

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MILLER-ROSS VE RABOTNOV FONKSİYONLARININ
BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Sadettin ECE

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DIYARBAKIR

Temmuz 2021

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DIYARBAKIR

Sadettin ECE tarafından yapılan “Miller-Ross ve Rabotnov Fonksiyonlarının Bazı Geometrik Özellikleri” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Üye : Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Üye : Prof. Dr. Bilal ŞEKER

Üye : Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 26/07/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20..

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Hayatımda değeri kelimelerle ifade edilemeyen, bilgi deryasında olabildiğince istifade ettiğim, aydınlığıyla eğitim hayatıma yaldızlı harflerle yazılan değerli danışmanım;

Sayın **Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER,**

hocama, doktora eğitimim boyunca bilgileriyle beni ihya eden tüm değerli hocalarıma; desteklerini eğitim hayatımda hissettiğim gurur kaynağım olan Aileme;

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sadettin ECE

Diyarbakır, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
ŞEKİL LİSTESİ.....	VI
KISALTMA VE SİMGELER.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MATERYAL ve METOT.....	9
3.1. Ünivalent Fonksiyonlar	9
3.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları.....	18
3.3. Bazı Özel Fonksiyonlar	34
3.3.1. Gamma Fonksiyonu.....	34
3.3.2. Beta Fonksiyonu	37
3.3.3. Bessel Fonksiyonu	38
3.3.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu	39
3.3.5. Miller Ross Fonksiyonu.....	41
3.3.6. Rabotnov Fonksiyonu.....	42
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	43
4.1. k -Yıldızıl ve k -Düzgün Konveks Fonksiyonlar ile Bağlantılı Normalize Dini Fonksiyonu	43

4.2.	Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları ile Bağlantılı Genelleştirilmiş Dini Fonksiyonu	49
4.3.	Normalize Edilmiş Miller-Ross Fonksiyonunun Geometrik Özellikleri	57
4.4.	Normalize Edilmiş Rabotnov Fonksiyonunun Geometrik Özellikleri	69
5.	SONUÇLAR	83
6.	KAYNAKLAR	85
	ÖZGEÇMİŞ	89



ÖZET

MILLER-ROSS VE RABOTNOV FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

SADETTİN ECE

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2021

Bu tez çalışmasında ilk olarak Bessel fonksiyonlarının özel bir kombinasyonu olan Dini fonksiyonunun k -yıldızlı ve k -düzgün konveks fonksiyonlar sınıflarında yer alması için yeterli koşullar elde edilmiş, ardından genelleştirilmiş Dini fonksiyonunun yıldızlı ve konveks fonksiyonların bazı alt sınıflarında yer alması için yeterli koşullar verilmiştir. Bundan başka, 1993 yılında K.S.Miller ve B.Ross tarafından verilen Miller-Ross fonksiyonunun ve 1948 yılında Yu.N.Rabotnov tarafından verilen bir kesirsel üstel fonksiyon olan Rabotnov fonksiyonunun geometrik özellikleri incelenerek bu fonksiyonların $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde ünivalent, konveks, yıldızlı ve konvekse yakın olabilmeleri için yeterli koşullar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Univalent, Yıldızlı, k - Düzgün Konveks, Konveks, k - Yıldızlı, Konvekse Yakın, Dini Fonksiyonu, Miller- Ross Fonksiyonu, Rabotnov fonksiyonu

ABSTRACT

SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF MILLER-ROSS AND RABOTNOV FUNCTIONS

PhD THESIS

Sadettin ECE

DEPARTMENT MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2021

In this thesis, firstly, sufficient conditions were obtained for the Dini function, which is a special combination of Bessel functions, to be included in the classes of k -starlike and k -uniformly convex functions; then, sufficient conditions are given for the generalized Dini function to be included in some subclasses of starlike and convex functions. Moreover, the geometric properties of the Miller-Ross function given by K.S. Miller and B.Ross in 1993 and the Rabotnov function, which is a fractional exponential function given by Yu.N.Rabotnov in 1948, are investigated and sufficient conditions have been obtained for these functions to be univalent, convex, starlike and close-to-convex in the unit disk $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1\}$.

