yrd.Doç. Dr. Ufuk EKİZ

**A STUDY ON DETECTION PROBABILITY OF
CORRECT SELECTION OF
CENTRAL PARAMETERS
(M.Sc. Thesis)**

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
September 2010**

ABSTRACT

In this study two procedures are described which use for detection probability of correct selection to central parameters of population. Indifferences zone and subset selection approaches which know for estimating to probability of correct selection to central parameters. Subset selection procedure which we used one stage procedure and indifferences zone which we used two stage procedure when the variances unknown. Also weighted sample means are used each procedure and we demonstrate the probability of correct selection of variances-free. The application to found probability of correct selection values with simulation method used for different numbers of population

Science Code	:205.1.066
Key Words	:Probability of correct selection, one stage procedure, two stage procedure, subset selection approach, indifferences zone approach
Page Number	:48
Adviser	:Yrd. Doç. Dr. Ufuk EKİZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ufuk EKİZ'e ve her zaman bana destek olan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. DOĞRU SIRALAMA OLASILIĞI.....	5
2.1. Alt Küme Seçme Yaklaşımı Kullanılarak Doğru Sıralama Olasılığının hesaplanması	8
2.1.1. Yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit olmaması durumunda doğru sıralama olasılığı.....	8
2.1.2 Yığın varyansları bilinmiyorken doğru sıralama olasılığı	9
2.2. Kayıtsızlık Alanı Yaklaşımı Kullanılarak Doğru Sıralama Olasılığının Bulunması.....	17
2.2.1. Yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit olmaması durumunda doğru sıralama olasılığı.....	18
2.2.2. Yığın varyanslarının bilinmemesi durumunda doğru sıralama olasılığı	19
3. UYGULAMA	23
4. SONUÇ	38
KAYNAKLAR.....	39
EKLER.....	40
EK-1 u_i ve v_i ağırlıklarının sağlaması gereken koşulların gösterilmesi	41
EK-2 Ki-kare dağılımına ilişkin olasılık değerlerinin bulunması için simülasyon programı	44

	Sayfa
EK-3 t dağılımına ilişkin olasılık değerlerinin bulunması için simülasyon programı	45
EK-4 Ağırlıklandırılmış yığın ortalamaları kullanarak doğru sıralama olasılığına ilişkin değerlerin 20000 tekrarla bulunması için simülasyon programı	46
ÖZGEÇMİŞ.....	48

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 1.1. π_i yığınınındaki n_i çaplı örneklerden oluşan örnek uzayı.....	2
Çizelge 3.1. $k=2$, $n=5(1)10(5)30$, $c=0(0,5)5$ iken ki-kare dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri.....	23
Çizelge 3.2. $k=2$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken t dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri.....	26
Çizelge 3.3. $k=2$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri.....	29
Çizelge 3.4. $k=2$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri.....	32

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simge ve kısaltmalara ilişkin açıklamalar aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
k	Yığın sayısı
n_i	i . yığından çekilen örnek hacmi
u_i, v_i	Ağırlık katsayıları
$\bar{X}_i$	i . örneğe ilişkin örnek ortalaması
$\bar{X}_{(i)}$	i . sıraya karşılık gelen örneğe ilişkin örnek ortalaması
$\bar{X}_{[i]}$	i . örnek ortalamasına ilişkin sıra istatistiği
$\widetilde{\bar{X}}_i$	i . örneğe ilişkin ağırlıklandırılmış örnek ortalaması
Kısaltmalar	Açıklama
$P(CS)$	Doğru sıralama olasılığı

1. GİRİŞ

Birçok çalışmada yığınlar arası homojenliği ölçmek için bazı testler uygulanır. Örneğin, k tane merkezi parametrenin eşit olduğu hipotezini test etmek için F testi veya k tane yığının varyanslarının eşit olduğu hipotezini test etmek için de Bartlett testi gibi testler uygulanabilir ancak bu testler araştırmacının aradığı tüm bilgileri sağlamaz. Yığınlar arasında bir takım önemli farklılıklar olabilir. Örneğin bir tarımsal problemde önemli bir takım farklılıklara sahip bazı tohum çeşitlerinin aynı oranda ürün vereceği hipotezi gerçek dışıdır. Eğer gerçekten bir farklılık varsa ortalama ürünlerde de bir farklılık olacağı açıktır ve yeterli derecede büyük bir örnek bu farklılığı, belirlenmiş bir anlamlılık düzeyinde ortaya koyacaktır. Bu farklılık ortaya çıktığı anda araştırmacının sorunları başlar. Araştırmacı bu farklılıklara bakarak hangisinin en iyi olduğunu seçmek isteyecektir. Karar verme sürecinde araştırmacının hangi yığını yada yığınları seçeceğini ve doğru seçim yapma olasılığını gösteren bir yöntem ihtiyacı vardır. Yığınlar arasındaki farklılığı belirlemek için kullanılan yöntemlerden biri de varyans analizidir.

Homojenlik Testi (Varyans Analizi) Yaklaşımı: Varyans analizi olarak bilinen bu klasik test yöntemi Fisher tarafından ortaya konulmuştur. Bir çok istatistikçiye göre varyans analizi bazı eksikliklere sahiptir. Çoğu araştırmada farklı işlemlerin, etkisi küçük ama farklılık ürettiği açıkça görülmüştür. Buna göre farklılık olmadığı hipotezi gerçekçi değildir. Esas problem farklılığın büyüklüğünün tahminin elde edilmesidir. Buna karşın birçok örnekte deneyin amacı farklılığın boyutunu ölçmek ve en iyi işlemi yada işlemleri seçmek değildir. Farklılığın boyutunun tahmini yöntemi bu amaca dolaylı yada direkt olarak ulaşmak için kullanılır.

Bechhofer (1954) varyans analizinin temelindeki aynı matematiksel modeli varsayarak ortalamaların eşitliğine ilişkin hipotez testleriyle ilgilenmek yerine belirli çıkarımlar yapmak için bu ortalamaların sıralanmasıyla ilgilenmiştir [1].

$X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i$) ler bağımsız ve normal dağılan rastgele değişkenler olsun. Yığınlara ait merkezi parametreyi gösteren μ_i 'lerin

$\mu_{[1]} \leq \mu_{[2]} \leq \dots \leq \mu_{[k]}$ şeklinde sıralandığını ve $\mu_{[i]}$, ($i = 1, 2, \dots, k$), merkezi parametrelerinden hangilerinin bu sıralamaya karşılık geldiğini bilmediğimiz varsayılmıştır [2].

Merkezi parametrelerin yığının niteliğini gösterdiğini varsayarak “en iyi” yığının en büyük merkezi parametreye sahip yığın olduğunu, “ikinci en iyi” yığının ikinci en büyük merkezi parametreye sahip yığın olduğunu düşünebiliriz. Tabi bunun yanında alternatif olarak yine “en iyi” yığının en düşük merkezi parametreye sahip yığın olarak da düşünebiliriz.

Çizelge 1.1. π_i yığınındaki n_i çaplı örneklerden oluşan örnek uzayı

π_1					π_2					...	π_k				
X_{11}	X_{12}	...	X_{1n_1}	$\bar{X}_1$	X_{21}	X_{22}	...	X_{2n_1}	$\bar{X}_2$	...	X_{k1}	X_{k2}	...	X_{kn_1}	$\bar{X}_k$
x_{11_1}	x_{12_1}	...	$x_{1n_{i_1}}$	$\bar{x}_{1_1}$	x_{21_1}	x_{22_1}	...	$x_{2n_{i_1}}$	$\bar{x}_{2_1}$	...	x_{k1_1}	x_{k2_1}	...	$x_{kn_{i_1}}$	$\bar{x}_{k_1}$
x_{11_2}	x_{12_2}	...	$x_{1n_{i_2}}$	$\bar{x}_{1_2}$	x_{21_2}	x_{22_2}	...	$x_{2n_{i_2}}$	$\bar{x}_{2_2}$	...	x_{k1_2}	x_{k2_2}	...	$x_{kn_{i_2}}$	$\bar{x}_{k_2}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_{11_R}	x_{12_R}	...	$x_{1n_{i_R}}$	$\bar{x}_{1_R}$	x_{21_R}	x_{22_R}	...	$x_{2n_{i_R}}$	$\bar{x}_{2_R}$	...	x_{k1_R}	x_{k2_R}	...	$x_{kn_{i_R}}$	$\bar{x}_{k_R}$

π_i ($i = 1, 2, \dots, k$) yığınlarından tesadüfi olarak seçilen örneklerle dayanarak merkezi parametrelere ilişkin bir sıralama yaptığımızda bu sıralamanın doğru yapılmış olması olasılığı nedir? Örneğin üç farklı yığından seçilen örneklerin örnek ortalamalarının $\bar{X}_1=4$, $\bar{X}_2=6$ ve $\bar{X}_3=3$ olduğunu varsayalım. Buna göre merkezi parametrelerin sıralanışını $\mu_3 < \mu_1 < \mu_2$ olarak tahmin ederiz. Herhangi bir örnek üzerinden yapmış olduğumuz tahminin doğru olması olasılığı nedir? Rastgele seçilen başka örneklerden üç yığına ilişkin örnek ortalamalarının şu şekilde olduğunu varsayalım; $\bar{X}_1=5$, $\bar{X}_2=4$ ve $\bar{X}_3=7$ bu durumda merkezi parametrelere ilişkin sıralamamız $\mu_2 < \mu_1 < \mu_3$ şeklinde tahmin edilmiş olacaktır.

En iyi yığıcı belirleyip bazı çıkarımlar yapmak için $n = \sum_{i=1}^k n_i$ çaplı bağımsız örnekler kullanılır. Çıkarımların temeli örnek ortalamalarına dayandırılır. i . yığıcı ilişkin örnek ortalaması $\bar{X}_i$ şeklinde gösterilsin. Örnek ortalaması, örnek varyansı ve örnek hacmi sırasıyla; $\bar{X}_{(i)}$, $S_{(i)}^2$, ve $n_{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) şeklinde ifade edilirse, $\bar{X}_{(i)}$ 'nin beklenen değeri $\mu_{[i]}$, varyansı ise $\sigma_{(i)}^2/n_{(i)}$ olur. Sıralanmış $\bar{X}_i$ 'leri şu şekilde gösterebiliriz;

$$\bar{X}_{[1]} < \bar{X}_{[2]} < \dots < \bar{X}_{[k]} \quad (1.1)$$

Araştırmacı yığıcılardan örnekler çekmeden önce amacının ne olduğuna karar vermelidir. Örneğin aşağıda sıralanan amaçlardan biri seçilebilir.

1. “en iyi” yığıcı seçmek
2. “en iyi iki” yığıcıyı sıralamayı önemsemekten seçmek
3. “en iyi iki” yığıcıyı sıralamayı önemseyerek seçmek
4. “en iyi üç” yığıcıyı sıralamayı önemsemekten seçmek

şeklinde sıralanan amaçlara daha başkaları da ilave edilebilir. Amaç seçimi ekonomik yada başka nedenlere bağlı olabilir.

İlk olarak amaç belirlendikten sonra i . yığıcıdan n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) tane gözlem alınır. Daha sonra k tane $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ örnek ortalaması hesaplanır. Bu örnek ortalamaları küçükten büyüğe sıraladıktan sonra, amaca uygun olarak, örneğin eğer amacımız 1 numaradaki gibi ise sıralamadaki en büyük ortalamaya ($\bar{X}_{[k]}$) sahip olan yığıcı en iyi yığıcı olarak seçilir. Eğer amaç 3 numaradaki gibi ise en büyük ortalamaya ($\bar{X}_{[k]}$) sahip olan yığıcıyı ve ikinci en büyük ortalamaya ($\bar{X}_{[k-1]}$) sahip yığıcıyı sırasıyla en iyi birinci yığıcı ve en iyi ikinci yığıcı olduğunu söylenebilir. Eğer amaç 2 ve 4 numaradaki gibiyse yine aynı işlemler yapılarak yığıcılar belirlenebilir [1].

Örneğin dokuz haftalık bir periyotta restorana gelen müşteri sayılarının gözlemlendiği bir iş yerinde, en çok müşterinin hangi gün geldiği tespit edilmeye çalışılsın. Dokuz hafta boyunca haftanın her günü için günlük müşteri sayısı gözlemlenip bir sıralama yapıldığında en büyük ortalama sahip günün en çok müşterinin geldiği gün olduğu söylenebilir [7]. Yapılan bu sıralama sonucuna göre işletme sahipleri planlamalarını yaparlar. Ancak bu sıralamayı doğru yapmış olma olasılığımız nedir? Sıralama başka şekilde de olabilir miydi?

Web tabanlı uçak rezervasyon sisteminin kullanılacağı bir şirkette dört farklı firmanın rezervasyon programlarının karşılaştırılmasında doğru sıralama olasılığı kullanılabilir. Sistemler arasında seçim yapmak için bu sistemlerin hata yapma zamanları arasında geçen süre baz alındığında, belli bir periyotta hatalar arasında geçen süre olarak daha büyük ortalama sahip sistemin diğerlerine oranla daha iyi olduğu söylenebilir [3]. Hesaplanan ortalamalara göre yapılacak bu sıralamanın doğru yapılmış olma olasılığı nedir?

