



**METZLER DİNAMİK SİSTEMLERİNİN
SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Yüksek Lisans Tezi

Ashı Başak ÖĞÜLMÜŞ

Eskişehir 2024

METZLER DİNAMİK SİSTEMLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU
(İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ)

Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Şubat 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ'ün "**Metzler Dinamik Sistemlerinin Spektral Özellikleri**" başlıklı tezi 23/02/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. TANER BÜYÜKKÖROĞLU	
Üye (İkinci Tez Danışmanı)	: Dr. Öğr. Üyesi ŞERİFE YILMAZ	
Üye	: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ	
Üye	: Prof. Dr. Nihal EGE	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ	

Prof.Dr. Semra KURAMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

23/02/2024

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans đrencisi Aslı Başak đLMř, “METZLER DİNAMİK SİSTEMLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

(İmza)

Prof. Dr. Taner BYKKROđLU

ÖZET

METZLER DİNAMİK SİSTEMLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Şubat 2024

Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

(İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ)

Bu tez çalışmasında Metzler matrislerle verilen dinamik sistemlerin asimptotik kararlılığı ele alınmıştır. Pozitif doğrusal sistemler Metzler matrislerle karakterize edilmektedir. Sürekli ve ayrık zamanlı pozitif doğrusal sistemlerin analizinde sistem matrisinin özdeğer özellikleri öne çıkmaktadır. Uygulama alanı oldukça geniş olan Metzler matrisler sınıfının özdeğer özelliklerine ilişkin temel sonuçlar ve bunların uygulamaları bu çalışma kapsamında verilmiştir. Stokastik matrisler Metzler matrislerin bir alt sınıfıdır. Stokastik matrisle verilen bir dinamik sistemin Markov süreçlerinde simplekse ait bir başlangıç durum vektörü verildiğinde, herhangi bir adımdaki olasılık dağılımı hesaplanabildiği gibi Markov zincirinin yakınsadığı durum vektörü de ifade edilebilmektedir. Markov zincirinin uygulamaları olan modellerle ilgili açıklayıcı örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Hurwitz kararlılık, Schur kararlılık, İndirgenemez matris, Bağlantılı çizge, Markov zinciri.

ABSTRACT

SPECTRAL PROPERTIES OF METZLER DYNAMICAL SYSTEMS

Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ

Department of Mathematics

Programme in Applied Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Schools, February 2024

Supervisor: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

(Co-Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şerife YILMAZ)

In this thesis, the asymptotic stability of dynamic systems given by Metzler matrices is addressed. Metzler matrices characterize positive linear systems. In the analysis of continuous and discrete-time positive linear systems, the eigenvalue properties of the system matrix come to the fore. Basic results and applications regarding the eigenvalue properties of the Metzler matrices class, which has a wide application area, are given within the scope of this study. Stochastic matrices are a subclass of Metzler matrices. In Markov processes of a dynamic system provided by a stochastic matrix, when an initial state vector of the simplex is given, the probability distribution at any step can be calculated, and the state vector to which the Markov chain converges can also be expressed. Explanatory examples of models that are applications of the Markov chain are given.

Keywords: Hurwitz stability, Schur stability, Irreducible matrix, Connected graph, Markov chain.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle yoluma ışık tutan ve desteğini benden esirgemeyen başta sevgili hocalarım Prof. Dr. Taner Büyükköroğlu ve Dr. Öğr. Üyesi Şerife Yılmaz olmak üzere emeği geçen tüm hocalarıma sonsuz teşekkür ederim. Bu süreçte her zaman yanımda olan canım aileme, arkadaşlarıma ve özellikle Alpay Sertbaş'a teşekkür ederim.

Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ

Şubat 2024

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
TABLolar DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanım Ve Teoremler	1
2. DOĞRUSAL SİSTEMLER	10
2.1. Sürekli Doğrusal Sistemler Ve Asimptotik Kararlılık	10
2.2. Ayrık-Zamanlı Doğrusal Sistemler Ve Asimptotik Kararlılık	11
3. METZLER MATRİSLERİ	13
3.1. Pozitif Doğrusal Sistemler Ve Metzler Matrisleri	13
3.2. Metzler Matrislerin Hurwitz Ve Schur Kararlılığı	15
4. MARKOV ZİNCİRLERİ	19

	<u>Sayfa</u>
4.1. Markov Çizgeleri	19
4.2. Markov Zincirinde Olasılık Dağılımının Limiti	22
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	29
KAYNAKÇA.....	30
ÖZGEÇMİŞ	



TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1.	Ebeveyn genotipine göre Mendel tablosu.....	26
Çizelge 4.2.	Üç ebeveyn genotipi için olasılık tablosu	26



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1.	Markov çizge örnekleri	20
Şekil 4.2.	Üç boyutlu Markov zinciri	23
Şekil 4.3.	Döngülü Markov Zinciri	24
Şekil 4.4.	Döngülü Markov Zincirleri	25
Şekil 4.5.	İndirgenebilir bir Markov zinciri	25
Şekil 4.6.	Üç genotip	27
Şekil 4.7.	İki aşamalı üretim süreci: 1 ve 2 düğümleri ürün işleme; 3 düğümü ürünü eleme; 4 düğümü ürünü kabul etme	27

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\rho(A)$	: A matrisinin spektral yarıçapı
$\lambda(A)$	: A matrisinin özdeğerler kümesi
$p_A(s)$	: A matrisinin karakteristik polinomu
$E_k(A)$	: A matrisinin $k \times k$ esas alt matrislerinin minörleri toplamı
$\bar{x}$	: $x \in \mathbb{C}^n$ vektörünün eşleniği
$A > 0$	: $A = A^T$ pozitif belirli matris
$A \succeq 0$	: negatif olmayan matris
$A \succ 0$	: pozitif matris
$\dot{x}$	: $dx(t)/dt$
$\ \cdot\ $	: Öklid normu
$\ \cdot\ _F$	: Bir matrisin Frobenius normu
$\text{Re}(\cdot)$	: Bir kompleks sayının gerçel kısmı
$\mathbb{R}^{n \times n}$	: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
conv	: Konveks zarf
$\text{tr}(A)$	: A Matrisinin izi

1. GİRİŞ

Matematiksel modellerle ifade edilebilen bir problemde sistemin durum uzayındaki konumunu zamana bağılı olarak belirleyebilmek çok önemlidir. Modelin zamana bağılı olma durumuna göre dinamik sistemler sürekli veya ayrık dinamik sistem olarak sınıflandırılmaktadır. Sürekli ve ayrık dinamik sistemler de kendi arasında doğrusal ve doğrusal olmayan dinamik sistemler olarak ikiye ayrılmaktadır. Doğrusal sistemler basit fonksiyonlarla ifade edilebildiğinden bu sistemlerin yörünge analizi çok daha net olarak ortaya konulabilmektedir. Bu nedenle doğrusal olmayan sistemlerin yörünge analizlerinde karşılaşılan bazı zorluklar bu sistemleri doğrusallaştırarak aşılabilmektedir [1, 2].

Fiziksel sistemlerin durum değişkenleri negatif değerler almayan nicelikleri temsil ettiğinde pozitif sistemler ortaya çıkmaktadır. Pozitif sistemler; endüstriyel prosesler, depolama sistemleri, su ve atmosfer kirliliği modelleri, stokastik modeller, ekonomik modeller gibi değişkenlerin hem pozitif hem de negatif değerler alabileceği bilim ve teknolojinin hemen tüm alanlarında en sık karşılaşılan sistemlerdir [3]. Pozitif doğrusal sistemler Metzler matrislerle temsil edilmektedir.

