

METRİK VE Menger UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Erkan KİŞİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2010
ANKARA**

Erkan KİŞİ tarafından hazırlanan METRİK VE MENDER UZAYLARDA SABİT NOKTA
TEOREMLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans
tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Hakan EFE

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER

.....

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 12/ 02 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Erkan KİŞİ

METRİK VE MENDER UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ**(Yüksek Lisans Tezi)****Erkan KİŞİ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Ocak 2010****ÖZET**

Bu tezde metrik ve Menger uzayda verilmiş bazı tanım ve teoremler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha önce verilmiş bir kapalı (implicit) bağıntıyı sağlayan küme değerli dönüşümler için Caristi seçim teoremine yer verilmiştir. İki tam metrik Uzayda küme değerli iki dönüşüm için sabit nokta teoremleri ve üç tam metrik uzayda üç tek değerli fonksiyon için sabit nokta teoremleri ispatlarından bahsedilmiştir. Son olarak ise Menger uzayda ortak sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Birim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Üçgen norm, probabilistik metrik uzay, Menger uzay, sabit nokta, küme değerli dönüşüm
Sayfa : 68
Tezin Yöneticisi : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

FIXED POINT THEOREMS IN Menger SPACES**(M.Sc. Thesis)****Erkan KİŞİ****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****January 2010****ABSTRACT**

In this study, some definitions are given in metric spaces and Menger's theorem and the relations between the examined. On implicit set of relations that provide valuable selection for conversations Caristi of theorem has been talking about. Two complete metric space and set-valued fixed-point theorem for two mappings and three complete metric space for three single-valued functions we fixed point theorem proving one mentioned. Finally, the common fixed point theorems in Menger spaces were examined.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Triangular norm, probabilistic metric space, Menger space, fixed point, multivalued map****Page Number : 68****Adviser : Assoc.Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip metrik ve Menger uzaylarına yönlendiren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sayın danışman hocam Doç. Dr. A.Duran TÜRKOĞLU ile anlayışlarını, maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	7
3.1. İki Tam Metrik Uzayda Küme Değerli İki Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	7
3.2. Üç Tam Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri.....	19
3.3. Bir Kapalı (implicit) Bağlantıyı Sağlayan Küme Değerli Dönüşüm İçin Bir Genel Seçme Teoremi.....	31
4. MENDER UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	38
4.1. Menger Uzayda Ortak Sabit Nokta Teoremleri.....	38
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	64
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	68

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$P(X)$	X kümesinin boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi
$Pcl(X)$	X kümesinin boştan farklı tüm kapalı alt kümelerinin ailesi
$B(X)$	X kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X kümesinin boştan farklı tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
IR_+	Negatif olmayan reel sayıların kümesi

1. GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $f x_0 = x_0$ olacak şekilde X de bir x_0 noktası var ise bu x_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin,

$$X = [0, \infty), f x = 2x, g x = x + 1$$

şeklinde tanımlanırsa $x = 0$ noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır ancak g dönüşümünün sabit noktası yoktur. Yine $X = (0, \infty)$ alınırsa f dönüşümünün de sabit noktası olmadığı açıktır. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımladığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları, bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Boştan farklı bir küme üzerinde metrik veya boştan farklı bir kümenin iki elemanı arasındaki uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. Frechet (1906), boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerinde çalışarak, kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir sayı olması gerektiğini göstermiştir [14]. Daha sonra her bir nokta çifti için dağılım fonksiyonu kavramını vermiş ve böylece probabilistik metrik uzay kavramı ortaya çıkmıştır. Probabilistik metrik uzayda üçgen eşitsizliğinin olmaması ancak bunun yerine zayıf üçgen eşitsizliğinin kullanılması, bu uzayda alınan diziler için limit tanımının yapılamamasına neden olmuştur. Menger (1942) üçgen norm kavramından faydalanılarak probabilistik metrik uzaylar için üçgen eşitsizliği vermiş ve böylece Menger uzaylar ortaya çıkmıştır [20]. Probabilistik metrik uzay kavramının ayrıntılı incelenmesini Istratesku (1974) yapmış [16] ancak en önemli gelişim Wald (1983) tarafından Wald uzayı [40] Hicks ve Sharma (1984) tarafından Hicks uzayı [15], Radu (1994) tarafından probabilistik f-metrik uzaylar gibi birçok uzaylar [25] türetilmesinden sonra ortaya çıkmıştır. Ancak probabilistik metrik

uzaylar içinde daha çok Menger uzaylar için sabit nokta çalışmaları yapılmış ve bu çalışmalar halen devam etmektedir. Metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri için ilk sabit (Banach sabit) nokta teoremi Banach (1932) tarafından verilmiştir [8]. Küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori ise Banach sabit nokta teoreminin Nadler (1969) tarafından küme değerli dönüşümlere genellemesi ile başlamıştır. Banach sabit nokta teoremi Sehgal ve Bharucha-Reid (1972) tarafından probabilistik metrik uzaylara aktarılmış [28] ve bu çalışma, probabilistik metrik uzaylarda sabit nokta kavramı için önemli bir dönüm noktası olmuştur. Konuyla ilgili daha geniş bilgi [1,3-7] [11-12] [19,27] ve [31-38] deki çalışmalarda verilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$(i) \ d(x, y) \geq 0,$$

$$(ii) \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(iii) \ d(x, y) = d(y, x),$$

$$(iv) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartları sağlanır ise, d ye X üzerinde bir *metrik*, (X, d) ikilisine de *metrik uzay* denir. Eğer (i), (iii) ve (iv) şartları ile birlikte $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ şartı sağlanır ise, d ye X üzerinde bir *yarı metrik*, (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

2.1. Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (veya mutlak değer) metrik, $(\mathbb{R}, d)$ ikilisine de alışılmış metrik uzay denir.

2.2. Tanım

(X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisine x noktasına *yakınsaktır* denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

2.3. Tanım

(X, d) metrik uzay, (x_n) de bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda yakınsar ise, (X, d) metrik uzayına *tamdır* denir.

2.4. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $d(A) = \sup \{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$ reel sayısına A kümesinin *çapı* denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine *sınırlı küme* aksi halde *sınırsız küme* denir.

2.5. Tanım

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere X 'in boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesini $P(X)$ ile gösterelim.

$\forall x \in X$ ve $A \subset X$ için x noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıdır.

$A, B \subset X$ için A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımlardan da anlaşılacağı üzere bir x_0 noktası için $x_0 \in A$ ise $d(x_0, A) = 0$ olur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin $(\mathbb{R}, d_{l,l})$ metrik uzayında $d_{l,l}(1, (0,1)) = 0$ olmasına rağmen $1 \notin (0,1)$ dir.

2.6. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme, Y herhangi bir küme ve $P(Y)$, Y nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi olmak üzere, $F : X \rightarrow P(Y)$ dönüşümüne küme (çoğul) değerli dönüşüm denir.

2.2. Örnek

$X = Y = [0,1]$ için bir $F : X \rightarrow P(X)$ küme değerli dönüşüm, $Fx = \left[0, \frac{x}{2}\right]$ olarak tanımlanabilir.

2.7. Tanım

$F : X \rightarrow P(Y)$ küme değerli dönüşüm olmak üzere, $A \in P(X)$ için FA kümesi

$$FA = \bigcup_{a \in A} Fa$$

şeklinde tanımlanır.

$F^n(A)$ ise

$$F^n(A) = F\left(F^{n-1}(A)\right) \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanır.

2.8. Tanım

$X \neq \emptyset$, $P(X)$ de X nin alt kümelerinin ailesi olmak üzere $F : X \rightarrow P(X)$ şeklinde tanımlı F küme değerli dönüşüm için $x \in F(x)$ ise x noktasına F dönüşümünün *sabit noktası* denir. Bu sabit noktaların kümesini $Fix(F) = \{x \in X : x \in F(x)\}$ şeklinde gösteririz.

2.9. Tanım

$f : X \rightarrow X$ tek değerli bir fonksiyon olsun.

a) Eğer en az bir alt yarı sürekli $\varphi : X \rightarrow IR_+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu için

$$d(x, f(x)) + \varphi(f(x)) \leq \varphi(x)$$

koşulu sağlanıyor ise f 'ye *Caristi tipi* fonksiyondur denir.

b) Eğer en az bir $a \in [0, \frac{1}{2})$ var ve her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$

koşulu sağlanıyor ise f 'ye *Kanan tipi* fonksiyondur denir.

c) Eğer $a, b, c \in R$ ve $a + b + c < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y) + bd(x, f(x)) + cd(y, f(y))$$

koşulu sağlanıyor ise f 'ye *Ciric-Reich-Rus tipi* fonksiyondur denir.

3. METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. İki Tam Metrik Uzayda Küme Değerli İki Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda verilen tanım ve teoremler [2] de detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.1.1. Tanım

(X, d) bir tam metrik uzay ve $B(X)$ 'de X 'in sınırlı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. δ fonksiyonu $A, B \in B(X)$ için

$$\delta(A, B) = \sup \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer A tek bir elemandan oluşuyor ise $a \in A$ için,

$$\delta(A, B) = \delta(a, B) \text{ dır.}$$

Eğer B tek bir elemandan oluşuyor ise $b \in B$ için,

$$\delta(A, B) = \delta(A, b) \text{ dır.}$$

Hem A hem B tek bir elemandan oluşuyor ise

$$\delta(A, B) = \delta(a, b) = d(a, b)$$

olur.

Ayrıca δ fonksiyonu, her $A, B, C \in B(X)$ için

$$i. \delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0,$$

$$ii. \delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$$

şartlarını sağlar.

3.1.2. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $B(X)$ 'de X 'in sınırlı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. $B(X)$ deki kümelerin bir dizisi $\{A_n\}$ ve A da X in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\{A_n\}$ dizisi A kümesine *yakınsıyor* denir.

i. Her bir $a \in A$ noktasına yakınsayan en az bir $\{a_n \in A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisi vardır,

ii. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ için $A_n \subseteq A_\varepsilon$.

Burada A_ε , merkezi A kümesinde olan tüm ε yarıçaplı açık yuvarların birleşim

kümesidir. Yani $A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ dur.

Bu durumda A ya $\{A_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ veya $A_n \rightarrow A$ olarak gösterilir.

3.1.1. Lemma

(X, d) bir metrik uzay $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ ise X kümesindeki sınırlı alt kümelerin iki dizi olsun. $A, B \subset X$ kümeleri sınırlı olmak üzere sırasıyla $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizilerinin yakınsadığı kümeler olsun. Bu durumda $\{\delta(A_n, B_n)\}$ dizisi $\delta(A, B)$ reel sayısına yakınsar [13].

3.1.3. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $F : X \rightarrow B(X)$ bir dönüşüm ve $x_o \in X$ olsun. X deki noktaların bir $\{x_n\}$ dizisi X de bir x_o noktasına yakınsadığında, $B(X)$ de tanımlı $\{Fx_n\}$ dizisi de $B(X)$ de Fx_o kümesine yakınsıyor ise bu durumda F ye x_o noktasında *süreklidir* denir. Eğer F , X in her noktasında sürekli ise F ye X üzerinde *süreklidir* denir.

3.1.1. Teorem

(X, d) ve (Y, p) tam metrik uzaylar olsunlar. $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ fonksiyonları, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $f, g \in F$ olmak üzere

$$p(Tx, TSy) \leq f(d(x, Sy), p(y, Tx), p(y, TSy)),$$

$$d(Sy, STx) \leq g(p(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx))$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda ST nin X de bir u sabit noktası, TS nin Y de bir v noktası vardır. Üstelik $Tu = v$ ve $Sv = u$ dir. Buradaki F kümesi $f : IR_+^3 \rightarrow IR_+$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan tüm fonksiyonların kümesidir.

(i.) f üst yarı sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

(ii.) Her $u, v \geq 0$ için $u \leq f(v, 0, u)$ veya $u \leq f(v, u, 0)$ ise $0 \leq c < 1$

olacak şekilde bir c sabit sayısı vardır ki $u \leq cv$ dir [30].

3.1.1. Örnek

$0 < c < 1$ olmak üzere $f(t_1, t_2, t_3) = c \max\{t_1, t_2, t_3\}$ olsun.

i. f nin sürekli olduğu açıktır.

ii. Varsayalım ki $u, v \geq 0$ ve $u \leq f(v, 0, u)$ olsun. Dolayısıyla $u \leq c \max\{v, u\}$ olur.

$v \leq u$ ise $u \leq cu < u$ olur. Bu da bir çelişkidir. Buradan $u \leq cv$ olur.

3.1.2. Örnek

$f(t_1, t_2, t_3) = c \max\{t_1, t_2, t_3, b\sqrt{t_2 t_3}\}$ olsun. Burada $0 \leq b \leq 1$ ve $0 < c < 1$ dir.

i. f nin sürekli olduğunu görmek kolaydır.

ii. 1. örnekte görüldüğü gibi gösterilebilir.

3.1.3. Örnek

$f(t_1, t_2, t_3) = (\alpha t_1^p + \beta t_2^p + \gamma t_3^p)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olsun.

i. f nin sürekli olduğu açıktır.

ii. Varsayalım ki $u, v \geq 0$ ve $u \leq f(v, 0, u)$ olsun. Dolayısıyla $u \leq (\alpha v^p + \gamma u^p)^{\frac{1}{p}}$

olur. Buradan,

$$u \leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} \nu \text{ olur. Dolayısıyla}$$

$$c_1 = \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} < 1 \text{ olarak alınabilir.}$$

Benzer olarak eğer $u \leq f(\nu, u, 0)$ ise $u \leq c_2 \nu$, buradan;

$$c_2 = \left(\frac{\alpha}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{p}} < 1 \text{ olarak seçilebilir.}$$

$$c = \max \{c_1, c_2\} < 1 \text{ olarak alabiliriz.}$$

Aşağıdaki teorem, iki tam metrik uzayda tanımlı iki küme değerli dönüşüm için sabit nokta teoremidir.

3.1.2. Teorem

(X, δ_1) ve (Y, δ_2) tam metrik uzaylar olsunlar. $T: X \rightarrow B(Y)$ ve $S: Y \rightarrow B(X)$ iki fonksiyon olsun. Her $x, x' \in X$ ve $y, y' \in Y$ ler için;

$$\delta_1(STx, STx') \leq f(\delta_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), \delta_1(x', STx')), \quad (2.1)$$

$$\delta_2(TSy, TSy') \leq g(\delta_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), \delta_2(y', TSy')) \quad (2.2)$$

şartları sağlansın. Burada $f, g \in F$, S veya T sürekli ise ST , X de bir u sabit noktasına TS ise Y de bir ν sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Tu = \{\nu\}$ ve $S\nu = \{u\}$ olur.

İspat

$x_1 \in X$ keyfi bir nokta olsun. X ve Y kümeleri üzerinde sırasıyla $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini tanımlayalım. Tx_1 kümesinden bir y_2 noktasını, Sy_2 kümesinden x_2 noktasını, Tx_2 noktasından y_3 noktasını, Sy_3 kümesinden x_3 noktasını seçelim. Bu şekilde devam ederek x_n leri X kümesinden, y_{n+1} leri Y kümesinden seçelim.

Tx_n kümesinden y_{n+1} noktasını, Sy_{n+1} kümesinden x_{n+1} noktasını seçelim.

Eş. 2.1' den,

$$\begin{aligned} d_1(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \delta_1(STx_n, STx_{n+1}) \\ &\leq f(\delta_2(Tx_n, Tx_{n+1}), d_1(x_{n+1}, STx_n), \delta_1(x_{n+1}, STx_{n+1})) \\ &\leq f(\delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}), 0, \delta_1(STx_n, STx_{n+1})) \end{aligned}$$

(ii) den,

$$\delta_1(STx_n, STx_{n+1}) \leq c\delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}). \quad (2.3)$$

Eş. 2.2' i kullanarak,

$$\begin{aligned} d_2(y_{n+1}, y_{n+2}) &\leq \delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}) \\ &\leq g(\delta_1(Sy_n, Sy_{n+1}), d_2(y_{n+1}, TSy_n), \delta_2(y_{n+1}, TSy_{n+1})) \\ &\leq g(\delta_1(STx_{n-1}, STx_n), 0, \delta_2(TSy_n, TSy_{n+1})). \end{aligned}$$

(ii) den

$$\delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}) \leq c\delta_1(STx_{n-1}, STx_n). \quad (2.4)$$

Eş.2.3 ve 2.4' den

$$\delta_1(STx_n, STx_{n+1}) \leq c^2\delta_1(STx_{n-1}, STx_n).$$

Devamın da ise tümevarımla,

$$d_1(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq c^{2n-2}\delta_1(STx_1, STx_2),$$

$$d_2(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq c^{2n-3}\delta_2(TSy_1, TSy_2).$$

$r = 1, 2, \dots$ için ,

$$\begin{aligned} d_1(x_{n+1}, x_{n+r+1}) &\leq d_1(x_{n+1}, x_{n+2}) + d_1(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + d_1(x_{n+r}, x_{n+r+1}) \\ &\leq (c^{2n-2} + c^{2n} + c^{2n+2} + \dots + c^{2(n+r+1)})\delta_1(STx_1, STx_2) \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > n_0$ için $c < 1$ olduğundan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla tam metrik uzay olan X ve Y de birer Cauchy dizileridir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u \quad u \in X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = v \quad v \in Y$$

olur. Üstelik $m > n$ için,

$$\delta_1(u, STx_n) \leq d_1(u, x_{m+1}) + \delta_1(x_{m+1}, STx_n)$$

$$\leq d_1(u, x_{m+1}) + \delta_1(STx_m, STx_n) . \quad (2.6)$$

Eş. 2.5' ten dolayı $m, n \geq n_0$ için,

$$\delta_1(u, STx_n) \leq d_1(u, x_{m+1}) + \varepsilon$$

olur. $n > N$ ve $m \rightarrow \infty$ için

$$\delta_1(u, STx_n) \leq \varepsilon$$

olur dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} STx_n = \{u\}$ olur. (ε keyfi seçilmiştir.)

Benzer olarak ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} TSy_{n+1} = \{v\} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$$

olur. Burada $x_{n+1} \in Sy_{n+1}$ olduğunu daha önceden biliyoruz. Kabul edelim ki T sürekli olsun,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tu = \{v\}$$

olur.

Eş. 2.1' den,

$$\delta_1(STu, STx_n) \leq f(\delta_2(Tu, Tx_n), d_1(x_n, Sv), \delta_1(x_n, STu))$$

$n \rightarrow \infty$ olarak alınırsa,

$$\delta_1(STu, u) \leq f(0, d_1(u, STu), 0) \leq f(0, \delta_1(u, STu), 0).$$

(ii) den dolayı,

$$\delta_1(u, STu) \leq c\delta_1(u, STu)$$

olur. Ayrıca, $STu = \{u\} = Sv$ olur. Üstelik $TSv = Tu = \{v\}$ dolayısıyla u , ST fonksiyonunun, v ise TS fonksiyonunun sabit noktalarıdır.

T yerine S fonksiyonunu sürekli olarak kabul edersek aynı sonuçları elde edilir.

Bu sabit noktaların tekliğini ispat için kabul edelim ki ST ikinci bir u' sabit noktasına, TS de ikinci bir v' sabit noktasına sahip olsun.

Eş. 2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d_2(v, v') &= \delta_2(TSv, TSv') \\ &\leq g(\delta_1(Sv, Sv'), d_2(v', TSv), \delta_2(v', TSv')) \\ &= g(\delta_1(Sv, Sv'), d_2(v', v), 0) \\ &\leq g(\delta_1(Sv, Sv'), d_2(v', v), 0). \end{aligned}$$

(ii) den,

$$d_2(v, v') \leq c\delta_1(Sv, Sv'). \quad (2.7)$$

Eş. 2.1 kullanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_1(Sv, Sv') &\leq \delta_1(STSv, STSv') \\
&\leq f(d_2(v, v'), d_1(Sv', Sv), \delta_1(Sv', Sv')) \\
&\leq f(d_2(v, v'), \delta_1(Sv', Sv), \delta_1(Sv', Sv')) .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Benzer olarak,

$$\delta_1(Sv', Sv') \leq \delta_1(Sv', STSv') \leq f(0, 0, \delta_1(Sv', Sv')) .$$

(ii) den

$$\delta_1(Sv', Sv') = 0 .$$

Eş. 2.8'den,

$$\delta_1(Sv, Sv') \leq f(d_2(v, v'), \delta_1(Sv', Sv), 0) .$$

(ii) den,

$$\delta_1(Sv, Sv') \leq c d_2(v, v') . \tag{2.9}$$

Eş.2.7 ve 2.9' dan,

$$d_2(v, v') \leq c^2 d_2(v, v')$$

olur. Dolayısıyla $v = v'$ olur yani tek bir v noktası vardır.

$STu' = \{u'\}$ ve $TSv = \{v\}$ olması $TSTu' = Tu' = \{v\}$ anlamına gelir. Dolayısıyla

$$\{u\} = STu = Sv = STu' = \{u'\}.$$

Sonuç olarak u tektir. Teoremin ispatı böylelikle tamamlanmış olur.

Eğer $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ ise aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

3.1.1. Sonuç

(X, d_1) ve (Y, d_2) tam metrik uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ iki fonksiyon olsun.

$\forall x \in X$ ve $y \in Y$ ve $f, g \in F$ için

$$d_1(STx, STx') \leq f(d_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), d_1(x', STx')), \quad (2.10)$$

$$d_2(TSy, TSy') \leq g(d_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), d_2(y', TSy')) \quad (2.11)$$

koşulları sağlansın. Eğer S veya T fonksiyonlarından herhangi biri sürekli ise ST , bir tek $u \in X$ sabit noktasına ve TS de bir tek $v \in Y$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Tu = v$ ve $Sv = u$ dir.

Eğer $f(t_1, t_2, t_3) = g(t_1, t_2, t_3) = c \max\{t_1, t_2, t_3\}$, $0 < c < 1$ olarak alınırsa 3.1.2 teorem den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

3.1.2. Sonuç

(X, δ_1) ve (Y, δ_2) tam metrik uzay, $T : X \rightarrow B(Y)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ve $S : Y \rightarrow B(X)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in X$ ve $y \in Y$ ve $0 < c < 1$ için

$$\delta_1(STx, STx') \leq c \max\{\delta_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), \delta_1(x', STx')\},$$

$$\delta_2(TSy, TSy') \leq c \max \{ \delta_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), \delta_2(y', TSy') \}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda ST nin X 'de bir tek sabit u ve TS nin Y 'de bir tek v sabit noktaları vardır. Üstelik $Tu = \{v\}, Sv = \{u\}$ dir.