Key words: Univalent, Starlike, k - Uniformly Convex, Convex, k - Starlike, Close to Convex, Dini Function, Miller- Ross Function, Rabotnov Function

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1.	$f(z) = z + \frac{1}{7}z^6$ fonksiyonun grafiği	10
Şekil 3.2.	$f(z) = z + \frac{2}{7}z^6$ fonksiyonun grafiği	11
Şekil 3.3.	Koebe fonksiyonu	14
Şekil 3.4.	Yıldızıl Küme	19
Şekil 3.5.	Konveks Küme	19
Şekil 3.6.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki resmi	20
Şekil 3.7.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = 2^{-1} \log \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki resmi	20
Şekil 3.8.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki resmi	21
Şekil 3.9.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altındaki resmi	21
Şekil 3.10.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu altındaki resmi	22
Şekil 3.11.	$f(z)$ fonksiyonun Γ_z yayının üzerindeki analitik dönüşümü	23
Şekil 3.12.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z-z^2/2}{(1-z)^2}$ fonksiyonu altındaki resmi	31
Şekil 3.13.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = -z - 2 \log(1-z)$ fonksiyonu altındaki resmi	34

Şekil 3.14.	$\Gamma(x)$ fonksiyonun grafiği	35
Şekil 4.1.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f_5(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\Gamma(6)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(5+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi	47
Şekil 4.2.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(1+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi	49
Şekil 4.3.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f_{2, \frac{2}{5}}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n\Gamma(7/5)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(2/5+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi	53
Şekil 4.4.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f_{4, \frac{3}{2}}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+2)\Gamma(5/2)}{4^n(n-1)!\Gamma(3/2+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi	56
Şekil 4.5.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = -\log(1-z)$ fonksiyonu altındaki resmi	58
Şekil 4.6.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{E}_{0, \frac{1}{2}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\Gamma(k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	61
Şekil 4.7.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{E}_{3,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3+k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	63
Şekil 4.8.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\frac{\mathbb{E}_{2,1}(z^2)}{z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+k)} z^{2k-1}$ fonksiyonu altındaki resmi	66
Şekil 4.9.	$\mathcal{U}_{1/2}$ birim diskinin $\mathbb{E}_{2,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	67
Şekil 4.10.	$\mathcal{U}_{1/2}$ birim diskinin $\mathbb{E}_{3,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3+k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	68
Şekil 4.11.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{2}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k-1}\Gamma(k)}$ fonksiyonu altındaki resmi	71
Şekil 4.12.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{4^{k-1}\Gamma(3k/2)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	73
Şekil 4.13.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{2,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	76
Şekil 4.14.	$\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{1, \frac{1}{3}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}\Gamma(2k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi	78

Şekil 4.15. $\mathcal{U}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{3}}(z^2)/z = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}\Gamma(k)} z^{2k-1}$ fonksiyonu altındaki resmi 80

Şekil 4.16. $\mathcal{U}_{1/2}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}, 1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3k/2)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi 81

Şekil 4.17. $\mathcal{U}_{1/2}$ birim diskinin $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{3}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}\Gamma(k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi 82



KISALTMA VE SİMGELER

$\mathcal{U}$	Birim disk
$B(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
Γ_z	Eğri, yay
$\mathcal{S}$	Normalize edilmiş analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Yıldızl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonların Sınıfı
$k-UCV$	k Düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı
$k-ST$	k Yıldızl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{P}$	Pozitif reel kısma sahip fonksiyonların sınıfı
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$(z)_n$	Pochhammer sembolü
$B(p, q)$	Beta fonksiyonu
$J_\nu(z)$	ν mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\nu, c}(z)$	Miller-Ross fonksiyonu
$\mathbb{E}_{\nu, c}(z)$	Normalize edilmiş Miller-Ross fonksiyonu
$R_{\alpha, \beta}(z)$	Rabotnov fonksiyonu
$\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z)$	Normalize edilmiş Rabotnov fonksiyonu
$w_\nu(z)$	Dini fonksiyonları
$f_\nu(z)$	Normalize Dini fonksiyonu
$w_{c, \nu}(z)$	Genelleştirilmiş Dini fonksiyonu
$f_{c, \nu}(z)$	Normalize genelleştirilmiş Dini fonksiyonu