Bu çalışmada amaç, yığın varyanslarını biliniyor ve birbirine eşit olması, yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit olmaması ve yığın varyansları bilinmiyorken, merkezi parametrelere ilişkin sıralılığın hangi olasılıkla doğru tahmin edilebileceği, yani doğru sıralama olasılığının bulunmasıdır.

Birinci bölümde doğru sıralama olasılığına ilişkin genel bilgiler verilmiş ve daha önceki yıllarda ne tür çalışmalar yapıldığı anlatılmıştır. İkinci bölümde ilk olarak merkezi parametrelerin tahmininde kullanılan örnek ortalamaları kullanılarak doğru sıralama olasılığı için bir alt sınır bulunması gösterilmiş, daha sonra örnek ortalamaları ağırlıklandırılarak ağırlıklı örnek ortalamaları kullanılmış ve iki aşamalı yöntemle doğru sıralama olasılığı bulunmuştur. Üçüncü bölümde ise doğru sıralama olasılığına ilişkin bir uygulama yapılmıştır. Son olarak da sonuç bölümünde genel bir değerlendirme yapılmıştır.

2. DOĞRU SIRALAMA OLASILIĞI

$\pi_1, \dots, \pi_k$ bağımsız yığınlar olmak üzere, $X_1, X_2, \dots, X_{n_i}$ tesadüfi örneğinin parametreleri μ_i ve σ_i^2 olan normal dağılıma sahip yığından bağımsız tesadüfi değişkenler olduğunu varsayalım. $\mu_{[1]} < \dots < \mu_{[k]}$ şeklinde sıralanan merkezi parametrelerin en büyüğü olan $\mu_{[k]}$ 'ya hangi yığının sahip olduğu, tek aşamalı veya iki aşamalı örnekleme yöntemlerinden biri kullanılarak tahmin edilebilir. Merkezi parametrelere ilişkin sıralılığı doğru şekilde tahmin etme olasılığı (Probability of Correct Selection) $P(\text{CS})$ doğru sıralama olasılığı olarak adlandırılır.

π_i 'ler yığınları ifade etmek üzere, $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ olsun. s, k tane yığından oluşan π kümesinin kaç alt yığına ayrılacağını göstermek üzere $\sum_{i=1}^s k_i = k$ dır. π 'nin en iyi alt yığınının bulunan yığın sayısı k_s , π 'nin ikinci en iyi alt yığınının bulunan yığın sayısı k_{s-1} olsun. Burada $k_1, k_2, \dots, k_s$ ($s \leq k$) pozitif tam sayılardır [1]. Eğer yığınları iki alt kümeye ayırırsak birinci alt kümemizdeki yığın sayımız k_1 , ikinci alt kümemizdeki yığın sayımız ise k_2 olur.

İfade edilen bu notasyonlara göre doğru sıralama olasılığı şu şekilde yazılır;

$$\Pr [\max\{\bar{X}_{(1)}, \dots, \bar{X}_{(k_1)}\} < \min\{\bar{X}_{(k_1+1)}, \dots, \bar{X}_{(k_1+k_2)}\},$$

$$\max\{\bar{X}_{(k_1+1)}, \dots, \bar{X}_{(k_1+k_2)}\} < \min\{\bar{X}_{(k_1+k_2+1)}, \dots, \bar{X}_{(k_1+k_2+k_3)}\},$$

.

$$\max\{\bar{X}_{(k-k_s-k_{s-1}+1)}, \dots, \bar{X}_{(k-k_s)}\} < \min\{\bar{X}_{(k-k_s+1)}, \dots, \bar{X}_{(k)}\}. \quad (2.1)$$

$s = 2$; $k_1 = k - t$; $k_2 = t$ için doğru seçim olasılığı;

$$\Pr [\max\{\bar{X}_{(1)}, \bar{X}_{(2)} \dots, \bar{X}_{(k-t)}\} < \min\{\bar{X}_{(k-t+1)}, \dots, \bar{X}_{(k)}\}] \quad (2.2)$$

ve

$s = k$; $k_1 = k_2 = \dots = k_k = 1$ için ise

$$\Pr [\bar{X}_{(1)} < \bar{X}_{(2)} < \dots < \bar{X}_{(k-1)} < \bar{X}_{(k)}] \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Eş. 2.2’de anlatılmak istenen “en iyi t “ tane yığının sırasıyla en büyük ortalamaya sahip yığınlar olduğudur. Bu yüzden örneğin $t = 1, 2, 3$ olduğu durumlarda doğru sıralama olasılığı sırasıyla önceki bölümde belirtilen 1, 2 ve 4 numaralı amaçlarla aynı olasılık değerine sahip olacaktır [1].

Eğer Eş. 2.2’de $t=1$ için düşünersek, doğru sıralama olasılığı

$$\Pr[\max\{\bar{X}_{(1)}, \bar{X}_{(2)}, \dots, \bar{X}_{(k-1)}\} < \bar{X}_{(k)}] = \Pr[0 < Y_1, 0 < Y_2, \dots, 0 < Y_{k-1}] \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $Y_i = \bar{X}_{(k)} - \bar{X}_{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k - 1$) olarak tanımlanmaktadır. Bu tesadüfi değişkene ilişkin beklenen değer, varyans ve kovaryansda

$$E(Y_i) = \mu_{[k]} - \mu_{[i]} = \delta_{k,i}$$

$$\sigma^2(Y_i) = \frac{\sigma_{(k)}^2}{n_{(k)}} + \frac{\sigma_{(i)}^2}{n_{(i)}} \quad (i = 1, 2, \dots, k - 1)$$

ve

$$\sigma(Y_i Y_j) = \frac{\sigma_{(k)}^2}{n_{(k)}} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, k - 1) \text{ olur.}$$

Y, (k-1) değişkenli normal dağılıma sahip olsun. Eğer Y'nin kovaryans matrisini Σ ile gösterirsek y' ve δ' nü de sırasıyla $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ ve $(\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \dots, \delta_{k,k-1})$ şeklindeki satır vektörleri olarak ifade edersek Eş. 2.4'deki olasılık

$$= \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{(k-1)/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(y-\delta)' \Sigma^{-1}(y-\delta)} dy_1 dy_2 \dots dy_{k-1}$$

biçiminde ifade edilir [1].

Tüm varyansların birbirine eşit olduğu düşünülürse;

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (2.5)$$

$$\mu_{[k]} - \mu_{[k-t+1]} = 0$$

$$\mu_{[k-t+1]} - \mu_{[k-t]} = \delta^* \quad (2.6)$$

$$\mu_{[k-t]} - \mu_{[1]} = 0$$

$$P_{\mu, \sigma^2} \geq P^* \text{ ve } \underline{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada δ^* ve P^* ($\frac{1}{k} < P^* < 1$) önceden belirlenmiştir. Eş. 2.2 deki olasılığı Eş. 2.5 ve Eş. 2.6'yı kullanarak şu şekilde yazabiliriz;

$$tPr[\max\{\bar{X}_{(1)}, \dots, \bar{X}_{(k-t)}\} < \bar{X}_{(k-t+1)} < \min\{\bar{X}_{(k-t+2)}, \dots, \bar{X}_{(k)}\}]$$

$$= t \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\bar{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t]})/(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})} e^{-z^2/2} dz \right]^{k-t}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\bar{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t]})/(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})} e^{-z^2/2} dz \right]^{t-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-n(\bar{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t+1]})^2/\sigma^2} d\bar{X}_{(k-t+1)} \quad (2.7)$$

$y = \sqrt{n}(\bar{X}_{(k-t+1)} - \mu_{[k-t+1]})/\sigma$ dönüşümü yapılrırsa;

$$t \int_{-\infty}^{+\infty} [F(y+d)]^{k-1} [1-F(y)]^{t-1} f(y) dy \quad (2.8)$$

Buradaki $F(y)$ ve d için eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{x^2/2} dx, \quad F'(y) = f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{y^2/2} \quad (2.9)$$

$$d = \frac{\sqrt{n}\delta^*}{\sigma} = \sqrt{n} \lambda \quad (2.10)$$

Burada λ , merkezi parametreler arasındaki farkın standartlaştırılmışıdır. Eğer $d = 0$ olursa Eş. 2.10 daki olasılık değeri $\frac{t!(k-t)!}{k!} = \frac{1}{C_t^k}$ olur [1].

Literatürde doğru sıralama olasılıkları iki temel tanım üzerinden oluşturulmaktadır. Bunlar “alt küme seçme yaklaşımı” (subset selection approach) ve “kayıtsızlık alanı yaklaşımıdır” (indifference zone approach). Bu çalışmada doğru sıralama olasılığı belirlenirken ilk olarak Gupta (1956) tarafından geliştirilen alt küme seçme yaklaşımına daha sonra da Bechhofer (1954) tarafından geliştirilen kayıtsızlık alanı yaklaşımına yer verilmiştir.

2.1. Alt Küme Seçme Yaklaşımı Kullanılarak Doğru Sıralama Olasılığının Hesaplanması

Yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit olmadığı durumlarda ve yığın varyanslarının bilinmediği durumlarda Gupta ve Wong (1982) alt küme yaklaşımını kullanarak merkezi parametrelerin doğru şekilde sıralanmasına ilişkin doğru sıralama olasılığını tanımlamışlardır [4].

2.1.1. Yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit olmaması durumunda doğru sıralama olasılığı

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i} \sim \pi_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) yığınının n_i çaplı tesadüfi bir örnek olsun. $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ örnek ortalamasını göstermek üzere yığın varyansları biliniyor fakat

birbirine eşit değilken Gupta ve Wong (1982) tarafından geliştirilen aşağıdaki tanımı kullanarak en büyük ortalamaya sahip yığını seçebiliriz;

$$S_A = \left\{ i: \bar{X}_i \geq \max_{i \leq j \leq k} (\bar{X}_j - c \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{\sigma_j^2}{n_j}}) \quad i \neq j \right\} \quad (2.11)$$

Burada c , $(\frac{1}{k} < P^* < 1)$ aralığında keyfi olarak belirlenen P^* olasılığını sağlayacak şekilde elde edilen negatif olmayan bir değerdir.

2.1.2 Yığın varyansları bilinmiyorken doğru sıralama olasılığı

Gupta (1956)'nın geliştirdiği alt küme seçimi yaklaşımında araştırmacının amacı tüm yığınlar arasında aşağıdaki olasılığı sağlayan en iyi yığını seçmektir.

$$P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S) \geq P^* \quad \underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k) \quad (2.12)$$

$$\underline{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$$

Burada $P^*(\frac{1}{k} < P^* < 1)$ önceden belirlenmiş bir değerdir [6].

Gupta ve Wong (1982) bu olasılığı sağlayan aşağıdaki yöntemi geliştirmişlerdir;

$$S_B = \left\{ i: \bar{X}_i \geq \bar{X}_{[k]} - c \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j}{\sqrt{n}} \quad i = 1, \dots, k \right\} \quad (2.13)$$

olmak üzere, c aşağıdaki olasılığı sağlayacak şekilde seçilmelidir;

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi \left(\frac{c}{\sqrt{(n-1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y}}} \right) dG_{n-1}(x) \right]^{k-1} dG_{n-1}(y) = P^* \quad (2.14)$$

burada $G_{n-1}(\cdot)$, $n-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımının yoğunluk fonksiyonudur.

Eğer $c > 0$, $P^* > \frac{1}{2^{k-1}}$ olur [4].

