

**METRİK VE DÜZGÜN UZAYDA
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Hatice ASLAN HANÇER

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2007
ANKARA**

Hatice ASLAN HANÇER tarafından hazırlanan METRİK VE DÜZGÜN UZAYDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Doç. Dr. Rıza ERTÜRK

Üye : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER

Tarih : 21 / 02 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hatice ASLAN HANÇER

**METRİK VE DÜZGÜN UZAYDA
SABİT NOKTA TEOREMLERİ
(Doktora Tezi)**

Hatice ASLAN HANÇER

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Şubat 2007

ÖZET

Bu çalışmada tam metrik uzayda tanımlı bir çoğul değerli dönüşüm için kapalı bağıntı yardımı ile bir teorem ispatlandı ve bu teoremin bazı sonuçları verildi. Bir tam düzgün uzayda tanımlı bir nokta kapalı dönüşüm için bir teorem ispatlanarak bu teoremin bazı sonuçları ve bir uygulaması verildi. Ayrıca tam düzgün uzayda tanımlanan iki çoğul değerli dönüşüm çifti için bir ana teorem ispatlandı. Son olarak bu teoremin bazı sonuçları ve bir uygulaması verildi.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Metrik uzay, düzgün uzay, kapalı bağıntı, nokta kapalı dönüşüm
Sayfa Adedi : 64
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

**FIXED POINT THEOREMS
ON METRIC AND UNIFORM SPACE
(Ph.D. Thesis)**

Hatice ASLAN HANÇER

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2007**

ABSTRACT

In this study, an implicit relation was defined and using this relation, a theorem for a multi valued mapping on a complete metric space was proved and some results of this theorem were given. A theorem for a point closed mapping on a complete uniform space was proved, some results and an application of this theorem were given. Also a theorem for a pair of two multi valued mappings on complete uniform space was proved. Finally, some results and an application of this theorem were given.

Science Code : 204.1.132

**Key Words : metric space, uniform space, implicit relation,
a point closed mapping**

Page Number: 64

Adviser : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer Hocam Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU 'na ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve de eşim Alişan HANÇER ' e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	4
2.1. Düzgün Uzay ile İlgili Tanımlar ve Teoremler	4
2.2. Yarı Metrikler ile Düzgün Yapı Arasındaki İlişki	8
3. METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ	15
3.1. Metrik Uzayda Yörünge Kavramı	15
3.2. Metrik Uzayda Tek Değerli Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremleri	18
4. DÜZGÜN UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ	26
4.1. Yarı Metrikler Ailesi ile Düzgün Yapı Kurma	27
4.2. Düzgün Uzayda Çoğul Değerli Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremleri	32
4.3. Düzgün Uzayda Çoğul Değerli Dönüşüm Çifti İçin Sabit Nokta Teoremleri	39
5. SONUÇ	60
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	64

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
(X, d)	Metrik uzay
$(X, \mathbf{U})$	Düzgün uzay
$\circ$	Kümeler üzerindeki bileşke işlemi
$U[x]$	x noktasının düzgün komşuluğu
$\mathbf{N}_x$	x noktasının komşuluklar ailesi
$U[A]$	A kümesinin düzgün komşuluğu
Δ	$X \times X$ in köşegeni
$O(x, T)$	x noktasında T dönüşümünün yörüngesi
β	Bir düzgün yapıya karşılık gelen taban
P^*	Bir düzgün yapı üreten yarı metrikler ailesi
2^X	X in P^* sınırlı alt kümelerinin ailesi
δ	Metrik uzayda metrikimsi fonksiyon
δ_i	Düzgün uzayda metrikimsi fonksiyon
τ	Topoloji

1.GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve T , X kümesinden kendisi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasına T dönüşümünün *sabit noktası* denir. Bir $x \in X$ için $T(x) \subset X$ bir küme olursa yani, T bir çoğul değerli dönüşüm ise o zaman $x \in Tx$ olacak şekildeki bir $x \in X$ noktasına T çoğul değerli dönüşümünün bir *sabit noktası* adı verilir. Sabit nokta teorisindeki çalışmalar iki ana dalda gelişmektedir. Birincisi, normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise, tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipli dönüşümler için sabit nokta teoridir. Metrik uzaylarda tanımlı dönüşümlerin bir sabit noktasının varlığı ve tekliği üzerine çalışmalardan en basit ve en önemlisi “Banach Büzülme Prensibi” dir.

(M, d) bir metrik uzay ve $T : M \rightarrow M$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in M$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

koşulunu sağlayan $0 \leq \lambda < 1$ olacak şekilde λ reel sayısı varsa T dönüşümüne bir *büzülme dönüşümü* denir.

Metrik uzaylardaki sabit nokta teorisinin başlangıcı Banach büzülme dönüşüm prensibi ile ilişkilendirilir [1]. Bir tam metrik uzaydan kendisine tanımlı herhangi bir T büzülme dönüşümü bir tek x sabit noktasına sahiptir. $x_0 \in DomT$ ise o zaman

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$$

dizisi x_0 noktasında T nin bir iterasyon dizisidir. Bu $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi x sabit noktasına yakınsar. Bu iterasyon dizisine *Picard iterasyon dizisi* denir [2].

Sabit nokta teorisinin lineer normlu uzaylarda tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit nokta teorisine ayrılan kısmının temel sonucu, Brouwer tarafından aşağıdaki şekilde ispatlanmıştır [3].

“ n - boyutlu uzaylarda bir konveks ve kompakt alt kümesinden kendisine tanımlı her bir sürekli dönüşüm en az bir sabit noktaya sahiptir”.

Matematik ve diğer bilimlerde çalışılan problemlerin çoğu o kadar karmaşıktır ki bunların çoğu yalnızca klasik Banach büzülme prensibi kullanılarak çözülemedi. Bu nedenle daha genel olan sabit nokta teoremlerine ihtiyaç duyuldu. Ciric, genelleşmiş büzülmeler ve sabit nokta teoremleri üzerine bir çalışma, Chatterjea, bir sabit noktanın varlığının uygulaması üzerine bir çalışma ve de daha bir çok bilim adamı sabit nokta teoremleri ve uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bunlar için şu kaynaklara bakılabilir [4-7].

Çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teori çalışmaları Brouwer ve Banach sabit nokta teoremlerinin Nadler tarafından çoğul değerli dönüşümlere genişletilmesi ile başlamıştır [8]. Bu çalışma esas alınarak bir çok araştırmacı çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri vermişlerdir. Bunlardan bazıları için şu kaynaklara bakılabilir [9-12].

Metrik ve lineer normlu uzaylar üzerinde sabit nokta teorisindeki çalışmalar ilerledikçe başka problemler ortaya çıkmıştır. Bu problemlerden birisi, topolojik uzaylarda süreklilik ve yakınsaklığın en genel halde verilebilmesi aşamasında “ düzgün süreklilik ” ve “ düzgün yakınsaklık ” kavramlarının genelleştirilememesidir. Çünkü bu kavramlar uzayın farklı noktalarındaki komşulukların büyüklüklerine göre karşılaştırılabilir olmasını gerektirir. Bilindiği gibi metrik uzaylarda bu yapılabilir. Gerçekten bir metrik uzayda farklı noktaların ε - komşulukları aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için “ eşit büyüklükte ” kabul edilebilir. Oysa genel topolojik uzaylarda bu mümkün değildir. Böylelikle yeni bir yapı olan düzgün uzayda, bir topolojinin sağladığından daha fazla özelliğe ihtiyaç duyulacak gibi gözüküyor. Bu yeni yapı, metriktten daha

zayıf özellikli bir yapı ile oluşturulabilir [13-14]. Düzgün yapı ile ilgili ilk çalışmaları Weil yapmıştır [15]. Daha sonra Davis topolojik uzaylar üzerinde tanımlanabilen ve belirli koşulları sağlayan indekslenmiş komşuluklar ailesi ile tanımlanan düzgün yapılar arasındaki ilişkileri araştırmıştır [16]. Bu çalışmaların temel teşkil etmiş olanlarından birisi Acharya tarafından yapılmıştır [17]. Daha başka Ganguly, Mishra, Singh, Türkoğlu, Özer, Fisher ve diğer araştırmacılar da düzgün uzaylar üzerinde tanımlanan tek ve çoğul değerli dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve bu noktaların tekliği ile ilgili çalışmalar yapılmışlardır [18-21].

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Düzgün Uzay ile İlgili Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde boştan farklı bir küme üzerinde tanımlanabilen düzgün yapı ile ilgili bilgiler verilecektir.

2.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere $X \times X$ in

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \quad (2.1)$$

alt kümesine X in *köşegeni* denir.

$A \subset X \times X$ bir alt küme olsun.

$$A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in A\}$$

olmak üzere $A = A^{-1}$ ise bu A kümesine *simetrik küme* denir.

A ve B kümeleri $X \times X$ in alt kümeleri iseler

$$A \circ B = \{(x, y) : (x, z) \in B, (z, y) \in A \text{ olacak şekilde } z \in X \text{ var}\}$$

şeklinde tanımlanır [13].

2.2. Tanım

$\mathcal{U}$, $X \times X$ in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere

- a) $U \in \mathbf{U} \Rightarrow \Delta \subset U$
- b) $U_1, U_2 \in \mathbf{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathbf{U}$
- c) $U \in \mathbf{U} \Rightarrow V \circ V \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathbf{U}$ var
- d) $U \in \mathbf{U} \Rightarrow V^{-1} \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathbf{U}$ var
- e) $U \in \mathbf{U}, U \subset V \Rightarrow V \in \mathbf{U}$

koşullarını sağlarsa bu aileye X kümesi üzerinde bir *düzgün yapı* ve bu ailenin elemanlarına da *çevreler* adı verilir. X kümesi böyle bir yapıya sahip olduğunda $(X, \mathbf{U})$ ikilisine *düzgün uzay* denir [13].

2.3. Tanım

$(X, \mathbf{U})$ bir düzgün uzay olsun. Eğer

$$\bigcap \{U : U \in \mathbf{U}\} = \Delta$$

ise $(X, \mathbf{U})$ uzayına *Hausdorff (separated) düzgün uzay* denir [13].

2.4. Tanım

$(X, \mathbf{U})$ bir düzgün uzay ve $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$ alt aile olsun. Eğer her $U \in \mathbf{U}$ için $V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathbf{V}$ varsa bu $\mathbf{V}$ alt ailesine $\mathbf{U}$ düzgün yapısı için bir *taban* denir.

Bu tanıma göre bir $\mathbf{V}$ ailesi $\mathbf{U}$ düzgün yapısı için bir taban ise, $\mathbf{U}$ ailesi $\mathbf{V}$ ailesinin elemanlarına onları içeren tüm kümeler katılarak elde edilir.

X boştan farklı bir küme ve $\mathbf{V}$ ailesi $X \times X$ in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere

$$a) V \in \mathbf{V} \Rightarrow \Delta \subset V$$

$b) V_1, V_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow V_3 \subset V_1 \cap V_2$ olacak şekilde $V_3 \in \mathcal{V}$ var,

$c) V \in \mathcal{V} \Rightarrow W \circ W \subset V$ olacak şekilde $\exists W \in \mathcal{V}$ var,

$d) V \in \mathcal{V} \Rightarrow W^{-1} \subset V$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{V}$ var

koşullarını sağlarsa bu $\mathcal{V}$ ailesi, X üzerindeki bir düzgün yapının tabanı olur [13].

2.5. Tanım

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$ nin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinin ailesi $\mathcal{U}$ düzgün yapısı için bir taban oluşturuyorsa bu $\mathcal{S}$ alt ailesine $\mathcal{U}$ düzgün yapısı için bir *alt taban* adı verilir.

$\mathcal{U}$, X kümesi üzerinde bir düzgün yapı ise her $U \in \mathcal{U}$ için $U^{-1} \in \mathcal{U}$ dur.

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ise her $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ için

$$U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye x in *düzgün komşuluğu* denir [13].

2.1. Teorem

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve her $x \in X$ için

$$\mathcal{N}_x = \{U[x] : U \in \mathcal{U}\}$$

olsun. $\mathcal{N}_x$, komşuluklar aksiyomlarını sağlar. Bu durumda X kümesi üzerinde öyle bir τ topolojisi vardır ki, bu topolojiye göre $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $\mathcal{N}_x$ dir [13].