1.GİRİŞ

Kompleks sayılar ilk olarak on altıncı yüzyılın ortalarında, ikinci dereceden veya kübik denklemlerin olası çözümleri olarak kabul edilmişlerdir. “İmajiner” terimini ilk kullanan Decartes olmuştur. 1777 yılında Leonhard Euler kompleks sayılar için $i = \sqrt{-1}$ sembolünü ilk kez kullanan matematikçidir. Bu tür sayılar için “kompleks sayılar” ifadesini ilk kullanan Gauss olmuştur. On yedinci yüzyılda imajiner sayılar meşru, aslında gerekli, denklem kökleri olarak kabul edilmeye başlanmış ve ancak on dokuzuncu yüzyılda kompleks sayılar kendi başlarına matematiksel analizin konusu haline gelmiştir. Cauchy 1814'ten 1832'ye kadar yaklaşık yirmi yıllık bir süre boyunca modern kompleks analiz teorisini neredeyse tek başına geliştirmiştir.

Kompleks değişkenli geometrik fonksiyonlar teorisi, bazı geometrik özellikleriyle tanımlanmış analitik fonksiyonları veya analitik fonksiyonların bazı sınıflarının geometrik özelliklerini araştıran, kompleks analizin önemli bir dalıdır. Bu teori, ilk defa G. Bernhard Riemann'ın literatürde kendi adıyla anılan Riemann Dönüşüm Teoremi ile ortaya çıkmıştır. Riemann'ın 1851'deki doktora tezindeki bu teoreminde; kompleks düzlemin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesinin $|z| < 1$ birim diskinde konformal olarak resmedilebileceğini belirtmiştir. Riemann Dönüşüm Teoremi sayesinde bir bölgeden başka bir bölge üzerine olan konformal dönüşümler ile ilgili problemler, birim diskten verilen bir bölge üzerine konformal dönüşüm problemine indirgenebilmiştir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde ünivalent fonksiyonlar önemli bir yere sahiptir. Geometrik fonksiyonlar teorisinde alan, uzunluk, çevre, çap gibi geometrik özelliklerle birlikte, geometrik yönü çok belirgin olmayan bir çok soru da gözönünde bulundurulmaktadır. Bieberbach tahmini buna örnek olarak verilebilir. Burada geometri dönüşümün ünivalent oluşu sebebiyle devreye girer. Bu nedenle, günümüzde Geometrik Fonksiyonlar Teorisine genellikle "Ünivalent Fonksiyonlar Teorisi" denilmektedir.

Geometrik Fonksiyonlar Kuramının en göze çarpan gelişmelerinden biri Ludwig Bieberbach tarafından gerçekleştirilmiştir. Bieberbach 1916 yılında normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı olan $\mathcal{S}$ sınıfındaki bir fonksiyonun katsayıları ile ilgili literatürde önemli bir yere sahip olan $|a_n| \leq n$ tahminini yapmıştır. Ayrıca $n=2$ için sınırları ispatlamıştır. Bu önemli tahmini ispatlamak için uzun yıllar matematikçiler

1.GİRİŞ

üzerinde çalışmış ancak Louis de Branges 1984 yılında ispatlayıncaya kadar bir tahmin olarak kalmıştır. Bieberbach tahmininin eşitlik hali, birim diski konformal olarak $-1/4$ 'ten $-\infty$ 'a negatif reel eksensiz kompleks düzlem üzerine dönüştüren $f(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonu için sağlanır. Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki resmine ünivalentliği bozmadan herhangi bir açık küme ekleyemediğimizden bu fonksiyon en büyük ünivalent fonksiyondur. Bieberbach tahmininin ispatlanması ünivalent fonksiyonlar teorisinin temellerini sağlamlaştırmıştır. Ünivalent fonksiyonlar teorisi üzerine çalışan matematikçiler, problemi $\mathcal{S}$ sınıfının değişik alt sınıfları için çalışmayı sürdürmektedirler.