Lam (1992), Gupta ve Wong'un yöntemini geliştirerek aynı olasılığı sağlayan aşağıdaki yöntemi kullanmıştır [6];

$$S_C = \left\{ i: \bar{X}_i \geq \bar{X}_j - c \frac{\max_{1 \leq j \leq k} (S_i, S_j)}{\sqrt{n}} \quad j \neq i \right\} \quad (2.15)$$

bu yöntemin Eş. 2.14'te tanımlanan olasılığı sağladığı aşağıda gösterilmiştir;

$$\begin{aligned} P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S_C) &= P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\bar{X}_{(k)} \geq \bar{X}_{(i)} - c \frac{\max\{S_{(k)}, S_{(i)}\}}{\sqrt{n}} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \right] \\ &\geq P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[(\bar{X}_{(i)} - \mu_{(i)}) - (\bar{X}_{(k)} - \mu_{(k)}) \leq c \frac{\max\{S_{(k)}, S_{(i)}\}}{\sqrt{n}} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \right] \\ &= P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\frac{(\bar{X}_{(i)} - \mu_{(i)}) - (\bar{X}_{(k)} - \mu_{(k)})}{\sqrt{\frac{\sigma_{(i)}^2}{n} + \frac{\sigma_{(k)}^2}{n}}} \leq \frac{c \frac{1}{\sqrt{n}} \max\{S_{(k)}, S_{(i)}\}}{\sqrt{\frac{\sigma_{(i)}^2}{n} + \frac{\sigma_{(k)}^2}{n}}} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \right] \\ Z_{(i)} &= \frac{(\bar{X}_{(i)} - \mu_{(i)}) - (\bar{X}_{(k)} - \mu_{(k)})}{\sqrt{\frac{\sigma_{(i)}^2}{n} + \frac{\sigma_{(k)}^2}{n}}}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, k-1$ olarak tanımlanırsa;

$$P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S_C) \geq P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[Z_{(i)} \leq \frac{c \max\{S_{(k)}, S_{(i)}\}}{\sqrt{\left[\frac{\sigma_{(i)}^2}{(n-1)S_{(i)}^2} + \frac{\sigma_{(k)}^2}{(n-1)S_{(k)}^2} \right]^{(n-1)}}} \quad i = 1, \dots, k-1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&\geq P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[Z_{(i)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{\sigma_{(i)}^2}{(n-1)S_{(i)}^2} + \frac{\sigma_{(k)}^2}{(n-1)S_{(k)}^2} \right] (n-1)}} \mid i = 1, \dots, k-1 \right] \\
&= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[Z_{(i)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \mid \frac{(n-1)S_{(i)}^2}{\sigma_{(i)}^2} = x_i, \ i = \right. \\
&\quad \left. 1, \dots, k \right] g_{n-1}(x_1) \dots g_{n-1}(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k \tag{2.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g_{n-1}(\cdot)$, $n-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. $\frac{(n-1)S_{(i)}^2}{\sigma_{(i)}^2}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) koşulu altında $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \dots, Z_{(k-1)}$ tesadüfi değişkenleri, ortalamaları $(0, 0, \dots, 0)$ ve kovaryans matrisi $\Sigma = (\sigma_{(ij)})$ olan çok değişkenli normal dağılıma sahip olur. Kovaryans matrisini şu şekilde gösterebiliriz;

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & 1 \leq i = j \leq k-1 \\ \frac{\sigma_{(k)}^2}{(\sigma_{(i)}^2 + \sigma_{(k)}^2)^{1/2} (\sigma_{(j)}^2 + \sigma_{(k)}^2)^{1/2}} & i \neq j, \ 1 \leq i \leq k-1, \ 1 \leq j \leq k-1 \end{cases}$$

$S_{(1)}^2, S_{(2)}^2, \dots, S_{(k)}^2$ 'lerden bağımsız $N(0,1)$ dağılımına sahip $Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1}$ tesadüfi değişkenleri üzerinden elde edilen aşağıdaki olasılık Eş. 2.16'daki olasılıktan daha küçük olacaktır.

$$\begin{aligned}
&P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S_c) \geq \\
&\int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\Pr \left(Y_{(1)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \right) \Pr \left(Y_{(2)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \right) \dots \Pr \left(Y_{(k-1)} \leq \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_{k-1}} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \right) \mid \frac{(n-1)S_{(i)}^2}{\sigma_{(i)}^2} = x_i, \ i = 1, \dots, k \right] g_{n-1}(x_1) \dots g_{n-1}(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \left[\left[\int_0^\infty \Pr \left(Y_{(1)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \right) g_{n-1}(x_1) dx_1 \right] \left[\int_0^\infty \Pr \left(Y_{(2)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \right) g_{n-1}(x_2) dx_2 \right] \dots \left[\int_0^\infty \Pr \left(Y_{(k-1)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_{k-1}} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \right) g_{n-1}(x_{k-1}) dx_{k-1} \right] \right] g_{n-1}(x_k) dx_k$$

$$P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S_c) \geq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[Y_{(i)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} \mid i = 1, \dots, k-1 \mid \frac{(n-1)S_{(i)}^2}{\sigma_{(i)}^2} = x_i, \ i = 1, \dots, k \right] g_{n-1}(x_1) \dots g_{n-1}(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

$$\underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_k \prod_{i=1}^{k-1} \Phi \left[\frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_k} \right] (n-1)}} k \right] g_{n-1}(x_1) \dots g_{n-1}(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} dx_k$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = x \text{ ve } x_k = R \text{ olsun}$$

$$= \int_0^\infty \left[\left[\int_0^\infty \Pr \left(Y_{(1)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{r} \right] (n-1)}} \right) g_{n-1}(x) dx \right] \left[\int_0^\infty \Pr \left(Y_{(2)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{r} \right] (n-1)}} \right) g_{n-1}(x) dx \right] \dots \left[\int_0^\infty \Pr \left(Y_{(k-1)} \leq \frac{c}{\sqrt{\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{r} \right] (n-1)}} \right) g_{n-1}(x) dx \right] \right] g_{n-1}(r) dr$$

$$P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S_c) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi \left(\frac{c}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{r} \right) (n-1)}} \right) g_{n-1}(x) dx \right]^{k-1} g_{n-1}(r) dr$$

$= P^*$ [6].

Böylece Eş. 2.15'teki tanımdan hareketle Eş. 2.14 elde edilmiş olur.

Doğru sıralama olasılığının tespit edilmesinde örnek aritmetik ortalamalarının yerine ağırlıklı örnek aritmetik ortalamalarını kullanarak Lam (1992) daha önce Dudewicz ve Dalal (1975) tarafından geliştirilen iki aşamalı yöntemde alt küme seçme yaklaşımını kullanarak bir doğru sıralama olasılığı tanımı yapmıştır.

Lam (1992) tarafından geliştirilen yöntemi aşağıdaki gibi gösterebiliriz;

$$S_D = \left\{ i: \tilde{X}_i \geq \tilde{X}_j - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_i}} \quad i \neq j \right\} \quad (2.17)$$

şeklinde yöntem tanımlanır ve doğru sıralama olasılığının alt sınırını şu şekilde elde edebilir;

$$P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2}((k) \in S_D) = P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\tilde{X}_{(k)} \geq \tilde{X}_{(i)} - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_i}} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \right]$$

Daha önce en iyi yığını seçmek için Dudewicz ve Dalal (1975) tarafından geliştirilen iki aşamalı yöntemde örneği iki parçaya ayrılarak tesadüfi değişkenlere ağırlık katsayıları verip ağırlıklı örnek ortalaması en büyük olan yığın en büyük ortalamaya sahip yığın olarak belirlenir [6].

π_i yığınının alınan gözlemlere ilişkin örnek ortalaması ve varyansı şu şekilde olur;

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{X_{ij}}{n_i}, S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$$

Yığın varyansları bilinmiyorken varyansları eşitlemek için örneği iki kısma ayırmalıyız. Daha sonra her iki kısımdaki değişkenlere ağırlık katsayıları uygulayarak yığın varyanslarını birbirine eşitleyebiliriz. İlk kısma ilişkin örnek

hacmine n_0 dersek ikinci kısım $n_i - n_0$ tane gözlemden oluşur. Daha sonra iki parçaya ayırdığımız örneklerimize ilişkin ağırlıklı örnek ortalamasını şu şekilde hesaplayabiliriz;

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} X_{ij} \quad (2.18)$$

Burada W_{ij} şu şekilde seçilmelidir;

$$\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} = 1, \quad w_{i1} = w_{i2} = \dots = w_{in_0} \quad (2.19)$$

Eş. 2.19'da n_0 'a kadar olan w_{ij} katsayısına u_i , geriye kalan $n_i - n_0$ tane w_{ij} katsayısına da v_i diyelim. O halde u_i ve v_i katsayıları şu özellikleri sağlar;

$$(i) \quad n_0 u_i + (n_i - n_0) v_i = 1$$

$$(ii) \quad n_0 u_i^2 + (n_i - n_0) v_i^2 = \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{n_i S_i^2}$$

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} X_{ij} \quad w_{ij} = \begin{cases} u_i & 1 \leq j \leq n_0 \\ v_i & n_0 < j \leq n_i \end{cases}$$

Burada u_i ve v_i katsayıları de şu şekilde bulunur;

$$u_i = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{n_i - n_0}{n_0} \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{S_i^2} - 1 \right)}$$

$$v_i = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{n_0}{n_i - n_0} \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{S_i^2} - 1 \right)}$$

Örneğimiz n_0 ve $n_i - n_0$ şeklinde iki parçaya ayrıldığında w_{ij} ağırlıkları $1/n_i$ 'ye yakınsayacağından ilk örnek hacmi olan n_0 w_{ij} ağırlıklarının $1/n_i$ den mutlak farklarını minimum yapacak şekilde seçilir [7].

$$\sum_{j=1}^{n_i} |w_{ij} - 1/n_i|$$

$$= (2/n) \sqrt{\left(\frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{S_i^2} - 1 \right) n_0(n_i - n_0)}$$

Yukarıdaki eşitliğin minimum olması için $n_0 = n_i - 1$ olarak seçilirse ikinci kısım örnek hacmi de 1 olur [7]. Bu durumda eşitlikleri yeniden yazarsak;

$$(i) (n_i - 1)u_i + v_i = 1 \quad (2.20)$$

$$(ii) (n_i - 1)u_i^2 + v_i^2 = \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{n_i S_i^2} \quad (2.21)$$

şeklinde olur.

u_i ve v_i değişkenlerini de;

$$u_i = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{S_i^2} - 1 \right)}$$

$$v_i = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \sqrt{(n_i - 1) \left(\frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{S_i^2} - 1 \right)}$$

şeklinde olur [EK-1]. Ağırlıklandırılmış örnek ortalaması;

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} X_{ij} \quad w_{ij} = \begin{cases} u_i & j \leq n_i - 1 \\ v_i & j = n_i \end{cases}$$

olur.

$$P_{\underline{\mu}, \sigma^2} \left[\tilde{X}_{(k)} \geq \tilde{X}_{(i)} - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_i}} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \right] \geq Pr \left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \right.$$

$$\left. \mu_{(k)} \geq \sum_{j=1}^{n_i} w_{(1)j} X_{(1)j} - \mu_{(1)} - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_1}} \right] Pr \left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)} \geq \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n_i} w_{(2)j} X_{(2)j} - \mu_{(2)} - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_2}} \right] \dots Pr \left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)} \geq \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n_i} w_{(3)j} X_{(3)j} - \mu_{(3)} - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_3}} \right]$$

$$\geq P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)} \geq \sum_{j=1}^{n_i} w_{(i)j} X_{(i)j} - \mu_{(i)} - h \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_i}} i \right. \\ \left. = 1, 2, \dots, k-1 \right]$$

$\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j}^2 S_{(k)}^2 \right] = \frac{\max_{1 \leq j \leq k} S_j^2}{\sqrt{n_i}}$ olduğundan Eş. 2.21'den dolayı aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz [6];

$$= Pr_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j}^2 S_{(k)}^2 \right]^{1/2}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(1)j} X_{(1)j} - \mu_{(1)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(1)j}^2 S_{(1)}^2 \right]^{1/2}} - h \right] Pr_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j}^2 S_{(k)}^2 \right]^{1/2}} \geq \right. \\ \left. \frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(2)j} X_{(2)j} - \mu_{(2)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(2)j}^2 S_{(2)}^2 \right]^{1/2}} - h \right] \dots Pr_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j}^2 S_{(k)}^2 \right]^{1/2}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k-1)j} X_{(k-1)j} - \mu_{(k-1)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k-1)j}^2 S_{(k-1)}^2 \right]^{1/2}} - h \right] \\ = P_{\underline{\mu}, \underline{\sigma}^2} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j}^2 S_{(k)}^2 \right]^{1/2}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(i)j} X_{(i)j} - \mu_{(i)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(i)j}^2 S_{(i)}^2 \right]^{1/2}} - h \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \right] \quad (2.22)$$

$$t_k = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j} X_{(k)j} - \mu_{(k)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(k)j}^2 S_{(k)}^2 \right]^{1/2}} \text{ ve } t_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} w_{(i)j} X_{(i)j} - \mu_{(i)}}{\left[\sum_{j=1}^{n_i} w_{(i)j}^2 S_{(i)}^2 \right]^{1/2}} \text{ olarak tanımlanırsa,}$$

Eş. 2.22 aşağıdaki gibi ifade edilir. Burada t_i 'ler (n-2) serbestlik dereceli bağımsız Student-t dağılımına sahip tesadüfi değişkenlerdir [6]

$$\int_0^\infty [\Pr(t_1 < t_k + h) \Pr(t_2 < t_k + h) \dots \Pr(t_{k-1} < t_k + h)] f(t_k) dt_k$$

$$t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1} = t \text{ olsun}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} [\Pr(t < t_k + h) \Pr(t < t_k + h) \dots \Pr(t < t_k + h)] f(t_k) dt_k \\
& \int_0^{\infty} [\Pr(t < t_k + h)]^{k-1} f(t_k) dt_k \\
& = \int_0^{\infty} \left(F_{(n-2)}(t_k + h) \right)^{k-1} f_{n-2}(t_k) dt_k
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Eş. 2.23'te F_{n-2} ve f_{n-2} sırasıyla $n - 2$ serbestlik derecesine sahip olan Student t için dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarıdır [6].