Sürekli ve ayrık zamanlı pozitif doğrusal sistemlerin analizinde sistemi temsil eden matrisin spektrum (özdeğerler) kümesinin kompleks düzlemdeki konumu önem arz etmektedir. Bir pozitif n tamsayısı için $n \times n$ boyutlu matris; o matrisin karakteristik polinomu, özdeğerleri, özvektörleri, determinantı gibi kavramlar ile karakterize edilmektedir. Dolayısıyla doğrusal sistemler incelenirken bu kavramlarla ilgili özelliklerin bilinmesi ve araştırılması gerekmektedir.

Tez çalışması kapsamında matrislere ilişkin temel tanım ve teoremler birinci bölümünde verilmiştir. İkinci bölümde sürekli ve ayrık-zamanlı doğrusal sistemlerin asimptotik kararlılığı; üçüncü bölümde pozitif doğrusal sistemlerin Metzler matrislerle karakterizasyonu; dördüncü bölümde Markov zinciri ve bazı uygulamaları ele alınmıştır.

1.1. Temel Tanım Ve Teoremler

Bir kare matrisin özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.1.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin.

$$Ax = \lambda x$$

denklemini sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A matrisinin bir özdeğeri ve sıfırdan farklı $x \in \mathbb{C}^n$ vektörüne A matrisinin bu λ kompleks sayısına karşılık gelen bir özdeğeri denir.

Eğer λ sayısı A matrisinin bir özdeğeri ve x vektörü de bu λ özdeğerine karşılık gelen özvektör ise

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden λ kompleks sayısı ve sıfırdan farklı x vektörünü elde edebilmek için $\lambda I - A$ matrisinin tekil bir matris olması gerekir. Bir matrisin tekil matris olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul o matrisin determinantının sıfır olmasıdır. Buna göre $\det(\lambda I - A) = 0$ denklemini sağlayan λ karmaşık sayıları, A matrisinin özdeğerleridir.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için $\det(\lambda I - A)$ ifadesi λ 'nın n 'yinci dereceden polinomudur ve Cebir Temel Teoremine göre $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ polinomunun tam olarak n tane kökü vardır.

$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$ sayısına A matrisinin spektral yarıçapı,

$$\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

kümesine de A matrisinin spektrumu denir. A matrisinin özdeğerleri kompleks düzlemde merkezi orijin olan $\rho(A)$ yarıçaplı disk tarafından kapsanmaktadır:

$$\lambda(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho(A)\}.$$

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise bu matrisin karakteristik polinomu

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

olacağından

$$p_A(0) = \det(0I - A) = (0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2) \cdots (0 - \lambda_n)$$

ve buradan

$$(-1)^n \det(A) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \Rightarrow \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir A matrisinin izi ise özdeğerler türünden

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

şeklinde yazılabilir.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $E_k(A)$ ile A matrisinin $k \times k$ boyutlu esas alt matrislerinin (A matrisinin $(n - k)$ tane aynı indisli satırı ve sütununun atılmasıyla elde edilen alt matrisler) minörlerinin toplamını gösterelim.

Teorem 1.1.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} p_A(s) &= \det(sI - A) \\ &= s^n - E_1(A)s^{n-1} + E_2(A)s^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}E_{n-1}(A)s + (-1)^n E_n(A) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 1.1.1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri λ_1, λ_2 olsun. A matrisinin karakteristik polinomu:

$$E_1(A) = a_{11} + a_{22} = \text{tr}(A),$$

$$E_2(A) = \det(A)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} p_A(s) &= s^2 - E_1(A)s + E_2(A) \\ &= s^2 - \text{tr}(A)s + \det(A) \\ &= s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Örnek 1.1.2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ olsun.

$$\begin{aligned} E_1(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{tr}(A), \\ E_2(A) &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ E_3(A) &= \det(A) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} p_A(s) &= s^3 - E_1(A)s^2 + E_2(A)s - E_3(A) \\ &= s^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)s^2 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)s - \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisi ($A^T = A$) için $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^T A x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kuadratik fonksiyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyonun pozitif ve negatif belirliliğini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 1.1.2. Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ ise A matrisine pozitif belirli matris denir ve $A > 0$ şeklinde gösterilir.

Bir simetrik A matrisinin negatif belirli olması da benzer şekilde tanımlanabilir. Eğer $-A$ matrisi pozitif belirli bir matris ise bu durumda A matrisine negatif belirli bir matris denir ve $A < 0$ şeklinde gösterilir.

Simetrik bir matrisin tüm özdeğerleri gerçeldir. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$ olsun. A matrisinin bir özdeğeri λ ve bu özdeğerine karşılık gelen özvektörü $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ise $Ax = \lambda x$ olur. Bu denklemin her iki tarafını $\bar{x}^T$ ile soldan çarparsak

$$\bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x$$

eşitliği elde edilir. x özvektör olduğundan sıfırdan farklıdır ve

$$\bar{x}^T x = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|^2 \neq 0$$

olduğundan

$$\bar{x}^T Ax = \lambda \|x\|^2 \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (1.1)'in her iki tarafının eşlenik transpozisini alalım:

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{x}^T Ax)}^T &= \overline{(\lambda \|x\|^2)}^T \\ (\bar{x}^T \bar{A} \bar{x})^T &= (\bar{\lambda} \|x\|^2)^T \\ \bar{x}^T \bar{A}^T x &= \bar{\lambda} \|x\|^2 \end{aligned}$$

A simetrik bir gerçel matris olduğundan son eşitlik

$$\bar{x}^T Ax = \bar{\lambda} \|x\|^2 \quad (1.2)$$

şeklinde yazılır. Denklem (1.1) ve (1.2)'den $\lambda = \bar{\lambda}$ olarak elde edilir. Dolayısıyla λ bir gerçel sayıdır.

Simetrik bir matrisin pozitif belirliliğine ilişkin şu sonucu verebiliriz: $A > 0 \Leftrightarrow A$ matrisinin tüm özdeğerleri pozitiftir $\Leftrightarrow A$ matrisinin tüm esas baş minörleri pozitiftir (bakınız [4, sf. 438-439]).

Örnek 1.1.3.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

simetrik matrisini ele alalım. Sıfır vektöründen farklı her $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$x^T Ax = 13x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 \quad (1.3)$$

kuadratik ifadesinin pozitif olup olmadığını araştıralım. A simetrik matrisinin esas baş minörleri:

$$\Delta_1 = 13 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 61 > 0, \quad \Delta_3 = \det(A) = 5 > 0$$

olduğundan A matrisi pozitif belirlidir: $A > 0$. Yani her $x \in \mathbb{R}^3$ ($x \neq 0$) için $x^T Ax > 0$ olur. Burada A matrisinin özdeğerleri: $5, 7 \pm 4\sqrt{3}$ pozitif olduğundan $A > 0$ olduğu

özdeğerlere bakılarak da belirlenebilmektedir.

Şimdi, Markov zinciri konusunda ele alınan sistemlerin matrisleri için önemli bir kavram olan indirgenemez matris tanımını verelim.

Tanım 1.1.3. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. Eğer

$$F^T A F = \begin{bmatrix} B & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{bmatrix} \text{ ve } 1 \leq r \leq n-1$$

olacak şekilde bir $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permütasyon matrisi varsa o zaman A matrisine indirgenebilir (reducible) matris denir. A matrisi indirgenebilir matris değilse o zaman A matrisi indirgenemez (irreducible) matris olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.4.

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

matrisini alalım. 3×3 boyutlu permütasyon matrisleri:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. $n = 3$ olduğundan $1 \leq r \leq 2$ eşitsizliğinden $r = 1$ veya $r = 2$ olmalıdır.

Eğer A indirgenebilir bir matris ise

$$F_{i_0}^T A F_{i_0} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{ veya } F_{i_0}^T A F_{i_0} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $i_0 \in \{1, 2, \dots, 6\}$ var olmalıdır.

$$\begin{aligned} F_1^T A F_1 &= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, & F_2^T A F_2 &= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ F_3^T A F_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}, & F_4^T A F_4 &= \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ F_5^T A F_5 &= \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, & F_6^T A F_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bu sonuca göre A matrisi indirgenemez bir matristir.