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay olsun. Yukarıdaki biçimde oluşturulan τ topolojisine $\mathcal{U}$ düzgün yapısı ile üretilen *düzgün uzay topolojisi* veya kısaca *düzgün topoloji* denir [13].

2.6. Tanım

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için

$$U[A] = \bigcup_{x \in A} U[x] = \{y \in X : \exists x \in A \ni (x, y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye *A kümesinin düzgün komşuluğu* denir.

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin düzgün topolojiye göre kapanışı $\overline{A}$, A kümesinin düzgün komşuluklarının arakesitine eşittir, yani;

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A] : U \in \mathcal{U}\}$$

dir [13].

2.7. Tanım

$(X, \mathcal{D})$ ve $(Y, \mathcal{E})$ düzgün uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $E \in \mathcal{E}$ için $(x, y) \in D$ iken $(f(x), f(y)) \in E$ olacak şekilde bir $D \in \mathcal{D}$ varsa f fonksiyonuna *düzgün süreklidir* denir.

f ve f^{-1} düzgün sürekli ise f fonksiyonuna bir *düzgün izomorfizm* denir.

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, X içinde bir ağ olsun. Her bir $U \in \mathcal{U}$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$ için $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in U$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ var ise $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağına $\mathcal{U}$ -*Cauchy* (veya sadece *Cauchy*) ağı denir [13].

2.8. Tanım

Bir $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayı içindeki her Cauchy ağı yakınsak ise $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayına *tam düzgün uzay* denir [13].

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $\mathfrak{F}$ bu düzgün uzay içinde bir süzgeç olsun. Her U çevresi için $F \times F \subset U$ olacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ varsa $\mathfrak{F}$ süzgecine *Cauchy süzgeci* denir [14].

2.2. Teorem

Bir $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının tam olması için gerekli ve yeterli koşul $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayındaki her Cauchy süzgecinin yakınsak olmasıdır [14].

2.2. Yarı Metrikler ile Düzgün Yapı Arasındaki İlişki

Buraya kadar yapılan tanımlar, bazı önerme ve teoremler boş kümeden farklı herhangi bir küme üzerinde tanımlanan düzgün yapı ile ilgili temel kavramlar idi. Bu şekilde kurulan düzgün uzay yapısı ile boştan farklı bir küme üzerinde tanımlı yarı metrikler ailesi ile tanımlanan düzgün uzay yapısı arasında bire bir bir karşılık gelme vardır [22, sayfa 188, teorem 15]. Bu karşılık gelmeyi verelim.

X boş olmayan bir küme ve $\emptyset$, X üzerindeki yarı metriklerin bir ailesi olsun. X üzerindeki herhangi bir p yarı metriği ve herhangi bir pozitif r sayısı için

$$V_{(p,r)} = \{(x, y) : x, y \in X, p(x, y) < r\}$$

olsun. Bu durumda $p_i \in \wp$ ve $r_i > 0$ olmak üzere $X \times X$ in

$$\bigcap_{i=1}^n V_{(p_i, r_i)}$$

formundaki alt kümelerinin ailesi $\mathcal{V}$ ile gösterilsin. $\mathcal{V}$, X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgün yapısı için bir taban teşkil eder.

X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{V}$, $X \times X$ in

i) Δ , (2.1) deki gibi tanımlı olmak üzere her $V \in \mathcal{V}$ için $\Delta \subset V$,

ii) her $V \in \mathcal{V}$ için $V = V^{-1}$,

iii) her $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ için $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$

koşullarını sağlayan boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun.

Bu şekildeki $\mathcal{V}$ ailesi X üzerindeki bir düzgün yapı için taban olma şartlarının hepsini sağlamaz. Tüm pozitif reel sayıların kümesini $\square_+$ ile gösterelim. f dönüşümü

$$f : \square_+ \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, f(\alpha, V) = \alpha V$$

şeklinde tanımlı olsun. Burada αV , V nin α ile skaler çarpımıdır. Bu çarpma $\alpha, \beta \in \square_+$ ve $V \in \mathcal{V}$ için

$$iv) 1.V = V$$

$$v) \alpha(\beta V) = (\alpha\beta)V,$$

$$vi) \alpha < \beta \text{ ise } \alpha V \subset \beta V,$$

$$vii) \alpha V \circ \beta V \subset (\alpha + \beta)V,$$

viii) $x, y \in X$ ve $V \in \mathbf{V}$ ise $(x, y) \in \lambda V$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ var

aksiyomlarını sağlar.

$\mathfrak{S}$ ile (i)-(iii) özelliklerini sağlayan ve bir skalerle çarpmanın (iv)-(viii) aksiyomlarını sağlayan tüm $\mathbf{V}$ ailelerinin sınıfı gösterilsin.

2.3. Teorem

$\mathfrak{S}$ içindeki her bir $\mathbf{V}$ ailesi için X üzerindeki bir $\mathbf{U}$ düzgün yapısı vardır, öyle ki $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ için bir tabandır; her bir $V \in \mathbf{V}$ için

$$V_{(p_V, r)} \subset rV \subset V_{(p_V, \rho)} \quad (0 < r < \rho)$$

olacak şekilde X üzerinde bir p_V yarı metriği vardır ve de

$$\{p_V : V \in \mathbf{V}\}$$

ailesi $\mathbf{U}$ düzgün yapısını üretir [23].

İspat

I) $V \in \mathbf{V}$ olsun. $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere $U = \alpha V$ alalım. O zaman (vi) ve (vii) koşulları ve $2\alpha < 1$ olduğundan

$$U \circ U = \alpha V \circ \alpha V \subset (2\alpha)V \subset V \tag{2.2}$$

elde edilir. (i)-(iii) ve Eş. 2.2 koşullarını sağlayan $\mathbf{V}$ ailesi X üzerindeki $\mathbf{U}$ düzgün yapısı için taban olacağından ispat tamamlanır.

$II)$ $V \in \mathcal{V}$ olsun ve $x, y \in X$ elemanlarını alalım. (viii) koşuluna göre $(x, y) \in \lambda V$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır.

$$A_{(x,y)} = \{\lambda : \lambda > 0, (x, y) \in \lambda V\}$$

olsun ve

$$p_V = \inf\{\lambda : \lambda \in A_{(x,y)}\}$$

şeklinde tanımlansın. p_V nin tanımlanışından dolayı $p_V(x, y) \geq 0$ olur. V simetrik olduğundan

$$A_{(x,y)} = A_{(y,x)}$$

ve böylece

$$p_V(x, y) = p_V(y, x)$$

elde edilir. Her $\lambda > 0$ için $(x, x) \in \lambda V$ olduğundan

$$A_{(x,x)} = \{\lambda : \lambda > 0, (x, x) \in \lambda V\}$$

olup infimum tanımından

$$p_V(x, x) = 0$$

bulunur. x, y, z, X içinde keyfi elemanlar olsun ve

$$p_V(x, z) = r_1 \quad , \quad p_V(z, y) = r_2 \tag{2.3}$$

diyelim. $\varepsilon > 0$ keyfi sayısı için infimum tanımından

$$(x, z) \in (r_1 + \varepsilon)V \quad \text{ve} \quad (z, y) \in (r_2 + \varepsilon)V$$

olur. Bu da

$$(x, y) \in (r_1 + \varepsilon)V \circ (r_2 + \varepsilon)V \subset (r_1 + r_2 + 2\varepsilon)V$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$r_1 + r_2 + 2\varepsilon \in A_{(x,y)}$$

elde edilir. O zaman

$$p_V(x, y) \leq r_1 + r_2 + 2\varepsilon$$

olup Eş. 2.3 ve $\varepsilon > 0$ keyfi seçildiğinden

$$p_V(x, y) \leq r_1 + r_2 = p_V(x, z) + p_V(z, y)$$

bulunur. Böylelikle p_V, X üzerinde bir yarı metrik olur.

r ve $\rho, r < \rho$ olacak şekilde herhangi iki pozitif sayılar olsun. $(x, y) \in V_{(p_V, r)}$ ise $p_V(x, y) < r$ ve bu da $(x, y) \in rV$ olmasını verir. Buradan

$$V_{(p_V, r)} \subset rV \tag{2.4}$$

olur. $(x, y) \in rV$ ise $p_V(x, y) < r < \rho$ olur ki, bu da $(x, y) \in V_{(p_V, \rho)}$ olmasını verir.

Buradan

$$rV \subset V_{(p_V, \rho)} \quad (2.5)$$

olur. Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 ifadelerinden

$$V_{(p_V, r)} \subset rV \subset V_{(p_V, \rho)}$$

elde edilir.

III) U_0, X üzerindeki

$$\{p_V : V \in \mathcal{V}\}$$

yarı metrikler ailesi ile üretilen düzgün yapı olsun. $U \in \mathcal{U}$ ise $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ için taban olduğundan $V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. Ayrıca $V_{(p_V, 1)} \subset V$ olduğundan $V_{(p_V, 1)} \subset U$ ve $U \in U_0$ olur. Böylece $\mathcal{U} \subset U_0$ bulunur.

$U \in U_0$ ise $W \subset U$ olacak şekildeki $V_i \in \mathcal{V}$ için

$$W = \bigcap_{i=1}^n V_{(p_{V_i}, r_i)}$$

formunda bir W kümesi vardır. α , $0 < \alpha < 1$ koşulunu sağlayan bir pozitif sayı olsun. Bu durumda

$$W_0 = \bigcap_{i=1}^n (\alpha r_i) V_i$$

elemanı $\mathcal{V}$ ye ait olur. $(\alpha r_i) V_i \subset V_{(p_{V_i}, r_i)}$ olacağından $W_0 \subset W \subset U$ elde edilir ve bu $U \in \mathcal{U}$ ve de dolayısı ile $U_0 \subset \mathcal{U}$ olmasını verir. Böylece $\mathcal{U} = U_0$ olduğu görülür.

2.4. Teorem

Eğer $\mathcal{U}$, boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir düzgün yapı ise o zaman $\mathcal{U}$ düzgün yapısını üreten bir $\mathcal{V}$ ailesi vardır ve $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{V}}$ dir.

3. METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Metrik Uzayda Yörünge Kavramı

Bu kısımda bir metrik uzayda yörünge, yörüngesel süreklilik ve yörüngesel tamlılık kavramları ve bu kavramların bazı örnekleri verilecektir.

3.1. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$O(x, T) = \{x, Tx, \dots, T^n x, \dots\}$$

dizisinin her $\{y_n\}$ Cauchy alt dizisi X içinde bir x_0 noktasına yakınsak ise o zaman (X, d) metrik uzayına T -yörüngesel (*orbital*) tam uzay denir [24].

Görüldüğü gibi yörüngesel tam kavramı T dönüşümünün seçimine bağlıdır. Diğer yandan her tam metrik uzay herhangi bir T için T -yörüngesel tamdır.

Bir yörüngesel tam uzay, tam uzay olmayabilir. Bu durumlar için örnekler verelim.

(X, d) bir metrik uzay ve id_x , X üzerindeki özdeşlik dönüşümü olsun. O zaman tüm $x \in X$ ler için

$$O(x, id_x) = \{x, x, \dots\}$$

olur. (X, d) metrik uzayı id_x –yörüngesel tamdır [26].

3.1. Örnek

$\mathbb{Q}$ reel sayılar kümesi, $(\mathbb{Q}, d)$ alışılmış metrik uzay ve $X = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerindeki metrik, reel sayılar kümesinden indirgenen alışılmış metrik olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için $T(x) = \frac{1}{2}x$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$O(x, T) = \{x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{4}x, \dots\}$$

olur. $O(x, T)$ sifıra yakınsak olduğundan bu dizinin her Cauchy alt dizisi de sifıra yakınsar. Böylece (X, d) metrik uzayı $T(x) = \frac{1}{2}x$ dönüşümüne göre yörüngesel tamdır [26].

3.2. Örnek

$X = \mathbb{Q}$ üzerindeki metrik 3.1. Örneğindeki metrik gibi tanımlansın. Her $x \in \mathbb{Q}$ için

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $T(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x$ olsun. Bu durumda

$$O(x, T) = \left\{x, \left(1 + \frac{1}{n}\right)x, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 x, \dots\right\}$$

bulunur. Buradan $O(x, T)$ bir Cauchy dizisidir ve ex sayısına yakınsar. $ex \notin \mathbb{Q}$ olduğundan $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$ metrik uzayı T -yörüngesel tam değildir [26].