2.2. Kayıtsızlık Alanı Yaklaşımı Kullanılarak Doğru Sıralama Olasılığının Bulunması

Örnek aritmetik ortalamalarının, yığınların merkezi parametreleri ile aynı şekilde sıralanmasında çeşitli durumlar ortaya çıkmıştır. Bechhofer (1954) kayıtsızlık alanı yaklaşımı ile ağırlıklı örnek aritmetik ortalamalarını kullanarak yığın merkezi parametrelerinin sıralanmasına ilişkin bir olasılık tanımı yapmıştır [1]. Bechhofer (1954) kullanmış olduğu kayıtsızlık alanı yaklaşımında doğru sıralama olasılığı aşağıdaki şartları sağlar;

$$\begin{aligned}
P(CS) &\geq P^* & \underline{\mu} &= (\mu_1, \dots, \mu_k) \\
&& \mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} &\geq \delta^*, \\
&& \underline{\sigma}^2 &= (\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)
\end{aligned}$$

Burada $P^* \left(\frac{1}{k} < P^* < 1 \right)$ tahmin etmiş olduğumuz doğru sıralama olasılığını gösterirken, $\delta^* > 0$ önceden belirlenmiş sabit bir değerdir.

Kayıtsızlık alanı yaklaşımı kullanarak yığın varyansları biliniyor ancak birbirine eşit olmadığı durumda $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_k^2)$ ve yığın varyansları bilinmiyorken

Dudewicz ve Dalal (1975) doğru sıralamaya olasılığına ilişkin bir olasılık tanımı yapmıştır [2].

2.2.1. Yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit olmaması durumunda doğru sıralama olasılığı

$k \geq 2$ için $\pi_1, \dots, \pi_k$ bağımsız yığınlar olmak üzere, $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ π_i yığından parametreleri μ_i ve σ_i^2 olan normal dağılıma sahip n_i çaplı tesadüfi bir örnek olsun. Yığınların merkezi parametreleri $\mu_1, \dots, \mu_k$ bilinmiyor, $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ ise biliniyor ancak eşit değil olsun. Burada amaç $\mu_{[1]} \leq \mu_{[2]} \leq \dots \leq \mu_{[k]}$ şeklinde sıralanan merkezi parametrelerinden en büyüğü olan $\mu_{[k]}$ 'nin hangi yığına ait olduğunu, $\mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} \geq \delta^*$ ve $P^* = \Pr(\max\{\bar{X}_{(1)}, \dots, \bar{X}_{(k-1)}\} < \bar{X}_{(k)})$ $P(CS) \geq P^*$ doğru sıralama olasılığını sağlayacak şekilde tahmin etmektir. ($\frac{1}{k} < P^* < 1$, $\delta^* > 0$ olarak önceden belirlenmiş) [1].

Bechhofer (1954) kendi oluşturduğu tabloları kullanarak varyanslar biliniyorken örnek aritmetik ortalamaları istatistiğinin varyanslarının eşit olması için her π_i yığından n_i sayıda gözlem almıştır [1].

Genel ayrılış olarak adlandırılan bu yöntem;

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \dots = \frac{\sigma_k^2}{n_k} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir.

Bechhofer'in oluşturduğu tablodan yararlanılarak her yığından kaç gözlem alınacağı hesaplanabilir. Örneğin eğer $k = 3$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, $\sigma_3^2 = 9$, $P^* = 0,90$ ve $\delta^* = 0,1$ iken ortak varyans da $\sigma^2 = 1$ olsun. $\frac{\sqrt{n}\delta^*}{\sigma} = 2,2302$ olduğu tablodan bilindiğine göre $n' = 497,38$ olur böylece $n_1 = \sigma_1^2 n' = 497,38$, $n_2 = \sigma_2^2 n' = 497,38$ ve

$n_3 = \sigma_3^2 n' = 4476,42$ olur. Yani $n_1 = 498$, $n_2 = 498$, $n_3 = 4477$ olarak almamız gerekmektedir [2].

2.2.2. Yığın varyanslarının bilinmemesi durumunda doğru sıralama olasılığı

$k \geq 2$ için $\pi_1, \dots, \pi_k$ bağımsız yığınlar olmak üzere $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, parametreleri μ_i ve σ_i^2 olan normal dağılıma sahip π_i yığından n_i çaplı tesadüfi bir örnek ve hem $\mu_1, \dots, \mu_k$ hem de $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ bilinmiyor olsun. Bu koşullar altında, amaç $\mu_{[1]} \leq \dots \leq \mu_{[k]}$ şeklinde küçükten büyüğe sıralanmış yığın merkezi parametreleri içinde en büyük olanı doğru tespit etme olasılığını belirlemektir.

Dudewicz (1971) tek aşamalı yöntemin varyanslar bilinmiyorken arzu edilen doğru sıralama olasılığını sağlamadığını göstermiştir [5]. Dudewich ve Dalal (1975) istenilen doğru sıralama olasılığını sağlayan iki aşamalı yöntemi geliştirmişlerdir [2]. Bishop (1976) tek aşamalı yöntemde yığını iki parçaya bölerek iki aşamalı yöntemi uygulamıştır. Lam (1987) tek aşamalı yöntemden alt kümeler olarak varyanslar eşit değilken arzu edilen doğru sıralama olasılığını sağlayan bir yöntem geliştirmiştir [6].

Dudewicz ve Dalal (1975) Bechhofer'in kayıtsızlık alanı yaklaşımından faydalanmış ağırlıklandırılmış örnek ortalamalarını kullanarak doğru sıralama olasılığına ilişkin olasılık fonksiyonunu tanımlamışlardır. Yığın varyansları bilinmiyorken $\mu_{[1]} \leq \dots \leq \mu_{[k]}$ şeklinde küçükten büyüğe sıralanmış yığın merkezi parametreleri içinde en büyük olanı tespit etme olasılığı olan $P(CS)$ 'nın aşağıdaki şartı sağladığını belirtmişlerdir.

$$\mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} \geq \delta^* \text{ olduğunda } P(CS) \geq P^* \quad (2.25)$$

Burada, $(\frac{1}{k} < P^* < 1, \delta^* > 0)$ P^* ve δ^* daha önceden araştırmacı tarafından belirlenir.

Eş. 2.25'teki olasılığı sağlayacak iki aşamalı yöntem için çözüm denklemi şu şekilde gösterilebilir;

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F_{n_0}(z+h))^{k-1} f_{n_0}(z) dz = P^* \quad (2.26)$$

Bu eşitlikte $h = h_{n_0}(k, P^*) > 0$ olacak şekilde denklemin tek çözümüdür.

İki aşamalı yöntemde ilk olarak π_i yığınlarından ($n_0 \geq 2$) olmak üzere $X_{i1}, \dots, X_{in_0}$ örnekleri alınır. Daha sonra bu ilk örneklerin örnek ortalamaları ve örnek varyansları aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\bar{X}_{i(n_0)} = \sum_{j=1}^{n_0} X_{ij} / n_0, \quad s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_0} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i(n_0)})^2}{(n_0 - 1)} \quad (2.27)$$

İkinci aşamada ekleyeceğimiz örnek çapını bulmak için toplam örnek çapı aşağıdaki şekilde belirlenir [2].

$$n_i = \max \left\{ n_0 + 1, \left[\frac{s_i h}{\delta^*} \right]^2 \right\} \quad (2.28)$$

Daha sonra π_i yığınlarından $n_i - n_0$ tane daha ($X_{in_0+1}, \dots, X_{in_i}$) gözlem alınır ve i . yığına ilişkin ağırlıklı örnek ortalaması şu şekilde gösterilir;

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} X_{ij} \quad (2.29)$$

Buradaki a_{ij} 'ler aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilmelidirler;

$$\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} = 1, \quad a_{i1} = \dots = a_{in_0} \quad ve \quad s_i^2 \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}^2 = \left(\frac{\delta^*}{h} \right)^2 \quad (2.30)$$

Daha sonra Eş. 2.29'a göre k tane yığın için hesaplanan ağırlıklı örnek aritmetik ortalamaları küçükten büyüğe doğru $\tilde{X}_{[1]} \leq \dots \leq \tilde{X}_{[k]}$ şeklinde sıralanır ve en büyük

ortalamaya sahip $\tilde{\tilde{X}}_{[k]}$, merkezi parametresi en büyük yığın olarak seçilir [2]. Dudewicz ve Dalal (1975) yaptıkları bu seçimin doğru olması olasılığının varyanslardan bağımsız olduğunu şu şekilde göstermişlerdir;

$$\begin{aligned}
 P(CS) &= \Pr(\tilde{\tilde{X}}_{(1)} < \tilde{\tilde{X}}_{(k)}) \Pr(\tilde{\tilde{X}}_{(2)} < \tilde{\tilde{X}}_{(k)}) \Pr(\tilde{\tilde{X}}_{(3)} < \tilde{\tilde{X}}_{(k)}) \dots \dots \Pr(\tilde{\tilde{X}}_{(k-1)} < \tilde{\tilde{X}}_{(k)}) \\
 &= \prod_{i=1}^{k-1} \Pr(\tilde{\tilde{X}}_{(i)} < \tilde{\tilde{X}}_{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, k-1) \\
 &= \Pr\left(\frac{\tilde{\tilde{X}}_{(1)} - \mu_{[1]}}{\frac{\delta^*}{h}} < \frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k)} - \mu_{[k]}}{\frac{\delta^*}{h}} + \frac{\mu_{[k]} - \mu_{[1]}}{\frac{\delta^*}{h}}\right) \Pr\left(\frac{\tilde{\tilde{X}}_{(2)} - \mu_{[2]}}{\frac{\delta^*}{h}} < \right. \\
 &\quad \left. \frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k)} - \mu_{[k]}}{\frac{\delta^*}{h}} + \frac{\mu_{[k]} - \mu_{[2]}}{\frac{\delta^*}{h}}\right) \dots \Pr\left(\frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k-1)} - \mu_{[k-1]}}{\frac{\delta^*}{h}} < \frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k)} - \mu_{[k]}}{\frac{\delta^*}{h}} + \frac{\mu_{[k]} - \mu_{[k-1]}}{\frac{\delta^*}{h}}\right) \\
 &= \Pr\left(\frac{\tilde{\tilde{X}}_{(i)} - \mu_{[i]}}{\frac{\delta^*}{h}} < \frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k)} - \mu_{[k]}}{\frac{\delta^*}{h}} + \frac{\mu_{[k]} - \mu_{[i]}}{\frac{\delta^*}{h}}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1\right) \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

$\mu_{[k]} - \mu_{[k-1]} \geq \delta^*$ olarak tanımlandığından $\mu_{[1]} = \dots = \mu_{[k-1]} = \mu_{[k]} - \delta^*$ şeklinde olur. Eş. 2.31'de $\frac{\tilde{\tilde{X}}_{(i)} - \mu_{[i]}}{\frac{\delta^*}{h}}$ 'yi Y_i olarak, $\frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k)} - \mu_{[k]}}{\frac{\delta^*}{h}}$ 'de Y_k olarak tanımlarsak;

$$Y_i = \frac{\tilde{\tilde{X}}_{(i)} - \mu_{[i]}}{\frac{\delta^*}{h}}, \quad Y_k = \frac{\tilde{\tilde{X}}_{(k)} - \mu_{[k]}}{\frac{\delta^*}{h}}$$

elde edilir.

Burada $Y_1, \dots, Y_k$ herbiri $n_0 - 1$ serbestlik dereceli Student t dağılan bağımsız tesadüfi değişkenlerdir. Y_i tesadüfi değişkeninin $n_0 - 1$ serbestlik dereceli Student t dağıldığını şu şekilde gösterilebilir;

$$Y_i = \frac{\tilde{X}_{(i)} - \mu_{[i]}}{s_{(i)} \sqrt{\sum_{j=1}^{n(i)} a_{(i)j}^2}}$$

O halde Eş. 2.31 şu şekilde yeniden yazılabilir;

$$P(CS) = \Pr(Y_1 < Y_k + h) \Pr(Y_2 < Y_k + h) \Pr(Y_3 < Y_k + h) \dots \Pr(Y_{k-1} < Y_k + h)$$

Eğer her yığından çekilecek birinci örnek çapı n_0 aynı olur ise

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} F_{n_0}(Y_k + h) \right\} f_{n_0}(Y_k) dY_k = P^* \quad (2.32)$$

olur.

Burada F_{n_0} ve f_{n_0} sırasıyla $n_0 - 1 \geq 1$ serbestlik derecesine sahip olan bir Student t için dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarıdır [2].

3. UYGULAMA

Merkezi parametrelerin küçükten büyüğe doğru şekilde sıralanmasında kullanılan iki temel yöntemi bir önceki bölümde gösterdikten sonra verilmiş olan bu bilgileri bir uygulama ile desteklemek için simülasyon yöntemi kullanılarak doğru sıralama olasılık değerlerini her iki yöntemi de kullanarak elde etmeye çalıştık.