Eğer burada $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ olarak alınırsa aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

3.1.3. Sonuç

(X, δ_1) ve (X, δ_2) tam metrik uzaylar, $T : X \rightarrow B(Y)$ ve $S : Y \rightarrow B(X)$ sürekli fonksiyonlar olsun. $\forall x \in X$ ve $y \in Y$ ve $0 < c < 1$ için

$$d_1(STx, STx') \leq c \max \{ d_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), d_1(x', STx') \},$$

$$d_2(TSy, TSy') \leq c \max \{ d_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), d_2(y', TSy') \}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda ST nin X 'de tek bir sabit u noktası, TS nin ise Y 'de bir tek sabit v noktası vardır. Üstelik $Tu = v$ ve $Sv = u$ olur.

3.2. Üç Tam Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde farklı üç metrik uzayda tanımlı üç fonksiyonun bileşkelerinin hangi koşullar altında bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ve bu sabit noktanın hangi koşulları sağladığını inceleyeceğiz. Bu kısımda verilen tanım ve teoremler [39] da detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.2.1. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzaylar ve $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ ve $R : Z \rightarrow X$ fonksiyonları $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$ ve $0 \leq c < 1$ sayısı için

$$d(RSy, RSTx) \max \{d(x, RSy), d(x, RSTx)\} \leq c\sigma(Sy, STx) \max \{\sigma(Sy, STx), d(x, RSTx)\},$$

$$p(TRz, TRSy) \max \{p(y, TRz), p(y, TRSy)\} \leq cd(Rz, RSy) \max \{d(Rz, RSy), p(y, TRSy)\},$$

$$\sigma(STx, STRz) \max \{\sigma(z, STx), \sigma(z, STRz)\} \leq cp(Tx, TRz) \max \{p(Tx, TRz), \sigma(z, STRz)\}$$

koşullarını sağlasın. Eğer R, S, T fonksiyonlarından biri sürekli ise RST nin X de bir tek sabit u noktası, TRS nin Y de bir tek sabit v noktası ve STR nin Z de bir tek w sabit noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ dur [18].

3.2.2. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzaylar ve $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ ve $R : Z \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$ ve $0 \leq c < 1$ için

$$d(RSTx, RSy) \leq c \max \{p(y, Tx), d(x, RSTx), d(x, RSy), \sigma(Sy, STx)\},$$

$$p(TRSy, TRz) \leq c \max \{\sigma(z, Sy), p(y, TRSy), p(y, TRz), d(Rz, RSy)\},$$

$$\sigma(SRSz, STx) \leq c \max \{d(x, Rz), \sigma(z, STRz), \sigma(z, STx), p(Tx, TRz)\}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda RST nin X de bir tek u sabit noktası, TRS nin Y de bir tek v sabit noktası ve STR nin Z de bir tek w sabit noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ dur.

IR_+ ile negatif olmayan reel sayıların kümesini ve aşağıdaki koşulları sağlayan $f : IR_+^3 \rightarrow IR_+$ fonksiyonlarının kümesini ise μ ile göstereceğiz.

i. Tüm $x \in R$ için f üst yarı sürekli,

ii. Tüm $u, v \geq 0$ için $u \leq f(v, 0, u)$ veya $u \leq f(v, u, 0)$ ise

en az bir $0 \leq c < 1$ sabit sayısı için $u \leq cv$ dir [21].

Şimdi 3.2.1 Teorem nin bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.3. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzaylar ve $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ ve $R : Z \rightarrow X$ fonksiyonları $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$ için ve $f, g, h \in \mu$ olmak üzere

$$d(RSy, RSTx) \leq f(\sigma(Sy, STx), d(x, RSTx), d(x, RSy)), \quad (2.1)$$

$$p(TRz, TRSy) \leq g(d(Rz, RSy), p(y, TRSy), p(y, TRz)), \quad (2.2)$$

$$\sigma(STx, STRz) \leq h(p(Tx, TRz), \sigma(z, STRz), \sigma(z, STx)) \quad (2.3)$$

koşullarını sağlasın. Eğer T, S, R fonksiyonlarının herhangi biri sürekli ise RST nin X de bir tek sabit u noktası, TRS nin Y de bir tek sabit v noktası ve STR nin Z de bir tek sabit w noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ dur.

İspat

$x_o \in X$ keyfi bir nokta olsun. X, Y ve Z 'de sırasıyla $\{x_n\}, \{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerini $n = 1, 2, \dots$ için

$$x_n = (RST)^n x_o, \quad y_n = Tx_{n-1}, \quad z_n = Sy_n$$

şeklinde tanımlayalım.

Eş. 2.1' de $y = y_n$ ve $x = x_n$ olarak alınır ise;

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq f(\sigma(z_n, z_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), 0)$$

dır. (ii) den dolayı, $c_1 \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c_1 \sigma(z_n, z_{n+1}). \quad (2.4)$$

Eş. 2.3' de $x = x_{n-1}$ ve $z = z_n$ alınırsa,

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq h(p(y_n, y_{n+1}), \sigma(z_n, z_{n+1}), 0)$$

(ii) den,

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c_3 p(y_n, y_{n+1}). \quad (2.5)$$

Burada $c_3 \in [0, 1)$ dir.

$z = z_{n-1}$ ve $y = y_n$ için Eş. 2.2 uygulanırsa,

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq g(d(x_{n-1}, x_n), p(y_n, y_{n+1}), 0)$$

olur. (ii) den,

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq c_2 d(x_{n-1}, x_n) \quad (2.6)$$

olur. Burada $c_2 \in [0, 1]$ dır. (2.4), (2.5) ve (2.6) eşitsizlikleri ardı ardına yazılırsa

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c_1 \sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c_1 c_3 p(y_n, y_{n+1}) \leq \dots \leq (c_1 c_2 c_3)^n d(x_0, x_1).$$

$0 \leq c_1 c_2 c_3 < 1$, $\{x_n\}, \{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ birer couchy dizisi olduğundan sırasıyla $u \in X, v \in Y$ ve $w \in Z$ noktalarına yakınsar.

Şimdi kabul edelim ki S sürekli olsun. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} S y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ve dolayısıyla

$$S v = w \quad (2.7)$$

olur. Eş. 2.1 uygulanırsa,

$$d(RS v, x_{n-1}) \leq f(\sigma(S v, z_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, RS v)).$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (i) koşulundan,

$$d(RS v, u) \leq f(\sigma(S v, w), 0, d(u, RS v))$$

2.7 denkleminde,

$$d(RS v, u) \leq f(0, 0, d(u, RS v))$$

(ii) koşulundan $d(u, RS_\nu) \leq c.0$ ve Eş.(2.7) den,

$$u = RS\nu = Rw . \quad (2.8)$$

Eş. 2.2' den,

$$p(Tu, y_{n+1}) \leq g(d(u, x_n), p(y_n, y_{n+1}), p(y_n, TRw)) .$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (i) koşulundan,

$$p(Tu, \nu) \leq g(0, 0, p(\nu, TRw)) .$$

Eş.2.8' den,

$$p(Tu, \nu) \leq g(0, 0, p(\nu, Tu)) .$$

(ii) koşulundan,

$$Tu = \nu \quad (2.9)$$

olur. Eş. 2.7 , 2.8 ve 2.9' dan,

$$TRS\nu = TRw = Tu = \nu ,$$

$$STRw = STu = S\nu = w ,$$

$$RSTu = RS\nu = Rw = u .$$

S yerine R veya T sürekli ise aynı sonuçlar elde edilir.

Şimdi u sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki RST 'nin ikinci bir sabit noktası u' olsun.

Eş. 2.1' den,

$$d(RSTu, RSTu') \leq f(\sigma(STu', STu), d(u, RSTu), d(u, RSTu'))$$

$$d(u, u) \leq f(\sigma(STu, STu'), 0, d(u, u')) .$$

(ii) den,

$$d(u, u') \leq c_1 \sigma(STu, STu') \quad (2.10)$$

olur. Eş. 2.3' den,

$$\sigma(STRSTu, STu') \leq h(p(Tu', TRSTu), 0, \sigma(STu, STu'))$$

$$\sigma(STu, STu') \leq h(p(Tu', Tu), 0, \sigma(STu, STu')) .$$

(ii) den,

$$\sigma(STu, STu') \leq c_2 p(Tu, Tu') . \quad (2.11)$$

Eş. 2.2' den,

$$p(Tu, Tu') \leq c_2 d(u, u') . \quad (2.12)$$

Eş. 2.10, 2.11 ve 2.12' den

$$d(u, u') \leq (c_1 c_2 c_3) d(u, u')$$

olur. Buradan anlaşılacağı gibi $u = u'$ dür. RST nin sabit noktası olan u tektir. Aynı şekilde TRS nin bir tek sabit noktasının v , STR nin bir tek noktasının w olduğu gösterilebilir.

Eğer $0 \leq c < 1$ olmak üzere,

$$f(t_1, t_2, t_3) = g(t_1, t_2, t_3) = h(t_1, t_2, t_3) = \frac{ct_1 \max\{t_1, t_2\}}{\max\{t_2, t_3\}}$$

olarak alınırsa Teorem 3.2.1.'i Teorem 3.2.3.'ün sonucu olarak görebiliriz.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $f: IR_+^4 \rightarrow IR_+$ fonksiyonların kümesini $\mathfrak{F}$ ile gösterelim.

(iii) f üst yarı sürekli,

(iv) Eğer her $u, v \geq 0$ için $u \leq f(v, u, 0, w)$ veya $u \leq f(v, 0, u, w)$ ise,

en az bir $0 \leq c < 1$ reel sayısı vardır ki $u \leq c \max\{v, w\}$.

Teorem 3.2.2 yi aşağıdaki gibi genelleyebiliriz.

3.2.4. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow Y, S: Y \rightarrow Z$ ve $R: Z \rightarrow X$ fonksiyonları tüm $x \in X, y \in Y$ ve $z \in Z$ için ve $f, g, h \in \mathfrak{F}$ olmak üzere

$$d(RSTx, RSy) \leq f(p(y, T_x), d(x, RST_x), d(x, RS_y), \sigma(S_y, ST_x)), \quad (2.13)$$

$$p(TRz, TRSy) \leq g(\sigma(z, Sy), p(y, TRSy), p(y, TRz), d(Rz, RSy)), \quad (2.14)$$

$$\sigma(STRz, STx) \leq h(d(x, Rz), \sigma(z, STRz), \sigma(z, STx), p(Tx, TRz)) \quad (2.15)$$

koşullarını sağlasın. Eğer R, S, T fonksiyonlarından herhangi biri sürekli ise RST 'nin X 'de bir tek u sabit noktası, TRS 'nin Y 'de bir tek v sabit noktası, STR 'nin Z 'de bir tek w sabit noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ olur.

İspat

$x_o \in X$ keyfi bir nokta olsun. X, Y, Z 'de sırasıyla $\{x_n\}, \{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerini tanımlayalım öyle ki;

$$x_n = (RST)^n x_o, y_n = T_{x_{n-1}}, z_n = Sy_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eş. 2.14'den ve (iv) özelliğinden $z = z_{n-1}$ ve $y = y_n$ için

$$p(y_n, y_{n+1}) = p(TRz_{n-1}, TRSy_n) \leq g(\sigma(z_{n-1}, z_n), p(y_n, y_{n+1}), 0, d(x_{n-1}, x_n))$$

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq c \max \{d(x_{n-1}, x_n), \sigma(z_{n-1}, z_n)\}. \quad (2.16)$$

(iv) ve Eş. 2.16' dan ,

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c \max \{d(x_{n-1}, x_n), p(y_n, y_{n+1})\} \quad (2.17)$$

$$\leq c \max \{d(x_{n-1}, x_n), \sigma(z_{n-1}, z_n)\}$$

Eş. 2.13' de $y = y_n$ ve $x = x_n$

olarak alınırsa

$$d((x_n, x_{n+1}) = d(RSTx_n, RSy_n) \leq f(p(y_n, y_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), 0, \sigma(z_n, z_{n+1}))$$

(iv) özelliğinden ve Eş. 2.16 ve 2.17 'den

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq c \max \{ p(y_n, y_{n+1}), \sigma(z_n, z_{n+1}) \} \\ &= c \max \{ d(x_{n-1}, x_n), \sigma(z_{n-1}, z_n) \} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tümevarımla kolaylıkla 2.16 , 2.17 ve 2.18 koşullarından ,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1} \max \{ d(x_1, x_2), \sigma(z_1, z_2) \} ,$$

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq c^{n-1} \max \{ d(x_1, x_2), \sigma(z_1, z_2) \} ,$$

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c^{n-1} \max \{ d(x_1, x_2), \sigma(z_1, z_2) \}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Burada $0 \leq c < 1$ olduğundan $\{X_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ birer cauchy dizisidir ve sırasıyla limitleri $u \in X$, $v \in Y$ ve $w \in Z$ noktalarıdır.

Şimdi farz edelim ki S sürekli olsun. Bu durumda $\lim Sy_n = \lim z_n$ dolayısıyla,

$$Sv = w \quad (2.19)$$

olur. Eş. 2.13'den $y = v$ $x = x_n$ için,

$$d(RSv, x_{n+1}) \leq f(p(v, Tx_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, RSv), v(Sv, STx_n)) .$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (iii) özelliğinden,

$$d(RS\nu, u) \leq f(0, 0, d(RS\nu, u), 0),$$

(iv) özelliğinden $d(RS\nu, u) = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$RS\nu = u \tag{2.20}$$

olarak bulunur.

2.19 denkleminde,

$$Rw = u \tag{2.21}$$

eşitliğini yazabiliriz.

2.20 denkleminde ve Eş. 2.14' den $z = S\nu$ ve $y = y_n$ için

$$P(Tu, y_{n+1}) \leq g(\sigma(S\nu, Sy_n), P(y_n, TRSy_n), p(y_n, TRS\nu), d(RS\nu, RSy_n)).$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (iii) özelliğinden,

$$p(Tu, \nu) \leq g(0, 0, p(\nu, Tu), 0).$$

(iv) özelliğinden $p(Tu, \nu) = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$Tu = \nu. \tag{2.22}$$

2.19, 2.21 ve 2.22 denklemlerinden,

$$TRS\nu = TRw = Tu = \nu,$$

$$STRw = STu = Sv = w,$$

$$RSTu = RSv = Rw = u.$$

Benzer sonuca S yerine R veya T sürekli olarak kabul edilerek aynı yolla ulaşabiliriz.

Şimdi u' 'nin tekliği ispat edelim. Farz edelim ki RST 'nin ikinci bir sabit noktası u' olsun. Eş.2.13'den $y = Tu$ ve $x = u'$ için

$$d(u, u') = d(RSTu, RSTu') \leq f(p(Tu, Tu'), 0, d(u, u'), \sigma(STu, STu')).$$

(ii) den,

$$d(u, u') \leq c \max \{ p(Tu, Tu'), \sigma(STu, STu') \}. \quad (2.23)$$

Üstelik Eş. 2.14' den $z = STu$ ve $y = Tu'$ için

$$p(Tu, Tu') \leq g(\sigma(STu, STu'), 0, p((Tu, Tu'), d(u, u'))).$$

(ii) den,

$$p(Tu, Tu') \leq c \max \{ \sigma(STu, STu'), d(u, u') \}. \quad (2.24)$$

Eş. 2.23 ve 2.24' den

$$d(u, u') \leq c \sigma(STu, STu'). \quad (2.25)$$

Son olarak Eş. 2.15' den ve (ii) özelliğinden,

$$\sigma(STu, STu') \leq h(d(u, u'), 0, \sigma(STu, STu'), p(Tu, Tu')).$$

(ii) den

$$\sigma(STu, STu') \leq c \max \{d(u, u'), p(Tu, Tu')\}. \quad (2.26)$$

Eş.(2.24), (2.25) ve (2.26) dan

$$d(u, u') \leq c\sigma(STu, STu') \leq c^2\sigma(STu, STu'),$$

dolayısıyla $u = u'$ olur. Burada $0 \leq c < 1$ dir. Sonuç olarak RST 'nin bir tek sabit u noktası vardır. Benzer olarak TRS 'nin bir tek sabit v noktası, STR 'nin bir tek sabit w noktası olduğunu gösterebiliriz.

Burada $0 \leq c < 1$ için,

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = g(t_1, t_2, t_3, t_4) = h(t_1, t_2, t_3, t_4) = c \max \{t_1, t_2, t_3, t_4\},$$

olarak tanımlanırsa 3.2.2 Teorem ne 3.2.4 Teorem nin sonucu olarak bakabiliriz.

3.3. Bir Kapalı (implicit) Bağlantıyı Sağlayan Küme Değerli Dönüşüm İçin Bir Genel Seçme Teoremi

Bu kısımda bir küme değerli fonksiyon için verilen kapalı bir bağlantı sağlandığında verilen koşulları sağlayan tek değerli bir Caristi tipi fonksiyonun seçilebileceği üzerinde durulmuştur. Bu bölümdeki tanım ve teoremler [24] de detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.3.1. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve X 'in boştan farklı alt kümelerinin uzayı $P(X)$ olsun. X 'in boştan farklı kapalı alt kümelerinin uzayı $Pcl(X)$ ile gösterilir.

$$D : P(X) \times P(X) \rightarrow IR_+, \quad D(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$H : P(X) \times P(X) \rightarrow IR_+ \cup \{+\infty\}, \quad H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} D(a, B), \sup_{b \in B} D(b, A) \right\}$$

fonksiyonlarını dikkate alarak aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Eğer (X, d) tam metrik uzay ise $(Pcl(x), H)$ de tam metrik uzaydır.

3.3.1. Teorem

(X, d) bir metrik uzay ve $F : X \rightarrow Pcl(X)$ küme değerli fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır, öyle ki her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ dir [17].

3.3.2. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $F : X \rightarrow Pcl(X)$ $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ $a + b + c < 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için $H(F(x), F(y)) \leq ad(x, y) + bD(x, F(x)) + cD(y, F(y))$ koşulu sağlansın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyonu vardır [22].

3.3.3. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $F : X \rightarrow Pcl(X)$, $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}_+$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 < 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$H(F(x), F(y)) \leq a_1 d(x, y) + a_2 D(x, F(x)) + a_3 D(y, F(y)) + a_4 D(x, F(y)) + a_5 D(y, F(x)),$$

koşulu sağlansın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyonu vardır [29].

3.3.4. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $F : X \rightarrow Pcl(X)$ çok değerli fonksiyonu $0 < q < 1$ için

$$H(F(x), F(y)) \leq q \max \{d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))\},$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde bir Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyonu vardır [23].

Aşağıdaki koşulları sağlayan $F(t_1, \dots, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonların kümesini $\mathcal{W}$ ile gösterelim.

(F_1) F, t_1 değişkenine göre azalmayan, t_3 ve t_5 için artmayan,

(F_2) her $u, v > 0$ için $F(u, v, v, u, v, 0) \leq 0$ olmak üzere en az bir $h \in (0, 1)$ vardır öyle ki $u \leq hv$.

3.3.1. Örnek

$F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - a_1 t_2 - a_2 t_3 - a_3 t_4 - a_4 t_5 - a_5 t_6$, burada

$a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R}_+, a_1 + a_2 + a_4 > 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 < 1$

(F_1) koşulun sağlandığı açıktır.

$$F(u, v, v, u, u + v, 0) = u - a_1 v - a_2 v - a_3 u - a_4 (u + v) \leq 0$$

$$u - a_4 u - a_3 u \leq a_1 v + a_2 v + a_4 v$$

$$u(1 - a_4 - a_3) \leq v(a_1 + a_2 + a_4)$$

$$u \leq \frac{(a_1 + a_2 + a_4)}{(1 - a_4 - a_3)} v$$

$$h = \frac{(a_1 + a_2 + a_4)}{1 - a_4 - a_3} \text{ denilirse } h \in (0, 1) \text{ dir.}$$

3.3.2. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - k \max \left\{ t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}(t_5 + t_6) \right\}, \quad 0 < k < 1$$

(F_1) koşulun sağlandığı açıktır.

$$(F_2) F(u, v, v, u, u + v, 0) = u - k \max \left\{ u, v, \frac{1}{2}(u + v) \right\} \leq 0 \text{ olsun. Eğer } u > 0 \text{ } u \geq v \text{ ise}$$

$u(1 - k) \leq 0$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $u < v$ olur. Buradan görüldüğü üzere $u < hv$ dir.

3.3.3. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = t_1^2 + at_1t_2 - bt_3t_4 - ct_5t_6 \quad a, c \geq 0 \quad \text{ve} \quad 0 < b < 1$$

(F_1) koşulunun sağlandığı görülür.

$$(F_2) \quad F(u, v, v, u, u+v, 0) = u^2 + auv - buv \leq 0 \quad \text{olsun.}$$

Buradan $u^2 - buv \leq 0$ olduğu açıktır. Eğer $u > 0$ ise

$$u^2 \leq buv$$

$$u \leq bv,$$

burada $0 < b < 1$ Eğer $u = 0$ ise $u \leq bv$.

3.3.4. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = t_1^2 + \frac{t_1}{1+t_5+t_6} - (at_2^2 + bt_3^2 + ct_4^2) \quad \text{burada} \quad a, b, c \geq 0, \quad a+b > 0 \quad \text{ve}$$

$$a+b+c < 1.$$

(F_1) koşulun sağlandığı tanımdan görülür.

$$(F_2) \quad F(u, v, v, u, u+v, 0) = u^2 + \frac{u}{1+u+v} - (av^2 + bv^2 + cu^2) \leq 0 \quad \text{olsun. Buradan;}$$

$$u^2 - (av^2 + bv^2 + cu^2) \leq 0$$

$$u^2 - cu^2 - (av^2 + bv^2) \leq 0$$

$$u^2(1-c) \leq v^2(a+b)$$

$$u^2 \leq \frac{a+b}{1-c} v^2$$

$$u \leq \sqrt{\frac{a+b}{1-c}} v$$

$$0 < h = \sqrt{\frac{a+b}{1-c}} < 1 \text{ için } u \leq hv \text{ olur.}$$

3.3.5. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = \max\{t_1, t_2, t_4\} - \min\{t_5, t_6\} - qt_3 \text{ burada } 0 < q < 1.$$

(F_1) Koşulun sağlandığı kolayca görülür.

$$(F_2) \quad F(u, v, v, u, u+v, 0) = \max\{u, v\} - qv \leq 0 \text{ olsun.}$$

Eğer $u > 0$ ve $u > v$ ise,

$$\max\{u, v\} - qv \leq 0$$

$$u - qu \leq 0 (u > v)$$

$$u(1-q) \leq 0$$

olur. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $u < v$ ve $0 < h = q < 1$ için $u \leq hv$ olur.