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = [p_{ij}]$ matrisini alalım. Her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $p_{ij} \geq 0$ ise bu matrise negatif olmayan matris denir ve $P \succeq 0$ ile gösterilir. Eğer her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $p_{ij} > 0$ ise P matrisine pozitif matris denir ve $P \succ 0$ şeklinde gösterilir.

Bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için eğer $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ise bu durum için $x \succeq 0$, x vektörünün tüm bileşenleri pozitif ise ($x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) bu durum için $x \succ 0$ gösterimi kullanılır.

Teorem 1.1.2 (Perron, [4], sf. 526). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \succ 0$ olsun. O zaman

a) $\rho(A) > 0$

b) $\rho(A)$ sayısı A matrisinin cebirsel katlılığı 1 olan bir özdeğerdir

c) $Ax = \rho(A)x$ ve $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}^n$, $x \succ 0$ özvektörü vardır ve bu vektör tektir

d) $y^T A = \rho(A)y^T$ ve $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 1$ olacak şekilde bir tek y sol özvektörü vardır ve $y \succ 0$ 'dir

e) A matrisinin her $\lambda \neq \rho(A)$ özdeğeri için $|\lambda| < \rho(A)$ 'dır.

Teorem 1.1.3 (Perron-Frobenius, [4], sf. 534). $n \geq 2$ olmak üzere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \succeq 0$ ve A indirgenemez matris olsun. O zaman

a) $\rho(A) > 0$

b) $\rho(A)$ sayısı A matrisinin cebirsel katlılığı 1 olan bir özdeğerdir

c) $Ax = \rho(A)x$ ve $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}^n$, $x \succ 0$ özvektörü vardır ve bu vektör tektir

d) $y^T A = \rho(A)y^T$ ve $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 1$ olacak şekilde bir tek y sol özvektörü vardır ve $y \succ 0$ 'dir.

$D \subset \mathbb{R}^n$ açık, yol bağlantılı bir küme ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz özelliğine sahip bir fonksiyon olsun.

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

otonom sistemini ele alalım. Eğer $\tilde{x} \in D$ için $f(\tilde{x}) = 0$ ise $\tilde{x}$ vektörü (1.4) sisteminin bir denge noktası olarak adlandırılır. Yazım kolaylığı açısından denge noktasını $\tilde{x} = 0$ vektörü almakla genellik bozulmaz çünkü sistemin denge noktası $\tilde{x} \neq 0$ ise $y = x - \tilde{x}$ değişken değişimiyle bu denge noktası orjine ötelenebilmektedir.

Tanım 1.1.4. $\tilde{x} = 0$ vektörünün (1.4) sisteminin denge noktası olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ pozitif sayısı verildiğinde $\|x(0) - 0\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x(0)$ başlangıç vektörü için (Burada $x(t)$, (1.4) sisteminin $x(0)$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümüdür.)

$$\|x(t) - 0\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ pozitif sayısı varsa bu durumda (1.4) sisteminin $\tilde{x} = 0$ denge noktası kararlıdır denir. Eğer $\tilde{x} = 0$ denge noktası kararlı ve öyle bir $\tilde{\delta} > 0$ için $\|x(0) - 0\| < \tilde{\delta}$ koşulunu sağlayan başlangıç vektörleri için $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ oluyorsa o zaman bu denge noktası asimptotik kararlı olarak adlandırılır [1].

Denge noktasının asimptotik kararlılığı, o sistemin Lyapunov fonksiyonunun varlığına denktir.

$V : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyon, $\mathbf{0} \in D$ olsun. V fonksiyonunun türevi (gradyenti)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T$$

şeklindedir ve

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$$

olmak üzere V fonksiyonunun (1.4) sisteminin yörüngesi üzerindeki türevi

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

biçiminde tanımlanır.

Sürekli sistemlerin denge noktasının asimptotik kararlılığının analizinde aşağıda ifade edilen Lyapunov teoremi kullanılmaktadır. Şimdi bu teoremi ifade edelim.

Teorem 1.1.4 (Lyapunov Teoremi [1]). $x = \mathbf{0}$ sıfır vektörü (1.4) sürekli sisteminin denge noktası olsun. Eğer

i) $V(\mathbf{0}) = 0$ ve her $\mathbf{0} \neq x \in D$ için $V(x) > 0$

ii) Her $\mathbf{0} \neq x \in D$ için $\dot{V}(x) < 0$

koşullarını sağlayacak şekilde sürekli türevlenebilir bir $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa bu durumda $x = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Lyapunov teoremindeki (i) ve (ii) koşullarını sağlayan $V(x)$ fonksiyonuna (1.4) sisteminin bir Lyapunov fonksiyonu denir.

2. DOĞRUSAL SİSTEMLER

Bu bölümde sürekli ve ayırık zamanlı doğrusal sistemlerin asimptotik kararlılığı ile ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Sürekli Doğrusal Sistemler Ve Asimptotik Kararlılık

A matrisi $n \times n$ boyutlu kare matris olsun. Denklem (1.4)'teki $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = Ax$ şeklinde verilsin.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

sürekli doğrusal sistemini ele alalım.

Şimdi (2.1) sisteminin denge noktasının asimptotik kararlılığını A matrisinin özdeğerleriyle karakterize eden aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.1.1. A matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. Eğer A matrisinin tüm özdeğerleri için

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ise (özdeğerler kompleks düzlemin sol açık yarı düzleminde ise) A matrisine Hurwitz kararlı matris denir [2].

Denklem (2.1) tarafından verilen sistemin asimptotik kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul A matrisinin Hurwitz kararlı olmasıdır [1]. Sistem (2.1)'nin çözümü $x(t) = e^{At}x_0$ 'dır ve A matrisinin tüm özdeğerleri karmaşık düzlemin sol açık yarısında ise $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow 0$ olur.

Lyapunov teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.1.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $Q > 0$ verildiğinde

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.2)$$

Lyapunov denkleminin $P > 0$ çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Ayrıca bu çözüm

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

biçimindedir [1].

Teorem 2.1.1’ya göre A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T P + PA < 0 \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir $P > 0$ matrisinin var olmasıdır. Burada (2.3) eşitsizliği Lyapunov eşitsizliği olarak adlandırılır. Bu eşitsizliğin çözümü olan $P > 0$ matrisi için $V(x) = x^T P x$ fonksiyonuna (2.1) sisteminin kuadratik Lyapunov fonksiyonu denir.

2.2. Ayırık-Zamanlı Doğrusal Sistemler Ve Asimptotik Kararlılık

Bu bölümde sürekli doğrusal sistemler için yukarıda verdiğimiz sonuçlar $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

ayırık-zamanlı doğrusal sistemleri için de ifade edilecektir.

Teorem 2.2.1 (Ayırık-zamanlı sistemler için Lyapunov teoremi [5]).

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere $x = 0$ sıfır vektörü

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

sisteminin denge noktası olsun. Eğer

i) $V(0) = 0$ ve her $0 \neq x \in D$ için $V(x) > 0$

ii) Her $0 \neq x \in D$ için $V(f(x)) - V(x) < 0$

koşullarını sağlayacak şekilde bir $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu varsa $x = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin özdeğerleri: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. Eğer $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ise yani tüm özdeğerler kompleks düzlemde açık birim diskte ise A matrisine Schur kararlı matris denir.

Denklem (2.5)’da $f(x)$ fonksiyonu olarak $f(x) = Ax$ alalım. Bu doğrusal sistem için Teorem 2.2.1 uygulandığında sistemin asimptotik kararlılığı, A matrisinin Schur kararlı olmasına denktir.