Doğru sıralama olasılığının tespit edilmesinde yığın varyansları bilinmiyorken alt küme seçme yaklaşımında örnek aritmetik ortalamaları kullanıldığında Eş. 2.14'teki olasılık tanımına ulaşıldığını daha önceki bölümde göstermiştik. Bu bölümde Eş. 2.14'teki olasılığı sağlayan c değerleri için MATLAB R2008a programı kullanılarak bazı örnek çapları için doğru sıralama olasılığına ilişkin değerler bulunmuştur. Çizelge 3.1'de c nin 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5 ve 5 değerleri, k yığın sayısını göstermek üzere, örnek çapları 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25 ve 30 için doğru sıralama olasılıkları elde edilmiştir.

Çizelge 3.1. $k=2$, $n=5(1)10(5)30$, $c=0(0.5)5$ iken ki-kare dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=2$										
$c \backslash n$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0,5	0.6188	0.6216	0.6251	0.6267	0.6288	0.6308	0.6344	0.6335	0.6358	0.6341
1	0.7228	0.7310	0.7407	0.7388	0.7419	0.7417	0.7491	0.7533	0.7521	0.7553
1,5	0.8157	0.8209	0.8228	0.8217	0.8322	0.8334	0.8440	0.8451	0.8510	0.8503
2	0.8736	0.8823	0.8904	0.8918	0.8991	0.9009	0.9066	0.9088	0.9121	0.9156
2,5	0.9112	0.9198	0.9353	0.9377	0.9403	0.9452	0.9490	0.9533	0.9533	0.9569
3	0.9444	0.9497	0.9594	0.9665	0.9685	0.9684	0.9749	0.9772	0.9795	0.9791
3,5	0.9601	0.9702	0.9779	0.9786	0.9833	0.9824	0.9876	0.9894	0.9908	0.9899
4	0.9807	0.9810	0.9854	0.9880	0.9899	0.9912	0.9947	0.9953	0.9959	0.9961
4,5	0.9869	0.9906	0.9917	0.9935	0.9947	0.9961	0.9972	0.9981	0.9985	0.9985
5	0.9903	0.9946	0.9957	0.9970	0.9978	0.9977	0.9990	0.9992	0.9994	0.9995

Çizelge 3.1. (Devam) $k=3$, $n=5(1)10(5)30$, $c=0(0,5)5$ iken ki-kare dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=3$										
$n \backslash c$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
0,5	0.3825	0.3853	0.3904	0.3920	0.3962	0.3974	0.3967	0.4013	0.4035	0.4033
1	0.5354	0.5457	0.5425	0.5435	0.5494	0.5553	0.5632	0.5721	0.5645	0.5694
1,5	0.6423	0.6663	0.6823	0.6847	0.6950	0.6984	0.7194	0.7151	0.7102	0.7219
2	0.7529	0.7823	0.7909	0.7856	0.7994	0.8130	0.8262	0.8300	0.8363	0.8331
2,5	0.8443	0.8588	0.8757	0.8866	0.8793	0.8874	0.8981	0.9129	0.9139	0.9145
3	0.9011	0.9147	0.9269	0.9252	0.9339	0.9473	0.9520	0.9553	0.9569	0.9573
3,5	0.9197	0.9472	0.9583	0.9585	0.9640	0.9655	0.9773	0.9799	0.9825	0.9802
4	0.9512	0.9662	0.9727	0.9765	0.9789	0.9802	0.9884	0.9890	0.9919	0.9929
4,5	0.9710	0.9752	0.9856	0.9895	0.9898	0.9901	0.9942	0.9962	0.9969	0.9972
5	0.9800	0.9857	0.9840	0.9921	0.9959	0.9959	0.9977	0.9987	0.9984	0.9991

Çizelge 3.1. (Devam) $k=5$, $n=5(1)10(5)30$, $c=0(0,5)5$ iken ki-kare dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=5$										
$n \backslash c$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
0,5	0.1476	0.1531	0.1530	0.1549	0.1564	0.1569	0.1626	0.1639	0.1629	0.1630
1	0.2779	0.2943	0.3007	0.3082	0.3036	0.3138	0.3144	0.3247	0.3270	0.3267
1,5	0.4412	0.4392	0.4677	0.4805	0.4868	0.4889	0.5030	0.5135	0.5084	0.5232
2	0.5828	0.6139	0.6302	0.6513	0.6597	0.6681	0.6819	0.6977	0.6994	0.6961
2,5	0.6802	0.7407	0.7525	0.7555	0.7808	0.7871	0.8183	0.8232	0.8323	0.8290
3	0.7886	0.8355	0.8493	0.8706	0.8889	0.8750	0.9000	0.9082	0.9174	0.9157
3,5	0.8636	0.9054	0.9262	0.9253	0.9332	0.9329	0.9512	0.9516	0.9588	0.9674
4	0.9215	0.9254	0.9561	0.9562	0.9580	0.9705	0.9764	0.9809	0.9847	0.9848
4,5	0.9424	0.9478	0.9700	0.9759	0.9838	0.9825	0.9902	0.9916	0.9931	0.9939
5	0.9557	0.9732	0.9823	0.9895	0.9887	0.9872	0.9937	0.9966	0.9976	0.9980

Çizelge 3.1. (Devam) $k=9$, $n=5(1)10(5)30$, $c=0(0,5)5$ iken ki-kare dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=9$										
$\begin{matrix} n \\ c \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
0,5	0.0224	0.0236	0.0241	0.0239	0.0243	0.0241	0.0257	0.0262	0.0262	0.0266
1	0.0819	0.0840	0.0900	0.0942	0.0972	0.0967	0.1009	0.1080	0.1035	0.1084
1,5	0.2037	0.2435	0.2080	0.2337	0.2510	0.2457	0.2536	0.2681	0.2722	0.2707
2	0.3664	0.4006	0.4009	0.4272	0.4292	0.4475	0.4785	0.4848	0.4841	0.5005
2,5	0.5198	0.5734	0.5884	0.6142	0.6301	0.6407	0.6625	0.6899	0.6945	0.7045
3	0.6379	0.6976	0.7386	0.7568	0.7809	0.7755	0.8212	0.8378	0.8436	0.8548
3,5	0.7629	0.7909	0.8379	0.8402	0.8609	0.8703	0.9079	0.9159	0.9251	0.9307
4	0.8268	0.8778	0.9008	0.9183	0.9330	0.9362	0.9516	0.9665	0.9679	0.9691
4,5	0.8906	0.9221	0.9545	0.9510	0.9665	0.9685	0.9781	0.9835	0.9862	0.9890
5	0.9165	0.9506	0.9647	0.9725	0.9809	0.9814	0.9925	0.9949	0.9942	0.9960

Çizelge 3.1. (Devam) $k=10$, $n=5(1)10(5)30$, $c=0(0,5)5$ iken ki-kare dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=10$										
$\begin{matrix} n \\ c \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020
0,5	0.0140	0.0136	0.0150	0.0152	0.0149	0.0159	0.0166	0.0169	0.0171	0.0167
1	0.0603	0.0670	0.0658	0.0644	0.0717	0.0756	0.0754	0.0780	0.0791	0.0801
1,5	0.1584	0.1783	0.1819	0.1902	0.2040	0.2124	0.2177	0.2333	0.2261	0.2290
2	0.3298	0.3260	0.3366	0.3790	0.3825	0.4051	0.4273	0.4451	0.4433	0.4459
2,5	0.4795	0.5396	0.5646	0.5702	0.5790	0.6079	0.6301	0.6526	0.6509	0.6705
3	0.6321	0.6776	0.7113	0.7364	0.7579	0.7882	0.7878	0.8166	0.8287	0.8183
3,5	0.7229	0.7774	0.8149	0.8345	0.8552	0.8515	0.8965	0.9081	0.9119	0.9247
4	0.8201	0.8600	0.8947	0.8964	0.9098	0.9275	0.9516	0.9575	0.9598	0.9648
4,5	0.8833	0.9178	0.9426	0.9495	0.9600	0.9568	0.9770	0.9856	0.9844	0.9850
5	0.9176	0.9465	0.9548	0.9706	0.9678	0.9808	0.9900	0.9946	0.9938	0.9945

Çizelge 3.1 incelendiğinde $c = 0$ iken doğru sıralama olasılığı $\frac{1}{2^{k-1}}$ 'e eşit olmaktadır. c büyüdükçe doğru sıralama olasılığımızda artmaktadır. Ayrıca örnek çapı n 'i artırdığımızda da genellikle doğru sıralama olasılığı artmaktadır.

Lam (1992) tarafından kullanılan alt örnek seçme yaklaşımı ile Dudewicz ve Dalal (1975) tarafından kullanılan kayıtsızlık alanı yaklaşımlarının her ikisinde de ağırlıklı örnek aritmetik ortalaması kullanıldığında aynı olasılık tanımına ulaşıldığı bir önceki bölümde gösterilmiştir. Bu bölümde Eş. 2.32’de verilen olasılık tanımı kullanılarak MATLAB R2008a programıyla simülasyon ile bazı örnek çapları için doğru sıralama olasılık değerleri bulunmuştur. Çizelge 3.2’de h nin 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5 ve 5 değerleri, k yığın sayısını göstermek üzere, örnek çapları 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25 ve 30 için doğru sıralama olasılıkları gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. $k=2$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0.5)5$ iken t dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=2$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.5033	0.4976	0.5045	0.5010	0.4962	0.4986	0.5015	0.4950	0.5003	0.4980
0,5	0.6208	0.6243	0.6236	0.6242	0.6269	0.6250	0.6324	0.6387	0.6321	0.6357
1	0.7266	0.7323	0.7382	0.7374	0.7427	0.7475	0.7487	0.7525	0.7548	0.7535
1,5	0.8090	0.8210	0.8245	0.8280	0.8306	0.8325	0.8411	0.8470	0.8476	0.8499
2	0.8708	0.8808	0.8872	0.8940	0.8964	0.9001	0.9083	0.9123	0.9152	0.9146
2,5	0.9165	0.9269	0.9331	0.9372	0.9420	0.9408	0.9503	0.9544	0.9545	0.9561
3	0.9455	0.9547	0.9604	0.9642	0.9672	0.9695	0.9748	0.9773	0.9785	0.9791
3,5	0.9650	0.9721	0.9763	0.9791	0.9812	0.9829	0.9875	0.9895	0.9901	0.9908
4	0.9762	0.9822	0.9855	0.9882	0.9901	0.9911	0.9942	0.9953	0.9959	0.9965
4,5	0.9848	0.9885	0.9918	0.9939	0.9951	0.9958	0.9975	0.9981	0.9983	0.9986
5	0.9880	0.9933	0.9952	0.9967	0.9973	0.9978	0.9988	0.9993	0.9994	0.9995

Çizelge 3.2. (Devam) $k=3$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken t dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=3$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.3323	0.3338	0.3322	0.3323	0.3335	0.3346	0.3316	0.3336	0.3310	0.3358
0,5	0.4609	0.4609	0.4676	0.4720	0.4697	0.4702	0.4720	0.4756	0.4791	0.4812
1	0.5873	0.5957	0.6022	0.6091	0.6103	0.6145	0.6185	0.6230	0.6236	0.6285
1,5	0.7001	0.7145	0.7226	0.7303	0.7363	0.7356	0.7478	0.7534	0.7522	0.7550
2	0.7911	0.8105	0.8174	0.8277	0.8259	0.8336	0.8465	0.8529	0.8541	0.8556
2,5	0.8614	0.8765	0.8865	0.8935	0.8981	0.9015	0.9140	0.9159	0.9230	0.9222
3	0.9072	0.9212	0.9310	0.9368	0.9403	0.9445	0.9549	0.9585	0.9618	0.9627
3,5	0.9377	0.9508	0.9573	0.9631	0.9666	0.9703	0.9782	0.9798	0.9820	0.9832
4	0.9600	0.9696	0.9753	0.9804	0.9822	0.9848	0.9895	0.9913	0.9919	0.9936
4,5	0.9722	0.9816	0.9851	0.9888	0.9907	0.9912	0.9952	0.9961	0.9970	0.9975
5	0.9809	0.9878	0.9917	0.9936	0.9949	0.9955	0.9976	0.9983	0.9989	0.9990