“Özel fonksiyon” kavramının kesin bir tanımı yoktur. Pratik bir bakış açısıyla bir özel fonksiyon, cebirsel, trigonometrik, üstel, logaritma gibi temel bir fonksiyon olmayan ve cebirsel işlemlerle bu temel fonksiyonlardan elde edilen bir fonksiyondur. Trigonometrik fonksiyonları içeren özel fonksiyonlar yüzyıllardır kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümündeki rolleri Newton ve Leibniz tarafından kullanılmıştır ve özel fonksiyonlar konusu o zamandan beri sürekli gelişme içinde olmuştur. Sadece son otuz yılda birkaç yeni özel fonksiyon ve uygulama keşfedilmiştir. Özel fonksiyonlar, iletişim sistemleri, elektro-optik, doğrusal olmayan dalga, yayılma, elektromanyetik teori, elektrik devresi teorisi ve kuantum mekaniği gibi modern mühendislik ve fizik biliminde kullanılmaktadırlar.

Bu tez çalışmasında, herbiri birer özel fonksiyon olan Dini fonksiyonu, Miller-Ross fonksiyonu ve Rabotnov fonksiyonunun geometrik özellikleri araştırılmış, herbir fonksiyonun ünivalent, konveks, yıldızlı ve konvekse yakın olmaları için yeterli koşulları içeren teoremler ispatlanmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, kompleks analiz ile ilgili olan ve tezde kullanılan temel tanımlar yapılacaktır. Ayrıca bazı önemli teoremler ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1. (Komşuluk) Kompleks düzlemde $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası alınsın.

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

kümesi “ z_0 noktasının r komşuluğu” veya eşdeğer olarak “ z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk” olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı “kapalı disk”,

$$\partial B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı “çember” ve

$$B^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının “delinmiş komşuluğu” denir.

Tanım 2.2. (İç Nokta ve Açık Küme) $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının en az bir komşuluğu A kümesinde kalıyorsa z_0 noktasına A kümesinin bir “iç noktası” denir. A kümesinin tüm iç noktalarının kümesi A° veya iç A ile gösterilir. $A^\circ = A$ ise yani A kümesinin her noktası bir iç nokta ise A kümesine $\mathbb{C}$ de “açık küme” denir.

Tanım 2.3. (Yığılma Noktası, Kapanış ve Kapalı Küme) $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. z_0 noktasının her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir noktasını bulundurursa z_0 noktasına A kümesinin bir “yığılma noktası” denir. A kümesinin yığılma noktalarının kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir. $A \cup \tilde{A}$ kümesine A kümesinin “kapanışı”

denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. $\tilde{A} \subset A$ oluyorsa yani $\bar{A} = A$ ise A kümesine $\mathbb{C}$ düzleminde “*kapalı küme*” denir.

Tanım 2.4. (Bağlantılı küme, Bağlantısız küme) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere A kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa bu kümeye *bağlantılı küme* denir. Bağlantılı olmayan kümeye “*bağlantısız küme*” denir.

Bağlantılılığın aşağıda verilen tanımı uygulamalarda oldukça kullanışlıdır:

$A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı U ve V açık kümeleri bulunamıyor ise, A kümesine “*bağlantılı küme*” denir.

Tanım 2.5. (Eğri) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olsun. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir *eğri* veya *yol* denir.