3.3.5. Teorem

(X, d) bir metrik uzay ve $F : X \rightarrow Pcl(X)$ küme değerli bir fonksiyon, $\Phi \in \mathcal{P}$ ve her $x, y \in X$ için

$$\Phi(H(F(x), F(y)), d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))) \leq 0, \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde bir Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır.

İspat

$$\varepsilon = \frac{1-h}{2} \text{ ve } g(x) = \frac{1}{\varepsilon} D(x, F(x)) \text{ olsun.}$$

Buradan ,

$$\varepsilon + h = \frac{1+h}{2} < 1$$

olduğu açıktır. Buradan $\frac{1}{\varepsilon + h} > 1$ dır. Böylece her $x \in X$ için,

$$d(x, f(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon + h} D(x, F(x))$$

olacak şekilde $f(x) \in F(x)$ seçilebilir.

Eş. 3.1' den ve (F_1) den,

$$\Phi(H(F(x), F(f(x))), d(x, f(x)), D(x, F(x)), D(f(x), F(f(x))),$$

$$D(x, F(f(x))), D(f(x), F(x))) \leq 0 ,$$

$$\Phi(D(f(x), F(f(x))), d(x, f(x)), d(x, f(x)), D(f(x), F(f(x))),$$

$$d(x, f(x)) + D(f(x), F(f(x))), 0) \leq 0.$$

(F_2) den her $x \in X$ için,

$$D(f(x), F(f(x))) \leq h d(x, f(x)) .$$

Şimdi f 'in bir Caristi tipi operatör olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ için,

$$d(x, f(x)) = \frac{1}{\varepsilon} [(\varepsilon + h)d(x, f(x)) - hd(x, f(x))]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} [D(x, F(x)) - D(f(x), F(f(x)))]$$

$$= g(x) - g(f(x)) .$$

4. Menger Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

4.1. Menger Uzaydaki Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda verilen tanım ve teoremler [10] da detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1.1. Tanım

$F : IR \rightarrow IR^+$, azalmayan soldan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\inf \{F(t) : t \in IR\} = 0$ ve $\sup \{F(t) : t \in IR\} = 1$ şartları sağlansın bu durumda F fonksiyonuna *dağılım* fonksiyonu denir.

Tüm dağılım fonksiyonlarının kümesini L ile gösterelim. G ile gösterilen özel bir dağılım fonksiyonu,

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

4.1.2. Tanım

X boştan farklı bir küme ve F , $X \times X$ 'den IR 'de tanımlı tüm dağılım fonksiyonlarının kümesine tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (X, F) ikilisine *probabilistik metrik uzay (PM-space)* denir.

Burada her $x, y \in X$ için $F(xy)$ dağılım fonksiyonunu $F_{x,y}$ ve $u \in IR$ için $F(xy)$ 'nin aldığı değeri ise $F_{x,y}(u)$ şeklinde temsil edilir.

Ayrıca $F_{x,y}$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar.

(1) $F_{x,y}(u) = 1$ dir. Her $u > 0$ için ancak ve ancak $x = y$ ise,

(2) $F_{x,y}(0) = 0$, her $x, y \in X$ için,

(3) $F_{x,y}(u) = F_{y,x}(u)$ her $x, y \in X$ için,

(4) Eğer $F_{x,y}(u) = 1$ ve $F_{y,z}(v) = 1$ ise $F_{x,z}(u+v) = 1$ dir her $x, y, z \in X$ ve

$u, v > 0$ için,

4.1.3. Tanım

$t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t -norm olarak adlandırılır. Eğer;

(1) $t(a,1) = a, t(0,0) = 0$,

(2) $t(a,b) = t(b,a)$,

(3) $t(c,d) \geq t(a,b)$ dir $c \geq a$ ve $d \geq b$ için,

(4) $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))$.

4.1.4. Tanım

$(X, \mathbf{F})$ bir PM -uzay, t ise bir t -norm olmak üzere her $x, y, z \in X$ ve $u, v > 0$ için

$$F_{x,y}(u+v) \geq t(F_{x,y}(u), F_{y,z}(v))$$

genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği sağlanır ise $(X, \mathbf{F}, t)$ üçlüsüne *Menger* uzay denir.

Menger uzaylarda komşuluk kavramı Schweizer ve Sklar tarafından ortaya atılmıştır [26].

4.1.5. Tanım

(X, F, t) bir Menger uzay olsun. Eğer $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ ise x 'in (ε, λ) komşuluğu $U_x(\varepsilon, \lambda)$ olarak gösterilir ve

$$U_x(\varepsilon, \lambda) = \{y \in X : F_{x,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

olarak tanımlanır.

X 'de bir (ε, λ) topolojisi ise $\{U_x(\varepsilon, \lambda) : x \in X, \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)\}$ komşuluklar ailesi tarafından üretilir.

4.1.1. Uyarı

Eğer t sürekli ise (X, F, t) Menger uzayı (ε, λ) topolojisine göre *Hausdorff* uzaydır [26].

4.1.6. Tanım

(X, F, t) tam Menger uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer;

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \inf_{x,y \in A} F_{x,y}(u) = 1$$

ise A 'ya *sınırlı* küme denir.

4.1.7. Tanım

$B(X)$ ile X Menger uzayının boştan farklı sınırlı alt kümelerinin ailesini gösterelim.

Her $A, B \in B(X)$ ve her $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{A,B}(u) = \inf \{F_{x,y}(u) : x \in A, y \in B\},$$

$${}_DF_{A,B}(u) = \sup \{F_{x,y}(u) : x \in A, y \in B\},$$

$${}_HF_{A,B}(u) = \inf \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} F_{a,b}(u) \right\}$$

olarak tanımlanır.

4.1.2. Uyarı

Yapılan tanımdan açık olarak görülüyor ki her $A, B \in B(X)$ ve $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{A,B}(u) = {}_{\delta}F_{B,A}(u), \quad {}_DF_{A,B}(u) = {}_DF_{B,A}(u) \text{ ve } {}_HF_{A,B}(u) = {}_HF_{B,A}(u)$$

olur. Eğer $A = \{x\}$ ise ,

$${}_{\delta}F_{\{x\},B}(u) = {}_{\delta}F_{x,B}(u), \quad {}_DF_{\{x\},B}(u) = {}_DF_{x,B}(u) \text{ ve } {}_HF_{\{x\},B}(u) = {}_HF_{x,A}(u)$$

olarak tanımlanır.

4.1.8. Tanım

(X, F, t) tam Menger uzay, $S : X \rightarrow B(X)$ küme değerli bir fonksiyon ve $I : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyon olsun. S ve I fonksiyonlarına *bağdaşabilir* dönüşümler denir. Öyle ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{SIx_n, ISx_n}(u) = 1.$$

Burada $\{x_n\}$ X de bir dizidir. Öyle ki her $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{Ix_n, Sx_n}(u) = 1.$$

4.1.9. Tanım

$\{A_n\}$, $B(X)$ de bir dizi olsun. Eğer her $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{A_n, A}(u) = 1$$

ise $\{A_n\}$ dizisi A kümesine δ -yakınsak denir. Bu

$$A_n \xrightarrow{\delta} A \text{ olarak gösterilir.}$$

Bu çalışmada IR^+ ile negatif olmayan reel sayıların kümesini, IN ile de pozitif doğal sayıların kümesini göstereceğiz. Ayrıca $t(x,y) = \min(x,y)$ olarak alacağız.

4.1.1. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. $A, B, C \in B(X)$ ve $u, v > 0$ için

$${}_{\delta}F_{A,C}(u+v) \geq \min \{ {}_{\delta}F_{A,B}(u), {}_{\delta}F_{B,C}(u) \}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Her $u, v > 0$ ve her bir $a \in A$, $b \in B$ ve $c \in C$ için

$$\min \{ {}_{\delta}F_{A,B}(u), {}_{\delta}F_{B,C}(v) \} \leq \min \{ F_{a,b}(u), F_{b,c}(v) \} \leq F_{a,c}(u+v) \text{ olur. Dolayısıyla}$$

$$\min \{ {}_{\delta}F_{A,B}(u), {}_{\delta}F_{B,C}(v) \} \leq {}_{\delta}F_{A,C}(u+v)$$

olduğu görülür.

4.1.2.Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay $A, B \in B(X)$, $c \in X$ ve $u, v > 0$ için

$${}_H F_{A,c}(u+v) \geq \min \{ {}_H F_{A,B}(u), {}_H F_{B,c}(v) \}$$

olur.

İspat

Menger uzayın tanımından her bir $a, b, c \in X$ ve tüm $u, v > 0$ için,

$$F_{a,c}(u+v) \geq \min \{ F_{a,b}(u), F_{b,c}(v) \}$$

olduğunu biliyoruz. $c \in C$ ler için infimum alınırsa

$$\inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) \geq \min\{F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

olur. Dolayısıyla $a \in A$ lar için supremum alınır

$$\sup_{a \in A} \inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) \geq \sup_{a \in A} \min\{F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

$$= \min\{\sup_{a \in A} F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

$$\geq \min\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

olur. Daha sonra $b \in B$ ler için supremum alınır

$$\sup_{a \in A} \inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) \geq \sup_{b \in B} \min\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

$$\geq \min\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

Benzer olarak, her bir $a, b, c \in X$ ve tüm $u, v > 0$ için

$$F_{a,c}(u+v) \geq \min\{F_{a,b}(u), F_{b,c}(v)\}$$

olur. Buradan $a \in A$ lar için infimum alınır

$$\inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v) \geq \inf_{a \in A} \min\{F_{a,b}(u), F_{b,c}(v)\}$$

$$= \min\{\inf_{a \in A} F_{a,b}(u), F_{b,c}(v)\}.$$

Dolayısıyla, $c \in C$ ler için supremum alınır

$$\begin{aligned}
\sup_{c \in C} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v) &\geq \sup_{a \in A} \min \{ \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), F_{b,c}(v) \} \\
&= \min \{ \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} F_{b,c}(v) \} \\
&\geq \min \{ \{ \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v) \} \}.
\end{aligned}$$

Daha sonra $b \in B$ ler için supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{c \in C} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v) &\geq \sup_{b \in B} \min \{ \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v) \} \\
&\geq \min \{ \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v) \}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
{}_H F_{A,c}(u+v) &= \min \{ \sup_{c \in C} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v), \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) \} \\
&\geq \min \{ \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v), \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} F_{b,c}(v) \} \\
&= \min \{ {}_H F_{A,B}(u), {}_H F_{B,c}(v) \}.
\end{aligned}$$

4.1.3. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. Eğer $A, B \in B(X)$ ise $\lim_{u \rightarrow \infty} {}_H F_{A,B}(u) = 1$ olur.

İspat

Herhangi bir $x \in A$ ve $b \in B$ ve Lemma 4.1.1. den

$${}_{\delta}F_{A,B}(u) \geq \min \left\{ {}_{\delta}F_{A,x} \left(\frac{u}{3} \right), {}_{\delta}F_{x,y} \left(\frac{u}{3} \right), F_{y,B} \left(\frac{u}{3} \right) \right\}$$

olur. $u \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,B}(u) \geq \min \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,x} \left(\frac{u}{3} \right), \lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{x,y} \left(\frac{u}{3} \right), \lim_{u \rightarrow \infty} F_{y,B} \left(\frac{u}{3} \right) \right\}.$$

Daha önceden bildiğimiz üzere $x \in A, y \in B$ ve $A, B \in B(X)$ için

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,x} \left(\frac{u}{3} \right) = 1 \text{ (A sınırlı)}$$

ve

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{y,B} \left(\frac{u}{3} \right) = 1 \text{ (B sınırlı) olur. Ayrıca } PM\text{-uzay tanımıından } \lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{x,y} \left(\frac{u}{3} \right) = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,B}(u) = 1$$

sonucuna ulaşırız.

Aşağıdaki Lemma 4.1.4. Chang tarafından getirilmiş olup bu çalışmamız için önemli bir rol oynamaktadır. Konuyla ilgili daha geniş bilgiyi [9] da bulabiliriz.

4.1.4. Lemma

$\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle ki her $u > 0$ için

$$0 < \phi(u) < u, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = \infty, \quad \text{her bir } u > 0 \text{ için } \phi^0(u) = u \text{ ve her bir } n \in \mathbb{N}$$

$$\phi^{-n}(u) = \phi^{-1}(\phi^{-n+1}(u)) \text{ olarak tanımlanır ise}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(u) = \infty$$

olur.

Sonuç olarak, $\Phi = \{\phi: IR^+ \rightarrow IR^+ : \phi \text{ artan ve sürekli fonksiyon, her } t > 0 \text{ için } \phi(t) > t\}$ şeklinde bir küme tanımlayalım.

4.1.5. Lemma

(X, F, min) bir Menger uzay ve $\{Y_n\}$, $B(X)$ de bir dizi olsun. Eğer her bir $u > 0$ ve $n \in N$ için $\phi \in \Phi$ olmak üzere

$${}_{{}_\delta}F_{Y_{n+1}, Y_{n+2}}(\phi(u)) \geq {}_{{}_\delta}F_{Y_n, Y_{n+1}}(u) \quad \text{İse,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{{}_\delta}F_{Y_n, Y_{n+1}}(u) = 1 \quad \text{olur.}$$

İspat

Tümevarımla $u > 0$ ve her bir $n \in IN$ için,

$${}_{{}_\delta}F_{Y_{n+1}, Y_{n+2}}(u) \geq {}_{{}_\delta}F_{Y_n, Y_{n+1}}(\phi^{-1}(u)) \geq \dots \geq {}_{{}_\delta}F_{Y_1, Y_2}(\phi^{-n}(u)).$$

Lemma 4.1.4.'den, ve $n \rightarrow \infty$ için $\phi^{-n}(u) \rightarrow \infty$ olduğundan ayrıca Y_n sınırlı bir küme ve $n \rightarrow \infty$ için ${}_{{}_\delta}F_{Y_1, Y_2}(\phi^{-n}(u)) \rightarrow 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{{}_\delta}F_{Y_{n+1}, Y_{n+2}}(u) = 1$$

olur.

4.1.6. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay ve $A, B \in B(X)$ olsun. Eğer $u > 0$ için

$${}_\delta F_{A,B}(\phi(u)) \geq {}_\delta F_{A,B}(u)$$

ise en az bir $a \in X$ vardır. Öyle ki $A = B = a$ olur.

İspat

$u > 0$ için, tümevarımla,

$${}_ \delta F_{A,B}(u) \geq {}_\delta F_{A,B}(\phi^{-1}(u)) \geq \dots \geq {}_\delta F_{A,B}(\phi^{-n}(u))$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $A, B \in B(X)$ olduğundan ve Lemma 4.1.3.'ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{A,B}(\phi^{-n}(u)) = 1$$

ve Lemma 4.1.5. ten $u > 0$ için ${}_ \delta F_{A,B}(u) = 1$ olur. Dolayısıyla en az bir $a \in X$ için

$$A = B = \{a\} \text{ sonucuna varılır.}$$

Aşağıdaki Lemma B. Schweizer ve A. Sklar tarafından ortaya konulmuştur. [26]

4.1.7. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. Eğer $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ ise $u > 0$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{a_n, b_n}(u) = F_{a, b}(u) \text{ olur.}$$

4.1.8. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. Eğer $A_n \xrightarrow{\delta} a$ ve $B_n \xrightarrow{\delta} b$ ise $u > 0$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{A_n, B_n}(u) = F_{a,b}(u) \text{ olur.}$$

İspat

$u > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için önceden bildiğimiz üzere $F_{a,b}(u)$ u noktasında soldan sürekli ve $0 < 2k < u$ olacak şekilde en az bir pozitif k sayısı vardır ve

$$F_{a,b}(u) - F_{a,b}(u - 2k) < \varepsilon .$$

$k > 0$ ve $A_n \xrightarrow{\delta} a$, $B_n \xrightarrow{\delta} b$ olduğundan en az $m \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > m$ için ,

$${}_{\delta} F_{A_n, a}(k) \geq F_{a,b}(u - 2k) \text{ ve } {}_{\delta} F_{B_n, b}(k) \geq F_{a,b}(u - 2k) .$$

Dolayısıyla $n > m$ için,

$$\begin{aligned} {}_{\delta} F_{A_n, B_n}(u) &\geq \min\{{}_{\delta} F_{A_n, b}(u - k), {}_{\delta} F_{b, B_n}(k)\} \\ &\geq \min\{{}_{\delta} F_{A_n, a}(k), {}_{\delta} F_{a, b}(u - 2k), {}_{\delta} F_{b, B_n}(k)\} \\ &= F_{a,b}(u - 2k) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$-{}_{\delta} F_{A_n, B_n}(u) \leq -F_{a,b}(u - 2k) .$$

Buradan,

$$F_{a,b}(u) - {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) < F_{a,b}(u) - F_{a,b}(u - 2k) < \varepsilon$$

sonucuna varırız. $n \rightarrow \infty$ için infimum alınır

$$F_{a,b}(u) - \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) < \varepsilon$$

olur. Herhangi $a_n \in A_n$ ve $b_n \in B_n$ dizileri için $A_n \xrightarrow{\delta} a$ ve $B_n \xrightarrow{\delta} b$ olduğundan $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ olur. Bu nedenle $u > 0$ için,

$${}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \leq F_{a_n, b_n}(u)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için infimum alınır,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{a_n, b_n}(u)$$

olur. Lemma 4.1.7.' den ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{a_n, b_n}(u) = F_{a,b}(u), \text{ bu nedenle}$$

$$F_{a,b}(u) - \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \geq 0$$

olur. Sonuç olarak herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\varepsilon > F_{a,b}(u) - \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \geq 0.$$

Buradan da anlaşılacağı üzere $u > 0$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) = F_{a,b}(u).$$

4.1.1. Teorem

$(X, F, \min)$ bir tam Menger uzay, $f, g, \eta, \xi: X \rightarrow X$ şeklinde tanımlı tek değerli dört fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ olarak tanımlı küme değerli iki fonksiyon olmak üzere;

$$(i) S(X) \subset \xi g(X), T(X) \subset \eta f(X),$$

$$(ii) \eta f = f\eta, \xi g = g\xi, Sf = fS, Tg = gT,$$

$$(iii) \eta f \text{ veya } \xi g \text{ sürekli,}$$

$$(iv) (S, \eta f) \text{ ve } (T, \xi g) \text{ bağdaşabilir fonksiyonlar ve}$$

$$(v) u > 0, \phi \in \Phi, \beta \in (0, 2) \text{ ve her } x, y \in X \text{ için}$$

$${}_{{}_\delta}F_{Sx, Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta fx, \xi gy}(u), {}_\delta F_{\eta fx, Sx}(u), {}_\delta F_{\xi gy, Ty}(u), {}_\delta F_{\xi gy, Sx}(\beta u), {}_\delta F_{\eta fx, Ty}((2-\beta)u)\}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda f, g, η, ξ, S ve T fonksiyonlarının X 'de tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat

$x_0 \in X$ ve $\{x_n\}$ dizisini de aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\xi g x_{2n+1} \in Sx_{2n} = Z_{2n}, \eta f x_{2n+2} \in Tx_{2n+1} = Z_{2n+1}.$$

$n \in N$ ve her bir $u > 0$ için, $\beta = (1-\alpha)$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere;

$${}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\phi(u)) = {}_{\delta}F_{Sx_{2n}, Tx_{2n+1}}(\phi(u)) \geq \min\{{}_{\delta}F_{\eta fx_{2n}, \xi gx_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{\eta fx_{2n}, Sx_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{\xi gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}}(u),$$

$${}_{\delta}F_{\xi gx_{2n+1}, Sx_{2n}}((1-\alpha)u), {}_{\delta}F_{\eta fx_{2n}, Tx_{2n+1}}((1+\alpha)u)\}$$

$$\geq \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n}}((1-\alpha)u), {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n+1}}((1+\alpha)u)\}$$

$$\geq \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u), 1, {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\alpha u)\}$$

$$= \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\alpha u)\}.$$

t-norm = min ve sürekli olduğundan $\alpha \rightarrow 1$ için

$${}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\phi(u)) \geq \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u)\}.$$

Lemma 4.1.6.'dan

$${}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\phi(u)) \geq {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u).$$

Benzer olarak $n \in N$ ve tüm $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{Z_{2n+1}, Z_{2n+2}}(\phi(u)) \geq {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u).$$

Dolayısıyla her $n \in N$ ve $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{Z_{n+1}, Z_{n+2}}(\phi(u)) \geq {}_{\delta}F_{Z_n, Z_{n+1}}(u)$$

Lemma 4.1.5.'ten her bir $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{Z_n, Z_{n+1}}(u) = 1. \quad (*)$$

Şimdi $\beta = 1$ için (ν) şartı üzerinde düşünelim ve iddia edelim ki $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için bir $M(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n, m \geq M$ için,

$${}_{\delta}F_{Z_n, Z_m}(\varepsilon) \geq 1 - \lambda.$$

Eğer durum böyle değil ise $\varepsilon' > 0$, $\lambda' \in (0,1)$ vardır öyle ki $k \in \mathbb{N}$ için $n_k > m_k \geq k$ olacak şekilde n_k ve m_k vardır ve aşağıdaki üç koşul sağlanır.

(1) n_k çift ve m_k tek,

(2) ${}_{\delta}F_{Z_{n_k}, Z_{m_k}}(\varepsilon') < 1 - \lambda'$ ve

(3) n_k (1) ve (2) yi sağlayan en küçük çift sayıdır.