Çizelge 3.2. (Devam) $k=5$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken t dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=5$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.2006	0.1990	0.1986	0.2015	0.2032	0.1991	0.1974	0.1994	0.1995	0.1988
0,5	0.3069	0.3171	0.3171	0.3187	0.3231	0.3241	0.3286	0.3297	0.3296	0.3291
1	0.4420	0.4460	0.4544	0.4633	0.4669	0.4674	0.4763	0.4809	0.4803	0.4845
1,5	0.5673	0.5810	0.5953	0.6059	0.6133	0.6162	0.6260	0.6400	0.6393	0.6387
2	0.6844	0.7036	0.7191	0.7331	0.7359	0.7402	0.7588	0.7672	0.7723	0.7709
2,5	0.7786	0.7997	0.8201	0.8263	0.8349	0.8384	0.8574	0.8646	0.8689	0.8724
3	0.8505	0.8718	0.8855	0.8964	0.9009	0.9086	0.9204	0.9270	0.9304	0.9346
3,5	0.8965	0.9161	0.9275	0.9390	0.9454	0.9475	0.9602	0.9661	0.9683	0.9695
4	0.9304	0.9480	0.9577	0.9654	0.9684	0.9725	0.9805	0.9840	0.9868	0.9869
4,5	0.9534	0.9665	0.9756	0.9796	0.9828	0.9850	0.9909	0.9930	0.9947	0.9947
5	0.9673	0.9784	0.9858	0.9890	0.9907	0.9925	0.9959	0.9975	0.9979	0.9983

Çizelge 3.2. (Devam) $k=9$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken t dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=9$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.1132	0.1103	0.1115	0.1112	0.1112	0.1158	0.1123	0.1103	0.1099	0.1117
0,5	0.1849	0.1928	0.1951	0.2009	0.1972	0.1970	0.2035	0.2063	0.2128	0.2095
1	0.2945	0.3035	0.3127	0.3201	0.3192	0.3255	0.3348	0.3411	0.3478	0.3518
1,5	0.4226	0.4399	0.4555	0.4619	0.4730	0.4782	0.4978	0.5060	0.5118	0.5120
2	0.5495	0.5761	0.5932	0.6081	0.6162	0.6252	0.6523	0.6613	0.6649	0.6715
2,5	0.6663	0.6990	0.7186	0.7339	0.7498	0.7571	0.7768	0.7911	0.7953	0.8024
3	0.7610	0.7936	0.8139	0.8291	0.8443	0.8482	0.8720	0.8832	0.8860	0.8955
3,5	0.8359	0.8610	0.8823	0.8964	0.9057	0.9133	0.9333	0.9401	0.9433	0.9485
4	0.8851	0.9090	0.9281	0.9387	0.9455	0.9529	0.9654	0.9727	0.9748	0.9770
4,5	0.9203	0.9416	0.9553	0.9647	0.9704	0.9748	0.9838	0.9873	0.9897	0.9908
5	0.9438	0.9617	0.9730	0.9795	0.9836	0.9867	0.9926	0.9951	0.9962	0.9964

Çizelge 3.2. (Devam) $k=10$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken t dağılımına ilişkin doğru sıralama olasılık değerleri

$k=10$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.1030	0.1006	0.1014	0.0976	0.0987	0.1020	0.0991	0.1002	0.1007	0.0996
0,5	0.1678	0.1763	0.1786	0.1804	0.1844	0.1846	0.1899	0.1908	0.1969	0.1922
1	0.2699	0.2865	0.2893	0.2993	0.3020	0.3067	0.3194	0.3226	0.3228	0.3291
1,5	0.3946	0.4132	0.4292	0.4412	0.4440	0.4525	0.4697	0.4841	0.4888	0.4880
2	0.5262	0.5530	0.5749	0.5849	0.5930	0.6034	0.6310	0.6404	0.6469	0.6509
2,5	0.6458	0.6786	0.6961	0.7146	0.7267	0.7381	0.7656	0.7761	0.7848	0.7835
3	0.7401	0.7804	0.8014	0.8181	0.8285	0.8374	0.8633	0.8743	0.8785	0.8854
3,5	0.8177	0.8523	0.8689	0.8871	0.8988	0.9065	0.9254	0.9348	0.9402	0.9433
4	0.8721	0.9030	0.9216	0.9343	0.9414	0.9465	0.9641	0.9673	0.9726	0.9742
4,5	0.9108	0.9376	0.9524	0.9607	0.9678	0.9727	0.9812	0.9867	0.9887	0.9898
5	0.9369	0.9589	0.9704	0.9776	0.9830	0.9846	0.9913	0.9944	0.9953	0.9960

Çizelge 3.2 incelendiğinde $h > 0$ iken doğru sıralama olasılığı $\frac{1}{k} < P^* < 1$ arasında olduğu görülmektedir. Yine $h > 0$ iken örnek hacmi arttığında her h değeri için doğru sıralama olasılığının arttığı görülmektedir.

Lam (1992), $c \geq h$ iken ve k nin tüm durumları için

$$\int_0^\infty \left(F_{(n-2)}(t_k + h) \right)^{k-1} f_{n-2}(t_k) dt_k \geq \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{r}\right)(n-1)}}\right) g_{n-1}(x) dx \right]^{k-1} g_{n-1}(r) dr$$

olduğunu göstermiştir [6]. $c \geq h$ iken çizelge 3.1'deki olasılık değerleri ile çizelge 3.2'deki olasılık değerleri karşılaştırıldığında t dağılımı üzerinden elde edilen olasılık değerlerinin ki-kare dağılımı üzerinden elde edilen olasılık değerlerine eşit yada daha büyük olduğu gözlemlenmektedir.

Doğru sıralama olasılığının ağırlıklı örnek aritmetik ortalaması kullanılarak bulunmasında MATLAB R2008a programı ile bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu çalışmada aslında hangi yığının merkezi parametresinin en büyük olduğu önceden bilinmektedir. Örneğin $k=2$ için birinci yığının merkezi parametresi $\mu_1 = 1$ ikinci yığının merkezi parametresi $\mu_2 = 2$ olarak önceden bilinmektedir. Bu bilgiye göre sıralama $\mu_1 < \mu_2$ şeklinde olacaktır. Yapılan simülasyon çalışması ile ağırlıklı örnek aritmetik ortalamaları üzerinden yapılan sıralamanın, yığın merkezi parametrelerinin sıralılığı ile hangi oranda uyduğu tespit edilmeye çalışılmıştır. Örnek aritmetik ortalamaları Eş. 2.20 ve Eş. 2.21 de verilen kısıtları sağlayacak şekilde ağırlıklar kullanılarak ağırlıklandırılmıştır. δ^* değerleri ise h değişkenine, en büyük örnek varyansına ve örnek çapı n 'e bağlı olarak değişmiştir. Çizelge 3.3'te h 'nin 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5 ve 5 değerleri için k yığın sayısını göstermek üzere örnek çapları 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25 ve 30 için doğru sıralama olasılıkları gösterilmiştir.

Çizelge 3.3. $k=2$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=2$										
$n \backslash h$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.5018	0.5020	0.4999	0.4939	0.5092	0.5047	0.5052	0.5020	0.5001	0.4961
0,5	0.6346	0.6440	0.6332	0.6385	0.6418	0.6406	0.6410	0.6423	0.6403	0.6376
1	0.7498	0.7559	0.7610	0.7636	0.7604	0.7615	0.7638	0.7515	0.7667	0.7584
1,5	0.8591	0.8537	0.8534	0.8515	0.8495	0.8475	0.8540	0.8564	0.8539	0.8555
2	0.9260	0.9235	0.9168	0.9255	0.9213	0.9209	0.9229	0.9199	0.9173	0.9245
2,5	0.9591	0.9584	0.9591	0.9603	0.9621	0.9637	0.9635	0.9589	0.9590	0.9608
3	0.9806	0.9835	0.9812	0.9836	0.9809	0.9838	0.9803	0.9827	0.9846	0.9826
3,5	0.9918	0.9915	0.9928	0.9930	0.9914	0.9941	0.9926	0.9937	0.9934	0.9919
4	0.9973	0.9972	0.9971	0.9981	0.9976	0.9971	0.9974	0.9970	0.9984	0.9980
4,5	0.9984	0.9994	0.9989	0.9991	0.9995	0.9992	0.9994	0.9987	0.9991	0.9992
5	0.9995	0.9995	0.9996	0.9994	0.9998	0.9998	0.9998	0.9994	0.9997	0.9998

Çizelge 3.3. (Devam) $k=5$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=5$										
$n \backslash h$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.2006	0.2029	0.1984	0.2064	0.2007	0.2019	0.2070	0.1982	0.2063	0.2029
0,5	0.3283	0.3260	0.3299	0.3377	0.3297	0.3324	0.3349	0.3379	0.3275	0.3418
1	0.4758	0.4758	0.4817	0.4787	0.4887	0.4857	0.4921	0.4902	0.4957	0.4935
1,5	0.6262	0.6340	0.6304	0.6325	0.6340	0.6398	0.6495	0.6574	0.6537	0.6488
2	0.7536	0.7632	0.7672	0.7670	0.7827	0.7710	0.7770	0.7842	0.7914	0.7817
2,5	0.8554	0.8608	0.8653	0.8627	0.8660	0.8701	0.8782	0.8783	0.8885	0.8807
3	0.9219	0.9243	0.9288	0.9348	0.9346	0.9335	0.9425	0.9408	0.9389	0.9411
3,5	0.9650	0.9677	0.9692	0.9688	0.9730	0.9693	0.9751	0.9749	0.9750	0.9737
4	0.9840	0.9857	0.9867	0.9876	0.9883	0.9875	0.9886	0.9905	0.9913	0.9897
4,5	0.9944	0.9940	0.9947	0.9949	0.9956	0.9950	0.9961	0.9964	0.9964	0.9968
5	0.9977	0.9973	0.9986	0.9984	0.9985	0.9985	0.9990	0.9988	0.9991	0.9987

Çizelge 3.3. (Devam) $k=9$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=9$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.1160	0.1150	0.1069	0.1161	0.1099	0.1162	0.1098	0.1134	0.1143	0.1101
0,5	0.2208	0.2165	0.2156	0.2185	0.2089	0.2162	0.2154	0.2126	0.2163	0.2118
1	0.3486	0.3442	0.3509	0.3534	0.3530	0.3509	0.3598	0.3555	0.3536	0.3651
1,5	0.4904	0.5042	0.5056	0.5055	0.5060	0.5011	0.5136	0.5276	0.5242	0.5286
2	0.6403	0.6455	0.6411	0.6647	0.6535	0.6600	0.6750	0.6926	0.6820	0.6769
2,5	0.7683	0.7689	0.7652	0.7780	0.7740	0.7899	0.7975	0.8018	0.8062	0.8146
3	0.8612	0.8659	0.8681	0.8820	0.8803	0.8811	0.8901	0.8925	0.9007	0.9020
3,5	0.9216	0.9258	0.9304	0.9367	0.9355	0.9428	0.9445	0.9487	0.9512	0.9568
4	0.9589	0.9586	0.9679	0.9667	0.9708	0.9728	0.9739	0.9788	0.9765	0.9802
4,5	0.9821	0.9804	0.9845	0.9848	0.9864	0.9882	0.9895	0.9909	0.9915	0.9918
5	0.9898	0.9910	0.9922	0.9939	0.9948	0.9952	0.9965	0.9964	0.9961	0.9980

Çizelge 3.3. (Devam) $k=10$, $n=5(1)10(5)30$, $h=0(0,5)5$ iken 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=10$										
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
0	0.0967	0.0950	0.0946	0.0969	0.1015	0.0971	0.1016	0.1034	0.0958	0.0990
0,5	0.2042	0.1978	0.1978	0.1971	0.2090	0.1973	0.2005	0.2089	0.2049	0.2011
1	0.3433	0.3389	0.3414	0.3477	0.3436	0.3417	0.3452	0.3463	0.3543	0.3371
1,5	0.5080	0.5023	0.5111	0.5093	0.5066	0.5061	0.5125	0.5081	0.5226	0.5215
2	0.6482	0.6482	0.6572	0.6603	0.6603	0.6675	0.6724	0.6764	0.6786	0.6764
2,5	0.7790	0.7871	0.7872	0.7917	0.7978	0.7995	0.8061	0.8138	0.8036	0.8128
3	0.8709	0.8753	0.8787	0.8808	0.8814	0.8847	0.8930	0.9033	0.8982	0.9043
3,5	0.9268	0.9305	0.9294	0.9377	0.9390	0.9418	0.9484	0.9489	0.9554	0.9545
4	0.9656	0.9665	0.9663	0.9715	0.9710	0.9728	0.9779	0.9782	0.9803	0.9819
4,5	0.9800	0.9834	0.9845	0.9861	0.9870	0.9876	0.9899	0.9913	0.9919	0.9908
5	0.9920	0.9935	0.9937	0.9934	0.9943	0.9963	0.9959	0.9974	0.9965	0.9976

Çizelge 3.3 incelendiğinde $h > 0$ iken doğru sıralama olasılığı $\frac{1}{k} < P^* < 1$ arasında olduğu görülmektedir. Ayrıca elde edilen olasılık değerleri Çizelge 3.2’de gösterilen olasılık değerleri ile benzerlik göstermektedir. h değişkeninin değeri arttıkça doğru sıralama olasılığı da artmaktadır.