$x(t)$ ve $y(t)$, $[a, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere, bir kompleks düzlemdeki bir γ eğrisi parametrik olarak $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$ ile verilir. γ eğrisi $\gamma(a)$ *başlangıç* ve $\gamma(b)$ *bitiş* noktalarına sahiptir. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisi “*kapalı eğri*” olarak adlandırılır. Tüm farklı $t_1, t_2 \in [a, b]$ değerleri için $z(t_1) \neq z(t_2)$ oluyorsa yani kendini kesmiyorsa γ eğrisine *basit eğri*, hem basit hem de kapalı eğrilere de “*basit kapalı eğri*” veya “*Jordan eğrisi*” denir. t , a noktasından b noktasına artarken, $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ ’dan $\gamma(b)$ ’ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir.

Tanım 2.6. (Bölge) Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık olan bir kümeye “*bölge*” denir. Eğer bir D bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen D bölgesinde kalıyorsa D ’ye “*basit bağlantılı bölge*” denir. Basit bağlantılı olmayan bölgeye “*çokgen bağlantılı bölge*” denir.

Tanım 2.7. (Diferensiyellenebilirlik) f , bir z_0 noktasının komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi, varsa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

limitidir. Bu tür bir f fonksiyonuna z_0 noktasında “*diferensiyellenebilir*” (veya *türevlenebilir*) denir. Limitin değeri $\frac{df}{dz}(z_0)$ veya $f'(z_0)$ şeklinde gösterilir ve bu değere

f fonksiyonunun z_0 noktasındaki “türevi” adı verilir. $f'(z_0)$ türevi yine $\mathbb{C}$ kümesinin bir elemanı olur.

Tanım 2.8. (Analitiklik) $A \subset \mathbb{C}$ olsun. $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse, f fonksiyonuna “ z_0 noktasında analitiktir” denir. Kompleks düzlemin tamamında analitik olan fonksiyona “tam fonksiyon” adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu tanım kümesindeki bir z_0 noktasında analitik olmuyorsa, bu nokta “singüler nokta” olarak adlandırılır. Tek değerli bir analitik fonksiyon veya çok değerli bir analitik fonksiyonun tek değerli bir dalı “regüler” olarak adlandırılır.

Bir kompleks $w = f(z)$ fonksiyonu geometrik olarak z -düzlemindeki bir bölgeden w -düzlemindeki bir bölgeye $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere $u = u(x, y)$ ve $v = v(x, y)$ ile tanımlı bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Diferensiyellenebilirlik koşulunun, analitik bir $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun reel kısmı $u(x, y)$ ile imajiner kısmı $v(x, y)$ arasında bir ilişki kurmasını beklemek doğaldır.

Teorem 2.9. $z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu verilsin. $f(z)$ fonksiyonunun bir D bölgesinde analitik olması için gerekli ve yeterli koşul $f(z)$ fonksiyonunun bu bölgede sürekli olması ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerini sağlamasıdır. Bu denklemler “Cauchy-Riemann denklemleri” olarak adlandırılır. (Goodman 1983)

Basit kapalı bir γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonunun γ eğrisinin içinde olan noktalarda aldığı değerlerin, $f(z)$ fonksiyonunun γ eğrisi üzerinde aldığı değerler ile hesaplanabileceğini söyleyen aşağıdaki teorem kompleks analizde önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.10. (Cauchy İntegral Formülü): γ basit, kapalı ve pozitif yönlü bir eğri olsun. Eğer f fonksiyonu γ eğrisini kapsayan basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ve z_0 bu eğrinin içinde herhangi bir nokta ise, bu durumda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

eşitliği sağlanır. (Agarwal ve ark. 2011)

Teorem 2.11. (Analitik Fonksiyonların Türevi) Eğer f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise bu durumda tüm $f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ türevleri vardır ve bu türevler D bölgesinde analiktir. (Agarwal ve ark. 2011)

Bir analitik fonksiyonun verilen bir bölgede her mertebeden türevinin var ve bu türevlerin bu bölgede analitik olduğunu söyleyen bu önemli sonuç, türevler için Cauchy integral formülüne götürür.