(*)' den dolayı bir $m_1 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz öyle ki $n \geq m_1$ için,

$${}_{\delta}F_{Z_n, Z_{n+1}}\left(\min\left\{\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\phi^{-1}(\varepsilon') - \varepsilon'}{2}\right\}\right) > 1 - \lambda'$$

Dolayısıyla $k > m_1$ için, $n_k \geq m_k + 3$ ve $k > m_1$ olduğundan

$$1 - \lambda' > {}_{\delta}F_{Z_{n_k}, Z_{m_k}}(\varepsilon') = {}_{\delta}F_{Sx_{n_k}, Tx_{m_k}}(\varepsilon')$$

$$\geq \min\{F_{\eta f_{x_{n_k}}, \xi g_{x_{m_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')), {}_{\delta}F_{\eta f_{x_{n_k}}, S_{x_{n_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')), {}_{\delta}F_{\xi g_{x_{m_k}}, T_{x_{m_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')), {}_{\delta}F_{\xi g_{x_{m_k}}, S_{x_{n_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')),$$

$${}_{\delta}F_{\eta f_{x_{n_k}}, T_{x_{m_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon'))\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_{k-1}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)), \delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{m_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)), \delta F_{Z_{n_k}, Z_{m_{k-1}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i))\}.$$

Daha önceden,

$$\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)) \geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\varepsilon^i)\}$$

$$\delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{n_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)) \geq \min\{\delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{n_{k-1}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) + \varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_{k-1}}}(\varepsilon^i), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\frac{\varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{m_k}, Z_{m_{k-1}}}(\frac{\varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\varepsilon^i), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\varepsilon^i), \delta F_{Z_{m_k}, Z_{m_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{m_k}, Z_{m_{k-1}}}(\varepsilon^i), \delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2})\}$$

ve

$$\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_{k-1}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^i)) \geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_{k-1}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) + \varepsilon^i}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\varepsilon^i), \delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{m_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^i) - \varepsilon^i}{2})\}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $k > m_1$ olduğunda,

$$1 - \lambda' > {}_{\delta} F_{Z_{n_k}, Z_{m_k}}(\varepsilon') \geq 1 - \lambda'$$

olur. Bu da bir çelişkidir. X tam olduğundan Z_n de seçtiğimiz herhangi bir $\{z_n\}$ dizisi X 'de bir z noktasına yakınsar. Bu z noktası z_n seçiminden bağımsızdır, dolayısıyla

$$\eta f_{x_{2n}} \rightarrow z, \xi g_{x_{2n+1}} \rightarrow z, Sx_{2n} \rightarrow \{z\}, Tx_{2n+1} \rightarrow \{z\}.$$

Buradan $u > 0$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda

$$F_{\eta f_{x_{2n}}, z}(u) \rightarrow 1, F_{\xi g_{x_{2n+1}}, z}(u) \rightarrow 1, {}_{\delta} F_{Sx_{2n}, z}(u) \rightarrow 1, {}_{\delta} F_{Tx_{2n+1}, z}(u) \rightarrow 1 \text{ olur.}$$

Var sayalım ki ηf fonksiyonu sürekli olsun, buradan $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{(\eta f)^2_{x_{2n}}, \eta f_z}(u) = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{\eta f_{Sx_{2n}}, \eta f_z}(u) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\eta f_{x_{2n}}, z}(u) = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{Sx_{2n}, z}(u) = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{Sx_{2n}, \eta f_{x_{2n}}}(u) = 1 \text{ olur. Daha önceden bildiğimiz üzere } S \text{ ve } \eta f \text{ bağdaşabilir ve}$$

$$u > 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Sx_{2n}, \eta f_{x_{2n}}}(u) = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{\eta f S x_{2n}, S \eta f x_{2n}}(u) = 1 \text{ ve}$$

$${}_H F_{S \eta f x_{2n}, \eta f z}(u) \geq \min \left\{ {}_H F_{\eta f S x_{2n}, S \eta f x_{2n}} \left(\frac{u}{2} \right), {}_H F_{\eta f S x_{2n}, \eta f z} \left(\frac{u}{2} \right) \right\}$$

ve daha önce bildiğimiz gibi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{\eta f x_{2n}, S \eta f x_{2n}} \left(\frac{u}{2} \right) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{\eta f S x_{2n}, \eta f z} \left(\frac{u}{2} \right) = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{S \eta f x_{2n}, \eta f z}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{S \eta f x_{2n}, \eta f z}(u) = 1.$$

İspatın diğer kısmını 5 adımda yapacağız.

1.Adım: $u > 0, \beta = 1$ ve (ν) şartından,

$$\begin{aligned} {}_\delta F_{S \eta f x_{2n}, T x_{2n+1}}(\phi(u)) &\geq \min \{ F_{(\eta f)^2 x_{2n}, \xi g x_{2n+1}}(u), {}_\delta F_{(\eta f)^2 x_{2n}, S \eta f x_{2n}}(u), \\ {}_\delta F_{\xi g x_{2n+1}, T x_{2n+1}}(u), {}_\delta F_{\xi g x_{2n+1}, S \eta f x_{2n}}(u), {}_\delta F_{(\eta f)^2 x_{2n}, T x_{2n+1}}(u) \} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa Lemma 4.1.8.'den,

$$F_{\eta f z, z}(\phi(u)) \geq \min \{ F_{\eta f z, z}(u), F_{\eta f z, \eta f z}(u), F_{z, z}(u), F_{\eta f z, z}(u),$$

$$F_{\eta f z, z}(u) \} = F_{\eta f z, z}(u).$$

Buradan, $\eta f z = z$ olarak bulunur.

2.Adım: $u > 0, \beta = 1$ ve (ν) koşulundan,

$$\begin{aligned}
{}_{{\delta}}F_{Sz,z}(\phi(u)) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{{\delta}}F_{Sz, Tx_{2n+1}}(\phi(u)) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \min \{F_{\eta fz, \xi gx_{2n+1}}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fz, Sz}(u), {}_{{\delta}}F_{\xi gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}}(u), {}_{{\delta}}F_{Sz, \xi gx_{2n+1}}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fz, Tx_{2n+1}}(u)\} \\
&\geq \min \{F_{z,z}(u), {}_{{\delta}}F_{z, Sz}(u), F_{z,z}(u), {}_{{\delta}}F_{z, Sz}(u), F_{z,z}(u)\} = {}_{{\delta}}F_{z, Sz}(u)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $s_z = \{z\}$ olur.

1.adım ve 2. adımdan $s_2 = \{z\} = \{\eta fz\}$

3. Adım: (i) koşulundan, $SX \subset \xi gX$ ve bir $z' \in X$ vardır öyle ki $\{\xi gz'\} = Sz = \{z\}$ olur. Dolayısıyla, en az bir $u > 0$ ve (v) koşulundaki $\beta = 1$ değeri için

$$\begin{aligned}
{}_{{\delta}}F_{Sx_{2n}, Tz'}(\phi(u)) &\geq \min \{F_{\eta fx_{2n}, \xi gz'}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fx_{2n}, Sx_{2n}}(u), \\
&{}_{{\delta}}F_{\xi gz', Tz'}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fz', Sx_{2n}}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fx_{2n}, Tz'}(u)\}
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için infimum alınırsa Lemma 4.1.8. den,

$${}_{{\delta}}F_{z, Tz'}(\phi(u)) \geq \min \{F_{z,z}(u), F_{z,z}(u), {}_{{\delta}}F_{z, Tz'}(u), F_{z,z}(u), {}_{{\delta}}F_{z, Tz'}(u)\} = {}_{{\delta}}F_{z, Tz'}(u).$$

Dolayısıyla $Tz' = \{z\}$ olur. Sonuç olarak $\{\xi gz'\} = \{z\} = \{Tz'\}$ olur.

İlk iki adım sonuçlarıyla beraber

$$\{z\} = \{\eta fz\} = \{Sz\} = \{\xi gz'\} = \{Tz'\}$$

sonucuna ulaşabiliriz.

Daha önceden bildiğimiz üzere S ve ηf bağdaşabilir fonksiyonlar ve $\{\eta fz\} = Sz$ olduğundan, $\eta fSz = S\eta fz$ olur. Sonuç olarak $\{\eta fz\} = Sz$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} {}_{\delta}F_{Sz,z}(\phi(u)) &= {}_{\delta}F_{Sz,Tz'}(\phi(u)) \\ &\geq \min\{F_{\eta fz, \xi gz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi gz', Tz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Tz'}(u), {}_{\delta}F_{Sz, \xi gz'}(u)\} \\ &= {}_{\delta}F_{\eta fz, z}(u) = {}_{\delta}F_{Sz, z}(u). \end{aligned}$$

Dolayısıyla $Sz = \{z\} = \{\eta fz\}$.

X kümesinde bir z' elemanı seçelim öyle ki,

$\{\xi gz'\} = Sz = \{z\}$ eşitliğini sağlasın. Buradan,

$$\begin{aligned} {}_{\delta}F_{z, Tz'}(\phi(u)) &= {}_{\delta}F_{Sz, Tz'}(\phi(u)) \\ &\geq \min\{F_{\eta fz, \xi gz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi gz', Tz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Tz'}(u), {}_{\delta}F_{Sz, \xi gz'}(u)\} \\ &= {}_{\delta}F_{z, Tz'}(u). \end{aligned}$$

Dolayısıyla Lemma 4.1.6' dan $Tz' = \{z\}$ olur.

T ve ξg bağdaşabilir fonksiyonlar ve $\{\xi gz'\} = Tz'$ olduğundan, $T\xi gz' = \xi gTz'$ dolayısıyla $Tz = \{\xi gz\}$ olur.

$u > 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_{{}_\delta}F_{Sz,Tz}(\phi(u)) &\geq \min\{{}_{{}_\delta}F_{\eta fz,\xi gz}(u), {}_{{}_\delta}F_{\eta fz,Sz}(u), {}_{{}_\delta}F_{\xi gz,Tz}(u), {}_{{}_\delta}F_{\eta fz,Tz}(u), {}_{{}_\delta}F_{Sz,\xi gz}(u)\} \\
&= {}_{{}_\delta}F_{\eta fz,\xi gz}(u) \\
&= {}_{{}_\delta}F_{Sz,Tz}(u).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $S_z = T_z = \{\eta fz\} = \{\xi gz\} = \{z\}$ olur.

4. Adım: $u > 0$ ve (v) koşulundaki $\beta = 1$ değeri için

$$\begin{aligned}
{}_{{}_\delta}F_{Sf,Tx_{2n+1}}(\phi(u)) &\geq \min\{{}_{{}_\delta}F_{\eta ffz,\xi gx_{2n+1}}(u), {}_{{}_\delta}F_{\eta ffz,Sfz}(u), \\
&{}_{{}_\delta}F_{\xi gx_{2n+1},Tx_{2n+1}}(u), {}_{{}_\delta}F_{\xi gx_{2n+1},Sfz}(u), {}_{{}_\delta}F_{\eta ffz,Tx_{2n+1}}(u)\}
\end{aligned}$$

(ii) koşulundan $\eta f = f\eta$, $Sf = fS$, dolayısıyla

$$\eta f(fz) = f(\eta fz) = fz \text{ ve } S(fz) = \{f(S_z)\} = \{fz\}.$$

$n \rightarrow \infty$ için infimum alınırsa lemma 4.1.8 den

$$F_{fz,z}(\phi(u)) \geq \min\{F_{fz,z}(u), F_{fz,fz}(u), F_{z,z}(u), F_{z,fz}(u), F_{fz,z}(u)\} = F_{fz,z}(u).$$

Dolayısıyla,

$$f_z = z.$$

1.adım ve 4.adımdan $\eta fz = z$ ve $fz = z$, yani $\eta z = z$ olur. Sonuç olarak

$$\{z\} = \{fz\} = \{\eta z\} = Sz.$$

5. Adım: $u > 0$ ve (ν) koşulundaki $\beta = 1$ değeri için,

$$\delta F_{Sx_{2n}, Tgz}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta f x_{2n}, \xi ggz}(u), \delta F_{\eta f x_{2n}, Sx_{2n}}(u), \delta F_{\xi ggz, Tgz}(u), \\ \delta F_{\xi ggz, Sx_{2n}}(u), \delta F_{\eta f x_{2n}, Tgz}(u)\}.$$

$Tg = gT$ ve $\xi g = g\xi$ olduğundan ,

$$Tgz = \{gTz\} = \{gz\} \text{ ve } \xi g(gz) = g(\xi gz) = gz \text{ olur.}$$

$n \rightarrow \infty$ için infimum alınırsa Lemma 4.1.8'den

$$F_{z, gz}(\phi(u)) \geq \min\{F_{z, gz}(u), F_{z, z}(u), F_{gz, gz}(u), F_{gz, z}(u), F_{z, gz}(u)\} = F_{z, gz}(u).$$

Buradan $gz = z$ olur.

Dolayısıyla 3. adım ve 5. adımdan $\xi gz = z$ ve $gz = z$, yani $\xi z = z$, dolayısıyla

$$\{z\} = \{gz\} = \{\xi z\} = Tz$$

eşitliğine ulaşırız. Sonuç olarak

$$\{z\} = \{fz\} = \{gz\} = \{\eta z\} = \{\xi z\} = Sz = Tz$$

olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi z 'nin tekliğini ispat edelim. $y \in X$ η, f, ξ, g, S ve T fonksiyonlarının diğer bir ortak sabit noktası olsun. $u > 0$ için

$$\begin{aligned}
F_{z,y}(\phi(u)) &= {}_{\delta}F_{Sz,Tz}(\phi(u)) \\
&\geq \min\{F_{\eta fz,\xi gy}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz,Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi gy,Ty}(u), {}_{\delta}F_{\xi gy,Sz}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz,Ty}(u)\} \\
&\geq \min\{F_{z,y}(u), F_{z,z}(u), F_{y,y}(u), F_{y,z}(u), F_{ygz}(u)\} = F_{z,y}(u).
\end{aligned}$$

Buradan $y = z$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. Teorem 4.1.1.'de $f = g = I$ (Özdeşlik fonksiyonu) alınırsa aşağıdaki sonuç yazılabilir.

4.1.1 Sonuç

$(X, F, \min)$ tam menger uzay,

$\eta, \xi: X \rightarrow X$ tek değerli iki fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ küme değerli iki fonksiyon olsun. her $x, y \in X, \beta \in (0, 2)$ ve $\phi \in \Phi$ için

$$(i) S(X) \subset \xi(X), T(X) \subset \eta(X),$$

$$(ii) \eta \text{ veya } \xi \text{ sürekli,}$$

$$(iii) (S, \eta) \text{ veya } (T, \xi) \text{ bağdaşabilir, ve}$$

$$(iv) u > 0 \text{ için}$$

$${}_{\delta}F_{Sx,Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta x,\xi y}(u), {}_{\delta}F_{\eta x,Sx}(u), {}_{\delta}F_{\xi y,Ty}(u), {}_{\delta}F_{\xi y,Sx}(\beta u), {}_{\delta}F_{\eta x,Ty}((2-\beta)u)\}$$

koşulları sağlanıyor ise η, ξ, S ve T tek bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. İspatı Teorem 4.1.1' in ispatına benzer bir şekilde yapılır.

4.1.2. Teorem

$(X, F, \min)$ tam Menger uzay, $f, g, n, \xi: X \rightarrow X$ tek değerli dört fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ küme değerli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve $\phi \in \Phi$ için

$$(i) S(X) \subset \xi g(X), T(X) \subset \eta f(X),$$

$$(ii) \eta f = f\eta, \xi g = g\xi, Sf = fS, Tg = gT,$$

$$(iii) \eta f \text{ veya } \xi g \text{ sürekli,}$$

$$(iv) (S, \eta f) \text{ ve } (T, \xi g) \text{ bağdaşabilir ve}$$

$$(v) u > 0 \text{ için}$$

$${}_{\delta}F_{Sx, Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta fx, \xi gy}(u), {}_{\delta}F_{\eta fx, Sx}(u), {}_{\delta}F_{\xi gy, Ty}(u), {}_D F_{\xi gy, Sx}(u) +_D F_{\eta fx, Ty}(u)\}$$

ise, f, g, η, ξ, S ve T bir tek $z \in X$ ortak sabit noktaya sahiptir.

Eğer $f = g = I$ olarak alınırsa aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

4.1.2. Sonuç

$(X, F, \min)$ tam metrik uzay, $\eta, \xi: X \rightarrow X$ tek değerli iki fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ küme değerli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve $\phi \in \Phi$ için

(i) $S(X) \subset \xi(X)$, $T(X) \subset \eta(X)$,

(ii) η veya ξ sürekli

(iii) (S, η) ve (T, ξ) bağdaşabilir fonksiyonlar ve

(iv) $u > 0$ için

$${}_{{}_\delta}F_{Sx, Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta x, \xi y}(u), {}_\delta F_{\eta x, Sx}(u), {}_\delta F_{\xi y, Ty}(u), {}_D F_{\xi y, Sx}(u) + {}_D F_{\eta x, Ty}(u)\}$$

koşulları sağlanıyor ise η, ξ, S ve T tek bir $z \in X$ ortak sabit noktasına sahiptir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak tam metrik uzaylarda ve tam Menger uzaylarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini irdeledik. Yine Menger uzaylarda verilen şartlar altında bağdaşabilir dönüşümler için de sabit noktanın varlığını görmüş olduk. Bu çalışmamız, değişik şartlar ve tanımlar altında tam metrik uzay ve tam Menger uzaylarda sabit nokta teoremine farklı bir yaklaşım getirmiştir.

Sabit nokta kavramı farklı uzaylar için her geçen gün farklı kavramlar ve şartlar altında geliştirilmektedir. Bu konuyla ilgilenen okuyucu özellikle ortak sabit nokta kavramında, dönüşümler arasındaki ilişkilerden yararlanarak uzay üzerindeki şartları geliştirebilir veya farklı uzaylar arasındaki ilişkileri kullanarak yeni tanımlar yapabilir.

KAYNAKLAR

1. Alaca, C. Türkoğlu, D. and Yıldız, C. "Fixed Points In Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces", *Chaos, Solitons & Fractals*, 29: 1073-1078 (2006).
2. Aliouche, A. Fisher, B., "A fixed point theorem for set valued mappings on two complete metric spaces", *Bull Allahabat Mat.Soc.*, 21: 31-40 (2006).
3. Altun, İ. Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for weakly compatible mappings satisfying an implicit relation", *Taiwanese J. Math.*, 13: 1291 (2009).
4. Altun, İ. Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for multivalued maps satisfying an implicit relation on metrically convex metric spaces", *Kyungpook Math.J.*, 48: 367-377 (2008).
5. Altun, İ. Hancer, H. A. and Türkoğlu, D., "Fixed point theorems on d-complete topological spaces", *Carpathian Journal of Mathematics*, 24 (1): 1-7 (2008).
6. Altun, İ. Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for weakly compatible multivalued mappings satisfying an implicit relation", *Filomat*, 22 (1): 11-19 (2008).
7. Altun, İ. Hançer, H. A. and Türkoğlu, D. "A Fixed Point Theorem For Multi-maps Satisfying An Implicit Relation On Metrically Convex Metric Spaces", *Math. Commun.*, 11: 17-23, (2006).
8. Banach, S., "Theorie les operations lineaires", *Manograie Matematyeczne*, Warsaw, (1932).
9. Chang, T.H., "Common fixed point theorems in Menger spaces", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 22: 17-29 (1994).
10. Chen, C.M. Chang, T.H. "Common fixed point theorems in Menger spaces", *Int. J. Math. Math. Sci.*, 15: 75931 (2006).
11. Fisher, B. Türkoğlu, D., "Related Fixed Points For Two Pairs Of Set Valued Mappings On Two Metric Spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, 3: 63-70 (2002).
12. Fisher, B. Türkoğlu, D., "Related Fixed Points For Set Valued Mappings On Two Metric Spaces", *Int. J. Math. Math. Sci.*, 23: 205-210 (2000).
13. Fisher, B., "fixed point on two metric spaces", *Glasnik Mat.*, 16(36): 333-337 (1981).

14. Frechet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22: 1-74(1906).
15. Hicks, T. L. and Sharma, P.L., "Probabilistic metric structures: Topological classification", *Univ. u Novom Sadu Ser. Mat.*, 14 (1): 43-50 (1984).
16. Istratescu, V. M., "Introducere in teoria spatiilor metrice probabiliste cu aplicatii", *Editura Technica*, Bucharest, (1974).
17. Jachymski, J. R., "Caristi's fixed points theorem and selection of set-valued contractions", *J. Math. Anal. Appl.*, 227: 55-67 (1998).
18. Jain R. K., Shrivastava A. K., "Fisher B., Fixed point on three complete metric spaces", *Novi Sad J. Math.*, 27: 27-35 (1997).
19. Kütükçü, S. Türkoğlu, D. and Yıldız, C., "Some Fixed Point Theorems For Multivalued Mappings In Fuzzy Menger Space", *J. Fuzzy Math.*, 15 (2): 413-424 (2007) .
20. Menger, K., "Statistical metrics", *Proc. Nat Acad. Sci*, 28: 535-537 (1942).
21. Nung, N. P., "A fixed point theorem in three metric spaces", *Math Seminar Notes*, Kobe Univ., 11: 77-79 (1983)
22. Petruşel, A. Sîntămărian, A., "Single-valued and multi-valued Caristi type operators", *Publ. Math. Debrecen* , 60: 167-177 (2002).
23. Petruşel, A. Petruşel, G., "Selection theorems for multivalued generalized contractions", *Math- Moravica* 9: 43-52 (2005).
24. Popa, V. "A general selection theorem for multivalued functions satisfying an implicit relation", *Fixed point theory* 8(2): 297-301 (2007)
25. Radu, V., "Lectures on probabilistic analysis", *Universitatea de Vest din Timişoara*, Timişoara, (1994).
26. Schweizer, B. Sklar, A., "Statistical metric spaces", *Pacific. J. Math*, 10: 313-334 (1960).
27. Schweizer, B. Sklar, A., "Probabilistic metric spaces", *North-Holland, Amsterdam*, (1983).
28. Sehgal, V. M. Bharucha-Reid, A T., "Fixed point of contraction mapping on PM spaces", *Math. Systems Theory*, 6: 97-100 (1972).
29. Sîntămărian, A., "Selections and common fixed points for some generalized multivalued contractions", *Demonstratio Math.* 39: 609-617 (2006).