Yığın varyansları bilinmiyorken ağırlıklı örnek aritmetik ortalamaları hem alt küme seçme yaklaşımında hemde kayıtsızlık alanı yaklaşımında doğru sıralama olasılığını tespit etmek için kullanılmaktadır. Her iki yaklaşımda da doğru sıralama olasılığının varyanslardan bağımsız olacağı gösterilmiştir. Bu durumu simülasyon yaparak göstermek için MATLAB R2008a programı yardımıyla farklı yığın varyansları için olasılık değerleri bulunmuştur. Çizelge 3.4'te k yığın sayısını göstermek üzere h 'nin 1, 2 ve 3 değerleri için 5, 10, 15, 20, 25 ve 30 çaplı örneklerle yığın varyanslarının bazı değerleri için bulunan doğru sıralama olasılık değerleri gösterilmiştir. δ^* değerleri ise h değişkenine, en büyük yığın varyansına ve yığındaki değişken sayısı n 'e bağlı olarak değişmiştir.

Çizelge 3.4. $k=2$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=2$							
n h		5	10	15	20	25	30
1	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 3$	0.7573	0.7655	0.7546	0.7631	0.7660	0.7549
	$\sigma_1^2 = 5 \ \sigma_2^2 = 2$	0.7606	0.7626	0.7606	0.7548	0.7604	0.7575
	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 4$	0.7617	0.7570	0.7587	0.7579	0.7678	0.7624
2	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 3$	0.9216	0.9162	0.9178	0.9192	0.9211	0.9194
	$\sigma_1^2 = 5 \ \sigma_2^2 = 2$	0.9196	0.9161	0.9244	0.9182	0.9227	0.9208
	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 4$	0.9180	0.9193	0.9217	0.9261	0.9243	0.9194
3	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 3$	0.9814	0.9836	0.9852	0.9815	0.9832	0.9850
	$\sigma_1^2 = 5 \ \sigma_2^2 = 2$	0.9807	0.9842	0.9824	0.9819	0.9839	0.9835
	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 4$	0.9823	0.9828	0.9834	0.9834	0.9842	0.9842

Çizelge 3.4. (Devam) $k=3$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=3$							
$\begin{smallmatrix} n \\ h \end{smallmatrix}$		5	10	15	20	25	30
1	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 3 \ \sigma_3^2 = 4$	0.6223	0.6313	0.6333	0.6225	0.6284	0.6395
	$\sigma_1^2 = 3, \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 1$	0.6354	0.6442	0.6348	0.6380	0.6395	0.6306
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 2$	0.6074	0.6281	0.6389	0.6308	0.6289	0.6310
2	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 3 \ \sigma_3^2 = 4$	0.8472	0.8636	0.8628	0.8669	0.8679	0.8676
	$\sigma_1^2 = 3, \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 1$	0.8640	0.8656	0.8621	0.8621	0.8676	0.8682
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 2$	0.8482	0.8598	0.8585	0.8615	0.8609	0.8645
3	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 3 \ \sigma_3^2 = 4$	0.9589	0.9626	0.9659	0.9681	0.9654	0.9676
	$\sigma_1^2 = 3, \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 1$	0.9594	0.9661	0.9664	0.9661	0.9672	0.9689
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 2$	0.9552	0.9593	0.9634	0.9630	0.9651	0.9639

Çizelge 3.4. (Devam) $k=5$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

$k=5$							
$\begin{smallmatrix} n \\ h \end{smallmatrix}$		5	10	15	20	25	30
1	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 2.5$ $\sigma_3^2 = 3 \ \sigma_4^2 = 4.3 \ \sigma_5^2 = 1.8$	0.4891	0.4952	0.4969	0.4920	0.4977	0.4906
	$\sigma_1^2 = 4.5 \ \sigma_2^2 = 2$ $\sigma_3^2 = 3 \ \sigma_4^2 = 3.3 \ \sigma_5^2 = 1.2$	0.4841	0.4948	0.4998	0.4848	0.4958	0.4980
	$\sigma_1^2 = 3.2 \ \sigma_2^2 = 5$ $\sigma_3^2 = 4 \ \sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 3$	0.4824	0.4966	0.4949	0.4947	0.4912	0.4935
2	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 2.5$ $\sigma_3^2 = 3 \ \sigma_4^2 = 4.3 \ \sigma_5^2 = 1.8$	0.7757	0.7917	0.7877	0.7966	0.7900	0.7912
	$\sigma_1^2 = 4.5 \ \sigma_2^2 = 2$ $\sigma_3^2 = 3 \ \sigma_4^2 = 3.3 \ \sigma_5^2 = 1.2$	0.7666	0.7853	0.7879	0.7881	0.7847	0.7811
	$\sigma_1^2 = 3.2 \ \sigma_2^2 = 5$ $\sigma_3^2 = 4 \ \sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 3$	0.7617	0.7796	0.7826	0.7875	0.7911	0.7851
3	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 2.5$ $\sigma_3^2 = 3 \ \sigma_4^2 = 4.3 \ \sigma_5^2 = 1.8$	0.9289	0.9404	0.9435	0.9438	0.9447	0.9408
	$\sigma_1^2 = 4.5 \ \sigma_2^2 = 2$ $\sigma_3^2 = 3 \ \sigma_4^2 = 3.3 \ \sigma_5^2 = 1.2$	0.9199	0.9343	0.9398	0.9442	0.9450	0.9428
	$\sigma_1^2 = 3.2 \ \sigma_2^2 = 5$ $\sigma_3^2 = 4 \ \sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 3$	0.9182	0.9256	0.9394	0.9428	0.9445	0.9422

Çizelge 3.4. (Devam) $k=6$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

		k=6					
n h		5	10	15	20	25	30
1	$\sigma_1^2 = 5 \ \sigma_2^2 = 4 \ \sigma_3^2 = 1$ $\sigma_4^2 = 3 \ \sigma_5^2 = 2 \ \sigma_6^2 = 5$	0.4029	0.4156	0.4143	0.4178	0.4303	0.4230
	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 5 \ \sigma_6^2 = 4$	0.4063	0.4152	0.4255	0.4189	0.4253	0.4264
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$	0.3993	0.4146	0.4217	0.4256	0.4322	0.4323
2	$\sigma_1^2 = 5 \ \sigma_2^2 = 4 \ \sigma_3^2 = 1$ $\sigma_4^2 = 3 \ \sigma_5^2 = 2 \ \sigma_6^2 = 5$	0.6716	0.6999	0.7142	0.7132	0.7257	0.7224
	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 5 \ \sigma_6^2 = 4$	0.6811	0.7036	0.7140	0.7211	0.7190	0.7277
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$	0.6714	0.6996	0.7157	0.7144	0.7256	0.7236
3	$\sigma_1^2 = 5 \ \sigma_2^2 = 4 \ \sigma_3^2 = 1$ $\sigma_4^2 = 3 \ \sigma_5^2 = 2 \ \sigma_6^2 = 5$	0.8764	0.8881	0.9087	0.9054	0.9071	0.9217
	$\sigma_1^2 = 1 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 5 \ \sigma_6^2 = 4$	0.8728	0.8945	0.9041	0.9088	0.9135	0.9138
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$	0.8693	0.8923	0.9029	0.9061	0.9122	0.9148

Çizelge 3.4. (Devam) $k=9$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

		k=9					
$\begin{smallmatrix} n \\ h \end{smallmatrix}$		5	10	15	20	25	30
1	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 6$ $\sigma_4^2 = 7 \ \sigma_5^2 = 1 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 5 \ \sigma_8^2 = 2 \ \sigma_9^2 = 4$	0.3384	0.3400	0.3586	0.3618	0.3662	0.3587
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 1 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 6 \ \sigma_6^2 = 1$ $\sigma_7^2 = 3 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 5$	0.3350	0.3445	0.3533	0.3544	0.3618	0.3628
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 4 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 1$	0.3399	0.3458	0.3496	0.3595	0.3520	0.3587
2	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 6$ $\sigma_4^2 = 7 \ \sigma_5^2 = 1 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 5 \ \sigma_8^2 = 2 \ \sigma_9^2 = 4$	0.6426	0.6580	0.6828	0.6731	0.6837	0.6818
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 1 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 6 \ \sigma_6^2 = 1$ $\sigma_7^2 = 3 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 5$	0.6354	0.6552	0.6779	0.6805	0.6819	0.6880
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 4 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 1$	0.6295	0.6613	0.6704	0.6799	0.6755	0.6822
3	$\sigma_1^2 = 2 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 6$ $\sigma_4^2 = 7 \ \sigma_5^2 = 1 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 5 \ \sigma_8^2 = 2 \ \sigma_9^2 = 4$	0.8599	0.8828	0.8949	0.8956	0.8990	0.9016
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 1 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 6 \ \sigma_6^2 = 1$ $\sigma_7^2 = 3 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 5$	0.8613	0.8807	0.8933	0.8970	0.9037	0.9030
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 5 \ \sigma_3^2 = 1$ $\sigma_4^2 = 6 \ \sigma_5^2 = 2 \ \sigma_6^2 = 2$ $\sigma_7^2 = 4 \ \sigma_8^2 = 5 \ \sigma_9^2 = 4$	0.8514	0.8773	0.8861	0.8966	0.8982	0.9003

Çizelge 3.4. (Devam) $k=10$, $n=5(5)30$, $h=1(1)3$ iken yığın varyanslarının değişimine göre 20000 tekrarda elde edilen doğru sıralama olasılık değerleri

k=10							
$\begin{matrix} n \\ h \end{matrix}$		5	10	15	20	25	30
1	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 3 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 4 \ \sigma_5^2 = 1 \ \sigma_6^2 = 5$ $\sigma_7^2 = 2 \ \sigma_8^2 = 6 \ \sigma_9^2 = 2$ $\sigma_{10}^2 = 3$	0.3185	0.3184	0.3392	0.3404	0.3492	0.3381
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 1 \ \sigma_3^2 = 2$ $\sigma_4^2 = 5 \ \sigma_5^2 = 3 \ \sigma_6^2 = 4$ $\sigma_7^2 = 2 \ \sigma_8^2 = 4 \ \sigma_9^2 = 5$ $\sigma_{10}^2 = 6$	0.3085	0.3224	0.3315	0.3278	0.3387	0.3329
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 4 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 1$ $\sigma_{10}^2 = 5$	0.3122	0.3255	0.3288	0.3304	0.3442	0.3363
2	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 3 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 4 \ \sigma_5^2 = 1 \ \sigma_6^2 = 5$ $\sigma_7^2 = 2 \ \sigma_8^2 = 6 \ \sigma_9^2 = 2$ $\sigma_{10}^2 = 3$	0.6126	0.6405	0.6533	0.6608	0.6573	0.6722
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 1 \ \sigma_3^2 = 2$ $\sigma_4^2 = 5 \ \sigma_5^2 = 3 \ \sigma_6^2 = 4$ $\sigma_7^2 = 2 \ \sigma_8^2 = 4 \ \sigma_9^2 = 5$ $\sigma_{10}^2 = 6$	0.5988	0.6393	0.6442	0.6546	0.6663	0.6619
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 4 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 1$ $\sigma_{10}^2 = 5$	0.6011	0.6355	0.6568	0.6562	0.6591	0.6596
3	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 3 \ \sigma_3^2 = 5$ $\sigma_4^2 = 4 \ \sigma_5^2 = 1 \ \sigma_6^2 = 5$ $\sigma_7^2 = 2 \ \sigma_8^2 = 6 \ \sigma_9^2 = 2$ $\sigma_{10}^2 = 3$	0.8352	0.8673	0.8835	0.8868	0.8943	0.8903
	$\sigma_1^2 = 4 \ \sigma_2^2 = 1 \ \sigma_3^2 = 2$ $\sigma_4^2 = 5 \ \sigma_5^2 = 3 \ \sigma_6^2 = 4$ $\sigma_7^2 = 2 \ \sigma_8^2 = 4 \ \sigma_9^2 = 5$ $\sigma_{10}^2 = 6$	0.8374	0.8680	0.8811	0.8873	0.8894	0.8920
	$\sigma_1^2 = 3 \ \sigma_2^2 = 2 \ \sigma_3^2 = 4$ $\sigma_4^2 = 2 \ \sigma_5^2 = 4 \ \sigma_6^2 = 3$ $\sigma_7^2 = 4 \ \sigma_8^2 = 3 \ \sigma_9^2 = 1$ $\sigma_{10}^2 = 5$	0.8353	0.8696	0.8827	0.8883	0.8915	0.8933

Çizelge 3.4 incelendiğinde aynı n ve h değeri sabit olmak üzere, yığın varyanslarının farklı değerleri için doğru sıralama olasılık değerlerinde çok fazla bir değişme olmamaktadır. Eğer simülasyonda tekrar sayıları artılırsa bu olasılık değerlerinin bir noktada sabitleneceği görülecektir. Genel olarak farklı yığın sayıları için baktığımızda h değişkeni sabitken yığın varyansları değişse bile doğru sıralama

olasılığında çok büyük bir değişiklik olduğu söylenemez yani doğru sıralama olasılığının varyanslarından bağımsız olduğu söylenebilir.