Teorem 2.2.2 ([6]). Ayırık-zamanlı doğrusal sistem (2.5) için aşağıdakiler denktir:

i) Sistem asimptotik kararlıdır.

ii) A matrisi Schur kararlıdır.

iii) $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q > 0$ matrisi verildiğinde

$$A^T P A - P = -Q \quad (2.6)$$

denklemini (Stein denklemi) sağlayan $P > 0$ çözümü vardır ve bu çözüm tektir.



3. METZLER MATRİSLERİ

Bu bölümde Metzler matrisleri ve pozitif sistemlere ilişkin temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

3.1. Pozitif Doğrusal Sistemler Ve Metzler Matrisleri

Metzler matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.1.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. Her $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($i \neq j$) için $a_{ij} \geq 0$, yani köşegen üzerinde olmayan girdileri negatif değilse A matrisine Metzler matrisi denir.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere $\dot{x} = Ax$ doğrusal sistemi verilsin. Eğer her

$$x(0) \in \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

başlangıç noktasına karşılık her $t \geq 0$ için $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ oluyorsa $\dot{x} = Ax$ doğrusal sistemi pozitif doğrusal sistem olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1. $\dot{x} = Ax$ doğrusal sisteminin pozitif doğrusal sistem olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin Metzler matrisi olmasıdır.

Proof. ($\Rightarrow$) Her $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ başlangıç noktasına karşılık $t \geq 0$ için $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ olduğunu kabul edelim. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $e_i \in \mathbb{R}^n$ vektörü ile i 'ninci bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan vektörü gösterelim. $x(0) = e_i$ başlangıç noktası için $x(t)$ çözümünün $t = 0$ 'daki teğet vektörü:

$$\dot{x}(0) = Ax(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

(A matrisinin i 'ninci sütunu) olur. Her $t \geq 0$ için $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ olduğundan (bu yörünge pozitif bölgede kalacağından) $\dot{x}_i(0) \geq 0$ ($i \neq j$) olması gerekir. Buna göre $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($i \neq j$) için $a_{ij} \geq 0$ 'dır. Sonuç olarak A matrisi Metzler matrisidir.

($\Leftarrow$) A matrisi Metzler olsun. Varsayalım ki $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ başlangıç noktası için $x(t)$ çözümü $\mathbb{R}_+^n$ 'de kalsın. O zaman öyle bir $t_* \in (0, \infty)$ vardır ki $x(t_*)$ noktası $\mathbb{R}_+^n$ bölgesinin sınırındadır.

$$x(t_*) \in \partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0 \text{ veya } x_2 = 0 \text{ veya } x_n = 0\}.$$

Buna göre $x(t_*) = (x_1(t_*), x_2(t_*), \dots, x_n(t_*))^T$ vektörü için $x_{i_0}(t_*) = 0$ ve $x_j(t_*) \geq 0$ olacak şekilde $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($i_0 \neq j$) vardır. Diğer taraftan yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ için $x(t_* + \varepsilon)$ 'nin birinci bölgede olmaması, $\dot{x}(t_*)$ vektörünün i_0 'ıncı bileşeninin negatif olmasına denktir (bakınız [3, sf. 14]). $\dot{x}(t_*) = Ax(t_*)$ olduğundan $\dot{x}(t_*)$ 'ın i_0 'ıncı bileşeni:

$$\dot{x}_{i_0}(t_*) = a_{i_0 1}x_1(t_*) + a_{i_0 2}x_2(t_*) + \dots + a_{i_0 i_0}x_{i_0}(t_*) + \dots + a_{i_0 n}x_n(t_*)$$

olur. $x(t_*) \in \partial\mathbb{R}_+^n$ olduğundan $x_i(t_*) \geq 0$, A Metzler olduğundan $a_{i_0 i} \geq 0$ ($i \neq i_0$) olur. Diğer taraftan $x_{i_0}(t_*) = 0$ 'dır. Buna göre $\dot{x}_{i_0}(t_*) \geq 0$ olur. Bu çelişki nedeniyle $x(t_* + \varepsilon)$ noktasının birinci bölgede kalması gerekir. $\square$ ■

Teorem 3.1.2 ([4]). $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. Eğer $P \succeq 0$ ise $\rho(P)$ sayısı P matrisinin bir özdeğeridir ve $Px = \rho(P)x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \succeq 0$ vektörü vardır.

Yardımcı Teorem 3.1.1. A , $n \times n$ boyutlu bir Metzler matrisi olsun. O zaman $A = P - \alpha I$ olacak şekilde $P \succeq 0$ matrisi ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Burada $\alpha \geq \max\{a_{ii} : i = 1, 2, \dots, n\}$ şeklinde belirlenebilir.

Teorem 3.1.3 ([7]). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir Metzler matrisi verilsin. $P \succeq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = P - \alpha I$ şeklinde ifade edilsin. O zaman $\rho(P) - \alpha$ gerçel sayısı A matrisinin bir özdeğeridir ve A matrisinin tüm özdeğerleri

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \leq \rho(P)\}$$

diskinin içinde kalır.

Proof. λ skaleri P matrisinin bir özdeğeri ve u 'da bu özdeğere karşılık gelen özvektör ise

$Pu = \lambda u$ olur. O zaman

$$Au = (P - \alpha I)u = Pu - \alpha u = \lambda u - \alpha u = (\lambda - \alpha)u$$

olacağından P matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise A matrisinin özdeğerleri de

$$\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \dots, \lambda_n - \alpha$$

kompleks sayılardır. Teorem 3.1.2'e göre $\rho(P)$, P matrisinin bir özdeğeri olduğundan $\rho(P) - \alpha$ 'da A matrisinin bir özdeğeridir. P matrisinin tüm özdeğerleri

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 0| \leq \rho(P)\}$$

diskinde yer alır ve buna göre A matrisinin özdeğerleri de

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \leq \rho(P)\}$$

diskinde olacaktır. ■

3.2. Metzler Matrislerin Hurwitz Ve Schur Kararlılığı

Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek koşul A matrisinin $p_A(s)$ karakteristik polinomunun tüm katsayılarının pozitif olmasıdır [2]. A matrisi Metzler matrisi ise bu koşul aynı zamanda yeter koşul olmaktadır.

Teorem 3.2.1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $p_A(s)$ karakteristik polinomunun tüm katsayılarının pozitif olmasıdır.

Proof. A matrisi Hurwitz kararlıdır $\Leftrightarrow -A$ matrisinin tüm özdeğerlerinin gerçel kısmı pozitiftir ($\text{Re}(\lambda_i) > 0$) $\Leftrightarrow k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k(-A) > 0$ dır [7].

$k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k(A) = (-1)^k E_k(-A)$ olduğundan k tek ise $E_k(A) < 0$, k çift ise $E_k(A) > 0$ olur. O zaman

$$p_A(s) = s^n - E_1(A)s^{n-1} + E_2(A)s^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}E_{n-1}(A)s + (-1)^n E_n(A)$$

polinomunun tüm katsayıları pozitiftir. ■

Teorem 3.2.2 ([4], sf. 101). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için $A = UTU^*$ olacak şekilde köşegeni A matrisinin özdeğerlerinden oluşan üst üçgensel bir T matrisi ve U üniter ($U^{-1} = U^*$) matrisi vardır. (Burada “ $*$ ” sembolü ile matrisin eşlenik transpozesi gösterilmektedir.)

Teorem 3.2.3. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(A) < 1$ olmasıdır.

Proof. $(\Rightarrow)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ olsun. A matrisinin spektral normu:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \max_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

olduğundan k pozitif tamsayısı için

$$\|A^k\| = \|A.A.\dots.A\| = \|UTU^*.UTU^*.\dots.UTU^*\| = \|UT^kU^*\|$$

eşitliği elde edilir. U üniter matris olduğundan $\|UT^kU^*\| = \|T^k\|$ olur ve buradan

$$\|A^k\| = \|T^k\|$$

dır. Bu eşitliğe göre $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| = 0$ olur.