30. Telci, M., "Fixed points on two complete and compact metric spaces", *Appl. Math. Mech.*, 5: 564-568 (2001).
31. Türkoğlu, D., "Some Fixed Theorems For Compatible Type Set-Valued Mappings", *Univ. Din. Bacau. Şi Cer. Ştii. Math.*, 7: 167-177 (1997).
32. Türkoğlu, D., Özer, O. and Fisher, B., "A Coincidence Point Theorem For Multi-valued Contractions", *Math. Commun.*, 7: 39-44 (2002).
33. Turkoglu, D. Altun, I., "A common fixed point theorem for weakly compatible mappings in symmetric spaces satisfying an implicit relation", *Bul. De la Soc. Math. Mexicana*, 13 (1): 195-205 (2007).
34. Türkoğlu, D., "Two general fixed point theorems on three complete metric spaces", *J. Comput. Anal. Appl*, 10 (2): 173-178 (2008).
35. Turkoglu, D., "Some Fixed Point Theorems for Hybrid Contractions in Uniform Space", *Taiwanese J. Math.*, 12 (3): 807-820 (2008).
36. Turkoglu, D., Altun, İ., "Fixed point theorems for multivalued mappings satisfying an implicit relation", *Tamkang J. Math.* 39 (3): 247-253 (2008).
37. Türkoglu, D., "Two general fixed point theorems on three complete uniform spaces", *J. Comput. Anal. Appl*, 11(1): 86-92 (2009).
38. Türkoğlu, D., "Some common fixed point theorems for weakly compatible mappings in uniform space", *Acta Mathematica Hungarica* .8: 1-9 (2009).
39. Türkoglu, D., "Two general fixed point theorems on three complete complete metric spaces", *J. Comput. Anal. Appl*, 10(2): 173-178 (2008).
40. Wald, A., "On a statistical generalization of metric spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 29: 196-197 (1943).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KİŞİ, Erkan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 03.11.1976 Kars
Medeni hali : Evli
e-mail : erkankisi@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Atatürk Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1999
Lise	Iğdır Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1999-2010	M.E.B.	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Basketbol, Voleybol

1. GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $f x_0 = x_0$ olacak şekilde X de bir x_0 noktası var ise bu x_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin,

$$X = [0, \infty), f x = 2x, g x = x + 1$$

şeklinde tanımlanırsa $x = 0$ noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır ancak g dönüşümünün sabit noktası yoktur. Yine $X = (0, \infty)$ alınırsa f dönüşümünün de sabit noktası olmadığı açıktır. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımladığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları, bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Boştan farklı bir küme üzerinde metrik veya boştan farklı bir kümenin iki elemanı arasındaki uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. Frechet (1906), boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerinde çalışarak, kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir sayı olması gerektiğini göstermiştir [14]. Daha sonra her bir nokta çifti için dağılım fonksiyonu kavramını vermiş ve böylece probabilistik metrik uzay kavramı ortaya çıkmıştır. Probabilistik metrik uzayda üçgen eşitsizliğinin olmaması ancak bunun yerine zayıf üçgen eşitsizliğinin kullanılması, bu uzayda alınan diziler için limit tanımının yapılamamasına neden olmuştur. Menger (1942) üçgen norm kavramından faydalanılarak probabilistik metrik uzaylar için üçgen eşitsizliği vermiş ve böylece Menger uzaylar ortaya çıkmıştır [20]. Probabilistik metrik uzay kavramının ayrıntılı incelenmesini Istratesku (1974) yapmış [16] ancak en önemli gelişim Wald (1983) tarafından Wald uzayı [40] Hicks ve Sharma (1984) tarafından Hicks uzayı [15], Radu (1994) tarafından probabilistik f-metrik uzaylar gibi birçok uzaylar [25] türetilmesinden sonra ortaya çıkmıştır. Ancak probabilistik metrik

uzaylar içinde daha çok Menger uzaylar için sabit nokta çalışmaları yapılmış ve bu çalışmalar halen devam etmektedir. Metrik uzaylarda büzölme dönüşümleri için ilk sabit (Banach sabit) nokta teoremi Banach (1932) tarafından verilmiştir [8]. Küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori ise Banach sabit nokta teoreminin Nadler (1969) tarafından küme değerli dönüşümlere genellemesi ile başlamıştır. Banach sabit nokta teoremi Sehgal ve Bharucha-Reid (1972) tarafından probabilistik metrik uzaylara aktarılmış [28] ve bu çalışma, probabilistik metrik uzaylarda sabit nokta kavramı için önemli bir dönüm noktası olmuştur. Konuyla ilgili daha geniş bilgi [1,3-7] [11-12] [19,27] ve [31-38] deki çalışmalarda verilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$(i) \ d(x, y) \geq 0,$$

$$(ii) \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(iii) \ d(x, y) = d(y, x),$$

$$(iv) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartları sağlanır ise, d ye X üzerinde bir *metrik*, (X, d) ikilisine de *metrik uzay* denir. Eğer (i), (iii) ve (iv) şartları ile birlikte $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ şartı sağlanır ise, d ye X üzerinde bir *yarı metrik*, (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

2.1. Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (veya mutlak değer) metrik, $(\mathbb{R}, d)$ ikilisine de alışılmış metrik uzay denir.

2.2. Tanım

(X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisine x noktasına *yakınsaktır* denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

2.3. Tanım

(X, d) metrik uzay, (x_n) de bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda yakınsar ise, (X, d) metrik uzayına *tamdır* denir.

2.4. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $d(A) = \sup \{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$ reel sayısına A kümesinin *çapı* denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine *sınırlı küme* aksi halde *sınırsız küme* denir.

2.5. Tanım

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere X 'in boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesini $P(X)$ ile gösterelim.

$\forall x \in X$ ve $A \subset X$ için x noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıdır.

$A, B \subset X$ için A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımlardan da anlaşılacağı üzere bir x_0 noktası için $x_0 \in A$ ise $d(x_0, A) = 0$ olur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin $(\mathbb{R}, d_{l,l})$ metrik uzayında $d_{l,l}(1, (0,1)) = 0$ olmasına rağmen $1 \notin (0,1)$ dir.

2.6. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme, Y herhangi bir küme ve $P(Y)$, Y nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi olmak üzere, $F : X \rightarrow P(Y)$ dönüşümüne küme (çoğul) değerli dönüşüm denir.

2.2. Örnek

$X = Y = [0,1]$ için bir $F : X \rightarrow P(X)$ küme değerli dönüşüm, $Fx = \left[0, \frac{x}{2}\right]$ olarak tanımlanabilir.

2.7. Tanım

$F : X \rightarrow P(Y)$ küme değerli dönüşüm olmak üzere, $A \in P(X)$ için FA kümesi

$$FA = \bigcup_{a \in A} Fa$$

şeklinde tanımlanır.

$F^n(A)$ ise

$$F^n(A) = F\left(F^{n-1}(A)\right) \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanır.

2.8. Tanım

$X \neq \emptyset$, $P(X)$ de X nin alt kümelerinin ailesi olmak üzere $F : X \rightarrow P(X)$ şeklinde tanımlı F küme değerli dönüşüm için $x \in F(x)$ ise x noktasına F dönüşümünün *sabit noktası* denir. Bu sabit noktaların kümesini $Fix(F) = \{x \in X : x \in F(x)\}$ şeklinde gösteririz.

2.9. Tanım

$f : X \rightarrow X$ tek değerli bir fonksiyon olsun.

a) Eğer en az bir alt yarı sürekli $\varphi : X \rightarrow IR_+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu için

$$d(x, f(x)) + \varphi(f(x)) \leq \varphi(x)$$

koşulu sağlanıyor ise f 'ye *Caristi tipi* fonksiyondur denir.

b) Eğer en az bir $a \in [0, \frac{1}{2})$ var ve her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$

koşulu sağlanıyor ise f 'ye *Kanan tipi* fonksiyondur denir.

c) Eğer $a, b, c \in R$ ve $a + b + c < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y) + bd(x, f(x)) + cd(y, f(y))$$

koşulu sağlanıyor ise f 'ye *Ciric-Reich-Rus tipi* fonksiyondur denir.

3. METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. İki Tam Metrik Uzayda Küme Değerli İki Dönüşüm İçin Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda verilen tanım ve teoremler [2] de detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.1.1. Tanım

(X, d) bir tam metrik uzay ve $B(X)$ 'de X 'in sınırlı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. δ fonksiyonu $A, B \in B(X)$ için

$$\delta(A, B) = \sup \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer A tek bir elemandan oluşuyor ise $a \in A$ için,

$$\delta(A, B) = \delta(a, B) \text{ dır.}$$

Eğer B tek bir elemandan oluşuyor ise $b \in B$ için,

$$\delta(A, B) = \delta(A, b) \text{ dır.}$$

Hem A hem B tek bir elemandan oluşuyor ise

$$\delta(A, B) = \delta(a, b) = d(a, b)$$

olur.

Ayrıca δ fonksiyonu, her $A, B, C \in B(X)$ için

$$i. \delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0,$$

$$ii. \delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$$

şartlarını sağlar.

3.1.2. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $B(X)$ 'de X 'in sınırlı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. $B(X)$ deki kümelerin bir dizisi $\{A_n\}$ ve A da X in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\{A_n\}$ dizisi A kümesine *yakınsıyor* denir.

i. Her bir $a \in A$ noktasına yakınsayan en az bir $\{a_n \in A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisi vardır,

ii. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ için $A_n \subseteq A_\varepsilon$.

Burada A_ε , merkezi A kümesinde olan tüm ε yarıçaplı açık yuvarların birleşim

kümesidir. Yani $A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ dur.

Bu durumda A ya $\{A_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ veya $A_n \rightarrow A$ olarak gösterilir.

3.1.1. Lemma

(X, d) bir metrik uzay $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ ise X kümesindeki sınırlı alt kümelerin iki dizi olsun. $A, B \subset X$ kümeleri sınırlı olmak üzere sırasıyla $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizilerinin yakınsadığı kümeler olsun. Bu durumda $\{\delta(A_n, B_n)\}$ dizisi $\delta(A, B)$ reel sayısına yakınsar [13].

3.1.3. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $F : X \rightarrow B(X)$ bir dönüşüm ve $x_o \in X$ olsun. X deki noktaların bir $\{x_n\}$ dizisi X de bir x_o noktasına yakınsadığında, $B(X)$ de tanımlı $\{Fx_n\}$ dizisi de $B(X)$ de Fx_o kümesine yakınsıyor ise bu durumda F ye x_o noktasında *süreklidir* denir. Eğer F , X in her noktasında sürekli ise F ye X üzerinde *süreklidir* denir.

3.1.1. Teorem

(X, d) ve (Y, p) tam metrik uzaylar olsunlar. $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ fonksiyonları, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $f, g \in F$ olmak üzere

$$p(Tx, TSy) \leq f(d(x, Sy), p(y, Tx), p(y, TSy)),$$

$$d(Sy, STx) \leq g(p(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx))$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda ST nin X de bir u sabit noktası, TS nin Y de bir v noktası vardır. Üstelik $Tu = v$ ve $Sv = u$ dir. Buradaki F kümesi $f : IR_+^3 \rightarrow IR_+$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan tüm fonksiyonların kümesidir.

(i.) f üst yarı sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

(ii.) Her $u, v \geq 0$ için $u \leq f(v, 0, u)$ veya $u \leq f(v, u, 0)$ ise $0 \leq c < 1$

olacak şekilde bir c sabit sayısı vardır ki $u \leq cv$ dir [30].

3.1.1. Örnek

$0 < c < 1$ olmak üzere $f(t_1, t_2, t_3) = c \max \{t_1, t_2, t_3\}$ olsun.

i. f nin sürekli olduğu açıktır.

ii. Varsayalım ki $u, v \geq 0$ ve $u \leq f(v, 0, u)$ olsun. Dolayısıyla $u \leq c \max \{v, u\}$ olur.

$v \leq u$ ise $u \leq cu < u$ olur. Bu da bir çelişkidir. Buradan $u \leq cv$ olur.

3.1.2. Örnek

$f(t_1, t_2, t_3) = c \max \{t_1, t_2, t_3, b\sqrt{t_2 t_3}\}$ olsun. Burada $0 \leq b \leq 1$ ve $0 < c < 1$ dir.

i. f nin sürekli olduğunu görmek kolaydır.

ii. 1. örnekte görüldüğü gibi gösterilebilir.

3.1.3. Örnek

$f(t_1, t_2, t_3) = (\alpha t_1^p + \beta t_2^p + \gamma t_3^p)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olsun.

i. f nin sürekli olduğu açıktır.

ii. Varsayalım ki $u, v \geq 0$ ve $u \leq f(v, 0, u)$ olsun. Dolayısıyla $u \leq (\alpha v^p + \gamma u^p)^{\frac{1}{p}}$

olur. Buradan,

$$u \leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} \nu \text{ olur. Dolayısıyla}$$

$$c_1 = \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} < 1 \text{ olarak alınabilir.}$$

Benzer olarak eğer $u \leq f(\nu, u, 0)$ ise $u \leq c_2 \nu$, buradan;

$$c_2 = \left(\frac{\alpha}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{p}} < 1 \text{ olarak seçilebilir.}$$

$$c = \max \{c_1, c_2\} < 1 \text{ olarak alabiliriz.}$$

Aşağıdaki teorem, iki tam metrik uzayda tanımlı iki küme değerli dönüşüm için sabit nokta teoremidir.

3.1.2. Teorem

(X, δ_1) ve (Y, δ_2) tam metrik uzaylar olsunlar. $T: X \rightarrow B(Y)$ ve $S: Y \rightarrow B(X)$ iki fonksiyon olsun. Her $x, x' \in X$ ve $y, y' \in Y$ ler için;

$$\delta_1(STx, STx') \leq f(\delta_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), \delta_1(x', STx')), \quad (2.1)$$

$$\delta_2(TSy, TSy') \leq g(\delta_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), \delta_2(y', TSy')) \quad (2.2)$$

şartları sağlansın. Burada $f, g \in F$, S veya T sürekli ise ST , X de bir u sabit noktasına TS ise Y de bir ν sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Tu = \{\nu\}$ ve $S\nu = \{u\}$ olur.

İspat

$x_1 \in X$ keyfi bir nokta olsun. X ve Y kümeleri üzerinde sırasıyla $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini tanımlayalım. Tx_1 kümesinden bir y_2 noktasını, Sy_2 kümesinden x_2 noktasını, Tx_2 noktasından y_3 noktasını, Sy_3 kümesinden x_3 noktasını seçelim. Bu şekilde devam ederek x_n leri X kümesinden, y_{n+1} leri Y kümesinden seçelim.

Tx_n kümesinden y_{n+1} noktasını, Sy_{n+1} kümesinden x_{n+1} noktasını seçelim.

Eş. 2.1' den,

$$\begin{aligned} d_1(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \delta_1(STx_n, STx_{n+1}) \\ &\leq f(\delta_2(Tx_n, Tx_{n+1}), d_1(x_{n+1}, STx_n), \delta_1(x_{n+1}, STx_{n+1})) \\ &\leq f(\delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}), 0, \delta_1(STx_n, STx_{n+1})) \end{aligned}$$

(ii) den,

$$\delta_1(STx_n, STx_{n+1}) \leq c\delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}). \quad (2.3)$$

Eş. 2.2' i kullanarak,

$$\begin{aligned} d_2(y_{n+1}, y_{n+2}) &\leq \delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}) \\ &\leq g(\delta_1(Sy_n, Sy_{n+1}), d_2(y_{n+1}, TSy_n), \delta_2(y_{n+1}, TSy_{n+1})) \\ &\leq g(\delta_1(STx_{n-1}, STx_n), 0, \delta_2(TSy_n, TSy_{n+1})). \end{aligned}$$

(ii) den

$$\delta_2(TSy_n, TSy_{n+1}) \leq c\delta_1(STx_{n-1}, STx_n). \quad (2.4)$$

Eş.2.3 ve 2.4' den

$$\delta_1(STx_n, STx_{n+1}) \leq c^2\delta_1(STx_{n-1}, STx_n).$$

Devamın da ise tümevarımla,

$$d_1(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq c^{2n-2}\delta_1(STx_1, STx_2),$$

$$d_2(y_{n+1}, y_{n+2}) \leq c^{2n-3}\delta_2(TSy_1, TSy_2).$$

$r = 1, 2, \dots$ için ,

$$\begin{aligned} d_1(x_{n+1}, x_{n+r+1}) &\leq d_1(x_{n+1}, x_{n+2}) + d_1(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + d_1(x_{n+r}, x_{n+r+1}) \\ &\leq (c^{2n-2} + c^{2n} + c^{2n+2} + \dots + c^{2(n+r+1)})\delta_1(STx_1, STx_2) \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > n_0$ için $c < 1$ olduğundan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla tam metrik uzay olan X ve Y de birer Cauchy dizileridir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u \quad u \in X, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = v \quad v \in Y$$

olur. Üstelik $m > n$ için,

$$\delta_1(u, STx_n) \leq d_1(u, x_{m+1}) + \delta_1(x_{m+1}, STx_n)$$

$$\leq d_1(u, x_{m+1}) + \delta_1(STx_m, STx_n) . \quad (2.6)$$

Eş. 2.5' ten dolayı $m, n \geq n_0$ için,

$$\delta_1(u, STx_n) \leq d_1(u, x_{m+1}) + \varepsilon$$

olur. $n > N$ ve $m \rightarrow \infty$ için

$$\delta_1(u, STx_n) \leq \varepsilon$$

olur dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} STx_n = \{u\}$ olur. (ε keyfi seçilmiştir.)

Benzer olarak ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} TSy_{n+1} = \{v\} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$$

olur. Burada $x_{n+1} \in Sy_{n+1}$ olduğunu daha önceden biliyoruz. Kabul edelim ki T sürekli olsun,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tu = \{v\}$$

olur.

Eş. 2.1' den,

$$\delta_1(STu, STx_n) \leq f(\delta_2(Tu, Tx_n), d_1(x_n, Sv), \delta_1(x_n, STu))$$

$n \rightarrow \infty$ olarak alınırsa,

$$\delta_1(STu, u) \leq f(0, d_1(u, STu), 0) \leq f(0, \delta_1(u, STu), 0).$$

(ii) den dolayı,

$$\delta_1(u, STu) \leq c\delta_1(u, STu)$$

olur. Ayrıca, $STu = \{u\} = Sv$ olur. Üstelik $TSv = Tu = \{v\}$ dolayısıyla u , ST fonksiyonunun, v ise TS fonksiyonunun sabit noktalarıdır.

T yerine S fonksiyonunu sürekli olarak kabul edersek aynı sonuçları elde edilir.

Bu sabit noktaların tekliğini ispat için kabul edelim ki ST ikinci bir u' sabit noktasına, TS de ikinci bir v' sabit noktasına sahip olsun.

Eş. 2.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d_2(v, v') &= \delta_2(TSv, TSv') \\ &\leq g(\delta_1(Sv, Sv'), d_2(v', TSv), \delta_2(v', TSv')) \\ &= g(\delta_1(Sv, Sv'), d_2(v', v), 0) \\ &\leq g(\delta_1(Sv, Sv'), d_2(v', v), 0). \end{aligned}$$

(ii) den,

$$d_2(v, v') \leq c\delta_1(Sv, Sv'). \quad (2.7)$$

Eş. 2.1 kullanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_1(Sv, Sv') &\leq \delta_1(STSv, STSv') \\
&\leq f(d_2(v, v'), d_1(Sv', Sv), \delta_1(Sv', Sv')) \\
&\leq f(d_2(v, v'), \delta_1(Sv', Sv), \delta_1(Sv', Sv')) .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Benzer olarak,

$$\delta_1(Sv', Sv') \leq \delta_1(Sv', STSv') \leq f(0, 0, \delta_1(Sv', Sv')) .$$

(ii) den

$$\delta_1(Sv', Sv') = 0 .$$

Eş. 2.8'den,

$$\delta_1(Sv, Sv') \leq f(d_2(v, v'), \delta_1(Sv', Sv), 0) .$$

(ii) den,

$$\delta_1(Sv, Sv') \leq c d_2(v, v') . \tag{2.9}$$

Eş.2.7 ve 2.9' dan,

$$d_2(v, v') \leq c^2 d_2(v, v')$$

olur. Dolayısıyla $v = v'$ olur yani tek bir v noktası vardır.

$STu' = \{u'\}$ ve $TSv = \{v\}$ olması $TSTu' = Tu' = \{v\}$ anlamına gelir. Dolayısıyla

$$\{u\} = STu = Sv = STu' = \{u'\}.$$

Sonuç olarak u tektir. Teoremin ispatı böylelikle tamamlanmış olur.

Eğer $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ ise aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

3.1.1. Sonuç

(X, d_1) ve (Y, d_2) tam metrik uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ iki fonksiyon olsun.

$\forall x \in X$ ve $y \in Y$ ve $f, g \in F$ için

$$d_1(STx, STx') \leq f(d_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), d_1(x', STx')), \quad (2.10)$$

$$d_2(TSy, TSy') \leq g(d_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), d_2(y', TSy')) \quad (2.11)$$

koşulları sağlansın. Eğer S veya T fonksiyonlarından herhangi biri sürekli ise ST , bir tek $u \in X$ sabit noktasına ve TS de bir tek $v \in Y$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik $Tu = v$ ve $Sv = u$ dir.

Eğer $f(t_1, t_2, t_3) = g(t_1, t_2, t_3) = c \max\{t_1, t_2, t_3\}, 0 < c < 1$ olarak alınırsa 3.1.2 teorem den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

3.1.2. Sonuç

(X, δ_1) ve (Y, δ_2) tam metrik uzay, $T : X \rightarrow B(Y)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ve $S : Y \rightarrow B(X)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in X$ ve $y \in Y$ ve $0 < c < 1$ için

$$\delta_1(STx, STx') \leq c \max\{\delta_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), \delta_1(x', STx')\},$$

$$\delta_2(TSy, TSy') \leq c \max \{ \delta_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), \delta_2(y', TSy') \}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda ST nin X 'de bir tek sabit u ve TS nin Y 'de bir tek v sabit noktaları vardır. Üstelik $Tu = \{v\}, Sv = \{u\}$ dir.

Eğer burada $T : X \rightarrow Y$ ve $S : Y \rightarrow X$ olarak alınırsa aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

3.1.3. Sonuç

(X, δ_1) ve (X, δ_2) tam metrik uzaylar, $T : X \rightarrow B(Y)$ ve $S : Y \rightarrow B(X)$ sürekli fonksiyonlar olsun. $\forall x \in X$ ve $y \in Y$ ve $0 < c < 1$ için

$$d_1(STx, STx') \leq c \max \{ d_2(Tx, Tx'), d_1(x', STx), d_1(x', STx') \},$$

$$d_2(TSy, TSy') \leq c \max \{ d_1(Sy, Sy'), d_2(y', TSy), d_2(y', TSy') \}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda ST nin X 'de tek bir sabit u noktası, TS nin ise Y 'de bir tek sabit v noktası vardır. Üstelik $Tu = v$ ve $Sv = u$ olur.

3.2. Üç Tam Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde farklı üç metrik uzayda tanımlı üç fonksiyonun bileşkelerinin hangi koşullar altında bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ve bu sabit noktanın hangi koşulları sağladığını inceleyeceğiz. Bu kısımda verilen tanım ve teoremler [39] da detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.2.1. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzaylar ve $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ ve $R : Z \rightarrow X$ fonksiyonları $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$ ve $0 \leq c < 1$ sayısı için

$$d(RSy, RSTx) \max \{d(x, RSy), d(x, RSTx)\} \leq c\sigma(Sy, STx) \max \{\sigma(Sy, STx), d(x, RSTx)\},$$

$$p(TRz, TRSy) \max \{p(y, TRz), p(y, TRSy)\} \leq cd(Rz, RSy) \max \{d(Rz, RSy), p(y, TRSy)\},$$

$$\sigma(STx, STRz) \max \{\sigma(z, STx), \sigma(z, STRz)\} \leq cp(Tx, TRz) \max \{p(Tx, TRz), \sigma(z, STRz)\}$$

koşullarını sağlasın. Eğer R, S, T fonksiyonlarından biri sürekli ise RST nin X de bir tek sabit u noktası, TRS nin Y de bir tek sabit v noktası ve STR nin Z de bir tek w sabit noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ dur [18].