3.2. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için z noktasına yakınsayan

$$O(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

dizisinin herhangi bir $\{y_n\}$ alt dizisi için $\{T(y_n)\}$ dizisi de $T(z)$ noktasına yakınsak ise o zaman T ye $z \in X$ noktasında yörüngesel sürekli denir.

Eğer T dönüşümü X uzayının her noktasında yörüngesel sürekli ise o zaman T dönüşümüne X uzayı üzerinde yörüngesel sürekli denir [24].

Bir metrik uzay üzerindeki sürekli fonksiyon, yörüngesel sürekli dir. Ancak tersi doğru değildir.

3.3. Örnek

$(\square, d)$ alışılmış metrik uzay ve $\delta: \square \rightarrow \{0, 1\}$ dönüşümü

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \square \text{ ise} \\ 0, & x \notin \square \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. δ dönüşümü alışılmış metriğe göre $\square$ içindeki herhangi bir noktada sürekli değildir. Ancak herhangi bir x için

$$O(x, \delta) = \{x, \delta(x), 1, 1, 1, \dots\}$$

olur ki, δ dönüşümü her $x \in \square$ noktasında yörüngesel sürekli dir [27].

3.2. Metrik Uzayda Tek Değerli Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda bir T -yörüngesel tam metrik uzay üzerinde tanımlı yörüngesel sürekli dönüşümün sabit noktasının belirlenmesi için daha önceden verilen iki teoremden hareketle yeni bir teorem ifade ve ispat edilecektir.

Tripathi ve Yadav (1990) aşağıdaki teoremi ispatlamıştır [25].

“(X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir yörüngesel sürekli dönüşüm ve X uzayı T -yörüngesel tam olsun. Eğer T dönüşümü a, b, c sayıları $0 < a + b < 1, c \geq 0$ olacak şekildeki reel sayılar olmak üzere tüm $x, y \in X$ ler için

$$[d(Tx, Ty)]^3 \leq ad(x, y)d(y, Ty)d(y, T^2x) + bd(x, Tx)d(Tx, Ty)d(Tx, T^2x) \\ + cd(x, Ty)d(y, Tx)d(Ty, T^2x)$$

eşitsizliğini sağlarsa o zaman T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir ve $0 \leq c < 1$ ise de bu sabit nokta tektir”.

Bu teoremi Türkoğlu, Özer ve Fisher aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir [26].

“(X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve X uzayı T -yörüngesel tam olsun. Eğer T dönüşümü $0 < a < 1$ ve $c \geq 0$ olmak üzere tüm $x, y \in X$ ler için

$$[d(Tx, Ty)]^3 \leq \max \{ad(x, y)d(y, Ty)d(y, T^2x), ad(x, Tx)d(Tx, Ty)d(Tx, T^2x), \\ cd(x, Ty)d(y, Tx)d(Ty, T^2x)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa o zaman T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir ve $0 \leq c < 1$ ise de bu sabit nokta tektir”.

Bu kesimden itibaren yapılan çalışmalar tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Bu iki teorem göz önüne alınarak ve kapalı bağıntı da tanımlanarak, metrik uzay üzerinde verilen bu türdeki tüm teoremlerin genelleştirilmesi veriliyor.

Kapalı (implicit) bağıntı tanımını ve örneklerini verelim.

3.3. Tanım (Kapalı (implicit) Bağıntı)

F , aşağıdaki koşulları sağlayan $F: \mathbb{R}_+^{10} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini gösterebiliriz:

F_1) F fonksiyonu $t_2, t_3, \dots, t_{10}$ değişkenlerinde artmayan,

F_{2a}) her $u, v \geq 0$ için $F(u, v, u, u, v, u, u, u+v, 0, 0) \leq 0$ iken $u \leq hv$ olacak şekilde $h \in (0,1)$ vardır,

F_{2b}) her $u \geq 0$ için $F(u, 0, u, 0, 0, u, 0, u, 0, u) \leq 0$ iken $u = 0$ dır,

F_3) $\forall u > 0$ için $F(u, u, 0, u, 0, u, 0, u, u, u) > 0$ dır.

3.4. Örnek

$a \in (0,1), c \geq 0$ ve $0 \leq c < 1$ olmak üzere

$$F(t_1, t_2, \dots, t_{10}) = t_1^3 - \max\{at_2t_3t_4, at_5t_6t_7, ct_8t_9t_{10}\}$$

olsun. F fonksiyonunun F ailesine ait olduğunu görelim. Bunun için gerekli koşulları sağlatalım.

F_1) F fonksiyonu maksimum tanımından t_1 değişkeni hariç her bir değişkende artmayandır.

F_{2a}) $u > 0$ ve

$$F(u, v, u, u, v, u, u, u + v, 0, 0) = u^3 - \max\{avu^2, avu^2, 0\} \leq 0$$

olsun. $u \geq v$ ise o zaman $u^3 \leq au^3 < u^3$ olur ki, bu durum bir çelişki oluşturur. Böylece $u < v$ ve $u \leq av = hv, h = a \in (0, 1)$ olur.

F_{2b}) $u \geq 0$ ve

$$F(u, 0, u, 0, 0, u, 0, u, 0, u) = u^3 - \max\{0, 0, 0\} \leq 0$$

olsun. Buradan hemen $u = 0$ olduğu görülür.

F_3) $\forall u > 0$ için

$$F(u, u, 0, u, 0, u, 0, u, u, u) = u^3 - \max\{0, 0, cu^3\} = u^3 - cu^3 = (1 - c)u^3 > 0$$

bulunur.

3.5. Örnek

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $c \in \mathbb{R}^+, 0 < a + b < 1$ ve $0 \leq c < 1$ olacak şekildeki reel sayılar olmak üzere

$$F(t_1, t_2, \dots, t_{10}) = t_1^3 - at_2t_3t_4 - bt_5t_6t_7 - ct_8t_9t_{10}$$

olsun. F fonksiyonunun F ailesine ait olduğunu görelim.

F_1) F fonksiyonu t_1 değişkeni hariç her bir değişkende artmayandır.

F_{2a}) $u > 0$ ve

$$F(u, v, u, u, v, u, u, u + v, 0, 0) = u^3 - avu^2 - bvu^2 \leq 0$$

olsun. $u \geq v$ ise o zaman $u^3 \leq (a+b)u^3 < u^3$ çelişkisi oluşur. Böylelikle $u < v$ ve $u \leq (a+b)v = hv, h = a+b \in (0,1)$ bulunur.

F_{2b}) $u \geq 0$ ve

$$F(u, 0, u, 0, 0, u, 0, u, 0, u) = u^3 \leq 0$$

olsun. Bu durum $u = 0$ olmasını gerektirir.

F_3) $\forall u > 0$ ve

$$F(u, u, 0, u, 0, u, 0, u, u, u) = u^3 - cu^3 = (1-c)u^3 > 0$$

olur.

Yukarıda bahsettiğimiz genelleştirme teoremini ifade ve ispat edelim.

3.1. Teorem

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve X, T - yörüngesel tam olsun.

Eğer $x, y \in X, F \in F$ için

$$F(d(Tx, Ty), d(x, y), d(y, Ty), d(y, T^2x), d(x, Tx), d(Tx, Ty), d(Tx, T^2x), d(x, Ty), d(y, Tx), d(Ty, T^2x)) \leq 0 \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

x_0 , X içinde keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $n=1,2,3,\dots$ için $T(X) \subset X$ olacağından $x_n = Tx_{n-1}$ dizisi tanımlanabilir. Bir n için $x_n = x_{n+1}$ ise o zaman x_n , T dönüşümünün bir sabit noktası olur ki, ispat tamamlanır.

$n=0,1,2,\dots$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Eş. 3.1 eşitsizliğinden

$$F(d(Tx_{n-1}, Tx_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_{n+1}), d(x_n, x_n), d(x_{n+1}, x_{n+1})) \leq 0$$

ve

$$F(d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}), 0, 0) \leq 0$$

olur. F_{2a} koşuluna göre $n=0,1,2,\dots$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq h d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq h^n d(x_0, x_1)$$

olduğu görülür. $h < 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. O halde X , T -yörüngesel tam olduğundan X içinde bir z limitine sahiptir. Yine Eş. 3.1 eşitsizliği kullanılırsa

$$F(d(Tx_n, Tz), d(x_n, z), d(z, Tz), d(z, x_{n+2}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, Tz), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \\ d(x_n, Tz), d(z, x_{n+1}), d(Tz, x_{n+2})) \leq 0$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa F nin sürekliliğinden

$$F(d(z, Tz), 0, d(z, Tz), 0, 0, d(z, Tz), 0, d(z, Tz), 0, d(Tz, z)) \leq 0$$

olur ve F_{2b} koşulundan $d(z, Tz) = 0$ ve böylece de $z = Tz$ bulunur. Sabit noktanın varlığı gösterilmiş oldu.

Bu sabit noktanın tekliğini görelim. Bunun için w , T dönüşümünün z den farklı ikinci bir sabit noktası olsun. Bu durumda Eş. 3.1 eşitsizliği kullanılırsa

$$F(d(Tz, Tw), d(z, w), d(w, Tw), d(w, Tz), d(z, Tz), d(Tz, Tw), d(Tz, Tz), \\ d(z, Tw), d(w, Tz), d(Tw, Tz)) \leq 0$$

ve

$$F(d(z, w), d(z, w), 0, d(w, z), 0, d(z, w), 0, d(z, w), d(w, z), d(w, z)) \leq 0$$

olur ki, bu da F_3 koşuluna göre $0 \leq d(z, w) \leq 0$ ve böylece de $z = w$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak sabit noktanın tekliği de gösterildi. O halde ispat tamamlanmış olur.

Bu teoremden anlıyoruz ki, Tripathi ve Yadav ın ispatladığı teoremdaki yörüngesel süreklilik veya herhangi bir süreklilik bu teoremda gerekli değildir. Bu duruma dayanarak iki temel sonuç verilebilir.

3.1. Sonuç Teoremi

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve X uzayı T - yörüngesel tam olsun. Eğer T dönüşümü $0 < a < 1$ ve $c \geq 0$ olmak üzere tüm $x, y \in X$ ler için

$$[d(Tx, Ty)]^3 \leq \max \{ad(x, y)d(y, Ty)d(y, T^2x), ad(x, Tx)d(Tx, Ty)d(Tx, T^2x), \\ cd(x, Ty)d(y, Tx)d(Ty, T^2x)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa o zaman T dönüşümü sabit noktaya sahiptir ve $0 \leq c < 1$ ise de bu sabit nokta bir tektir [26].

İspat

Teorem 3.1 de F dönüşümü Örnek 3.4 deki gibi alınırsa

$$F(d(Tx, Ty), d(x, y), d(y, Ty), d(y, T^2x), d(x, Tx), d(Tx, Ty), d(Tx, T^2x), \\ d(x, Ty), d(y, Tx), d(Ty, T^2x)) \\ = [d(Tx, Ty)]^3 - \max \{ad(x, y)d(y, Ty)d(y, T^2x), ad(x, Tx)d(Tx, Ty)d(Tx, T^2x), \\ cd(x, Ty)d(y, Tx)d(Ty, T^2x)\} \leq 0$$

elde edilir. Bundan sonraki işlemler aynen Teorem 3.1 deki gibi benzer yolla yapıp ispat tamamlanabilir.

3.2. Sonuç Teoremi

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve X uzayı T - yörüngesel tam olsun. Eğer T dönüşümü a, b, c sayıları $0 < a + b < 1, c \geq 0$ olacak şekildeki reel sayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$[d(Tx, Ty)]^3 \leq ad(x, y)d(y, Ty)d(y, T^2x) + bd(x, Tx)d(Tx, Ty)d(Tx, T^2x) \\ + cd(x, Ty)d(y, Tx)d(Ty, T^2x)$$

eşitsizliğini sağlarsa o zaman T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir ve $0 \leq c < 1$ ise de bu sabit nokta tektir.