4. SONUÇ

Yığın merkezi parametrelerini küçükten büyüğe sıralarken bu sıralamayı doğru yapmış olma olasılığını tespit etmek için öncelikle yığın varyansları hakkında bilgi sahibi olmalıyız. Bu tez çalışmasında yığın varyanslarının durumuna göre doğru sıralama olasılığının tespit edilmesine ilişkin iki yaklaşım tanıtılmıştır.

Yığın varyansları biliniyorken tek aşamalı yöntemle örnek ortalamalarını kullanarak yığın merkezi parametrelerinin sıralanması hakkında bir tahmin yapılabilir. Yığın varyansları bilinmiyorsa hem alt küme seçme yaklaşımı hem de kayıtsızlık alanı yaklaşımı kullanılarak yığın merkezi parametrelerinin sıralanması hakkında bir tahminde bulunulabilir. Alt küme seçme yaklaşımında örnek aritmetik ortalamalarını kullanarak tek aşamalı yöntemle doğru sıralama olasılığına ilişkin bir değer bulunulabilir. Eğer tesadüfi değişkenleri ağırlıklandırıp ağırlıklandırılmış örnek ortalaması ile iki aşamalı yöntemi kullanarak yığın merkezi parametrelerinin sıralanması hakkında bir tahminde bulunmak isteniyorsa hem alt küme seçme yaklaşımı hem de kayıtsızlık alanı yaklaşımı kullanılabilir.

Bu çalışmada yığın varyansları biliniyor fakat birbirine eşit değilken doğru sıralama olasılığının nasıl tespit edileceği her iki yaklaşım için gösterilmiştir. Eğer yığın varyansları bilinmiyorsa, alt küme seçme yaklaşımında tek aşamalı ve iki aşamalı yöntemle doğru sıralama olasılığının bulunması gösterilmiştir. Yığın varyansları bilinmediği durumlarda kayıtsızlık alanı yaklaşımında ise iki aşamalı yöntemle doğru sıralama olasılığının tespit edilmesi gösterilmiştir.

Yapılan simülasyon çalışmaları ile doğru sıralama olasılığı t ve ki kare dağılımlarından elde edilmiş ve bunların karşılaştırılması sonucunda t dağılımından gözlemlenen olasılık değerlerinin ki kare dağılımından gözlemlenen olasılık değerlerine eşit yada daha büyük olduğu bulunmuştur. Ayrıca farklı yığın varyansları kullanılarak doğru sıralama olasılıkları elde edilmiş ve bu olasılıkların varyanslardan bağımsız olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Bechhofer, E. R., "A single-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with known variances", *The Annals Of Mathematical Statistics*, 25: 16-39 (1954).
2. Dudewicz, E. J., Dalal, S. R., "Allocation of observation in ranking and selection with unequal variances", *Sankhya*, 37B: 28-78 (1975).
3. Goldsman, D., Nelson, L. B., "Statistical screening, selection, and multiple comparison procedures in computer simulation", *Proceeding of Winter Simulation Conference in U.S.A*, 159-166 (1998).
4. Gupta, S. S., Wong, W. Y., "Subset selection procedures for means of normal populations with unequal variances: unequal sample sizes case", *Selecta Statistica Canada VI*, 109-150 (1982).
5. Dudewicz, E. J., "Nonexistence of a single-sample selection procedure when $P(CS)$ is independent of the variances", *South African Statistics*, 5: 37-39 (1971).
6. Lam, K., "Subset selection of normal populations under heteroscedasticity", *The Frontiers of Modern Statistical Inference Procedures II*, 307-345 (1992).
7. Chen, H. J., Lam, K., "Single-stage interval estimation of the largest normal mean under heteroscedasticity", *Comm. Statist. Theory Methods*, 10: 3703-3718 (1989).

EKLER

EK-1 u_i ve v_i ağırlıklarının sağlaması gereken koşulların gösterilmesi

$$i) (n_i - 1)U_i + V_i = 1$$

$$ii) (n_i - 1)U_i^2 + V_i^2 = S_{[k]}^2 / (n_i S_i^2)$$

birinci denklemden $u_i = \frac{1 - v_i}{n_i - 1}$ olarak çekerek ikinci denklemden yerine yazarsak;

$$(n_i - 1) \frac{(1 - v_i)^2}{(n_i - 1)^2} + v_i^2 = \frac{S_{[k]}^2}{n_i S_i^2}$$

$$\frac{1 - 2v_i + v_i^2}{n_i - 1} + v_i^2 = \frac{S_{[k]}^2}{n_i S_i^2}$$

$$\frac{1 - 2v_i + v_i^2 + n_i v_i^2 - v_i^2}{(n_i - 1)} = \frac{S_{[k]}^2}{n_i S_i^2}$$

$$n_i v_i^2 - 2v_i + 1 = \frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2}{n_i S_i^2}$$

eşitliğin her iki tarafını n_i ile çarparsak,

$$n_i^2 v_i^2 - 2n_i v_i + n_i = n_i \frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2}{n_i S_i^2}$$

eşitliğin sol tarafına ± 1 eklersek,

$$n_i^2 v_i^2 - 2n_i v_i + n_i + 1 - 1 = \frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2}{S_i^2}$$

$$(n_i v_i - 1)^2 + n_i - 1 = \frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2}{S_i^2}$$

$$(n_i v_i - 1)^2 = \frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2}{S_i^2} + 1 - n_i$$

$$(n_i v_i - 1) = \pm \sqrt{\frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2 + S_i^2 - n_i S_i^2}{S_i^2}}$$

$$v_i = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{(n_i - 1)S_{[k]}^2 - (n_i - 1)S_i^2}{S_i^2}}$$

$$v_i = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{(n_i - 1)(S_{[k]}^2 - S_i^2)}{S_i^2}}$$

EK-1 (Devam) u_i ve v_i ağırlıklarının sağlaması gereken koşulların gösterilmesi

$$v_i = \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \sqrt{(n_i - 1) \left(\frac{S_{[k]}^2}{S_i^2} - 1 \right)} \quad \text{olur.}$$

$$\text{i) } (n_i - 1)U_i + V_i = 1$$

$$\text{ii) } (n_i - 1)U_i^2 + V_i^2 = S_{[k]}^2 / (n_i S_i^2)$$

birinci denklemden $v_i = 1 - (n_i - 1)u_i$ olarak çekerek ikinci denklemde yerine yazarsak;

$$(n_i - 1)u_i^2 + [1 - (n_i - 1)u_i]^2 = \frac{S_{[k]}^2}{(n_i S_i^2)}$$

$$(n_i - 1)u_i^2 + 1 - 2u_i(n_i - 1) + (n_i - 1)^2 u_i^2 = \frac{S_{[k]}^2}{(n_i S_i^2)}$$

$$(n_i - 1)u_i^2 - 2u_i(n_i - 1) + (n_i - 1)^2 u_i^2 = \frac{S_{[k]}^2}{(n_i S_i^2)} - 1 \quad \text{her iki tarafı } (n_i - 1) \text{ 'e bölersek,}$$

$$u_i^2 - 2u_i + (n_i - 1)u_i^2 = \frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(n_i S_i^2)(n_i - 1)}$$

$$u_i^2 - 2u_i + n_i u_i^2 - u_i^2 = \frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(n_i S_i^2)(n_i - 1)}$$

her iki tarafı n_i ile çarparsak,

$$n_i^2 u_i^2 - 2n_i u_i = \frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(n_i S_i^2)(n_i - 1)} n_i$$

eşitliğin sol tarafına ± 1 eklersek,

$$n_i^2 u_i^2 - 2n_i u_i + 1 - 1 = \frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(S_i^2)(n_i - 1)}$$

$$(n_i u_i - 1)^2 - 1 = \frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(S_i^2)(n_i - 1)}$$

$$(n_i u_i - 1)^2 = \frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(S_i^2)(n_i - 1)} + 1$$

EK-1 (Devam) u_i ve v_i ağırlıklarının sağlaması gereken koşulların gösterilmesi

$$(n_i u_i - 1) = \pm \sqrt{\frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2)}{(S_i^2)(n_i - 1)}} + 1$$

$$n_i u_i = 1 + \sqrt{\frac{S_{[k]}^2 - (n_i S_i^2) + n_i S_i^2 - S_i^2}{S_i^2 (n_i - 1)}}$$

$$u_i = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{S_{[k]}^2 - S_i^2}{S_i^2 (n_i - 1)}}$$

$$u_i = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{1}{(n_i - 1)} \left(\frac{S_{[k]}^2}{S_i^2} - 1 \right)}$$

şeklinde gösterilebilir.

EK-2 Ki-kare dağılımına ilişkin olasılık değerlerinin bulunması için simülasyon programı

```

M=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]';
P=1;
for k=2:10
    k
    clear M
M=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]';
for n=5:30
    clear P
    P=1;
    for c=0:0.5:5
        TopP=0;
        for tekrar1=1:1000
            r=chi2rnd(n-1);
            Top=0;
            for tekrar2=1:10000
                x=chi2rnd(n-1);
                F = (normcdf((c/sqrt(((1/x)+(1/r))*(n-1))),0,1));
                Top=Top+F;
            end
            Q=Top/tekrar2;
            TopP=TopP+Q^(k-1);
        end
        PCS=TopP/tekrar1;
        P=[P;PCS];
    end
    P(1,:)=[];
    M=[M,P];
end
M(:,1)=[]
end

```

EK-3 t dağılımına ilişkin olasılık değerlerinin bulunması için simülasyon programı

```

M=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]';
P=1;
for k=2:10
    k
    clear M
    M=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]';
    for n=5:30
        clear P
        P=1;
        for h=0:0.5:5
            Top=0;
            for tekrar=1:200000
                t=trnd(n-1);
                F = (tcdf(t+h,n-1))^(k-1);
                Top=Top+F;
            end
            PCS=Top/tekrar;
            P=[P;PCS];
        end
        P(1,:)=[];
        M=[M,P];
    end
    M(:,1)=[]
end

```

EK-4 Ağırlıklandırılmış yığın ortalamaları kullanarak doğru sıralama olasılığına ilişkin değerlerin 20000 tekrarla bulunması için simülasyon programı

```

k=10;
for n=5:5:30
    n;
    for h=1:3
        h;
        tekrar=10000;
        adet=0;
        mu=2;
        v1=4;
        v2=5;
        v3=2;
        v4=3;
        v5=2;
        v6=3;
        v7=4;
        v8=1;
        v9=4;
        v10=5;
        v=[v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8,v9,v10];
        MAXv=max(v);
        T = (MAXv*h)/sqrt(n);
        for i=1:tekrar
            x1=normrnd(mu,v1,n,1);
            x2=normrnd(mu,v2,n,1);
            x3=normrnd(mu,v3,n,1);
            x4=normrnd(mu,v4,n,1);
            x5=normrnd(mu,v5,n,1);
            x6=normrnd(mu,v6,n,1);
            x7=normrnd(mu,v7,n,1);
            x8=normrnd(mu,v8,n,1);
            x9=normrnd(mu,v9,n,1);
            x10=normrnd(mu+T,v10,n,1);
            X=[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10];
            s1=var(x1);
            s2=var(x2);
            s3=var(x3);
            s4=var(x4);
            s5=var(x5);
            s6=var(x6);
            s7=var(x7);
            s8=var(x8);
            s9=var(x9);
            s10=var(x10);
        end
    end
end

```

EK-4 (Devam) Ağırlıklandırılmış yığın ortalamaları kullanarak doğru sıralama olasılığına ilişkin değerlerin 20000 tekrarla bulunması için simülasyon programı

```
s=[s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,s10];
MAXS=max(s);
ORT=1;
for m=1:k
    w=1;
    z=s(:,m);
    u=(1/n)+(1/n)*sqrt((1/(n-1))*((MAXS/z)-1));
    v=(1/n)-(1/n)*sqrt(((n-1))*((MAXS/z)-1));
    for j=1:n-1
        w=[w,u];
    end
    w(:,1)=[];
    w=[w,v];
    Aort=w*X(:,m);
    ORT=[ORT,Aort];
clear w
end
ORT(:,1)=[];
if ORT(:,1)<ORT(:,10)& ORT(:,2)<ORT(:,10) & ORT(:,3)<ORT(:,10) &
ORT(:,4)<ORT(:,10) & ORT(:,5)<ORT(:,10) & ORT(:,6)<ORT(:,10) &
ORT(:,7)<ORT(:,10) & ORT(:,8)<ORT(:,10)& ORT(:,9)<ORT(:,10)
    adet=adet+1;
end
end
ol=adet/tekrar
end
end
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı :ŞENTÜRK Ferhat
Uyruğu :T.C.
Doğum Tarihi ve Yer :28.11.1983 Kavak/Delice
Medeni Hali :Bekar
Telefon :(0312) 212 10 10
e-mail :ferhatsenturk@yahoo.com

Eğitim Bilgileri

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölüm	2007
Lise	Gazi Anadolu Lisesi	2002

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap, Müzik, Yüzme, Futbol