3.2.2. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzaylar ve $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ ve $R : Z \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$ ve $0 \leq c < 1$ için

$$d(RSTx, RSy) \leq c \max \{p(y, Tx), d(x, RSTx), d(x, RSy), \sigma(Sy, STx)\},$$

$$p(TRSy, TRz) \leq c \max \{\sigma(z, Sy), p(y, TRSy), p(y, TRz), d(Rz, RSy)\},$$

$$\sigma(SRSz, STx) \leq c \max \{d(x, Rz), \sigma(z, STRz), \sigma(z, STx), p(Tx, TRz)\}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda RST nin X de bir tek u sabit noktası, TRS nin Y de bir tek v sabit noktası ve STR nin Z de bir tek w sabit noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ dur.

IR_+ ile negatif olmayan reel sayıların kümesini ve aşağıdaki koşulları sağlayan $f : IR_+^3 \rightarrow IR_+$ fonksiyonlarının kümesini ise μ ile göstereceğiz.

i. Tüm $x \in R$ için f üst yarı sürekli,

ii. Tüm $u, v \geq 0$ için $u \leq f(v, 0, u)$ veya $u \leq f(v, u, 0)$ ise

en az bir $0 \leq c < 1$ sabit sayısı için $u \leq cv$ dir [21].

Şimdi 3.2.1 Teorem nin bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.3. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzaylar ve $T : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ ve $R : Z \rightarrow X$ fonksiyonları $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$ için ve $f, g, h \in \mu$ olmak üzere

$$d(RSy, RSTx) \leq f(\sigma(Sy, STx), d(x, RSTx), d(x, RSy)), \quad (2.1)$$

$$p(TRz, TRSy) \leq g(d(Rz, RSy), p(y, TRSy), p(y, TRz)), \quad (2.2)$$

$$\sigma(STx, STRz) \leq h(p(Tx, TRz), \sigma(z, STRz), \sigma(z, STx)) \quad (2.3)$$

koşullarını sağlasın. Eğer T, S, R fonksiyonlarının herhangi biri sürekli ise RST nin X de bir tek sabit u noktası, TRS nin Y de bir tek sabit v noktası ve STR nin Z de bir tek sabit w noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ dur.

İspat

$x_o \in X$ keyfi bir nokta olsun. X, Y ve Z 'de sırasıyla $\{x_n\}, \{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerini $n = 1, 2, \dots$ için

$$x_n = (RST)^n x_o, \quad y_n = Tx_{n-1}, \quad z_n = Sy_n$$

şeklinde tanımlayalım.

Eş. 2.1' de $y = y_n$ ve $x = x_n$ olarak alınır ise;

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq f(\sigma(z_n, z_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), 0)$$

dır. (ii) den dolayı, $c_1 \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c_1 \sigma(z_n, z_{n+1}). \quad (2.4)$$

Eş. 2.3' de $x = x_{n-1}$ ve $z = z_n$ alınırsa,

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq h(p(y_n, y_{n+1}), \sigma(z_n, z_{n+1}), 0)$$

(ii) den,

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c_3 p(y_n, y_{n+1}). \quad (2.5)$$

Burada $c_3 \in [0, 1)$ dir.

$z = z_{n-1}$ ve $y = y_n$ için Eş. 2.2 uygulanırsa,

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq g(d(x_{n-1}, x_n), p(y_n, y_{n+1}), 0)$$

olur. (ii) den,

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq c_2 d(x_{n-1}, x_n) \quad (2.6)$$

olur. Burada $c_2 \in [0, 1]$ dır. (2.4), (2.5) ve (2.6) eşitsizlikleri ardı ardına yazılırsa

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c_1 \sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c_1 c_3 p(y_n, y_{n+1}) \leq \dots \leq (c_1 c_2 c_3)^n d(x_0, x_1).$$

$0 \leq c_1 c_2 c_3 < 1$, $\{x_n\}, \{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ birer couchy dizisi olduğundan sırasıyla $u \in X, v \in Y$ ve $w \in Z$ noktalarına yakınsar.

Şimdi kabul edelim ki S sürekli olsun. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} S y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ve dolayısıyla

$$S v = w \quad (2.7)$$

olur. Eş. 2.1 uygulanırsa,

$$d(RS v, x_{n-1}) \leq f(\sigma(S v, z_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, RS v)).$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (i) koşulundan,

$$d(RS v, u) \leq f(\sigma(S v, w), 0, d(u, RS v))$$

2.7 denkleminde,

$$d(RS v, u) \leq f(0, 0, d(u, RS v))$$

(ii) koşulundan $d(u, RS_\nu) \leq c.0$ ve Eş.(2.7) den,

$$u = RS\nu = R w . \quad (2.8)$$

Eş. 2.2' den,

$$p(Tu, y_{n+1}) \leq g(d(u, x_n), p(y_n, y_{n+1}), p(y_n, TRw)) .$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (i) koşulundan,

$$p(Tu, \nu) \leq g(0, 0, p(\nu, TRw)) .$$

Eş.2.8' den,

$$p(Tu, \nu) \leq g(0, 0, p(\nu, Tu)) .$$

(ii) koşulundan,

$$Tu = \nu \quad (2.9)$$

olur. Eş. 2.7 , 2.8 ve 2.9' dan,

$$TRS\nu = TRw = Tu = \nu ,$$

$$STRw = STu = S\nu = w ,$$

$$RSTu = RS\nu = R w = u .$$

S yerine R veya T sürekli ise aynı sonuçlar elde edilir.

Şimdi u sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki RST 'nin ikinci bir sabit noktası u' olsun.

Eş. 2.1' den,

$$d(RSTu, RSTu') \leq f(\sigma(STu', STu), d(u, RSTu), d(u, RSTu'))$$

$$d(u, u) \leq f(\sigma(STu, STu'), 0, d(u, u')) .$$

(ii) den,

$$d(u, u') \leq c_1 \sigma(STu, STu') \quad (2.10)$$

olur. Eş. 2.3' den,

$$\sigma(STRSTu, STu') \leq h(p(Tu', TRSTu), 0, \sigma(STu, STu'))$$

$$\sigma(STu, STu') \leq h(p(Tu', Tu), 0, \sigma(STu, STu')) .$$

(ii) den,

$$\sigma(STu, STu') \leq c_2 p(Tu, Tu') . \quad (2.11)$$

Eş. 2.2' den,

$$p(Tu, Tu') \leq c_2 d(u, u') . \quad (2.12)$$

Eş. 2.10, 2.11 ve 2.12' den

$$d(u, u') \leq (c_1 c_2 c_3) d(u, u')$$

olur. Buradan anlaşılabileceği gibi $u = u'$ dır. RST nin sabit noktası olan u tektir. Aynı şekilde TRS nin bir tek sabit noktasının v , STR nin bir tek noktasının w olduğu gösterilebilir.

Eğer $0 \leq c < 1$ olmak üzere,

$$f(t_1, t_2, t_3) = g(t_1, t_2, t_3) = h(t_1, t_2, t_3) = \frac{ct_1 \max\{t_1, t_2\}}{\max\{t_2, t_3\}}$$

olarak alınırsa Teorem 3.2.1.'i Teorem 3.2.3.'ün sonucu olarak görebiliriz.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $f: IR_+^4 \rightarrow IR_+$ fonksiyonların kümesini $\mathfrak{F}$ ile gösterelim.

(iii) f üst yarı sürekli,

(iv) Eğer her $u, v \geq 0$ için $u \leq f(v, u, 0, w)$ veya $u \leq f(v, 0, u, w)$ ise,

en az bir $0 \leq c < 1$ reel sayısı vardır ki $u \leq c \max\{v, w\}$.

Teorem 3.2.2 yi aşağıdaki gibi genelleyebiliriz.

3.2.4. Teorem

$(X, d), (Y, p), (Z, \sigma)$ tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow Y, S: Y \rightarrow Z$ ve $R: Z \rightarrow X$ fonksiyonları tüm $x \in X, y \in Y$ ve $z \in Z$ için ve $f, g, h \in \mathfrak{F}$ olmak üzere

$$d(RSTx, RSy) \leq f(p(y, T_x), d(x, RST_x), d(x, RS_y), \sigma(S_y, ST_x)), \quad (2.13)$$

$$p(TRz, TRSy) \leq g(\sigma(z, Sy), p(y, TRSy), p(y, TRz), d(Rz, RSy)), \quad (2.14)$$

$$\sigma(STRz, STx) \leq h(d(x, Rz), \sigma(z, STRz), \sigma(z, STx), p(Tx, TRz)) \quad (2.15)$$

koşullarını sağlasın. Eğer R, S, T fonksiyonlarından herhangi biri sürekli ise RST 'nin X 'de bir tek u sabit noktası, TRS 'nin Y 'de bir tek v sabit noktası, STR 'nin Z 'de bir tek w sabit noktası vardır. Üstelik $Tu = v, Sv = w, Rw = u$ olur.

İspat

$x_o \in X$ keyfi bir nokta olsun. X, Y, Z 'de sırasıyla $\{x_n\}, \{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerini tanımlayalım öyle ki;

$$x_n = (RST)^n x_o, y_n = T_{x_{n-1}}, z_n = Sy_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eş. 2.14'den ve (iv) özelliğinden $z = z_{n-1}$ ve $y = y_n$ için

$$p(y_n, y_{n+1}) = p(TRz_{n-1}, TRSy_n) \leq g(\sigma(z_{n-1}, z_n), p(y_n, y_{n+1}), 0, d(x_{n-1}, x_n))$$

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq c \max \{d(x_{n-1}, x_n), \sigma(z_{n-1}, z_n)\}. \quad (2.16)$$

(iv) ve Eş. 2.16' dan ,

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c \max \{d(x_{n-1}, x_n), p(y_n, y_{n+1})\} \quad (2.17)$$

$$\leq c \max \{d(x_{n-1}, x_n), \sigma(z_{n-1}, z_n)\}$$

Eş. 2.13' de $y = y_n$ ve $x = x_n$

olarak alınırsa

$$d((x_n, x_{n+1}) = d(RSTx_n, RSy_n) \leq f(p(y_n, y_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), 0, \sigma(z_n, z_{n+1}))$$

(iv) özelliğinden ve Eş. 2.16 ve 2.17 'den

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq c \max \{ p(y_n, y_{n+1}), \sigma(z_n, z_{n+1}) \} \\ &= c \max \{ d(x_{n-1}, x_n), \sigma(z_{n-1}, z_n) \} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tümevarımla kolaylıkla 2.16 , 2.17 ve 2.18 koşullarından ,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1} \max \{ d(x_1, x_2), \sigma(z_1, z_2) \} ,$$

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq c^{n-1} \max \{ d(x_1, x_2), \sigma(z_1, z_2) \} ,$$

$$\sigma(z_n, z_{n+1}) \leq c^{n-1} \max \{ d(x_1, x_2), \sigma(z_1, z_2) \}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Burada $0 \leq c < 1$ olduğundan $\{X_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ birer cauchy dizisidir ve sırasıyla limitleri $u \in X$, $v \in Y$ ve $w \in Z$ noktalarıdır.

Şimdi farz edelim ki S sürekli olsun. Bu durumda $\lim Sy_n = \lim z_n$ dolayısıyla,

$$Sv = w \quad (2.19)$$

olur. Eş. 2.13'den $y = v$ $x = x_n$ için,

$$d(RSv, x_{n+1}) \leq f(p(v, Tx_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, RSv), v(Sv, STx_n)) .$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (iii) özelliğinden,

$$d(RS\nu, u) \leq f(0, 0, d(RS\nu, u), 0),$$

(iv) özelliğinden $d(RS\nu, u) = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$RS\nu = u \tag{2.20}$$

olarak bulunur.

2.19 denkleminde,

$$Rw = u \tag{2.21}$$

eşitliğini yazabiliriz.

2.20 denkleminde ve Eş. 2.14' den $z = S\nu$ ve $y = y_n$ için

$$P(Tu, y_{n+1}) \leq g(\sigma(S\nu, Sy_n), P(y_n, TRSy_n), p(y_n, TRS\nu), d(RS\nu, RSy_n)).$$

$n \rightarrow \infty$ için ve (iii) özelliğinden,

$$p(Tu, \nu) \leq g(0, 0, p(\nu, Tu), 0).$$

(iv) özelliğinden $p(Tu, \nu) = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$Tu = \nu. \tag{2.22}$$

2.19, 2.21 ve 2.22 denklemlerinden,

$$TRS\nu = TRw = Tu = \nu,$$

$$STRw = STu = Sv = w,$$

$$RSTu = RSv = Rw = u.$$

Benzer sonuca S yerine R veya T sürekli olarak kabul edilerek aynı yolla ulaşabiliriz.

Şimdi u' 'nin tekliği ispat edelim. Farz edelim ki RST 'nin ikinci bir sabit noktası u' olsun. Eş.2.13'den $y = Tu$ ve $x = u'$ için

$$d(u, u') = d(RSTu, RSTu') \leq f(p(Tu, Tu'), 0, d(u, u'), \sigma(STu, STu')).$$

(ii) den,

$$d(u, u') \leq c \max \{ p(Tu, Tu'), \sigma(STu, STu') \}. \quad (2.23)$$

Üstelik Eş. 2.14' den $z = STu$ ve $y = Tu'$ için

$$p(Tu, Tu') \leq g(\sigma(STu, STu'), 0, p((Tu, Tu'), d(u, u'))).$$

(ii) den,

$$p(Tu, Tu') \leq c \max \{ \sigma(STu, STu'), d(u, u') \}. \quad (2.24)$$

Eş. 2.23 ve 2.24' den

$$d(u, u') \leq c \sigma(STu, STu'). \quad (2.25)$$

Son olarak Eş. 2.15' den ve (ii) özelliğinden,

$$\sigma(STu, STu') \leq h(d(u, u'), 0, \sigma(STu, STu'), p(Tu, Tu')).$$

(ii) den

$$\sigma(STu, STu') \leq c \max \{d(u, u'), p(Tu, Tu')\}. \quad (2.26)$$

Eş.(2.24), (2.25) ve (2.26) dan

$$d(u, u') \leq c\sigma(STu, STu') \leq c^2\sigma(STu, STu'),$$

dolayısıyla $u = u'$ olur. Burada $0 \leq c < 1$ dir. Sonuç olarak RST 'nin bir tek sabit u noktası vardır. Benzer olarak TRS 'nin bir tek sabit v noktası, STR 'nin bir tek sabit w noktası olduğunu gösterebiliriz.

Burada $0 \leq c < 1$ için,

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = g(t_1, t_2, t_3, t_4) = h(t_1, t_2, t_3, t_4) = c \max \{t_1, t_2, t_3, t_4\},$$

olarak tanımlanırsa 3.2.2 Teorem ne 3.2.4 Teorem nin sonucu olarak bakabiliriz.

3.3. Bir Kapalı (implicit) Bağlantıyı Sağlayan Küme Değerli Dönüşüm İçin Bir Genel Seçme Teoremi

Bu kısımda bir küme değerli fonksiyon için verilen kapalı bir bağlantı sağlandığında verilen koşulları sağlayan tek değerli bir Caristi tipi fonksiyonun seçilebileceği üzerinde durulmuştur. Bu bölümdeki tanım ve teoremler [24] de detaylı bir şekilde incelenmiştir.

3.3.1. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve X 'in boştan farklı alt kümelerinin uzayı $P(X)$ olsun. X 'in boştan farklı kapalı alt kümelerinin uzayı $Pcl(X)$ ile gösterilir.

$$D : P(X) \times P(X) \rightarrow IR_+, \quad D(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$H : P(X) \times P(X) \rightarrow IR_+ \cup \{+\infty\}, \quad H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} D(a, B), \sup_{b \in B} D(b, A) \right\}$$

fonksiyonlarını dikkate alarak aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Eğer (X, d) tam metrik uzay ise $(Pcl(x), H)$ de tam metrik uzaydır.

3.3.1. Teorem

(X, d) bir metrik uzay ve $F : X \rightarrow Pcl(X)$ küme değerli fonksiyon olsun. Bu durumda en az bir Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır, öyle ki her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ dir [17].

3.3.2. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $F : X \rightarrow Pcl(X)$ $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ $a + b + c < 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için $H(F(x), F(y)) \leq ad(x, y) + bD(x, F(x)) + cD(y, F(y))$ koşulu sağlansın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyonu vardır [22].

3.3.3. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $F : X \rightarrow Pcl(X)$, $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}_+$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 < 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$H(F(x), F(y)) \leq a_1 d(x, y) + a_2 D(x, F(x)) + a_3 D(y, F(y)) + a_4 D(x, F(y)) + a_5 D(y, F(x)),$$

koşulu sağlansın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyonu vardır [29].

3.3.4. Teorem

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $F : X \rightarrow Pcl(X)$ çok değerli fonksiyonu $0 < q < 1$ için

$$H(F(x), F(y)) \leq q \max \{d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))\},$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde bir Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyonu vardır [23].

Aşağıdaki koşulları sağlayan $F(t_1, \dots, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonların kümesini $\mathcal{W}$ ile gösterelim.

(F_1) F, t_1 değişkenine göre azalmayan, t_3 ve t_5 için artmayan,

(F_2) her $u, v > 0$ için $F(u, v, v, u, v, 0) \leq 0$ olmak üzere en az bir $h \in (0, 1)$ vardır öyle ki $u \leq hv$.

3.3.1. Örnek

$F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - a_1 t_2 - a_2 t_3 - a_3 t_4 - a_4 t_5 - a_5 t_6$, burada

$a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R}_+, a_1 + a_2 + a_4 > 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 < 1$

(F_1) koşulun sağlandığı açıktır.

$$F(u, v, v, u, u + v, 0) = u - a_1 v - a_2 v - a_3 u - a_4 (u + v) \leq 0$$

$$u - a_4 u - a_3 u \leq a_1 v + a_2 v + a_4 v$$

$$u(1 - a_4 - a_3) \leq v(a_1 + a_2 + a_4)$$

$$u \leq \frac{(a_1 + a_2 + a_4)}{(1 - a_4 - a_3)} v$$

$$h = \frac{(a_1 + a_2 + a_4)}{1 - a_4 - a_3} \text{ denilirse } h \in (0, 1) \text{ dir.}$$

3.3.2. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = t_1 - k \max \left\{ t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}(t_5 + t_6) \right\}, \quad 0 < k < 1$$

(F_1) koşulun sağlandığı açıktır.

$$(F_2) F(u, v, v, u, u + v, 0) = u - k \max \left\{ u, v, \frac{1}{2}(u + v) \right\} \leq 0 \text{ olsun. Eğer } u > 0 \text{ } u \geq v \text{ ise}$$

$u(1 - k) \leq 0$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $u < v$ olur. Buradan görüldüğü üzere $u < hv$ dir.

3.3.3. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = t_1^2 + at_1t_2 - bt_3t_4 - ct_5t_6 \quad a, c \geq 0 \quad \text{ve} \quad 0 < b < 1$$

(F_1) koşulunun sağlandığı görülür.

$$(F_2) \quad F(u, v, v, u, u+v, 0) = u^2 + auv - buv \leq 0 \quad \text{olsun.}$$

Buradan $u^2 - buv \leq 0$ olduğu açıktır. Eğer $u > 0$ ise

$$u^2 \leq buv$$

$$u \leq bv,$$

burada $0 < b < 1$ Eğer $u = 0$ ise $u \leq bv$.

3.3.4. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = t_1^2 + \frac{t_1}{1+t_5+t_6} - (at_2^2 + bt_3^2 + ct_4^2) \quad \text{burada} \quad a, b, c \geq 0, \quad a+b > 0 \quad \text{ve}$$

$$a+b+c < 1.$$

(F_1) koşulun sağlandığı tanımdan görülür.

$$(F_2) \quad F(u, v, v, u, u+v, 0) = u^2 + \frac{u}{1+u+v} - (av^2 + bv^2 + cu^2) \leq 0 \quad \text{olsun. Buradan;}$$

$$u^2 - (av^2 + bv^2 + cu^2) \leq 0$$

$$u^2 - cu^2 - (av^2 + bv^2) \leq 0$$

$$u^2(1-c) \leq v^2(a+b)$$

$$u^2 \leq \frac{a+b}{1-c} v^2$$

$$u \leq \sqrt{\frac{a+b}{1-c}} v$$

$$0 < h = \sqrt{\frac{a+b}{1-c}} < 1 \text{ için } u \leq hv \text{ olur.}$$

3.3.5. Örnek

$$F(t_1, \dots, t_6) = \max\{t_1, t_2, t_4\} - \min\{t_5, t_6\} - qt_3 \text{ burada } 0 < q < 1.$$

(F_1) Koşulun sağlandığı kolayca görülür.

$$(F_2) \quad F(u, v, v, u, u+v, 0) = \max\{u, v\} - qv \leq 0 \text{ olsun.}$$

Eğer $u > 0$ ve $u > v$ ise,

$$\max\{u, v\} - qv \leq 0$$

$$u - qu \leq 0 (u > v)$$

$$u(1-q) \leq 0$$

olur. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $u < v$ ve $0 < h = q < 1$ için $u \leq hv$ olur.

3.3.5. Teorem

(X, d) bir metrik uzay ve $F : X \rightarrow Pcl(X)$ küme değerli bir fonksiyon, $\Phi \in \mathcal{P}$ ve her $x, y \in X$ için

$$\Phi(H(F(x), F(y)), d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))) \leq 0, \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) \in F(x)$ olacak şekilde bir Caristi tipi $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır.

İspat

$$\varepsilon = \frac{1-h}{2} \text{ ve } g(x) = \frac{1}{\varepsilon} D(x, F(x)) \text{ olsun.}$$

Buradan ,

$$\varepsilon + h = \frac{1+h}{2} < 1$$

olduğu açıktır. Buradan $\frac{1}{\varepsilon + h} > 1$ dır. Böylece her $x \in X$ için,

$$d(x, f(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon + h} D(x, F(x))$$

olacak şekilde $f(x) \in F(x)$ seçilebilir.

Eş. 3.1' den ve (F_1) den,

$$\Phi(H(F(x), F(f(x))), d(x, f(x)), D(x, F(x)), D(f(x), F(f(x))),$$

$$D(x, F(f(x))), D(f(x), F(x))) \leq 0 ,$$

$$\Phi(D(f(x), F(f(x))), d(x, f(x)), d(x, f(x)), D(f(x), F(f(x))),$$

$$d(x, f(x)) + D(f(x), F(f(x))), 0) \leq 0.$$

(F_2) den her $x \in X$ için,

$$D(f(x), F(f(x))) \leq h d(x, f(x)) .$$

Şimdi f 'in bir Caristi tipi operatör olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ için,

$$d(x, f(x)) = \frac{1}{\varepsilon} [(\varepsilon + h)d(x, f(x)) - hd(x, f(x))]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} [D(x, F(x)) - D(f(x), F(f(x)))]$$

$$= g(x) - g(f(x)) .$$

4. Menger Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

4.1. Menger Uzaydaki Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda verilen tanım ve teoremler [10] da detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1.1. Tanım

$F : IR \rightarrow IR^+$, azalmayan soldan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\inf \{F(t) : t \in IR\} = 0$ ve $\sup \{F(t) : t \in IR\} = 1$ şartları sağlansın bu durumda F fonksiyonuna *dağılım* fonksiyonu denir.