İspat

Teorem 3.1 de F dönüşümü Örnek 3.5 deki gibi alınırsa

$$F(d(Tx, Ty), d(x, y), d(y, Ty), d(y, T^2x), d(x, Tx), d(Tx, Ty), d(Tx, T^2x) \\ d(x, Ty), d(y, Tx), d(Ty, T^2x)) \\ = [d(Tx, Ty)]^3 - ad(x, y)d(y, Ty)d(y, T^2x) - bd(x, Tx)d(Tx, Ty)d(Tx, T^2x) \\ - cd(x, Ty)d(y, Tx)d(Ty, T^2x) \leq 0$$

elde edilir. Bundan sonraki işlemler aynen Teorem 3.1 deki gibi benzer yolla yapıp ispat tamamlanır.

4. DÜZGÜN UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Düzgün uzaydaki çoğul değerli dönüşümlerden önce metrik uzaylardaki çoğul değerli dönüşümlerin sürekliliği, kümeler dizisinin yakınsaklığı tanımları aşağıdaki gibi verilmiştir [24-25,29].

(X, d) bir metrik uzay ve $B(X)$ ailesi X in bütün boştan farklı sınırlı alt kümelerinden oluşsun. $A, B \in B(X)$ için $\delta(A, B)$ fonksiyonu

$$\delta(A, B) = \sup \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer A kümesi bir tek a noktasından oluşuyorsa o zaman

$$\delta(A, B) = \delta(a, B)$$

ve eğer aynı zamanda B kümesi de bir tek b noktasından oluşuyorsa o zaman da

$$\delta(A, B) = \delta(a, b) = d(a, b)$$

şeklinde yazılır. δ fonksiyonu tanımından tüm A, B ve $C \in B(X)$ kümeleri için

$$\delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0$$

ve

$$\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$, X in boştan farklı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer

- i) her bir $a \in A$ ve her n için $a_n \rightarrow a$ olacak şekilde bir $\{a_n\} \subseteq A_n$ dizisi var,
 ii) her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq N$ için

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$$

olmak üzere $A_n \subseteq A_\varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı var

koşulları sağlanırsa $\{A_n\}$ dizisi $A \subset X$ alt kümesine *yakınsar* denir. Bu durumda A kümesine $\{A_n\}$ dizisinin *limiti* denir [29].

4.1. Yarı Metrikler Ailesi ile Düzgün Yapı Kurma

Bir düzgün uzay üzerindeki düzgün yapının, yarı metrikler ailesi ile belirlenen düzgün yapıya karşılık geldiği bir önceki bölümde verilmiş idi. Bu durum daha sonraki kısımlarda kullanılacak şekliyle verilecektir. Ayrıca düzgün uzaydaki çoğul değerli dönüşümlerin sürekliliği, kümeler dizisinin yakınsaklığı, yörüngesel tam ve süreklilik tanımları verilecektir.

Bir $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzay ve $\{d_i : i \in I\}$ yarı metrikler ailesi için

$$V(i, r) = \{(x, y) : x, y \in X, d_i(x, y) < r\}$$

olmak üzere

$$\beta = \{V(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

ailesi $\mathcal{U}$ düzgün yapısı için bir taban ise $\{d_i : i \in I\}$ ailesi $\mathcal{U}$ düzgün yapısına karşılık gelen *birleşen yarı metrikler ailesi* adını alır.

Bir $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının boştan farklı bir alt kümesi A olsun. $P^* = \{d_i : i \in I\}$ olmak üzere

$$P^*(A) = \sup \{d_i(x, y) : x, y \in A, i \in I\}$$

ifadesi tanımlansın. Bu durumda $P^*(A)$ ya A kümesinin *çapı* denir. Ayrıca $P^*(A) < \infty$ ise A kümesine P^* -sınırlı denir.

$$2^X = \{A : A \text{ kümesi } X \text{ in boştan farklı } P^* \text{-sınırlı alt kümesi}\}$$

olmak üzere boştan farklı herhangi iki A ve B alt kümeleri için

$$d_i(x, A) = \inf \{d_i(x, a) : a \in A, i \in I\}$$

ve

$$\delta_i(A, B) = \sup \{d_i(a, b) : a \in A, b \in B, i \in I\}$$

şeklinde tanımlansın.

$(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $U \in \mathcal{U}$ keyfi bir çevre olsun. Bu durumda $A, B \in 2^X$ için

$$U[A] = \{x \in X : \text{bir } y \in A \text{ için } (x, y) \in U\}$$

ve

$$\bar{U} = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \times B \subset U\} \cup \Delta$$

olmak üzere 2^X üzerindeki 2^U düzgün yapısı

$$2^\beta = \{\bar{U} : U \in \mathcal{U}\}$$

tabanı ile üretilir.

Aynı zamanda P^* ailesi de 2^X üzerinde

$$V^*(i, r) = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : \delta_i(A, B) < r\} \cup \Delta$$

olmak üzere

$$\beta^* = \{V^*(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

tabanı ile $\mathcal{U}^*$ düzgün yapısını belirler.

4.1. Tanım

$\{A_n\}$, 2^X içindeki kümelerin bir dizisi ve $A \subset X$ olsun. Eğer

i) her bir $a \in A$ ve her n için $a_n \rightarrow a$ olacak şekilde bir $\{a_n\} \subseteq A_n$ dizisi var,

ii) her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq N$ için

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} U[x] = \{y \in X : \text{bir } x \in A \text{ için } d_i(x, y) < \varepsilon, i \in I\}$$

olmak üzere $A_n \subseteq A_\varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı var

koşulları sağlanırsa o zaman $\{A_n\}$ dizisi A kümesine *yakınsar* denir. Bu durumda A kümesine $\{A_n\}$ dizisinin *limiti* denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

veya

$$A_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$$

şeklinde gösterilir.

$F : X \rightarrow 2^X$ bir çoğul değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. Eğer $\{x_n\}$, X içinde $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi iken $\{Fx_n\}$ dizisi de 2^X içinde $Fx \in 2^X$ elemanına yakınsıyorsa F dönüşümü x noktasında sürekli denir. F , X in her bir x noktasında sürekli ise F dönüşümüne X üzerinde sürekli denir.

Bir $F : X \rightarrow 2^X$ çoğul değerli dönüşümünün bir $x_0 \in X$ noktasındaki yörüngesi

$$O(F, x_0) = \{x_n : x_n \in Fx_{n-1}, n = 1, 2, \dots\}$$

ile verilen bir $\{x_n\}$ dizisidir.

(X, U) düzgün uzayında her bir $x \in X$ noktasında F nin bir yörüngesinin Cauchy dizisi olan her alt dizisi X in bir noktasına yakınsıyorsa (X, U) düzgün uzayına F -yörüngesel tam denir.

(X, U) bir düzgün uzay ve $F : X \rightarrow 2^X$ bir çoğul değerli dönüşüm olsun. Her bir $x \in X$ için Fx kümesi X içinde bir kapalı küme ise $F : X \rightarrow 2^X$ çoğul değerli dönüşümüne nokta kapalı dönüşüm denir.

İleride ispatlayacağımız teoremlerin lokal konveks uzaylar için bir uygulaması da verileceğinden lokal konveks uzayların yarı metrikler ailesi ile ilişkisini verelim.

(X, τ) bir lokal konveks topolojik uzay ve üzerindeki τ topolojisi

$$V(i, r) = \{x \in X : p_i(x) < r\}$$

olmak üzere

$$\{V(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

ailesi τ için bir taban olacak şekildeki $\{p_i : i \in I\}$ yarı normlar ailesi tarafından üretilsin. Bu durumda $P^* = \{p_i : i \in I\}$ ailesi de τ için bir *birleşen aile* adını alır.

Her bir $i \in I$ ve her $x, y \in X$ noktaları için

$$d_i(x, y) = p_i(x - y)$$

şeklinde tanımlı

$$d_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu X üzerinde bir yarı metrik olur. Böylece $P^* = \{p_i : i \in I\}$ ailesi X üzerinde bir $\mathcal{U}$ düzgün yapı belirler. Bu $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının düzgün topolojisi uzayın τ lokal konveks topolojisi ile çakışır [30, sayfa 16-17, 48].

X in herhangi boştan farklı A ve B alt kümeleri için

$$d_i(x, A) = \inf\{p_i(x - a) : a \in A, i \in I\}$$

(4.1)

$$\delta_i(A, B) = \sup\{p_i(a - b) : a \in A, b \in B, i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2. Düzgün Uzayda Çoğul Değerli Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda metrik uzayda tanımlı nokta kapalı dönüşüm için bir sabit nokta teoreminden yararlanarak ilgili kapalı bağıntıyı tanımlayıp bu bağıntı yardımı ile bir ana teorem, iki sonuç ve de lokal konveks uzaylara bir uygulama verilecektir.

Bir tam metrik uzayda tanımlı nokta kapalı bir dönüşüm ile ilgili Özer ve Türkoğlu aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır [31].

“(X, d) bir F-yörüngesel tam metrik uzay ve $F : X \rightarrow B(X)$ dönüşümü, $r \geq 1$ tamsayı ve a, p, q sayıları $0 < p + q < 1, a > 0$ olacak şekildeki reel sayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\min\{\delta(\overline{Fx}, \overline{Fy})^r, \delta(x, \overline{Fx})\delta(y, \overline{Fy})^{r-1}, \delta(y, \overline{Fy})^r\} + a \min\{d(x, \overline{Fy}), d(y, \overline{Fx})\} \\ \leq [pd(x, \overline{Fx}) + qd(x, y)]d(y, \overline{Fy})^{r-1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda $x \in \overline{Fx}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır (burada $\overline{Fx}$, Fx in kapanışı anlamındadır). Eğer F nokta kapalı dönüşüm ise o zaman $x \in Fx$ olup x , F dönüşümünün bir sabit noktasıdır”.

Bu teorem göz önüne alınarak yeni bir teorem ispatlanacak. Bu yeni teorem için gerekli olacak kapalı bağıntıyı verelim.

4.2. Tanım (Kapalı Bağıntı)

Φ ile aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $\phi : \square_+^8 \rightarrow \square$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim:

1⁰) ϕ fonksiyonu t_1, t_3, t_4 değişkenlerinde azalmayan ve t_5, t_6, t_7 değişkenlerinde azalan,

2⁰) her $u, v \geq 0$ için

$$\phi(u, v, v, u, v, u, u+v, 0) \leq 0$$

iken $u \leq hv$ olacak şekilde en az bir $h \in (0,1)$ vardır.

4.1. Örnek

$r \geq 1$ (negatif olmayan tamsayı), $p, q \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$, $0 < p+q < 1$ olmak üzere

$$\phi(t_1, t_2, \dots, t_8) = \min\{t_1^r, t_3 t_4^{r-1}, t_4^r\} - a \min\{t_7, t_8\} - (pt_5 + qt_2)t_6^{r-1}$$

olsun. ϕ fonksiyonunun Φ ailesine ait olduğunu gösterelim.

1⁰) Minimum tanımından gözükür.

2⁰) Her $u, v \geq 0$ için

$$\phi(u, v, v, u, v, u, u+v, 0) = \min\{u^r, vu^{r-1}, u^r\} - a \min\{u+v, 0\} - (pv+qv)u^{r-1} \leq 0$$

ise o zaman

$$\min\{u^r, vu^{r-1}\} - (p+q)vu^{r-1} \leq 0$$

olur. Bu durumda $u \geq v$ ise

$$u^{r-1}v(1-p-q) \leq 0$$

elde edilir ki, bu da $p+q \geq 1$ çelişkisini verir. Böylece $u < v$ ve buradan

$$u^r - (p+q)u^{r-1}v \leq 0$$

bulunur. Böylelikle $u \leq hv$, $h = p+q \in (0,1)$ bulunur.