T matrisinin bir özdeğeri λ ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörü $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ olsun.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

kare matrisi için $TX = \lambda X$ olur. Matris normunun

$$\|TX\| \leq \|T\|\|X\|$$

özellliği kullanılırsa (bakınız [4, sf. 341])

$$|\lambda|\|X\| = \|TX\| \leq \|T\|\|X\|$$

olduğundan eşitsizliğin her iki tarafı $\|X\| > 0$ sayısına bölünürse

$$|\lambda| \leq \|T\|$$

eşitsizliği elde edilir. T matrisinin herhangi bir λ özdeğeri için elde edilen bu eşitsizlikten $\rho(T) = \rho(A) < \|T\|$ olduğu görülür. Pozitif k tamsayısı için

$$0 \leq \rho(T)^k \leq \rho(T^k) \leq \|T^k\|$$

ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| = 0$ olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(T)^k = 0$ olur ki buna göre $0 \leq \rho(T) < 1$ yani $\rho(A) < 1$ 'dir.

($\Leftrightarrow$) $\rho(A) = \rho(T) < 1$ olsun. D diagonal ve F kesin üst üçgensel matris olmak üzere $T = D + F$ şeklinde yazılabilir. F kesin üst üçgensel olduğundan $F^n = 0$ 'dır. O zaman $k > n$ pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned} T^k &= (D + F)^k \\ &= \binom{k}{0} D^k + \binom{k}{1} D^{k-1} F + \binom{k}{2} D^{k-2} F^2 + \dots + \binom{k}{n-1} D^{k-n+1} F^{n-1} + 0 + \dots + 0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} D^{k-i} F^i \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\rho(T) = \rho(D)$ ve $\|D\| = \rho(T)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|T^k\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \|D^{k-i}\| \|F^i\| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \rho(T)^{k-i} \|F^i\| \\ &= \rho(T)^k + k \rho(T)^{k-1} \|F\| + \dots + \binom{k}{n-1} \rho(T)^{k-n+1} \|F^{n-1}\| \end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. $\rho(T) < 1$ olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{k}{i} \rho(T)^{k-i} = 0$ olur ve denklem (3.1)'daki eşitsizlikten $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| = 0$ 'dır. ■

Teorem 3.2.4 ([8]). $A \succeq 0$ matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul $(I - A)^{-1} \succeq 0$ ve $\det(I - A) \neq 0$ olmasıdır.

Proof. ($\Rightarrow$) A Schur kararlı olsun: $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). $I - A$ matrisinin özdeğerleri

$\mu_i = 1 - \lambda_i$ 'dir ve $\mu_i \neq 0$ 'dır. Dolayısıyla

$$\det(I - A) = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n \neq 0.$$

$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ serisi için

$$S_N = I + A + A^2 + \dots + A^N$$

kısmi toplamlar dizisini alalım. Eşitliğin her iki tarafını $(I - A)$ ile çarpalım:

$$(I - A)S_N = (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^N) = I - A^{N+1}.$$

O zaman $S_N = (I - A)^{-1}(I - A^{N+1})$ olarak elde edilir. A matrisi Schur kararlı, yani $\rho(A) < 1$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - A)^{-1}(I - A^{N+1}) = (I - A)^{-1}.$$

Her $k = 0, 1, 2, \dots$ için $A^k \succeq 0$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} \succeq 0.$$

$(\Leftrightarrow) Y := (I - A)^{-1} \succeq 0$ diyelim. $\det(I - A) \neq 0$ olsun.

$Y \succeq 0$ olduğundan Teorem 3.1.2'e göre sıfırdan farklı öyle $x \succeq 0$ vektörü vardır ki $Yx = \rho(Y)x$ olur. A 'nın özdeğerleri λ_i ise $(I - A)^{-1}$ matrisinin özdeğerleri $1/(1 - \lambda_i)$ 'dir ve

$$\rho(Y) = \max_i \frac{1}{|1 - \lambda_i|} = \frac{1}{1 - \rho(A)}$$

olur. $Y \succeq 0$ ve $x \succeq 0$ olduğundan

$$Yx = \frac{1}{1 - \rho(A)}x \succeq 0$$

ve buna göre $0 < \frac{1}{1 - \rho(A)} \Rightarrow 0 < 1 - \rho(A) \Rightarrow \rho(A) < 1$ olur. ■

4. MARKOV ZİNCİRLERİ

Markov süreçleri iyi bilinen bir stokastik dinamik sistem sınıfıdır. Bu sistemin herhangi bir t anındaki durumunu, sistemin başlangıçtaki konumu ve durumlar arasındaki geçişin olasılık dağılımını ifade eden geçiş (transition) matrisi belirler. Markov varsayımları altında, bu olasılık dağılımı t zamanına göre belirli kurallara göre değiştiğinden sistem üzerinde analiz yapmak anlamlı olur. Temel sistem; girdisi olmayan, ayrık-zamanlı ve sonlu (n adet) durumdan oluşmaktadır. Eğer $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ için sistemin konumu s_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) durumundan s_j ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) durumuna geçiş olasılığı $0 \leq p_{i,j}$ olmak üzere

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilmişse bu matrise Markov matrisi (geçiş matrisi) ve $t = 0, 1, 2, \dots, s(t) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s(t+1) &= P^T s(t), \\ s(0) &= s_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4.1}$$

ayrık-zamanlı sisteme de Markov zinciri denir [3]. Bu sistemin çözümü:

$$\begin{aligned} s(1) &= P^T s_0, \\ s(2) &= P^T s(1) = (P^T)^2 s_0, \\ s(3) &= P^T s(2) = (P^T)^3 s_0, \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ s(k) &= (P^T)^k s_0 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

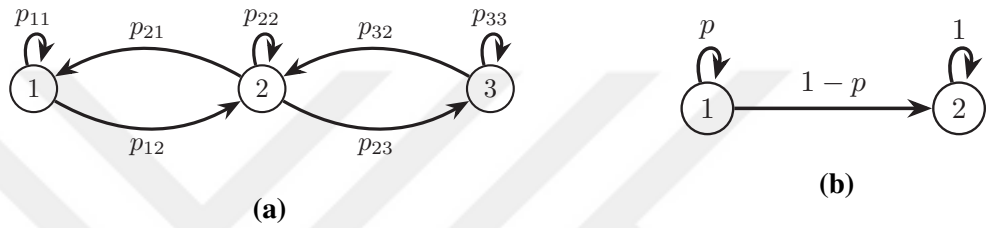
olur.

4.1. Markov Çizgeleri

Markov zinciri, $n \times n$ boyutlu P geçiş olasılık matrisi ile verilir ve bu matris n tane düğüm noktasından oluşan bir çizgeyi (graph) temsil etmektedir. Bu düğüm noktalarını

s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ile gösterelim. P matrisinin p_{ij} girdisi s_i düğümünden s_j düğümüne geçme olasılığını ifade etmektedir. Bu tür çizgelere Markov çizgesi adı verilir. P matrisinin her bir satırındaki bileşenlerin toplamı 1'e eşit olduğundan bu matrise satırca stokastik negatif olmayan matris denir.

Bir çizge; düğümler kümesi ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlarla temsil edilir. s_i düğümü ile s_j düğümü arasında yönlendirilmiş bir kenar olması için gerek ve yeter koşul $p_{ij} \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda P matrisiyle verilen bir çizge yönlendirilmiş bir çizgedir.