Tüm dağılım fonksiyonlarının kümesini L ile gösterelim. G ile gösterilen özel bir dağılım fonksiyonu,

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

4.1.2. Tanım

X boştan farklı bir küme ve F , $X \times X$ 'den IR 'de tanımlı tüm dağılım fonksiyonlarının kümesine tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (X, F) ikilisine *probabilistik metrik uzay (PM-space)* denir.

Burada her $x, y \in X$ için $F(xy)$ dağılım fonksiyonunu $F_{x,y}$ ve $u \in IR$ için $F(xy)$ 'nin aldığı değeri ise $F_{x,y}(u)$ şeklinde temsil edilir.

Ayrıca $F_{x,y}$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar.

(1) $F_{x,y}(u) = 1$ dir. Her $u > 0$ için ancak ve ancak $x = y$ ise,

(2) $F_{x,y}(0) = 0$, her $x, y \in X$ için,

(3) $F_{x,y}(u) = F_{y,x}(u)$ her $x, y \in X$ için,

(4) Eğer $F_{x,y}(u) = 1$ ve $F_{y,z}(v) = 1$ ise $F_{x,z}(u+v) = 1$ dir her $x, y, z \in X$ ve

$u, v > 0$ için,

4.1.3. Tanım

$t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t -norm olarak adlandırılır. Eğer;

(1) $t(a,1) = a, t(0,0) = 0$,

(2) $t(a,b) = t(b,a)$,

(3) $t(c,d) \geq t(a,b)$ dir $c \geq a$ ve $d \geq b$ için,

(4) $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))$.

4.1.4. Tanım

$(X, \mathbf{F})$ bir PM -uzay, t ise bir t -norm olmak üzere her $x, y, z \in X$ ve $u, v > 0$ için

$$F_{x,y}(u+v) \geq t(F_{x,y}(u), F_{y,z}(v))$$

genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği sağlanır ise $(X, \mathbf{F}, t)$ üçlüsüne *Menger* uzay denir.

Menger uzaylarda komşuluk kavramı Schweizer ve Sklar tarafından ortaya atılmıştır [26].

4.1.5. Tanım

(X, F, t) bir Menger uzay olsun. Eğer $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ ise x 'in (ε, λ) komşuluğu $U_x(\varepsilon, \lambda)$ olarak gösterilir ve

$$U_x(\varepsilon, \lambda) = \{y \in X : F_{x,y}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

olarak tanımlanır.

X 'de bir (ε, λ) topolojisi ise $\{U_x(\varepsilon, \lambda) : x \in X, \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)\}$ komşuluklar ailesi tarafından üretilir.

4.1.1. Uyarı

Eğer t sürekli ise (X, F, t) Menger uzayı (ε, λ) topolojisine göre *Hausdorff* uzaydır [26].

4.1.6. Tanım

(X, F, t) tam Menger uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer;

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \inf_{x,y \in A} F_{x,y}(u) = 1$$

ise A 'ya *sınırlı* küme denir.

4.1.7. Tanım

$B(X)$ ile X Menger uzayının boştan farklı sınırlı alt kümelerinin ailesini gösterelim.

Her $A, B \in B(X)$ ve her $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{A,B}(u) = \inf \{F_{x,y}(u) : x \in A, y \in B\},$$

$${}_DF_{A,B}(u) = \sup \{F_{x,y}(u) : x \in A, y \in B\},$$

$${}_HF_{A,B}(u) = \inf \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} F_{a,b}(u) \right\}$$

olarak tanımlanır.

4.1.2. Uyarı

Yapılan tanımdan açık olarak görülüyor ki her $A, B \in B(X)$ ve $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{A,B}(u) = {}_{\delta}F_{B,A}(u), \quad {}_DF_{A,B}(u) = {}_DF_{B,A}(u) \text{ ve } {}_HF_{A,B}(u) = {}_HF_{B,A}(u)$$

olur. Eğer $A = \{x\}$ ise ,

$${}_{\delta}F_{\{x\},B}(u) = {}_{\delta}F_{x,B}(u), \quad {}_DF_{\{x\},B}(u) = {}_DF_{x,B}(u) \text{ ve } {}_HF_{\{x\},B}(u) = {}_HF_{x,A}(u)$$

olarak tanımlanır.

4.1.8. Tanım

(X, F, t) tam Menger uzay, $S : X \rightarrow B(X)$ küme değerli bir fonksiyon ve $I : X \rightarrow X$ tek değerli fonksiyon olsun. S ve I fonksiyonlarına *bağdaşabilir* dönüşümler denir. Öyle ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{SIx_n, ISx_n}(u) = 1.$$

Burada $\{x_n\}$ X de bir dizidir. Öyle ki her $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{Ix_n, Sx_n}(u) = 1.$$

4.1.9. Tanım

$\{A_n\}$, $B(X)$ de bir dizi olsun. Eğer her $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{A_n, A}(u) = 1$$

ise $\{A_n\}$ dizisi A kümesine δ -yakınsak denir. Bu

$$A_n \xrightarrow{\delta} A \text{ olarak gösterilir.}$$

Bu çalışmada IR^+ ile negatif olmayan reel sayıların kümesini, IN ile de pozitif doğal sayıların kümesini göstereceğiz. Ayrıca $t(x,y) = \min(x,y)$ olarak alacağız.

4.1.1. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. $A, B, C \in B(X)$ ve $u, v > 0$ için

$${}_{\delta}F_{A,C}(u+v) \geq \min \{ {}_{\delta}F_{A,B}(u), {}_{\delta}F_{B,C}(u) \}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Her $u, v > 0$ ve her bir $a \in A$, $b \in B$ ve $c \in C$ için

$$\min \{ {}_{\delta}F_{A,B}(u), {}_{\delta}F_{B,C}(v) \} \leq \min \{ F_{a,b}(u), F_{b,c}(v) \} \leq F_{a,c}(u+v) \text{ olur. Dolayısıyla}$$

$$\min \{ {}_{\delta}F_{A,B}(u), {}_{\delta}F_{B,C}(v) \} \leq {}_{\delta}F_{A,C}(u+v)$$

olduğu görülür.

4.1.2.Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay $A, B \in B(X)$, $c \in X$ ve $u, v > 0$ için

$${}_H F_{A,c}(u+v) \geq \min \{ {}_H F_{A,B}(u), {}_H F_{B,c}(v) \}$$

olur.

İspat

Menger uzayın tanımından her bir $a, b, c \in X$ ve tüm $u, v > 0$ için,

$$F_{a,c}(u+v) \geq \min \{ F_{a,b}(u), F_{b,c}(v) \}$$

olduğunu biliyoruz. $c \in C$ ler için infimum alınırsa

$$\inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) \geq \min\{F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\}$$

olur. Dolayısıyla $a \in A$ lar için supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) &\geq \sup_{a \in A} \min\{F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\} \\ &= \min\{\sup_{a \in A} F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\} \\ &\geq \min\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\} \end{aligned}$$

olur. Daha sonra $b \in B$ ler için supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) &\geq \sup_{b \in B} \min\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\} \\ &\geq \min\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} F_{b,c}(v)\} \end{aligned}$$

Benzer olarak, her bir $a, b, c \in X$ ve tüm $u, v > 0$ için

$$F_{a,c}(u+v) \geq \min\{F_{a,b}(u), F_{b,c}(v)\}$$

olur. Buradan $a \in A$ lar için infimum alınırsa

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v) &\geq \inf_{a \in A} \min\{F_{a,b}(u), F_{b,c}(v)\} \\ &= \min\{\inf_{a \in A} F_{a,b}(u), F_{b,c}(v)\}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $c \in C$ ler için supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{c \in C} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v) &\geq \sup_{a \in A} \min \{ \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), F_{b,c}(v) \} \\
&= \min \{ \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} F_{b,c}(v) \} \\
&\geq \min \{ \{ \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v) \} \}.
\end{aligned}$$

Daha sonra $b \in B$ ler için supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{c \in C} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v) &\geq \sup_{b \in B} \min \{ \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v) \} \\
&\geq \min \{ \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v) \}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
{}_H F_{A,c}(u+v) &= \min \{ \sup_{c \in C} \inf_{a \in A} F_{a,c}(u+v), \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} F_{a,c}(u+v) \} \\
&\geq \min \{ \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} F_{a,b}(u), \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} F_{b,c}(v), \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} F_{a,b}(u), \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} F_{b,c}(v) \} \\
&= \min \{ {}_H F_{A,B}(u), {}_H F_{B,c}(v) \}.
\end{aligned}$$

4.1.3. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. Eğer $A, B \in B(X)$ ise $\lim_{u \rightarrow \infty} {}_H F_{A,B}(u) = 1$ olur.

İspat

Herhangi bir $x \in A$ ve $b \in B$ ve Lemma 4.1.1. den

$${}_{\delta}F_{A,B}(u) \geq \min \left\{ {}_{\delta}F_{A,x} \left(\frac{u}{3} \right), {}_{\delta}F_{x,y} \left(\frac{u}{3} \right), F_{y,B} \left(\frac{u}{3} \right) \right\}$$

olur. $u \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,B}(u) \geq \min \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,x} \left(\frac{u}{3} \right), \lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{x,y} \left(\frac{u}{3} \right), \lim_{u \rightarrow \infty} F_{y,B} \left(\frac{u}{3} \right) \right\}.$$

Daha önceden bildiğimiz üzere $x \in A, y \in B$ ve $A, B \in B(X)$ için

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,x} \left(\frac{u}{3} \right) = 1 \text{ (A sınırlı)}$$

ve

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{y,B} \left(\frac{u}{3} \right) = 1 \text{ (B sınırlı) olur. Ayrıca } PM\text{-}uzay \text{ tanımından } \lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{x,y} \left(\frac{u}{3} \right) = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A,B}(u) = 1$$

sonucuna ulaşırız.

Aşağıdaki Lemma 4.1.4. Chang tarafından getirilmiş olup bu çalışmamız için önemli bir rol oynamaktadır. Konuyla ilgili daha geniş bilgiyi [9] da bulabiliriz.

4.1.4. Lemma

$\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle ki her $u > 0$ için

$$0 < \phi(u) < u, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = \infty, \quad \text{her bir } u > 0 \text{ için } \phi^0(u) = u \text{ ve her bir } n \in \mathbb{N}$$

$$\phi^{-n}(u) = \phi^{-1}(\phi^{-n+1}(u)) \text{ olarak tanımlanır ise}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{-n}(u) = \infty$$

olur.

Sonuç olarak, $\Phi = \{\phi: IR^+ \rightarrow IR^+ : \phi \text{ artan ve sürekli fonksiyon, her } t > 0 \text{ için } \phi(t) > t\}$ şeklinde bir küme tanımlayalım.

4.1.5. Lemma

(X, F, min) bir Menger uzay ve $\{Y_n\}$, $B(X)$ de bir dizi olsun. Eğer her bir $u > 0$ ve $n \in N$ için $\phi \in \Phi$ olmak üzere

$${}_{{}_\delta}F_{Y_{n+1}, Y_{n+2}}(\phi(u)) \geq {}_{{}_\delta}F_{Y_n, Y_{n+1}}(u) \quad \text{İse,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{{}_\delta}F_{Y_n, Y_{n+1}}(u) = 1 \quad \text{olur.}$$

İspat

Tümevarımla $u > 0$ ve her bir $n \in IN$ için,

$${}_{{}_\delta}F_{Y_{n+1}, Y_{n+2}}(u) \geq {}_{{}_\delta}F_{Y_n, Y_{n+1}}(\phi^{-1}(u)) \geq \dots \geq {}_{{}_\delta}F_{Y_1, Y_2}(\phi^{-n}(u)).$$

Lemma 4.1.4.'den, ve $n \rightarrow \infty$ için $\phi^{-n}(u) \rightarrow \infty$ olduğundan ayrıca Y_n sınırlı bir küme ve $n \rightarrow \infty$ için ${}_{{}_\delta}F_{Y_1, Y_2}(\phi^{-n}(u)) \rightarrow 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{{}_\delta}F_{Y_{n+1}, Y_{n+2}}(u) = 1$$

olur.

4.1.6. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay ve $A, B \in B(X)$ olsun. Eğer $u > 0$ için

$${}_{{}_\delta}F_{A,B}(\phi(u)) \geq {}_{{}_\delta}F_{A,B}(u)$$

ise en az bir $a \in X$ vardır. Öyle ki $A = B = a$ olur.

İspat

$u > 0$ için, tümevarımla,

$${}_{{}_\delta}F_{A,B}(u) \geq {}_{{}_\delta}F_{A,B}(\phi^{-1}(u)) \geq \dots \geq {}_{{}_\delta}F_{A,B}(\phi^{-n}(u))$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $A, B \in B(X)$ olduğundan ve Lemma 4.1.3.'ten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{{}_\delta}F_{A,B}(\phi^{-n}(u)) = 1$$

ve Lemma 4.1.5. ten $u > 0$ için ${}_{{}_\delta}F_{A,B}(u) = 1$ olur. Dolayısıyla en az bir $a \in X$ için

$$A = B = \{a\} \text{ sonucuna varılır.}$$

Aşağıdaki Lemma B. Schweizer ve A. Sklar tarafından ortaya konulmuştur. [26]

4.1.7. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. Eğer $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ ise $u > 0$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{a_n, b_n}(u) = F_{a, b}(u) \text{ olur.}$$

4.1.8. Lemma

$(X, F, \min)$ bir Menger uzay olsun. Eğer $A_n \xrightarrow{\delta} a$ ve $B_n \xrightarrow{\delta} b$ ise $u > 0$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{A_n, B_n}(u) = F_{a,b}(u) \text{ olur.}$$

İspat

$u > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için önceden bildiğimiz üzere $F_{a,b}(u)$ u noktasında soldan sürekli ve $0 < 2k < u$ olacak şekilde en az bir pozitif k sayısı vardır ve

$$F_{a,b}(u) - F_{a,b}(u - 2k) < \varepsilon .$$

$k > 0$ ve $A_n \xrightarrow{\delta} a$, $B_n \xrightarrow{\delta} b$ olduğundan en az $m \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > m$ için ,

$${}_{\delta} F_{A_n, a}(k) \geq F_{a,b}(u - 2k) \text{ ve } {}_{\delta} F_{B_n, b}(k) \geq F_{a,b}(u - 2k) .$$

Dolayısıyla $n > m$ için,

$$\begin{aligned} {}_{\delta} F_{A_n, B_n}(u) &\geq \min\{{}_{\delta} F_{A_n, b}(u - k), {}_{\delta} F_{b, B_n}(k)\} \\ &\geq \min\{{}_{\delta} F_{A_n, a}(k), {}_{\delta} F_{a, b}(u - 2k), {}_{\delta} F_{b, B_n}(k)\} \\ &= F_{a,b}(u - 2k) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$-{}_{\delta} F_{A_n, B_n}(u) \leq -F_{a,b}(u - 2k) .$$

Buradan,

$$F_{a,b}(u) - {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) < F_{a,b}(u) - F_{a,b}(u - 2k) < \varepsilon$$

sonucuna varırız. $n \rightarrow \infty$ için infimum alınır

$$F_{a,b}(u) - \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) < \varepsilon$$

olur. Herhangi $a_n \in A_n$ ve $b_n \in B_n$ dizileri için $A_n \xrightarrow{\delta} a$ ve $B_n \xrightarrow{\delta} b$ olduğundan $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ olur. Bu nedenle $u > 0$ için,

$${}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \leq F_{a_n, b_n}(u)$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için infimum alınır,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{a_n, b_n}(u)$$

olur. Lemma 4.1.7.' den ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{a_n, b_n}(u) = F_{a,b}(u), \text{ bu nedenle}$$

$$F_{a,b}(u) - \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \geq 0$$

olur. Sonuç olarak herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\varepsilon > F_{a,b}(u) - \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) \geq 0.$$

Buradan da anlaşılacağı üzere $u > 0$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{A_n, B_n}(u) = F_{a,b}(u).$$

4.1.1. Teorem

$(X, F, \min)$ bir tam Menger uzay, $f, g, \eta, \xi: X \rightarrow X$ şeklinde tanımlı tek değerli dört fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ olarak tanımlı küme değerli iki fonksiyon olmak üzere;

$$(i) S(X) \subset \xi g(X), T(X) \subset \eta f(X),$$

$$(ii) \eta f = f\eta, \xi g = g\xi, Sf = fS, Tg = gT,$$

$$(iii) \eta f \text{ veya } \xi g \text{ sürekli,}$$

$$(iv) (S, \eta f) \text{ ve } (T, \xi g) \text{ bağdaşabilir fonksiyonlar ve}$$

$$(v) u > 0, \phi \in \Phi, \beta \in (0, 2) \text{ ve her } x, y \in X \text{ için}$$

$${}_{{}_\delta}F_{Sx, Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta fx, \xi gy}(u), {}_{{}_\delta}F_{\eta fx, Sx}(u), {}_{{}_\delta}F_{\xi gy, Ty}(u), {}_{{}_\delta}F_{\xi gy, Sx}(\beta u), {}_{{}_\delta}F_{\eta fx, Ty}((2-\beta)u)\}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda f, g, η, ξ, S ve T fonksiyonlarının X 'de tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat

$x_0 \in X$ ve $\{x_n\}$ dizisini de aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\xi g x_{2n+1} \in S x_{2n} = Z_{2n}, \eta f x_{2n+2} \in T x_{2n+1} = Z_{2n+1}.$$

$n \in N$ ve her bir $u > 0$ için, $\beta = (1-\alpha)$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere;

$${}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\phi(u)) = {}_{\delta}F_{Sx_{2n}, Tx_{2n+1}}(\phi(u)) \geq \min\{{}_{\delta}F_{\eta fx_{2n}, \xi gx_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{\eta fx_{2n}, Sx_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{\xi gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}}(u),$$

$${}_{\delta}F_{\xi gx_{2n+1}, Sx_{2n}}((1-\alpha)u), {}_{\delta}F_{\eta fx_{2n}, Tx_{2n+1}}((1+\alpha)u)\}$$

$$\geq \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n}}((1-\alpha)u), {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n+1}}((1+\alpha)u)\}$$

$$\geq \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u), 1, {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\alpha u)\}$$

$$= \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\alpha u)\}.$$

t-norm = min ve sürekli olduğundan $\alpha \rightarrow 1$ için

$${}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\phi(u)) \geq \min\{{}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u)\}.$$

Lemma 4.1.6.'dan

$${}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(\phi(u)) \geq {}_{\delta}F_{Z_{2n-1}, Z_{2n}}(u).$$

Benzer olarak $n \in N$ ve tüm $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{Z_{2n+1}, Z_{2n+2}}(\phi(u)) \geq {}_{\delta}F_{Z_{2n}, Z_{2n+1}}(u).$$

Dolayısıyla her $n \in N$ ve $u > 0$ için

$${}_{\delta}F_{Z_{n+1}, Z_{n+2}}(\phi(u)) \geq {}_{\delta}F_{Z_n, Z_{n+1}}(u)$$

Lemma 4.1.5.'ten her bir $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{Z_n, Z_{n+1}}(u) = 1. \quad (*)$$

Şimdi $\beta = 1$ için (ν) şartı üzerinde düşünelim ve iddia edelim ki $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için bir $M(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n, m \geq M$ için,

$${}_{\delta}F_{Z_n, Z_m}(\varepsilon) \geq 1 - \lambda.$$

Eğer durum böyle değil ise $\varepsilon' > 0$, $\lambda' \in (0,1)$ vardır öyle ki $k \in \mathbb{N}$ için $n_k > m_k \geq k$ olacak şekilde n_k ve m_k vardır ve aşağıdaki üç koşul sağlanır.

(1) n_k çift ve m_k tek,

(2) ${}_{\delta}F_{Z_{n_k}, Z_{m_k}}(\varepsilon') < 1 - \lambda'$ ve

(3) n_k (1) ve (2) yi sağlayan en küçük çift sayıdır.