4.1. Teorem

(X, U) , $P^* = \{d_i : i \in I\}$ ile tanımlı bir F - yörüngesel tam Hausdorff düzgün uzay, $(2^X, U^*)$ uzayı (X, U) uzayının hiper uzayı ve $F : X \rightarrow 2^X$ şeklinde tanımlı bir sürekli dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $i \in I$ ve $\phi \in \Phi$ için

$$\begin{aligned} \phi(\delta_i(\overline{F}x, \overline{F}y), d_i(x, y), \delta_i(x, \overline{F}x), \delta_i(y, \overline{F}y), d_i(x, \overline{F}x), d_i(y, \overline{F}y), \\ d_i(x, \overline{F}y), d_i(y, \overline{F}x)) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanırsa o zaman $x \in \overline{F}x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. F bir nokta kapalı dönüşüm ise o zaman x , F dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

İspat

x_0, X içinde keyfî bir nokta olmak üzere $n = 1, 2, \dots$ için

$$x_1 \in \overline{F}x_0, x_2 \in \overline{F}x_1, \dots, x_n \in \overline{F}x_{n-1}, \dots$$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. $n = 0, 1, 2, \dots$ için $d_i(x_n, x_{n+1}) > 0$ olacak şekilde her bir $n = 0, 1, 2, \dots$ için $d_i(x_n, Fx_n) > 0$ (aksi durumda pozitif bir tamsayı

için $x_n \in \overline{Fx_n}$ olur ki, o zaman ispat bitmiş olur) olduğunu kabul edelim. Eş. 4.2 eşitsizliğini $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ için uygulanırsa

$$\phi(\delta_i(\overline{Fx_{n-1}}, \overline{Fx_n}), d_i(x_{n-1}, x_n), \delta_i(x_{n-1}, \overline{Fx_{n-1}}), \delta_i(x_n, \overline{Fx_n}), d_i(x_{n-1}, \overline{Fx_{n-1}}), d_i(x_n, \overline{Fx_n}), d_i(x_{n-1}, \overline{Fx_n}), d_i(x_n, \overline{Fx_{n-1}})) \leq 0$$

elde edilir. Buradan δ_i nin tanımı ve 1^0 özelliğinden

$$\phi(d_i(x_n, x_{n+1}), d_i(x_{n-1}, x_n), d_i(x_{n-1}, x_n), d_i(x_n, x_{n+1}), d_i(x_{n-1}, x_n), d_i(x_n, x_{n+1}), d_i(x_{n-1}, x_{n+1}), 0) \leq 0$$

olur. Böylece

$$\phi(d_i(x_n, x_{n+1}), d_i(x_{n-1}, x_n), d_i(x_{n-1}, x_n), d_i(x_n, x_{n+1}), d_i(x_{n-1}, x_n), d_i(x_n, x_{n+1}), d_i(x_{n-1}, x_{n+1}), 0) \leq 0$$

eşitsizliği ve 2^0 özelliği göz önüne alınırsa $n = 1, 2, \dots$ için

$$d_i(x_n, x_{n+1}) \leq h d_i(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Böylelikle $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu kolaylıkla görülür.

$(X, \mathcal{U})$ uzayı F - yörüngesel tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. F sürekli dönüşüm olduğundan $\{Fx_n\} \subset 2^X$ dizisi de 2^X içindeki Fx değerine yakınsar.

Şimdi de $x \in \overline{Fx}$ olduğunu gösterelim. $W \in \mathcal{U}$ keyfi bir çevre olsun. Bu durumda $j \in I, t > 0, V(j, t) \subseteq W$ olacak şekilde bir $V(j, t) \in \beta$ vardır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve tüm $n \geq N_1$ ler için $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olduğundan

$$d_j(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3)$$

olacak şekilde bir N_1 pozitif tamsayısı vardır. Diğer yandan F sürekli olduğundan aynı ε sayısı ve tüm $n \geq N_2$ ler için

$$Fx_n \subseteq A_{\varepsilon/3} = \bigcup_{a \in Fx} U[a] = \{y \in X : d_i(a, y) < \frac{\varepsilon}{3}, a \in Fx, i \in I\}$$

olacak şekilde bir N_2 pozitif tamsayısı bulabiliriz. Ayrıca $x_{n+1} \in \overline{Fx_n}$ olduğundan

$$d_j(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $y \in Fx_n$ vardır ve

$$y \in Fx_n \subseteq \bigcup_{a \in Fx} U[a]$$

olması

$$d_j(a, y) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $a \in Fx$ olmasını gerektirir. Böylece tüm $n \geq N_2$ ler için

$$d_j(x_{n+1}, Fx) \leq d_j(x_n, a) \leq d_j(x_n, y) + d_j(y, a) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \quad (4.4)$$

bulunur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ diyelim. Bu durumda Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 denklemlerinden tüm $n \geq N$ sayıları için

$$d_j(x, Fx) \leq d_j(x, x_{n+1}) + d_j(x_{n+1}, Fx) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan $d_j(x, Fx) = 0 < t$ elde edilir. Buradan $(x, Fx) \in V(j, t) \subseteq W$ olur ve böylelikle $x \in \overline{Fx}$ ve F nokta kapalı olduğundan $x \in \overline{Fx} = Fx$ bulunur. Bu da x in F dönüşümünün sabit noktası olduğunu verir. İspat tamamlanmış olur.

4.1. Sonuç Teoremi

(X, U) , $P^* = \{d_i : i \in I\}$ yarı metrikler ailesi ile tanımlı bir F - yörüngesel tam Hausdorff düzgün uzay, $(2^X, U^*)$ uzayı (X, U) uzayının hiper uzayı ve $F : X \rightarrow 2^X$ şeklinde tanımlı bir sürekli dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $i \in I$ için $r \geq 1$ tamsayı ve a, p, q sayıları $a > 0$ ve $0 < p + q < 1$ olacak şekilde reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} \min\{\delta_i(\overline{Fx}, \overline{Fy})^r, \delta_i(x, \overline{Fx})\delta_i(y, \overline{Fy})^{r-1}, \delta_i(y, \overline{Fy})^r\} + a \min\{d_i(x, \overline{Fy}), d_i(y, \overline{Fx})\} \\ \leq (pd_i(x, \overline{Fx}) + qd_i(x, y))d_i(y, \overline{Fy})^{r-1} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanırsa o zaman $x \in \overline{Fx}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. F bir nokta kapalı dönüşüm ise o zaman F dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 4.1 deki ϕ fonksiyonu Örnek 4.1 deki gibi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi(\delta_i(\overline{Fx}, \overline{Fy}), d_i(x, y), \delta_i(x, \overline{Fx}), \delta_i(y, \overline{Fy}), d_i(x, \overline{Fx}), d_i(y, \overline{Fy}), \\ d_i(x, \overline{Fy}), d_i(y, \overline{Fx})) \\ = \min\{\delta_i(\overline{Fx}, \overline{Fy})^r, \delta_i(x, \overline{Fx})\delta_i(y, \overline{Fy})^{r-1}, \delta_i(y, \overline{Fy})^r\} - a \min\{d_i(x, \overline{Fy}), d_i(y, \overline{Fx})\} \\ - (pd_i(x, \overline{Fx}) + qd_i(x, y))d_i(y, \overline{Fy})^{r-1} \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği ve Teorem 4.1 deki işlemler aynen uygulandığında ispat kolaylıkla tamamlanır.

4.2. Sonuç Teoremi

(X, d) bir F -yörüngesel tam metrik uzay ve $F : X \rightarrow B(X)$ dönüşümü, $r \geq 1$ tamsayı ve a, p, q sayıları $0 < p + q < 1, a > 0$ olacak şekildeki reel sayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \min\{\delta(\overline{Fx}, \overline{Fy})^r, \delta(x, \overline{Fx})\delta(y, \overline{Fy})^{r-1}, \delta(y, \overline{Fy})^r\} + a \min\{d(x, \overline{Fy}), d(y, \overline{Fx})\} \\ \leq [pd(x, \overline{Fx}) + qd(x, y)]d(y, \overline{Fy})^{r-1} \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan bir sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda $x \in \overline{Fx}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır (burada $\overline{Fx}$, Fx in kapanışı anlamındadır). Eğer F nokta kapalı dönüşüm ise o zaman $x \in Fx$ olup x, F dönüşümünün bir sabit noktasıdır [31].

İspat

Sonuç Teoremi 4.1 in özel bir sonucu olarak (X, U) düzgün uzayı (X, d) metrik uzayı ile değiştirildiğinde elde edilir. Çünkü her bir metrik uzay bir düzgün uzaydır.

Verilen bu teoremin Tarafdar tarafından verilen düşünce ile Teorem 4.1 in bir uygulaması olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz [32].

4.3. Sonuç Teoremi

(X, τ) bir F - yörüngesel tam Hausdorff lokal konveks lineer topolojik uzay, $(2^X, U^*)$ bir düzgün uzay ve $F : X \rightarrow 2^X$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. d_i ve

δ_i fonksiyonları Eş. 4.1 deki gibi tanımlanmak üzere Teorem 4.1 in koşulları sağlansın. Bu durumda F dönüşümü X içinde bir sabit noktaya sahiptir.

4.3. Düzgün Uzayda Çoğul Değerli Dönüşüm Çifti İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda dört tane çoğul değerli dönüşüm için bir sabit nokta teoremi, teoremin sonuçları ve de lokal konveks uzaylara bir uygulaması verilecektir.

Kısım 4.1' de tanımlanan bir düzgün uzay ve onun hiper uzayı tanımı gereği iki düzgün uzay için de benzer düşünce ile hiper uzayları tanımlanabilir. İleride teorem ispatlarında kullanılacak şekliyle bu tanımları ifade edelim.

(X, U_1) ve (Y, U_2) iki düzgün uzay olsun.

$$V_1(i, r) = \{(x, x') : x, x' \in X, d_1^i(x, x') < r\}$$

$$V_2(i, r) = \{(y, y') : y, y' \in Y, d_2^i(y, y') < r\}$$

olmak üzere

$$\beta_1 = \{V_1(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

$$\beta_2 = \{V_2(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

aileleri sırası ile U_1 ve U_2 düzgün yapıları için birer taban oluştururlar.

$$2^X = \{A : A \text{ kümesi } X \text{ in boştan farklı } P_1^* \text{ - sınırlı alt kümesi}\}$$

ve

$$2^Y = \{B : B \text{ kümesi } Y \text{ nin boştan farklı } P_2^* \text{- sınırlı alt kümesi}\}$$

olmak üzere her bir $i \in I$ ve $A_1, A_2 \in 2^X, B_1, B_2 \in 2^Y$ kümeleri için

$$\delta_1^i(A_1, A_2) = \sup \{d_i(x, x') : x \in A_1, x' \in A_2, i \in I\}$$

ve

$$\delta_2^i(B_1, B_2) = \sup \{d_i(y, y') : y \in B_1, y' \in B_2, i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır.

$(X, \mathcal{U})$ ve $(Y, \mathcal{U}_2)$ iki düzgün uzay, $U_1 \in \mathcal{U}_1$ ve $U_2 \in \mathcal{U}_2$ keyfi çevreleri ve de $A_1, A_2 \in 2^X$ ve $B_1, B_2 \in 2^Y$ kümeleri için

$$\bar{\mathcal{U}}_1 = \{(A_1, A_2) \in 2^X \times 2^X : A_1 \times A_2 \subseteq U_1\} \cup \Delta$$

ve

$$\bar{\mathcal{U}}_2 = \{(B_1, B_2) \in 2^Y \times 2^Y : B_1 \times B_2 \subseteq U_2\} \cup \Delta$$

olmak üzere 2^X üzerindeki $2^{\mathcal{U}_1}$ düzgün yapısı ve 2^Y üzerindeki $2^{\mathcal{U}_2}$ düzgün yapısı

$$2^{\beta_1} = \{\bar{\mathcal{U}}_1 : U_1 \in \mathcal{U}_1\}$$

ve

$$2^{\beta_2} = \{\bar{\mathcal{U}}_2 : U_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

tabanları ile üretilir.

Aynı zamanda P_1^* bileşen ailesi 2^X üzerine ve P_2^* bileşen ailesi de 2^Y üzerine

$$V_1^*(i, r) = \{(A_1, A_2) \in 2^X \times 2^X : \delta_1^i(A_1, A_2) < r\} \cup \Delta$$

ve

$$V_2^*(i, r) = \{(B_1, B_2) \in 2^Y \times 2^Y : \delta_2^i(B_1, B_2) < r\} \cup \Delta$$

olmak üzere

$$\beta_1^* = \{V_1^*(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

ve

$$\beta_2^* = \{V_2^*(i, r) : i \in I, r > 0\}$$

tabanları ile U_1^* ve U_2^* düzgün yapıları oluşturulur.

Bu tanımlar göz önüne alınıp Türkoğlu ve Fisher tarafından iki çoğul değerli dönüşüm için bir sabit nokta teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir [33].