Şekil 4.1. Markov çizge örnekleri

Şekil 4.1 (a)'da 1, 2 ve 3 düğümleri sırasıyla güneşli, bulutlu ve yağmurlu havayı temsil eden bir hava durumunun çizgesidir [3]. 1-3 ve 3-1 kenarlarının olmaması, güneşli bir günden yağmurlu bir güne geçmenin (ve tam tersi) belirli bir zaman aralığı boyunca bulutlu duruma geçilmeden mümkün olmayacağını göstermektedir. Bu çizgenin geçiş matrisi:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

olur. İkinci örnek Şekil 4.1 (b), yalnızca iki düğümü olan bir çizgedir. t anından $t+1$ anına geçişte; 1 düğümünde kalma olasılığı p ve 1 düğümünden 2 düğümüne geçme olasılığı ise $1-p$ 'dir. Sistemin 2 düğümünde kalma olasılığı 1 olduğundan 2 düğümünden 1 düğümüne bir kenar yoktur. Bu çizgenin geçiş matrisi de:

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Bir çizgenin her bir düğüm çifti için birinci düğümden ikinci düğüme yönlendirilmiş

kenarlar dizisi varsa (birinci düğümden ikinci düğüme kenarlar üzerinden gidilebiliyorsa) o zaman bu çizgeye güçlü bağlantılı çizge denir. Şekil 4.1 (a)'daki çizge güçlü bağlantılı bir çizgedir (bakınız [3]).

Teorem 4.1.1 ([9]). *P matrisi ile verilen bir yönlendirilmiş çizgenin güçlü bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul P matrisinin indirgenemez olmasıdır.*

P matrisi bir Metzler matrisi olduğundan (4.1) Markov zinciri aynı zamanda bir pozitif doğrusal sistemdir. $s_i(t+1)$ olasılığı (yani $t+1$ 'de sistemin i 'ninci düğümden olma olasılığı) tüm j düğümleri üzerinden $p_{ji}s_j(t)$ olasılıklarının toplamıdır. Bu nedenle $s_i(t+1)$ 'i

$$s_i(t+1) = \sum_{j=1}^n p_{ji}s_j(t) \quad (4.2)$$

veya matris notasyonuyla

$$s(t+1) = P^T s(t) \quad (4.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $s(t)$ vektörünün bileşenleri $s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)$ 'dir ve bu bileşenler sistemin t anındaki durum olasılık dağılımını ifade eder [3].

Burada $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = 1$ olduğundan Perron teoremine göre, $\lambda = 1$ ve $u = (1, 1, \dots, 1)^T$ için

$$Pu = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n} \\ p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n} \\ \vdots \\ p_{n1} + p_{n2} + \dots + p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda u$$

olduğundan $\lambda = 1$ sayısı P matrisinin bir özdeğeri ve u birler vektörü de P matrisinin bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olur.

Teorem 4.1.2 ([9]). *$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indirgenemez bir matris olsun. Bu durumda*

i) *P matrisinin spektral yarıçapı 1'dir.*

ii) *$1 \in \lambda(P)$ ve bu özdeğere Perron özdeğeri denir.*

iii) *Perron özdeğerinin cebirsel katlılığı birdir.*

iv) $\pi^T P = 1 \cdot \pi^T$ denklemini sağlayan P matrisinin π sol-özvektörünün tüm bileşenleri pozitifdir ($\pi_i > 0$) ve $\|\pi\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |\pi_i| = 1$.

4.2. Markov Zincirinde Olasılık Dağılımının Limiti

Bir Markov zincirinin asimptotik davranışını, yani $t \rightarrow \infty$ iken keyfi başlangıç durumu $s(0)$ için $s(t)$ olasılık dağılımının limitini ele alalım. Öncelikle (4.1) sistemi için $s(0)$ başlangıç durumunun sağlaması gereken koşulu belirleyelim. Burada (4.1) sistemi bir pozitif sistem olduğundan $s_i(0) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmalıdır. Diğer taraftan $s_i(0)$ bileşenleri t anındaki olasılık dağılımını gösterdiğinden

$$\sum_{i=1}^n s_i(0) = 1$$

olmalıdır. Buna göre $s(0)$ başlangıç vektörü

$$\Delta = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

simpleksinde olmalıdır.

Diğer taraftan (4.2) kullanılarak

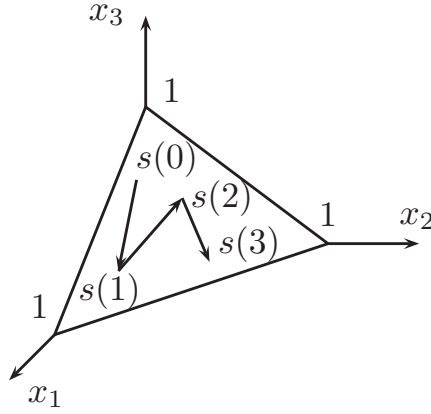
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i(t+1) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ji} s_j(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{ji} s_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^n p_{ji} \right) s_j(t) \right] = \sum_{j=1}^n s_j(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

denklemini elde edilir. $t = 0$ için $s(1) = P^T s(0)$ ve

$$\sum_{i=1}^n s_i(1) = \sum_{j=1}^n s_j(0) = 1$$

olacağından $s(1) \in \Delta$ olur (bakınız [3]). Benzer şekilde $t = 0, 1, 2, \dots$ için $s(t) \in \Delta$ 'dır.

Başlangıç vektörü $s(0) \in \Delta$ için (4.1) sisteminin çözümünün $s(t) \in \Delta$ ($t = 1, 2, \dots$) olması nedeniyle $s(t)$ Markov zinciri, terimleri Δ simpleksinde olan bir dizidir (bakınız Şekil 4.2) [3].



Şekil 4.2. Üç boyutlu Markov zinciri

Tanım 4.2.1 ([1]). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x(t+1) = Ax(t)$ ($t = 0, 1, \dots$) ayrık-zamanlı doğrusal sistemi verilsin. Eğer $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ için $A\tilde{x} = \tilde{x}$ ise $\tilde{x}$ vektörüne (4.1) sisteminin bir denge noktası denir.

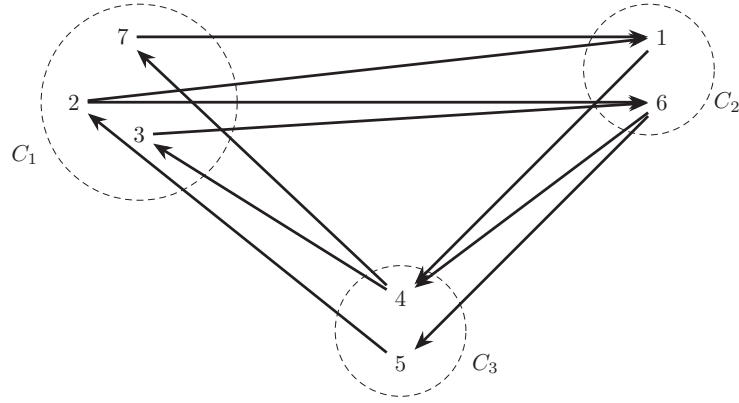
$s(t+1) = P^T s(t)$ sistemi için eğer P matrisi indirgenemez ise Teorem 4.1.2 iv)'e göre

$$\pi^T P = 1 \cdot \pi^T \Rightarrow P^T \pi = \pi$$

olacağından π vektörü $s(t+1) = P^T s(t)$ sisteminin bir denge noktasıdır.

Tanım 4.2.2 ([3]). $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indirgenemez matris ve sistemin düğümleri kümesi $C = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ olan bir çizgeyi ele alalım. $r > 1$ olmak üzere C kümesi: C_i 'deki her düğümlerle $i = 1, 2, \dots, r-1$ için C_i 'deki düğümler ve C_r 'deki her düğümlerle C_1 'deki düğümler arasında bir kenar olacak şekilde ikişer ikişer ayrık $C_1, C_2, \dots, C_r$ kümelerine ayrıştırılabiliyorsa o zaman bu sisteme döngülü sistem denir. Burada r sayısı devirlilik indisi olarak adlandırılır. Bu şekilde guruplandırmanın yapılamadığı sistemlere ilkel sistem denir.