(*)' den dolayı bir $m_1 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz öyle ki $n \geq m_1$ için,

$${}_{\delta}F_{Z_n, Z_{n+1}}\left(\min\left\{\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\phi^{-1}(\varepsilon') - \varepsilon'}{2}\right\}\right) > 1 - \lambda'$$

Dolayısıyla $k > m_1$ için, $n_k \geq m_k + 3$ ve $k > m_1$ olduğundan

$$1 - \lambda' > {}_{\delta}F_{Z_{n_k}, Z_{m_k}}(\varepsilon') = {}_{\delta}F_{Sx_{n_k}, Tx_{m_k}}(\varepsilon')$$

$$\geq \min\{F_{\eta f_{x_{n_k}}, \xi g_{x_{m_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')), {}_{\delta}F_{\eta f_{x_{n_k}}, S_{x_{n_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')), {}_{\delta}F_{\xi g_{x_{m_k}}, T_{x_{m_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')), {}_{\delta}F_{\xi g_{x_{m_k}}, S_{x_{n_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon')),$$

$${}_{\delta}F_{\eta f_{x_{n_k}}, T_{x_{m_k}}}(\phi^{-1}(\varepsilon'))\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_{k-1}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)), \delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{m_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)), \delta F_{Z_{n_k}, Z_{m_{k-1}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)),$$

$$\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t))\}.$$

Daha önceden,

$$\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)) \geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\varepsilon^t)\}$$

$$\delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{n_k}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)) \geq \min\{\delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{n_{k-1}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) + \varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_{k-1}}}(\varepsilon^t), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\frac{\varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{m_k}, Z_{m_{k-1}}}(\frac{\varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\varepsilon^t), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\varepsilon^t), \delta F_{Z_{m_k}, Z_{m_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2}),$$

$$\delta F_{Z_{m_k}, Z_{m_{k-1}}}(\varepsilon^t), \delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{n_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2})\}$$

ve

$$\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{m_{k-1}}}(\phi^{-1}(\varepsilon^t)) \geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_{k-1}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) + \varepsilon^t}{2})\}$$

$$\geq \min\{\delta F_{Z_{n_{k-1}}, Z_{n_{k-2}}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2}), \delta F_{Z_{n_{k-2}}, Z_{m_k}}(\varepsilon^t), \delta F_{Z_{m_{k-1}}, Z_{m_k}}(\frac{\phi^{-1}(\varepsilon^t) - \varepsilon^t}{2})\}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $k > m_1$ olduğunda,

$$1 - \lambda' > {}_{\delta} F_{Z_{n_k}, Z_{m_k}}(\varepsilon') \geq 1 - \lambda'$$

olur. Bu da bir çelişkidir. X tam olduğundan Z_n de seçtiğimiz herhangi bir $\{z_n\}$ dizisi X 'de bir z noktasına yakınsar. Bu z noktası z_n seçiminden bağımsızdır, dolayısıyla

$$\eta f_{x_{2n}} \rightarrow z, \xi g_{x_{2n+1}} \rightarrow z, Sx_{2n} \rightarrow \{z\}, Tx_{2n+1} \rightarrow \{z\}.$$

Buradan $u > 0$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda

$$F_{\eta f_{x_{2n}}, z}(u) \rightarrow 1, F_{\xi g_{x_{2n+1}}, z}(u) \rightarrow 1, {}_{\delta} F_{Sx_{2n}, z}(u) \rightarrow 1, {}_{\delta} F_{Tx_{2n+1}, z}(u) \rightarrow 1 \text{ olur.}$$

Var sayalım ki ηf fonksiyonu sürekli olsun, buradan $u > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{(\eta f)^2_{x_{2n}}, \eta f_z}(u) = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{\eta f_{Sx_{2n}}, \eta f_z}(u) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\eta f_{x_{2n}}, z}(u) = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{Sx_{2n}, z}(u) = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta} F_{Sx_{2n}, \eta f_{x_{2n}}}(u) = 1 \text{ olur. Daha önceden bildiğimiz üzere } S \text{ ve } \eta f \text{ bağdaşabilir ve}$$

$$u > 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Sx_{2n}, \eta f_{x_{2n}}}(u) = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{\eta f S x_{2n}, S \eta f x_{2n}}(u) = 1 \text{ ve}$$

$${}_H F_{S \eta f x_{2n}, \eta f z}(u) \geq \min \left\{ {}_H F_{\eta f S x_{2n}, S \eta f x_{2n}} \left(\frac{u}{2} \right), {}_H F_{\eta f S x_{2n}, \eta f z} \left(\frac{u}{2} \right) \right\}$$

ve daha önce bildiğimiz gibi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{\eta f x_{2n}, S \eta f x_{2n}} \left(\frac{u}{2} \right) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{\eta f S x_{2n}, \eta f z} \left(\frac{u}{2} \right) = 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_H F_{S \eta f x_{2n}, \eta f z}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} {}_\delta F_{S \eta f x_{2n}, \eta f z}(u) = 1.$$

İspatın diğer kısmını 5 adımda yapacağız.

1.Adım: $u > 0, \beta = 1$ ve (ν) şartından,

$$\begin{aligned} {}_\delta F_{S \eta f x_{2n}, T x_{2n+1}}(\phi(u)) &\geq \min \{ F_{(\eta f)^2 x_{2n}, \xi g x_{2n+1}}(u), {}_\delta F_{(\eta f)^2 x_{2n}, S \eta f x_{2n}}(u), \\ {}_\delta F_{\xi g x_{2n+1}, T x_{2n+1}}(u), {}_\delta F_{\xi g x_{2n+1}, S \eta f x_{2n}}(u), {}_\delta F_{(\eta f)^2 x_{2n}, T x_{2n+1}}(u) \} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa Lemma 4.1.8.'den,

$$F_{\eta f z, z}(\phi(u)) \geq \min \{ F_{\eta f z, z}(u), F_{\eta f z, \eta f z}(u), F_{z, z}(u), F_{\eta f z, z}(u),$$

$$F_{\eta f z, z}(u) \} = F_{\eta f z, z}(u).$$

Buradan, $\eta f z = z$ olarak bulunur.

2.Adım: $u > 0, \beta = 1$ ve (ν) koşulundan,

$$\begin{aligned}
{}_{\delta}F_{Sz,z}(\phi(u)) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} {}_{\delta}F_{Sz, Tx_{2n+1}}(\phi(u)) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \min \{ F_{\eta fz, \xi g x_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi g x_{2n+1}, Tx_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{Sz, \xi g x_{2n+1}}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Tx_{2n+1}}(u) \} \\
&\geq \min \{ F_{z,z}(u), {}_{\delta}F_{z, Sz}(u), F_{z,z}(u), {}_{\delta}F_{z, Sz}(u), F_{z,z}(u) \} = {}_{\delta}F_{z, Sz}(u)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $s_z = \{z\}$ olur.

1.adım ve 2. adımdan $s_2 = \{z\} = \{\eta fz\}$

3. Adım: (i) koşulundan, $SX \subset \xi gX$ ve bir $z' \in X$ vardır öyle ki $\{\xi g z'\} = Sz = \{z\}$ olur. Dolayısıyla, en az bir $u > 0$ ve (v) koşulundaki $\beta = 1$ değeri için

$$\begin{aligned}
{}_{\delta}F_{Sx_{2n}, Tz'}(\phi(u)) &\geq \min \{ F_{\eta fz_{2n}, \xi g z'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz_{2n}, Sx_{2n}}(u), \\
&{}_{\delta}F_{\xi g z', Tz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz', Sx_{2n}}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz_{2n}, Tz'}(u) \}
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için infimum alınırsa Lemma 4.1.8. den,

$${}_{\delta}F_{z, Tz'}(\phi(u)) \geq \min \{ F_{z,z}(u), F_{z,z}(u), {}_{\delta}F_{z, Tz'}(u), F_{z,z}(u), {}_{\delta}F_{z, Tz'}(u) \} = {}_{\delta}F_{z, Tz'}(u).$$

Dolayısıyla $Tz' = \{z\}$ olur. Sonuç olarak $\{\xi g z'\} = \{z\} = \{Tz'\}$ olur.

İlk iki adım sonuçlarıyla beraber

$$\{z\} = \{\eta fz\} = \{Sz\} = \{\xi g z'\} = \{Tz'\}$$

sonucuna ulaşabiliriz.

Daha önceden bildiğimiz üzere S ve ηf bağdaşabilir fonksiyonlar ve $\{\eta fz\} = Sz$ olduğundan, $\eta fSz = S\eta fz$ olur. Sonuç olarak $\{\eta fz\} = Sz$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} {}_{\delta}F_{Sz,z}(\phi(u)) &= {}_{\delta}F_{Sz,Tz'}(\phi(u)) \\ &\geq \min\{F_{\eta fz, \xi gz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi gz', Tz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Tz'}(u), {}_{\delta}F_{Sz, \xi gz'}(u)\} \\ &= {}_{\delta}F_{\eta fz, z}(u) = {}_{\delta}F_{Sz, z}(u). \end{aligned}$$

Dolayısıyla $Sz = \{z\} = \{\eta fz\}$.

X kümesinde bir z' elemanı seçelim öyle ki,

$\{\xi gz'\} = Sz = \{z\}$ eşitliğini sağlasın. Buradan,

$$\begin{aligned} {}_{\delta}F_{z, Tz'}(\phi(u)) &= {}_{\delta}F_{Sz, Tz'}(\phi(u)) \\ &\geq \min\{F_{\eta fz, \xi gz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi gz', Tz'}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz, Tz'}(u), {}_{\delta}F_{Sz, \xi gz'}(u)\} \\ &= {}_{\delta}F_{z, Tz'}(u). \end{aligned}$$

Dolayısıyla Lemma 4.1.6' dan $Tz' = \{z\}$ olur.

T ve ξg bağdaşabilir fonksiyonlar ve $\{\xi gz'\} = Tz'$ olduğundan, $T\xi gz' = \xi gTz'$ dolayısıyla $Tz = \{\xi gz\}$ olur.

$u > 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_{{\delta}}F_{Sz,Tz}(\phi(u)) &\geq \min\{{}_{{\delta}}F_{\eta fz,\xi gz}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fz,Sz}(u), {}_{{\delta}}F_{\xi gz,Tz}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta fz,Tz}(u), {}_{{\delta}}F_{Sz,\xi gz}(u)\} \\
&= {}_{{\delta}}F_{\eta fz,\xi gz}(u) \\
&= {}_{{\delta}}F_{Sz,Tz}(u).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $S_z = T_z = \{\eta fz\} = \{\xi gz\} = \{z\}$ olur.

4. Adım: $u > 0$ ve (v) koşulundaki $\beta = 1$ değeri için

$$\begin{aligned}
{}_{{\delta}}F_{Sfz,Tx_{2n+1}}(\phi(u)) &\geq \min\{{}_{{\delta}}F_{\eta ffz,\xi gx_{2n+1}}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta ffz,Sfz}(u), \\
&{}_{{\delta}}F_{\xi gx_{2n+1},Tx_{2n+1}}(u), {}_{{\delta}}F_{\xi gx_{2n+1},Sfz}(u), {}_{{\delta}}F_{\eta ffz,Tx_{2n+1}}(u)\}
\end{aligned}$$

(ii) koşulundan $\eta f = f\eta$, $Sf = fS$, dolayısıyla

$$\eta f(fz) = f(\eta fz) = fz \text{ ve } S(fz) = \{f(S_z)\} = \{fz\}.$$

$n \rightarrow \infty$ için infimum alınırsa lemma 4.1.8 den

$$F_{fz,z}(\phi(u)) \geq \min\{F_{fz,z}(u), F_{fz,fz}(u), F_{z,z}(u), F_{z,fz}(u), F_{fz,z}(u)\} = F_{fz,z}(u).$$

Dolayısıyla,

$$f_z = z.$$

1.adım ve 4.adımdan $\eta fz = z$ ve $fz = z$, yani $\eta z = z$ olur. Sonuç olarak

$$\{z\} = \{fz\} = \{\eta z\} = Sz.$$

5. Adım: $u > 0$ ve (ν) koşulundaki $\beta = 1$ değeri için,

$$\delta F_{Sx_{2n}, Tgz}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta f x_{2n}, \xi ggz}(u), \delta F_{\eta f x_{2n}, Sx_{2n}}(u), \delta F_{\xi ggz, Tgz}(u), \\ \delta F_{\xi ggz, Sx_{2n}}(u), \delta F_{\eta f x_{2n}, Tgz}(u)\}.$$

$Tg = gT$ ve $\xi g = g\xi$ olduğundan ,

$$Tgz = \{gTz\} = \{gz\} \text{ ve } \xi g(gz) = g(\xi gz) = gz \text{ olur.}$$

$n \rightarrow \infty$ için infimum alınırsa Lemma 4.1.8'den

$$F_{z, gz}(\phi(u)) \geq \min\{F_{z, gz}(u), F_{z, z}(u), F_{gz, gz}(u), F_{gz, z}(u), F_{z, gz}(u)\} = F_{z, gz}(u).$$

Buradan $gz = z$ olur.

Dolayısıyla 3. adım ve 5. adımdan $\xi gz = z$ ve $gz = z$, yani $\xi z = z$, dolayısıyla

$$\{z\} = \{gz\} = \{\xi z\} = Tz$$

eşitliğine ulaşırız. Sonuç olarak

$$\{z\} = \{fz\} = \{gz\} = \{\eta z\} = \{\xi z\} = Sz = Tz$$

olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi z 'nin tekliğini ispat edelim. $y \in X$ η, f, ξ, g, S ve T fonksiyonlarının diğer bir ortak sabit noktası olsun. $u > 0$ için

$$\begin{aligned}
F_{z,y}(\phi(u)) &= {}_{\delta}F_{Sz,Tz}(\phi(u)) \\
&\geq \min\{F_{\eta fz,\xi gy}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz,Sz}(u), {}_{\delta}F_{\xi gy,Ty}(u), {}_{\delta}F_{\xi gy,Sz}(u), {}_{\delta}F_{\eta fz,Ty}(u)\} \\
&\geq \min\{F_{z,y}(u), F_{z,z}(u), F_{y,y}(u), F_{y,z}(u), F_{ygz}(u)\} = F_{z,y}(u).
\end{aligned}$$

Buradan $y = z$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. Teorem 4.1.1.'de $f = g = I$ (Özdeşlik fonksiyonu) alınırsa aşağıdaki sonuç yazılabilir.

4.1.1 Sonuç

$(X, F, \min)$ tam menger uzay,

$\eta, \xi: X \rightarrow X$ tek değerli iki fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ küme değerli iki fonksiyon olsun. her $x, y \in X, \beta \in (0, 2)$ ve $\phi \in \Phi$ için

$$(i) S(X) \subset \xi(X), T(X) \subset \eta(X),$$

$$(ii) \eta \text{ veya } \xi \text{ sürekli,}$$

$$(iii) (S, \eta) \text{ veya } (T, \xi) \text{ bağdaşabilir, ve}$$

$$(iv) u > 0 \text{ için}$$

$${}_{\delta}F_{Sx,Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta x,\xi y}(u), {}_{\delta}F_{\eta x,Sx}(u), {}_{\delta}F_{\xi y,Ty}(u), {}_{\delta}F_{\xi y,Sx}(\beta u), {}_{\delta}F_{\eta x,Ty}((2-\beta)u)\}$$

koşulları sağlanıyor ise η, ξ, S ve T tek bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. İspatı Teorem 4.1.1' in ispatına benzer bir şekilde yapılır.

4.1.2. Teorem

$(X, F, \min)$ tam Menger uzay, $f, g, n, \xi: X \rightarrow X$ tek değerli dört fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ küme değerli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve $\phi \in \Phi$ için

$$(i) S(X) \subset \xi g(X), T(X) \subset \eta f(X),$$

$$(ii) \eta f = f\eta, \xi g = g\xi, Sf = fS, Tg = gT,$$

$$(iii) \eta f \text{ veya } \xi g \text{ sürekli,}$$

$$(iv) (S, \eta f) \text{ ve } (T, \xi g) \text{ bağdaşabilir ve}$$

$$(v) u > 0 \text{ için}$$

$${}_{\delta}F_{Sx, Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta fx, \xi gy}(u), {}_{\delta}F_{\eta fx, Sx}(u), {}_{\delta}F_{\xi gy, Ty}(u), {}_D F_{\xi gy, Sx}(u) +_D F_{\eta fx, Ty}(u)\}$$

ise, f, g, η, ξ, S ve T bir tek $z \in X$ ortak sabit noktaya sahiptir.

Eğer $f = g = I$ olarak alınırsa aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

4.1.2. Sonuç

$(X, F, \min)$ tam metrik uzay, $\eta, \xi: X \rightarrow X$ tek değerli iki fonksiyon ve $S, T: X \rightarrow B(X)$ küme değerli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve $\phi \in \Phi$ için

(i) $S(X) \subset \xi(X)$, $T(X) \subset \eta(X)$,

(ii) η veya ξ sürekli

(iii) (S, η) ve (T, ξ) bağdaşabilir fonksiyonlar ve

(iv) $u > 0$ için

$${}_{{}_\delta}F_{Sx,Ty}(\phi(u)) \geq \min\{F_{\eta x,\xi y}(u), {}_\delta F_{\eta x,Sx}(u), {}_\delta F_{\xi y,Ty}(u), {}_D F_{\xi y,Sx}(u) + {}_D F_{\eta x,Ty}(u)\}$$

koşulları sağlanıyor ise η, ξ, S ve T tek bir $z \in X$ ortak sabit noktasına sahiptir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak tam metrik uzaylarda ve tam Menger uzaylarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini irdeledik. Yine Menger uzaylarda verilen şartlar altında bağdaşabilir dönüşümler için de sabit noktanın varlığını görmüş olduk. Bu çalışmamız, değişik şartlar ve tanımlar altında tam metrik uzay ve tam Menger uzaylarda sabit nokta teoremine farklı bir yaklaşım getirmiştir.

Sabit nokta kavramı farklı uzaylar için her geçen gün farklı kavramlar ve şartlar altında geliştirilmektedir. Bu konuyla ilgilenen okuyucu özellikle ortak sabit nokta kavramında, dönüşümler arasındaki ilişkilerden yararlanarak uzay üzerindeki şartları geliştirebilir veya farklı uzaylar arasındaki ilişkileri kullanarak yeni tanımlar yapabilir.

KAYNAKLAR

1. Alaca, C. Türkoğlu, D. and Yıldız, C. "Fixed Points In Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces", *Chaos, Solitons & Fractals*, 29: 1073-1078 (2006).
2. Aliouche, A. Fisher, B., "A fixed point theorem for set valued mappings on two complete metric spaces", *Bull Allahabat Mat.Soc.*, 21: 31-40 (2006).
3. Altun, İ. Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for weakly compatible mappings satisfying an implicit relation", *Taiwanese J. Math.*, 13: 1291 (2009).
4. Altun, İ. Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for multivalued maps satisfying an implicit relation on metrically convex metric spaces", *Kyungpook Math.J.*, 48: 367-377 (2008).
5. Altun, İ. Hancer, H. A. and Türkoğlu, D., "Fixed point theorems on d-complete topological spaces", *Carpathian Journal of Mathematics*, 24 (1): 1-7 (2008).
6. Altun, İ. Türkoğlu, D., "Some fixed point theorems for weakly compatible multivalued mappings satisfying an implicit relation", *Filomat*, 22 (1): 11-19 (2008).
7. Altun, İ. Hançer, H. A. and Türkoğlu, D. "A Fixed Point Theorem For Multi-maps Satisfying An Implicit Relation On Metrically Convex Metric Spaces", *Math. Commun.*, 11: 17-23, (2006).
8. Banach, S., "Theorie les operations lineaires", *Manograie Matematyeczne*, Warsaw, (1932).
9. Chang, T.H., "Common fixed point theorems in Menger spaces", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 22: 17-29 (1994).
10. Chen, C.M. Chang, T.H. "Common fixed point theorems in Menger spaces", *Int. J. Math. Math. Sci.*, 15: 75931 (2006).
11. Fisher, B. Türkoğlu, D., "Related Fixed Points For Two Pairs Of Set Valued Mappings On Two Metric Spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, 3: 63-70 (2002).
12. Fisher, B. Türkoğlu, D., "Related Fixed Points For Set Valued Mappings On Two Metric Spaces", *Int. J. Math. Math. Sci.*, 23: 205-210 (2000).
13. Fisher, B., "fixed point on two metric spaces", *Glasnik Mat.*, 16(36): 333-337 (1981).

14. Frechet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22: 1-74(1906).
15. Hicks, T. L. and Sharma, P.L., "Probabilistic metric structures: Topological classification", *Univ. u Novom Sadu Ser. Mat.*, 14 (1): 43-50 (1984).
16. Istratescu, V. M., "Introducere in teoria spatiilor metrice probabiliste cu aplicatii", *Editura Technica*, Bucharest, (1974).
17. Jachymski, J. R., "Caristi's fixed points theorem and selection of set-valued contractions", *J. Math. Anal. Appl.*, 227: 55-67 (1998).
18. Jain R. K., Shrivastava A. K., "Fisher B., Fixed point on three complete metric spaces", *Novi Sad J. Math.*, 27: 27-35 (1997).
19. Kütükçü, S. Türkoğlu, D. and Yıldız, C., "Some Fixed Point Theorems For Multivalued Mappings In Fuzzy Menger Space", *J. Fuzzy Math.*, 15 (2): 413-424 (2007).
20. Menger, K., "Statistical metrics", *Proc. Nat Acad. Sci*, 28: 535-537 (1942).
21. Nung, N. P., "A fixed point theorem in three metric spaces", *Math Seminar Notes*, Kobe Univ., 11: 77-79 (1983)
22. Petruşel, A. Sîntămărian, A., "Single-valued and multi-valued Caristi type operators", *Publ. Math. Debrecen*, 60: 167-177 (2002).
23. Petruşel, A. Petruşel, G., "Selection theorems for multivalued generalized contractions", *Math- Moravica* 9: 43-52 (2005).
24. Popa, V. "A general selection theorem for multivalued functions satisfying an implicit relation", *Fixed point theory* 8(2): 297-301 (2007)
25. Radu, V., "Lectures on probabilistic analysis", *Universitatea de Vest din Timişoara*, Timişoara, (1994).
26. Schweizer, B. Sklar, A., "Statistical metric spaces", *Pacific. J. Math*, 10: 313-334 (1960).
27. Schweizer, B. Sklar, A., "Probabilistic metric spaces", *North-Holland, Amsterdam*, (1983).
28. Sehgal, V. M. Bharucha-Reid, A T., "Fixed point of contraction mapping on PM spaces", *Math. Systems Theory*, 6: 97-100 (1972).
29. Sîntămărian, A., "Selections and common fixed points for some generalized multivalued contractions", *Demonstratio Math.* 39: 609-617 (2006).

30. Telci, M., "Fixed points on two complete and compact metric spaces", *Appl. Math. Mech.*, 5: 564-568 (2001).
31. Türkoğlu, D., "Some Fixed Theorems For Compatible Type Set-Valued Mappings", *Univ. Din. Bacau. Şi Cer. Ştii. Math.*, 7: 167-177 (1997).
32. Türkoğlu, D., Özer, O. and Fisher, B., "A Coincidence Point Theorem For Multi-valued Contractions", *Math. Commun.*, 7: 39-44 (2002).
33. Turkoglu, D. Altun, I., "A common fixed point theorem for weakly compatible mappings in symmetric spaces satisfying an implicit relation", *Bul. De la Soc. Math. Mexicana*, 13 (1): 195-205 (2007).
34. Türkoğlu, D., "Two general fixed point theorems on three complete metric spaces", *J. Comput. Anal. Appl*, 10 (2): 173-178 (2008).
35. Turkoglu, D., "Some Fixed Point Theorems for Hybrid Contractions in Uniform Space", *Taiwanese J. Math.*, 12 (3): 807-820 (2008).
36. Turkoglu, D., Altun, İ., "Fixed point theorems for multivalued mappings satisfying an implicit relation", *Tamkang J. Math.* 39 (3): 247-253 (2008).
37. Türkoglu, D., "Two general fixed point theorems on three complete uniform spaces", *J. Comput. Anal. Appl*, 11(1): 86-92 (2009).
38. Türkoğlu, D., "Some common fixed point theorems for weakly compatible mappings in uniform space", *Acta Mathematica Hungarica* .8: 1-9 (2009).
39. Türkoglu, D., "Two general fixed point theorems on three complete complete metric spaces", *J. Comput. Anal. Appl*, 10(2): 173-178 (2008).
40. Wald, A., "On a statistical generalization of metric spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 29: 196-197 (1943).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KİŞİ, Erkan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 03.11.1976 Kars
Medeni hali : Evli
e-mail : erkankisi@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Atatürk Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1999
Lise	Iğdır Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1999-2010	M.E.B.	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Basketbol, Voleybol