“(X, U_1) ve (Y, U_2) sırası ile $P_1^* = \{d_1^i : i \in I\}$ ve $P_2^* = \{d_2^i : i \in I\}$ ile tanımlı tam Hausdorff düzgün uzaylar ve $(2^X, U_1^*)$ ve $(2^Y, U_2^*)$ uzayları da sırası ile (X, U_1) ve (Y, U_2) uzaylarının hiper uzayları olsunlar. $F : X \rightarrow 2^Y$ ve $G : Y \rightarrow 2^X$ dönüşümleri $\forall i \in I, x, x' \in X, y, y' \in Y$ için $0 \leq c_i < 1$ olmak üzere

$$\delta_1^i(GFx, GFx') \leq c_i \max \{d_1^i(x, x'), \delta_1^i(x, GFx), \delta_1^i(x', GFx'), \delta_2^i(Fx, Fx')\}$$

ve

$$\delta_2^i(FGy, FGy') \leq c_i \max \{d_2^i(y, y'), \delta_2^i(y, FGy), \delta_2^i(y', FGy'), \delta_1^i(Gy, Gy')\}$$

eşitsizliklerini sağlasın. F sürekli ise o zaman GF dönüşümü X içinde bir tek z sabit noktasına ve FG dönüşümü Y içinde bir tek w sabit noktasına sahiptir. Ayrıca $Fz = \{w\}$ ve $Gw = \{z\}$ dir.

Bu teorem iki çoğul değerli dönüşüm için geçerlidir. Bu teorem iki çoğul değerli dönüşüm çifti için kapalı bağıntı yardımı ile genelleştirilecek. Daha sonra bu genelleştirme teoreminin sonuçları ve lokal konveks uzaylara bir uygulaması verilecek. Genelleştirme teoreminden önce kapalı bağıntı aşağıdaki şekilde veriliyor.

4.3. Tanım (Kapalı Bağıntı)

T_5 , aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $T: \square_+^5 \rightarrow \square$ sürekli fonksiyonlarının kümesi olsun:

I1) T fonksiyonu t_2, t_3, t_4 ve t_5 değişkenlerine göre artmayan,

I2) her $u, v, w \geq 0$ için

$$T(u, v, u, v, w) \leq 0$$

veya

$$T(u, v, v, u, w) \leq 0$$

olması durumunda $u \leq h \max\{v, w\}$ olacak şekilde bir $h \in [0, 1)$ vardır,

I3) $\forall u > 0$ için $T(u, 0, u, u, u) > 0$ dır.

Kapalı bağıntıyı tanımladıktan sonra bazı örnekler verelim.

4.2. Örnek

$c \in [0, 1)$ olmak üzere

$$T(t_1, t_2, \dots, t_5) = t_1 - c \max\{t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

olarak tanımlansın. Kapalı bağıntı özelliklerini sağlatalım.

I1) Maksimum tanımından dolayı t_2, t_3, t_4 ve t_5 değişkenlerinde fonksiyonun artmayan olduğu kolaylıkla görülür.

I2) $u > 0$ ve $v, w \geq 0$ için

$$T(u, v, u, v, w) = u - c \max\{v, u, w\} \leq 0$$

olsun. O zaman $u \leq c \max\{v, w\}$ dır. Eğer $u > c \max\{v, w\}$ ise, o zaman $u(1-c) < 0$ bulunur ki bu durum bir çelişki oluşturur. O halde $h = c \in [0, 1)$ için $u \leq h \max\{v, w\}$ olur. Eğer $u = 0$ ise o zaman da $u \leq h \max\{v, w\}$ bulunur. Benzer şekilde $T(u, v, v, u, w) \leq 0$ olması da $u \leq h \max\{v, w\}$ olmasını gerektirir.

I3) $\forall u > 0$ için $T(u, 0, u, u, u) = (1-c)u > 0$ dır.

4.3. Örnek

$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, 0 \leq \alpha + \beta < 1$ olmak üzere

$$T(t_1, t_2, \dots, t_5) = t_1^2 - \alpha t_2 t_5 - \beta (\max\{t_3, t_4\})^2$$

olsun. Bu örnek için kapalı bağıntı koşullarını sağlatalım.

I1) Bu kısım açıktır.

I2) $u > 0, v \geq 0$ ve $w \geq 0$ için

$$T(u, v, u, v, w) = u^2 - \alpha vw - \beta (\max\{u, v\})^2 \leq 0$$

olsun. Eğer $u > v$ ise o zaman

$$u^2(1 - \beta) \leq \alpha(\max\{v, w\})^2$$

ve buradan

$$u \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \beta}} \max\{v, w\}$$

olur. $u \leq v$ ise de o zaman

$$u^2 \leq \alpha(\max\{v, w\})^2 + \beta(\max\{v, w\})^2$$

ve buradan da

$$u \leq \sqrt{\alpha + \beta} \max\{v, w\}$$

bulunur. Böylelikle $h = \max\left\{\sqrt{\alpha + \beta}, \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \beta}}\right\} \in [0, 1)$ olmak üzere $u \leq h \max\{v, w\}$

olur. $u = 0$ ise de $u \leq h \max\{v, w\}$ bulunur. Benzer şekilde $T(u, v, v, u, w) \leq 0$ olması $u \leq h \max\{v, w\}$ olmasını gerektirir.

I3) $\forall u > 0$ için $T(u, 0, u, u, u) = u^2 - \beta u^2 = (1 - \beta)u^2 > 0$ dır.

4.4. Örnek

$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ ve $a + b + c + d < 1$ olmak üzere

$$T(t_1, t_2, \dots, t_5) = t_1^2 - (at_1t_2 + bt_1t_3 + ct_1t_4 + dt_1^2)$$

olsun. Koşulları sağlatalım.

I1) t_1 değişkeni hariç diğer tüm değişkenlerde artmayan olduğu açıktır.

I2) $u > 0, v \geq 0$ ve $w \geq 0$ için

$$T(u, v, u, v, w) = u^2 - (auv + bu^2 + cuv + dw^2) \leq 0$$

olsun. Eğer $u > v$ ise o zaman

$$(1 - a - b - c)u^2 \leq d(\max\{v, w\})^2$$

ve buradan

$$u \leq \sqrt{\frac{d}{1-a-b-c}} \max\{v, w\}$$

bulunur. Eğer $u \leq v$ ise o zaman

$$u^2 \leq (a+b+c)(\max\{v, w\})^2 + d(\max\{v, w\})^2$$

ve buradan da

$$u \leq \sqrt{a+b+c+d} \max\{v, w\}$$

olur. Böylece $h = \max\left\{\sqrt{a+b+c+d}, \sqrt{\frac{d}{1-a-b-c}}\right\} \max\{v, w\} \in [0, 1)$ olmak üzere

$u \leq h \max\{v, w\}$ elde edilir. $u = 0$ ise bu durumda da $u \leq h \max\{v, w\}$ bulunur.

Benzer şekilde $T(u, v, v, u, w) \leq 0$ olması da $u \leq h \max\{v, w\}$ olmasını gerektirir.

I3) $\forall u > 0$ için $T(u, 0, u, u, u) = u^2 - bu^2 - cu^2 - du^2 = (1-b-c-d)u^2 > 0$ dır.

4.5. Örnek

$c \in [0, 1)$ olmak üzere

$$T(t_1, t_2, \dots, t_5) = t_1^2 - c \max\{t_2 t_3, t_2 t_4, t_3 t_4, t_5^2\}$$

olsun. Kapalı bağıntı koşulları olan (I1-I3) koşullarını sağlatalım.

I1) Maksimum tanımı gereği t_1 değişkeni hariç diğer tüm değişkenlerde artmayandır.

I2) $u > 0, v \geq 0$ ve $w \geq 0$ için

$$T(u, v, u, v, w) = u^2 - c \max\{uv, v^2, w^2\} \leq 0$$

olsun. Bu durumda $u^2 \leq c \max\{uv, v^2, w^2\}$ olur. Eğer $u > \max\{v, w\}$ ise o zaman $u^2(1-c) < 0$ çelişkisi oluşur. Böylece $h = \sqrt{c} \in [0, 1)$ olmak üzere $u \leq h \max\{v, w\}$ dır. $u = 0$ ise o zaman da $u \leq h \max\{v, w\}$ olur. Benzer şekildeki tüm işlemler $T(u, v, v, u, w) \leq 0$ için de uygulandığında $u \leq h \max\{v, w\}$ sonucuna varılır.

4.2. Teorem

(X, U_1) ve (Y, U_2) sırası ile $P_1^* = \{d_1^i : i \in I\}$ ve $P_2^* = \{d_2^i : i \in I\}$ ile tanımlı tam Hausdorff düzgün uzaylar ve $(2^X, U_1^*)$ ve $(2^Y, U_2^*)$ uzayları da sırası ile (X, U_1) ve (Y, U_2) uzaylarının hiper uzayları olsunlar. $F, G : X \rightarrow 2^Y$ ve $P, Q : Y \rightarrow 2^X$ dönüşümleri $T, S \in T_5$ olmak üzere $\forall i \in I, x, x' \in X, y, y' \in Y$ için

$$T(\delta_1^i(PFx, QGx'), d_1^i(x, x'), \delta_1^i(x, PFx), \delta_1^i(x', QGx'), \delta_2^i(Fx, Gx')) \leq 0 \quad (4.5)$$

$$S(\delta_2^i(GPy, FQy'), d_2^i(y, y'), \delta_2^i(y, GPy), \delta_2^i(y', FQy'), \delta_1^i(Py, Qy')) \leq 0 \quad (4.6)$$

eşitsizliklerini sağlasınlar. Eğer F ve G sürekli ise, o zaman PF ve QG dönüşümleri bir tek ortak $z \in X$ sabit noktasına ve, GP ve FQ dönüşümleri bir tek ortak $w \in Y$ sabit noktasına sahiptirler.

İspat

x_1, X içinde keyfi bir nokta olsun. $y_1 \in Fx_1, x_2 \in Py_1$ ve $y_2 \in Gx_2$ seçilirse $x_3 \in Qy_2$ olur. Bu şekilde işleme devam edilirse genel olarak, $n = 1, 2, \dots$ için y_{2n-1}, Fx_{2n-1} içinde bir nokta, x_{2n}, Py_{2n-1} içinde bir nokta ve y_{2n} de Gx_{2n} içinde bir nokta olarak seçildiğinde o zaman x_{2n+1} de Qy_{2n} içinde olur. Böylelikle X ve Y içinde sırası ile

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri seçilmiş olur. c_1^i ve c_2^i sabitleri I2 koşulunu sağlayan reel sabitler olmak üzere $c_i = \max\{c_1^i, c_2^i\}$ olsun.

$U_1 \in \mathcal{U}$ keyfi çevresini alalım. $\beta_1, \mathcal{U}$ için bir taban olduğundan $V_1(i, \varepsilon) \subseteq U_1$ olacak şekilde $V_1(i, \varepsilon) \in \beta_1$ vardır. Eş. 4.5 eşitsizliği kullanılırsa

$$T(\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}), d_1^i(x_{2n+1}, x_{2n}), \delta_1^i(x_{2n+1}, PFx_{2n+1}), \delta_1^i(x_{2n}, QGx_{2n}), \delta_2^i(Fx_{2n+1}, Gx_{2n})) \leq 0$$

ve buradan

$$T(\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}), \delta_1^i(QGx_{2n}, PFx_{2n-1}), \delta_1^i(QGx_{2n}, PFx_{2n+1}), \delta_1^i(PFx_{2n-1}, QGx_{2n}), \delta_2^i(Fx_{2n+1}, Gx_{2n})) \leq 0$$

elde edilir ve

$$\delta_2^i(Fx_{2n+1}, Gx_{2n}) \leq \delta_2^i(GPy_{2n-1}, FQy_{2n})$$

eşitsizliği ile I2 koşulundan

$$\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}) \leq c_i \max\{\delta_1^i(PFx_{2n-1}, QGx_{2n}), \delta_2^i(GPy_{2n-1}, FQy_{2n})\}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1^i(x_{2n+2}, x_{2n+1}) &\leq \delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}) \\ &\leq c_i \max\{\delta_1^i(PFx_{2n-1}, QGx_{2n}), \delta_2^i(GPy_{2n-1}, FQy_{2n})\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 4.5 eşitsizliği tekrardan kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d_1^i(x_{2n+2}, x_{2n+3}) &\leq \delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n+2}) \\
&\leq c_i \max \{ \delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}), \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n}) \}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir.