Örnek 4.2.1 ([3]). Aşağıdaki şekilde düğüm noktaları kümesi $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ düğümlerinden oluşan güçlü bağlantılı (Geçiş matrisi P indirgenemezdir) bir çizge verilmiştir (bakınız Şekil 4.3). Burada $C_1 = \{2, 3, 7\}$, $C_2 = \{1, 6\}$, $C_3 = \{4, 5\}$ kümeleri için: C_1 'deki her düğüm ile C_2 , C_1 'deki her düğüm ile C_3 , C_2 'deki her düğüm ile C_3 ve C_3 'deki her düğüm ile C_1 arasında bir kenar vardır. Buna göre bu sistem döngülü bir sistemdir ve devirlilik indisi $r = 3$ 'tür.



Şekil 4.3. Döngülü Markov Zinciri

Teorem 4.2.1 (sf. 134, [3]). P geçiş olasılık matrisi indirgenemez ise katlılığı bir olan Perron özdeğerinden ($\lambda = 1$) başka diğer $(n - 1)$ özdeğeri için $|\lambda_i| < 1$ ($i = 2, 3, \dots, n$) olduğundan (4.1) sistemi için $t \rightarrow \infty$ iken $s(t) \rightarrow \pi$ olur. Eğer sistem ilkel ise $s(0) \in \Delta$ 'dan başlayan olasılık dağılımı $t \rightarrow \infty$ iken $s(t) \rightarrow \pi$ olur. Sistem döngülü ise, $s(t)$ olasılık dağılımı $\tilde{s}(t)$ periyodik dağılım olmak üzere $s(0) \in \Delta$ 'nin seçilişine bağlı olarak $\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \tilde{s}(t) = \pi$ olur.

Örnek 4.2.2 ([3]). Aşağıda iki güçlü bağlantılı çizge verilmiştir. Şekil 4.4 (a)'da $C = \{1, 2, 3\}$ düğüm kümesi $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, $C_3 = \{3\}$ kümelerine ayrışır ve bu çizge devirlilik indisi $r = 3$ olan bir çizgedir.

Sistem başlangıçta 1 numaralı durumda olsun. Sonrasında 2 ve ardından 3 durumuna geçer ve devamında tekrar 1 durumuna döner. Böylece Simpleks'in üç köşesinden oluşan bir döngü kapanır. Simpleks üzerindeki herhangi başka bir noktadan başlanılsa da 3 periyotlu bir döngü ortaya çıkar:

$$s(0) = (s_1(0), s_2(0), s_3(0))^T$$

$$s(1) = (s_2(0), s_3(0), s_1(0))^T$$

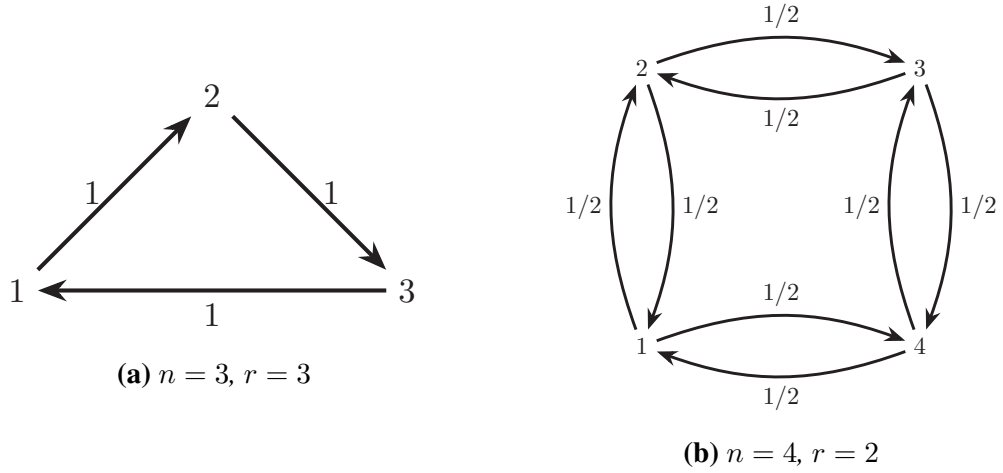
$$s(2) = (s_3(0), s_1(0), s_2(0))^T$$

$$s(3) = s(0).$$

Teorem 4.2.1'e göre $\frac{1}{3}(s(0) + s(1) + s(2)) = \pi$ 'dir.

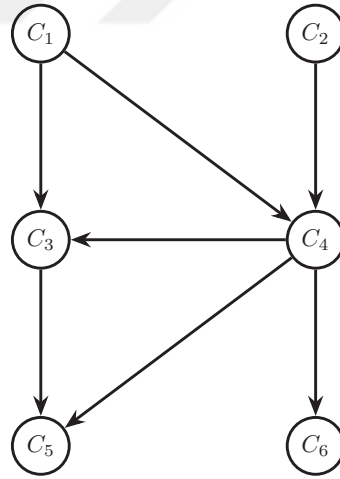
Şekil 4.4 (b)'de verilen çizgede ise $C = \{1, 2, 3, 4\}$ düğüm kümesi $C_1 = \{1, 3\}$,

$C_2 = \{2, 4\}$ kümelerine ayrışır ve bu çizge devirlilik indisi $r = 2$ olan bir çizgedir



Şekil 4.4. Döngülü Markov Zincirleri

Şekil 4.5'te altı sınıflı bir Markov zinciri yer almaktadır. Eğer $t = 0$ için zincir C_1 sınıfındaysa belli bir süre sonra C_3 ya da C_4 sınıfına geçebilecektir. Bu geçiş olursa $t \rightarrow \infty$ için sistem tekrar C_1 sınıfına dönmeyebilir. Bu şekildeki bir sınıfa geçici sınıf denir. $C_1, \dots, C_4$ sınıfları geçici sınıflardır



Şekil 4.5. İndirgenebilir bir Markov zinciri

Eğer zincir belirli bir zamanda C_5 sınıfında ise bu aşamadan sonra $t \rightarrow \infty$ için C_5 sınıfında kalmaya devam edecektir. Böyle bir sınıfa terminal sınıf denir. Burada C_5 ve C_6 terminal sınıflardır.

Tek bir terminal sınıf olduğunda zincirin asimptotik davranışı, terminal sınıfını tanımlayan ilkel zincire Teorem 4.2.1 uygulanarak belirlenir.

Örnek 4.2.3 ([3]). *Mendel yasasına göre her bireyin genotipleri (aa, Aa veya AA), ebeveynlerinin ($aa - aa, aa - Aa, AA - AA$) genotipleri bilindiğinde belli bir olasılığa bağlı olarak belirlenebilir. Bu yasaya göre her bireyin rastgele bir aleli (a veya A) babadan ve bir aleli de anneden miras aldığı kabul edilir. Bu nedenle örneğin Aa bir babadan ve AA bir anneden doğan bireylerin genotipi aa olamaz. AA veya Aa genotipine sahip olma olasılığı ise $\frac{1}{2}$ 'ye eşittir. Aşağıdaki tabloda olası durumların olasılıkları verilmektedir.*

Çizelge 4.1. Ebeveyn genotipine göre Mendel tablosu

	Ebeveyn Genotipi					
	aa-aa	aa-Aa	aa-AA	Aa-Aa	Aa-AA	AA-AA
aa	1	1/2	0	1/4	0	0
Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
AA	0	0	0	1/4	1/2	1

Bir popülasyondaki ebeveynler aynı genotipe sahip bireylerse, bu durumda Mendel'in tablosunun üç sütunuyla ilgilenilir: birinci ($aa - aa$), dördüncü ($Aa - Aa$) ve altıncı ($AA - AA$). Aa, aa ve AA genotiplerini sırasıyla 1, 2 ve 3 ile gösterelim ve $s_i(t)$ ile t 'yinci neslin bir bireyin i genotipine sahip olma olasılığını gösterelim ($i = 1, 2, 3$). Mendel'in tablosu şu şekilde ortaya çıkar:

Çizelge 4.2. Üç ebeveyn genotipi için olasılık tablosu

	1 (Aa)	2 (aa)	3 (AA)
1 (Aa)	1/2	0	0
2 (aa)	1/4	1	0
3 (AA)	1/4	0	1

$$s_1(t+1) = \frac{1}{2}s_1(t)$$

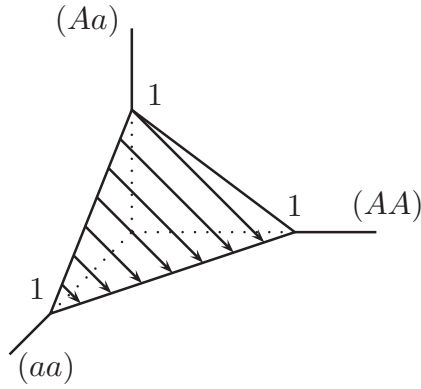
$$s_2(t+1) = \frac{1}{4}s_1(t) + s_2(t)$$

$$s_3(t+1) = \frac{1}{4}s_1(t) + s_3(t)$$

Bu üç durum denkleminde

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $s(t+1) = P^T s(t)$ olan bir Markov zinciri tanımlanır. P matrisi indirgenebilir

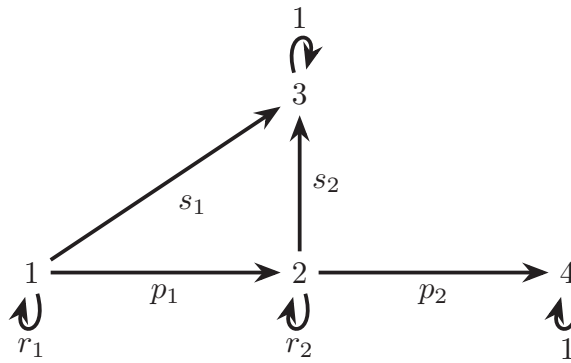


Şekil 4.6. Üç genotip

bir matristir ve ilk değişken (yani Aa) diğer değişkenlerden etkilenmez. P matrisinin özdeğerleri $1/2$, 1 ve 1'dir. Aa'ya karşılık gelen özdeğer $1/2$ 'dir. Diğer özdeğerler 2'nci ve 3'üncü değişkenlere karşılık gelmektedir ve bu değişkenler terminal sınıfındadırlar.

Şekil 4.6'da gösterildiği gibi olasılık vektörü $s(t)$ asimptotik olarak $s_1 = 0$ 'a (birinci değişkene) karşılık gelen simplex kenarına eğilim gösterir. Bu, popülasyonda genotipi Aa olan bireylerin neslinin tükenmeye doğru eğilimi olduğu anlamına gelir (her nesilde yarıya düşer).

Örnek 4.2.4 ([3]). Şekil 4.7'de verilen Markov çizgesinde iki aşamalı bir üretim süreci verilmektedir. 1 ve 2 düğümleri sırasıyla bir bir malzeme üzerinde ardışık olarak gerçek-



Şekil 4.7. İki aşamalı üretim süreci: 1 ve 2 düğümleri ürün işleme; 3 düğümü ürünü eleme; 4 düğümü ürünü kabul etme

leştirilecek ilk ve ikinci işlemleri temsil etmektedir.

Birinci işlemin doğru bir şekilde gerçekleştirilme olasılığı p_1 , işlemin doğru bir şekilde yapılamadığı ve tekrarlanma olasılığı r_1 , malzemenin yanlış işlenmesi sonucu

atılması olasılığı s_1 'dir:

$$p_1 + r_1 + s_1 = 1.$$

İkinci işlemin doğru bir şekilde gerçekleştirilme olasılığı p_2 , işlemin doğru bir şekilde yapılamadığı ve tekrarlanma olasılığı r_2 , malzemenin yanlış işlenmesi sonucu atılması olasılığı s_1 'dir:

$$p_2 + r_2 + s_2 = 1.$$

Zincirin 1. ve 2. durumları geçici durumlardır, 3. ve 4. durumları ise terminal durumlardır. Markov matrisi:

$$P = \begin{bmatrix} r_1 & p_1 & | & s_1 & 0 \\ 0 & r_2 & | & s_2 & p_2 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bu örnek için

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.3 & p_1 &= 0.2 & s_1 &= 0.5 \\ r_2 &= 0.4 & p_2 &= 0.3 & s_2 &= 0.3 \end{aligned}$$

ise sistemin matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & | & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & | & 0.3 & 0.3 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. $s(0) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$ başlangıç noktası ile başlanır ise $s(t+1) = P^T s(t)$ sistemi $t \rightarrow \infty$ için $(0, 0, 0.485, 0.515)^T$ vektörüne yakınsar. Buradan görülüyor ki üretim bandına gelen malzemenin yüzde 48.5'inin geri dönüşüm bandına, yüzde 51.5'inin de ürün kabul bandına gitme olasılığı vardır.

Bu P matrisinin Perron özvektörü: $\pi = (0, 0, 1, 1)$ 'dir. Buna göre 1 ve 2'nci düğümler geçiçi, 3 ve 4'üncü düğümler ise terminal düğümlerdir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Metzler matrislerin bir alt sınıfı olan pozitif matrislerle karakterize edilen pozitif doğrusal sistemlerin asimptotik davranışı problemi ele alınmıştır. Pozitif sistemlerle ilgili uygulamalarda Metzler dinamik sistemlerin asimptotik kararlılığı ve sistemin yörüngelerinin belirlenmesi problemi oldukça önemlidir.

Sürekli ve ayırık zamanlı pozitif doğrusal sistemlerin analizinde, sistemi temsil eden matrisin özdeğer özellikleri öne çıkmaktadır. Tez çalışmasında, uygulama alanı oldukça geniş olan Metzler matrisleri sınıfının özdeğer özellikleri, bu özelliklerle ilgili temel sonuçlar verilmiştir. Metzler matrislerin bir alt sınıfı olan stokastik matrislerin önemli rol oynadığı bir dinamik sistem olan Markov zincirleri uygulama olarak oldukça geniş bir alana sahiptir. Markov süreçlerinde simplekse ait bir başlangıç durum vektörü verildiğinde, herhangi bir adımdaki olasılık dağılımı hesaplanabilmekte ve ele alınan Markov zincirinin yakınsadığı durum vektörü de ifade edilebilmektedir. Tez kapsamında, Markov zincirinin uygulamaları olan iki örnek model ve bu modellerin teorik sonuçlar çerçevesinde analizleri yapılmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] Khalil, H.K. (2001). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- [2] Barmish, B.R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear systems*, Macmillan.
- [3] Farina, L., Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems: Theory and Applications*, Prentice Hall.
- [4] Horn, R.A., Johnson, C.R. (2013). *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- [5] Nicoletta, B., Carli, R., Schenato, L. (2001). *Lyapunov Theory for Discrete Time Systems*, Università degli studi di Padova - Technical Report.
- [6] Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H., Keel, L.H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall.
- [7] Horn, R.A., Johnson, C.R. (1991). *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- [8] Cvetkovic, A. (2020). *Stabilizing the Metzler matrices with applications to dynamical systems*, Calcolo, vol. 57, no. 1, 1-34.
- [9] Crisostomi, E., Kirkland, S., Shorten, R. (2011). *A Google-like model of road network dynamics and its application to regulation and control*, International Journal of Control, vol. 84, no. 3, pp. 633-651.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aslı Başak ÖĞÜLMÜŞ

Yabancı Dil : English

ORCID Number : 0009-0002-5208-1183

Eğitim Geçmişi:

2016-2021 : Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