$U_2 \in \mathcal{U}_2$ keyfi çevresini alalım. $\beta_2, \mathcal{U}_2$ için bir taban olduğundan $V_2(i, \varepsilon) \subseteq U_2$ olacak şekilde $V_2(i, \varepsilon) \in \beta_2$ vardır. Eş. 4.6 eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S(\delta_2^i(FQy_{2n}, GPy_{2n+1}), d_2^i(y_{2n+1}, y_{2n}), \delta_2^i(y_{2n+1}, GPy_{2n+1}), \delta_2^i(y_{2n}, FQy_{2n}), \\
\delta_1^i(Py_{2n+1}, Qy_{2n})) \leq 0
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
S(\delta_2^i(FQy_{2n}, GPy_{2n+1}), \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n}), \delta_2^i(FQy_{2n}, GPy_{2n+1}), \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n}), \\
\delta_1^i(Py_{2n+1}, Qy_{2n})) \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\delta_1^i(Py_{2n+1}, Qy_{2n}) \leq \delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n})$$

eşitsizliği ile I2 koşulundan

$$\delta_2^i(FQy_{2n}, GPy_{2n+1}) \leq c_i \max \{ \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n}), \delta_1^i(Py_{2n+1}, Qy_{2n}) \}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_2^i(y_{2n+1}, x_{2n+2}) &\leq \delta_2^i(FQy_{2n}, GPy_{2n+1}) \\
&\leq c_i \max \{ \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n}), \delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}) \}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 4.6 eşitsizliği yine kullanılırsa

$$\begin{aligned} d_2^i(y_{2n+2}, x_{2n+3}) &\leq \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n+2}) \\ &\leq c_i \max \{ \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n}), \delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n+2}) \} \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir.

$n = 1, 2, \dots$ ve tüm $i \in I$ lar için

$$K = \max \{ \delta_1^i(PFx_1, QGx_2), \delta_1^i(PFx_3, QGx_2), \delta_1^i(PFx_3, QGx_4), \delta_2^i(GPy_1, FQy_2), \delta_2^i(FQy_2, GPy_3) \}$$

olmak üzere

$$\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n}) \leq c_i^n K \quad (4.11)$$

$$\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n+2}) \leq c_i^n K \quad (4.12)$$

$$\delta_2^i(FQy_{2n}, GPy_{2n+1}) \leq c_i^n K \quad (4.13)$$

$$\delta_2^i(FQy_{2n+2}, GPy_{2n+1}) \leq c_i^n K \quad (4.14)$$

olduklarını gösterelim.

$n = 1$ için Eş. 4.11 ve Eş. 4.14 eşitsizliklerinin doğrulukları açıktır. Eş. 4.11 ve Eş. 4.14 eşitsizliklerinin herhangi bir n için gerçekleştiğini kabul edelim. Eş. 4.7

eşitsizliği, Eş. 4.12 ve Eş. 4.14 eşitsizlikleri üzerindeki kabullerimiz göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\delta_1^i(PFx_{2n+3}, QGx_{2n+2}) &\leq c_i \max\{\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGx_{2n+2}), \delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n+2})\} \\ &\leq c_i^{n+1} K\end{aligned}$$

bulunur. Tümevarım ile Eş. 4.11 eşitsizliği gösterilmiş oldu.

Eş. 4.9 eşitsizliği, Eş. 4.11 ve Eş. 4.14 eşitsizlikleri üzerindeki kabullerimiz kullanılırsa

$$\begin{aligned}\delta_2^i(FQy_{2n+2}, GPy_{2n+3}) &\leq c_i \max\{\delta_2^i(GPy_{2n+1}, FQy_{2n+2}), \delta_1^i(PFx_{2n+3}, QGx_{2n+2})\} \\ &\leq c_i^{n+1} K\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.13 eşitsizliği gösterilmiş oldu.

Eş. 4.8 eşitsizliği, Eş. 4.11 ve Eş. 4.13 eşitsizlikleri üzerindeki kabullerden

$$\begin{aligned}\delta_1^i(PFx_{2n+3}, QGx_{2n+4}) &\leq c_i \max\{\delta_1^i(PFx_{2n+3}, QGx_{2n+2}), \delta_2^i(GPy_{2n+3}, FQy_{2n+2})\} \\ &\leq c_i^{n+1} K\end{aligned}$$

olur.

Son olarak Eş. 4.10, Eş. 4.12 ve Eş. 4.13 eşitsizlikleri kullanıldığında da

$$\begin{aligned}\delta_2^i(FQy_{2n+4}, GPy_{2n+3}) &\leq c_i \max\{\delta_2^i(GPy_{2n+3}, FQy_{2n+2}), \delta_1^i(PFx_{2n+3}, QGx_{2n+4})\} \\ &\leq c_i^{n+1} K\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle Eş. 4.14 eşitsizliği de gösterilmiş olur.

Bu işlemlerin ardından hemen görülür ki $r = 1, 2, \dots$ ve N den daha büyük bir n için

$$\begin{aligned}
d_1^i(x_{2n+1}, x_{2n+r+1}) &\leq d_1^i(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + d_1^i(x_{2n+2}, x_{2n+3}) + \dots + d_1^i(x_{2n+r}, x_{2n+r+1}) \\
&\leq \delta_1^i(QGx_{2n}, PFX_{2n+1}) + \delta_1^i(PFX_{2n+1}, QGx_{2n+2}) + \dots \\
&\leq (c_i^n + c_i^n + c_i^{n+1} + c_i^{n+1} + \dots)K \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. $c_i < 1$ olduğundan $d_1^i(x_{2n+1}, x_{2n+r+1}) < \varepsilon$ ve buradan da tüm $n, r \geq p$ ler için $(x_{2n+1}, x_{2n+r+1}) \in U_1$ olacak şekilde bir p vardır. Böylece $\{x_n\}$ dizisi X tam düzgün uzayı içinde bir Cauchy dizisi olur ve X içinde bir z limitine sahiptir. Benzer şekilde $\{y_n\}$ dizisi de Y tam düzgün uzayı içinde bir Cauchy dizisidir ve Y içinde bir w limitine sahiptir.

Ayrıca $m > n$ olmak üzere $n > N$ için

$$\begin{aligned}
\delta_1^i(QGx_{2n}, PFX_{2m+1}) &\leq \delta_1^i(QGx_{2n}, PFX_{2n+1}) + \delta_1^i(PFX_{2n+1}, QGx_{2n+2}) + \dots \\
&\quad + \delta_1^i(QGx_{2m}, PFX_{2m+1}) \\
&\leq (c_i^n + c_i^n + c_i^{n+1} + c_i^{n+1} + \dots)K \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. $x_{2m+2} \in PFX_{2m+1}$ olduğundan da

$$\begin{aligned}
\delta_1^i(z, QGx_{2n}) &\leq d_1^i(z, x_{2m+2}) + \delta_1^i(x_{2m+2}, QGx_{2n}) \\
&\leq d_1^i(z, x_{2m+2}) + \delta_1^i(PFX_{2m+1}, QGx_{2n})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Eş. 4.15 eşitsizliğinden $m > n > N$ için

$$\delta_1^i(z, QGx_{2n}) \leq d_1^i(z, x_{2m+2}) + \varepsilon$$

olur. m sonsuza götürüldüğünde $n > N$ için

$$\delta_1^i(z, QGx_{2n}) \leq \varepsilon$$

ve böylece ε keyfi olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} QGx_{2n} = \{z\} \quad (4.16)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} PFx_{2n+1} &= \{z\} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} GPy_{2n+1} &= \{w\} = \lim_{n \rightarrow \infty} FQy_{2n} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ifadeleri de elde edilir.

F ve G dönüşümlerinin sürekliliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Fx_{2n+1} = Fz = \{w\} \quad (4.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Gx_{2n} = Gz = \{w\} \quad (4.19)$$

olur.

$W \in \mathcal{U}_1$ keyfi bir çevre olsun. $\beta_1, \mathcal{U}_1$ için bir taban olduğundan $V_1(j, t) \subseteq W$ olacak şekilde $V_1(j, t) \in \beta_1$ vardır. Eş. 4.5 eşitsizliği $x = z$ ve $x' = x_{2n}$ için kullanılırsa

$$T(\delta_1^i(PFz, QGx_{2n}), d_1^i(z, x_{2n}), \delta_1^i(z, PFz), \delta_1^i(x_{2n}, QGx_{2n}), \delta_2^i(Fz, Gx_{2n})) \leq 0$$

elde edilir. n sonsuza götürülür ve Eş. 4.16, Eş. 4.19 eşitlikleri kullanılırsa

$$T(\delta_1^i(PFz, z), 0, \delta_1^i(z, PFz), 0, 0) \leq 0$$

ve buradan I2 koşulundan

$$\delta_1^i(PFz, z) \leq 0$$

ve böylece elde edilir. Bu da $(z, PFz) \in V_1(j, t) \subseteq W$ demektir. W keyfi ve X Hausdorff düzgün uzay ve de Eş. 4.18 denklemi düşünülürse

$$PFz = \{z\} = Pw \quad (4.20)$$

olmak zorunda olduğu sonucuna varılır. Bu kez Eş. 4.5 eşitsizliği $x = x_{2n+1}$ ve $x' = z$ için kullanılırsa

$$T(\delta_1^i(PFx_{2n+1}, QGz), d_1^i(x_{2n+1}, z), \delta_1^i(x_{2n+1}, PFx_{2n+1}), \delta_1^i(z, QGz), \delta_2^i(Fx_{2n+1}, Gz)) \leq 0$$

elde edilir. n sonsuza götürülür ve Eş. 4.17, Eş. 4.18 ve Eş. 4.19 denklemleri kullanılırsa

$$T(\delta_1^i(z, QGz), 0, 0, \delta_1^i(z, QGz), 0) \leq 0$$

olur ve buradan I2 koşulundan

$$\delta_1^i(z, QGz) \leq 0$$

elde edilir. Buradan da Eş. 4.19 denklemi göz önüne alındığında

$$QGz = \{z\} = Qw \quad (4.21)$$

elde edilir. Böylelikle z aynı zamanda QG dönüşümünün de bir sabit noktası olur.

Eş. 4.18 ve Eş. 4.21 denklemlerinden

$$FQw = Fz = \{w\}$$

olduğu görülür ve Eş. 4.19 ve Eş. 4.20 denklemlerinden de

$$GPw = Gz = \{w\}$$

olduğu görülür. Bundan dolayı w da FQ ve GP dönüşümlerinin bir sabit noktasıdır.

Bulunan bu sabit noktanın tekliğinin ispatı için kabul edelim ki z' , PF ve QG dönüşümlerinin z den farklı ikinci bir ortak sabit noktası olsun. Eş. 4.5 eşitsizliği $x = x' = z'$ için kullanılırsa

$$T(\delta_1^i(PFz', QGz'), d_1^i(z', z'), \delta_1^i(z', PFz'), \delta_1^i(z', QGz'), \delta_2^i(Fz', Gz')) \leq 0$$

ve

$$T(\delta_1^i(PFz', QGz'), 0, \delta_1^i(PFz', QGz'), \delta_1^i(PFz', QGz'), \delta_2^i(Fz', Gz')) \leq 0$$

bulunur.

Eş. 4.6 eşitsizliği kullanılırsa da

$$S(\delta_2^i(GPFz', FQGz'), \delta_2^i(Fz', Gz'), \delta_2^i(Fz', GPFz'), \delta_2^i(Gz', FQGz'), \delta_1^i(PFz', QGz')) \leq 0$$

ve

$$S(\delta_2^i(GPFz', FQGz'), \delta_2^i(Fz', Gz'), \delta_2^i(Fz', Gz'), \delta_2^i(Gz', Fz'), \delta_1^i(PFz', QGz')) \leq 0$$

bulunur ve I2 koşulundan

$$\delta_2^i(GPFz', FQGz') \leq c_i \max \{ \delta_2^i(Fz', Gz'), \delta_1^i(PFz', QGz') \}$$

ve

$$\begin{aligned} \delta_2^i(Fz', Gz') &\leq \delta_2^i(GPFz', FQGz') \\ &\leq c_i \max \{ \delta_2^i(Fz', Gz'), \delta_1^i(PFz', QGz') \} \end{aligned}$$

ve

$$\delta_2^i(Fz', Gz') \leq c_i \delta_1^i(PFz', QGz')$$

elde edilir.

Böylece

$$T(\delta_1^i(PFz', QGz'), 0, \delta_1^i(PFz', QGz'), \delta_1^i(PFz', QGz'), c_i \delta_1^i(PFz', QGz')) \leq 0$$

ve

$$T(\delta_1^i(PFz', QGz'), 0, \delta_1^i(PFz', QGz'), \delta_1^i(PFz', QGz'), \delta_1^i(PFz', QGz')) \leq 0$$

olur ki I3 koşulundan

$$\delta_1^i(PFz', QGz') = 0$$

ve buradan

$$\delta_2^i(Fz', Gz') = 0$$

olur.

Böylece Fz' ve Gz' kümeleri tek nokta kümeleridir ve

$$PFz' = QGz' = \{z'\}$$

ve

$$\delta_1^i(PFz', QGz') \leq c_i \delta_2^i(Fz, Gz')$$

ve buradan da

$$d_1^i(z, z') = \delta_1^i(PFz, QGz') \leq c_i d_2^i(Fz, Gz') = c_i d_2^i(Gz, Fz')$$

elde edilir.

Eş. 4.6 eşitsizliği kullanılırsa

$$S(\delta_2^i(GPFz, FQGz'), d_2^i(Fz, Gz'), \delta_2^i(Fz, GPFz), \delta_2^i(Gz', FQGz'), \delta_1^i(PFz, QGz')) \leq 0$$

ve

$$S(d_2^i(Gz, Fz'), d_2^i(Fz, Gz'), 0, 0, d_1^i(z, z')) \leq 0$$

ve

$$S(d_2^i(Gz, Fz'), d_2^i(Fz, Gz'), d_2^i(Fz, Gz'), d_2^i(Gz, Fz'), d_1^i(z, z')) \leq 0$$

olur ve I2 koşulundan

$$d_2^i(Gz, Fz') \leq c_i \max \{d_2^i(Fz, Gz'), d_1^i(z, z')\}$$

ve buradan da

$$d_1^i(z, z') \leq c_i^2 d_1^i(z, z')$$

bulunur. $c_i < 1$ olduğundan z noktasının tekliği gösterilmiş olur.

Benzer şekilde w noktasının da GP ve FQ dönüşümlerinin bir tek sabit noktası olduğu görülür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.4. Sonuç Teoremi

(X, U_1) ve (Y, U_2) sırası ile $P_1^* = \{d_1^i : i \in I\}$ ve $P_2^* = \{d_2^i : i \in I\}$ ile tanımlı tam Hausdorff düzgün uzaylar ve $(2^X, U_1^*)$ ve $(2^Y, U_2^*)$ uzayları da sırası ile (X, U_1) ve (Y, U_2) uzaylarının hiper uzayları olsunlar. $F, G : X \rightarrow 2^Y$ ve $P, Q : Y \rightarrow 2^X$ dönüşümleri $0 \leq c_i < 1$ olmak üzere $\forall i \in I, x, x' \in X, y, y' \in Y$ için

$$\delta_1^i(PFx, QGx') \leq c_i \max \{d_1^i(x, x'), \delta_1^i(x, PFx), \delta_1^i(x', QGx'), \delta_2^i(Fx, Gx')\}$$

$$\delta_2^i(GPy, FQy') \leq c_i \max \{d_2^i(y, y'), \delta_2^i(y, GPy), \delta_2^i(y', FQy'), \delta_1^i(Py, Qy')\}$$

eşitsizliklerini sağlasınlar. Eğer F ve G sürekli ise, o zaman PF ve QG dönüşümleri bir tek ortak $z \in X$ sabit noktasına ve, GP ve FQ dönüşümleri bir tek ortak $w \in Y$ sabit noktasına sahiptirler.

İspat

Teorem 4.2 de T ve S dönüşümleri aynen Örnek 4.2 deki gibi alınır ve Teorem 4.2 deki tüm işler aynen uygulanırsa ispat kolaylıkla tamamlanır.

4.1. Uyarı

Teorem 4.2 nin sonuçları ve Örnek 4.3-Örnek 4.5 örnekleri göz önüne alınırsa o zaman bazı sabit nokta teoremlerini içeren sonuçlar elde edilebilir.

4.5. Sonuç Teoremi

(X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki tam Hausdorff lokal konveks lineer topolojik uzaylar, 2^X ve 2^Y sırası ile X ve Y uzaylarının hiper uzayları olsun. F ve G dönüşümleri (X, τ_1) uzayından 2^Y üzerine ve P ve Q dönüşümleri de (Y, τ_2) uzayından 2^X üzerine tanımlı dönüşümler olsun. d_i ve δ_i fonksiyonları Eş. 4.1 deki gibi tanımlanmak üzere Teorem 4.2 nin koşulları sağlansın. Bu durumda PF ve QG dönüşümleri X içinde bir tek ortak sabit noktaya, GP ve FQ dönüşümleri de Y içinde bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

5. SONUÇ

İlk bölümde metrik ve düzgün uzayda tanımlı dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve de tekliği konusundaki bazı çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümün ilk kısmında boştan farklı bir X kümesi üzerinde düzgün yapının tanımı verilmiştir. Daha sonra teorem ispatlarında kullanılacak diğer tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise bir X kümesi üzerindeki düzgün yapının yine X üzerindeki bir indekslenmiş yarı metrikler ailesi ile de tanımlanabileceği yani, bu düzgün yapılar arasında bire bir karşılık gelmenin olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde yörüngesel tam metrik uzayda tanımlı bir tek değerli dönüşümün sabit noktasının var ve tekliği ile ilgili bir genelleştirme teoreminden hareketle bir kapalı (implicit) bağıntı tanımlanmıştır. Bu bağıntıyı sağlayan bazı örnekler verilmiştir. Daha sonra bu bağıntı yardımıyla yeni bir genelleştirme teoremi verilmiştir. Ayrıca bu temel teoremin iki sonucu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında yarı metrikler ailesi ile düzgün yapı oluşturmaya ve de bazı tanımlara yer verilmiştir. İkinci kısmında ise bir önceki bölümdekinden farklı bir kapalı (implicit) bağıntı tanımlanmıştır. Bu bağıntı yardımıyla bir düzgün uzayda tanımlı bir çoğul değerli dönüşümün sabit noktasının belirlenmesi için yeni bir teorem ispat edilmiştir. Daha sonra bu teoremin iki sonucu ifade edilmiştir. Son olarak, temel teoremin lokal konveks uzaylara bir uygulaması verilmiştir. Bölümün son kısmında ise iki tane çoğul değerli dönüşüm çifti için yeni bir genelleştirme teoremi ispat edilmiştir. Bu teoremin ispatında da yine kapalı (implicit) bağıntı kullanıldığından bu teorem için gerekli olan kapalı (implicit) bağıntı tanımlanmıştır. Ayrıca bu bağıntıyı sağlayan birkaç örnek verilmiştir. Bu örneklerin verilme amacı şudur: Her bir örnek bu kısmın ana teoremi ile düşünüldüğünde daha önceden verilmiş bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiş olur. Son olarak temel teoremin bir sonucu ve lokal konveks uzaylara bir uygulaması verilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Banach, S., "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales", *Fund. Math.*, 3: 133-181 (1922).
2. Picard, E., "Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations succesive", *J. Math. Pures et Appl.*, 6: 145-210 (1890).
3. Brouwer, L.E.J., "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Math. Ann.*, 71: 97-115 (1910).
4. Camaro, J.L.C., "An application of a fixed-point theorem of D. W. Boyd and J. S. W. Wong", *Rev. Mat. Estalíst.*, 6: 25-29 (1988).
5. Chatterjea, S.K., "Application of an extension of a theorem of Fisher on common fixed point", *Pure Math. Manuscript.*, 6: 35-38 (1987).
6. Ćirić, Lj.B., "Generalized contractions and fixed-point theorems", *Publ. Inst. Math.*, 12(26): 19-26 (1971).
7. Singh, S.L., "Approximating fixed points of multivalued maps", *J. Natur. Phys. Sci.*, 2 (1-2): 51-61 (1988).
8. Nadler, S.B., "Multivalued contraction mappings", *Pacific J. Math.*, 30: 475-488 (1969).
9. Fisher, B., "Fixed points for set valued mappings on metric spaces", *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 4(2): 95-99 (1981).
10. Assad, N.A., Kirk, W.A., "Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type", *Pacific J. Math.*, 43: 553-562 (1972).
11. Ćirić, Lj.B., "Fixed points for generalized multi-valued mappings", *Mat. Vesnik*, 9(24): 265-272 (1972).
12. Dube, L., Singh, S., "On multi-valued contraction mappings", *Bull. Math. Soc. Sci. RSR*, 14: 307-310 (1970).
13. Willard, S., "General Topology", *Addison-Wesley*, 238-242 (1970).
14. Thron, W.J., "Topological Structures (Holt)", *Mer. Math. Soc.*, Providence, RI, 172-177 (1977).
15. Weil, A., "Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale", *Actualites Sci. Ind.*, 551 (1937).

16. Davis, A.S., "Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces", *Am. Math. Montly*, 68: 886-893 (1961).
17. Acharya, S.P., "Some results on fixed points in uniform spaces", *Yokohama Math. J.*, 22(1-2): 105-116 (1974).
18. Ganguly, A., "Fixed point theorems for three maps in uniform spaces", *Indian J. Pure Appl. Math.*, 17(4): 476-480 (1986).
19. Mishra, S.N., Singh, S.L., "Fixed point of multi-valued mapping in uniform spaces", *Bull. Cal. Math. Soc.*, 77:323-329 (1985).
20. Türkoğlu, D., Özer, O., Fisher, B., "Some fixed point theorems for set valued mappings in uniform spaces", *Demonst. Math.*, 32(2): 395-400 (1999).
21. Türkoğlu, D., "Fixed point theorems on uniform spaces", *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 34(3): 453-459 (2003).
22. Kelley, J.L., "General Topology", *D. Van Nostrand Co.*, 188 (1955).
23. Bhakta, P.C., "On the generation of uniformities on A set", *Bull. Cal. Math. Soc.*, 70: 317 (1978).
24. Ćirić, Lj.B., "On contraction type mappings", *Math. Balk.*, 1: 52-57 (1971).
25. Tripathi, S., Yadav, R.K., "Fixed point theorems in T-orbitally complete metric space", *Bull. Cal. Math. Soc.*, 82: 509-512 (1990).
26. Türkoğlu, D., Özer, O., Fisher, B., "Fixed point theorems for T-orbitally complete metric spaces", *Universitatea Din Bacău Studii Şi Cercetări Ştiinţifice Seria: MATEMATICA*, 9: 211-218 (1999).
27. Ćirić, Lj.B., "Fixed and periodic points of almost contractive operators", *Math. Balk.*, 3: 33-44 (1973).
28. Smithson, R.E., "Fixed points for contractive multi-functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27: 192-194 (1971).
29. Fisher, B., "Common fixed points of mappings and multivalued mappings", *Rostock Math. Kolloq.*, 18: 69-77 (1981).
30. Schaefer, H.H., "Topological vector spaces (Macmillan)", *New York*, 16, 48 (1966).
31. Özer, O., Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for multivalued mappings", *Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi*, 4: 83-96 (1998).

32. Tarafdar, E., "On a fixed point theorem on locally convex linear topological spaces", *Monatshefte für Mathematik*, 82: 341-344 (1976).
33. Türkoğlu, D., Fisher, B., "Related fixed points for set valued mappings on two uniform spaces", *Int. J. Math.Math. Sci.*, 69: 3783-3791 (2004).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ASLAN HANÇER, Hatice
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 04.06.1976 Kırıkkale
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 2021079
 e-mail : haslan@gazi.edu.tr

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Yüksek lisans	Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü	2001
Lisans	Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü	1997
Lise	Mehmet Akif Ersoy Lisesi	1993

İş Deneyimi Yıl

Yer

Görev

1997-2002	Kırıkkale Üniversitesi	Araş. Gör.
2002-	Gazi Üniversitesi Matematik Böl.	Araş. Gör.

Yabancı Dil

İngilizce