Teorem 2.12. (Türevler için Cauchy İntegral Formülü) Eğer f fonksiyonu pozitif yönlü basit kapalı bir γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik ve z_0 bu eğrinin içinde herhangi bir nokta ise, bu durumda $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

olur. (Agarwal ve ark. 2011)

Tanım 2.13. (Kuvvet Serisi) z_0 kompleks sayısı verilsin. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ kompleks sayılar olmak üzere

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

fonksiyon serisine, “ z_0 merkezli bir kuvvet serisi” denir. Kuvvet serisi kısaca

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

ile gösterilir. Bir kuvvet serisinin $z = z_0$ noktasında yakınsak olduğu açıktır.

f fonksiyonunun analitik olduğu noktanın uygun bir komşuluğunda kuvvet serisine açılabilceğini gösteren Taylor Teoremi kompleks analizde büyük öneme sahiptir.

Teorem 2.14. (Taylor Teoremi) f , D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu bölgeden alınan bir nokta olmak üzere $B(z_0, r)$, D bölgesindeki en büyük açık disk olsun. Bu durumda f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

şeklinde bir seri gösterimine sahiptir. Bu seriye f fonksiyonunun z_0 noktasındaki “Taylor serisi” denir. Bu seri tüm $z \in B(z_0, r)$ noktaları için yakınsaktır. Ayrıca bu yakınsaklık $0 \leq r < R$ için $\bar{B}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kapalı diskinde düzgündür. (Agarwal ve ark. 2011).

Tanım 2.15. (Konform Dönüşüm) Kompleks düzlemin bir D bölgesinde $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü verilsin. γ_1 ve γ_2 , $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı olan iki düzgün eğri olmak üzere bu eğrilerin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında “konform dönüşüm” denir. f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise, f fonksiyonuna D bölgesinde “konformdur” denir.

a, b, c, d birer kompleks sabit olmak üzere

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

ile verilen Möbius dönüşümü ve $f(z) = e^z$ dönüşümü kompleks düzlemde konform dönüşümlere örnek olarak verilebilir.

Analitiklik ile konform dönüşümler arasında bulunan önemli ilişki aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.16. f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ oluyorsa f konform bir dönüşümdür (Duren 1983).



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tez boyunca ihtiyaç duyulan temel kavramlardan bahsedilmiştir.

3.1. Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1. (Ünivalent Fonksiyon) Bir D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu aynı değeri birden fazla kez almıyorsa yani $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent fonksiyon* denir.

Bir ünivalent fonksiyon D bölgesini schlicht bölge denilen, kendi kendini kesmeyen ve dallanma noktası bulundurmeyen bir bölge üzerine dönüştürür. Bu sebepten ünivalent fonksiyonlara *schlicht fonksiyon* da denir.

Tanım 3.1.2. (Yerel Ünivalent Fonksiyon) Bir D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu, bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna z_0 noktasında “*yerel ünivalent fonksiyon*” denir.

D kompleks düzlemde bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. D bölgesinde ünivalent olan bir f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise $f'(z) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi doğru olmayabilir. Örneğin $f(z) = z^3$ fonksiyonu $\mathbb{C} - \{0\}$ bölgesinde $f'(z) = 3z^2 \neq 0$ koşulunu sağlar ancak bu bölgede ünivalent değildir. Bununla birlikte $f'(z_0) \neq 0$ ise ve f fonksiyonu z_0 ’da analitikse bu durumda f z_0 noktasında yerel ünivalenttir.

Ünivalent bir fonksiyon yerel ünivalenttir. Fakat tersi doğru olmayabilir. Yani bir bölgede yerel ünivalent olan bir fonksiyon, verilen bölgede ünivalent olmayabilir. Örneğin $D = \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde $f(z) = z^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon D ’de yerel ünivalenttir ama ünivalent değildir. $f(z) = z^2$ fonksiyonu D ’de analiktir ve bölgedeki her z_0 noktası için $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu da yerel ünivalent olduğu anlamına gelir. Ancak

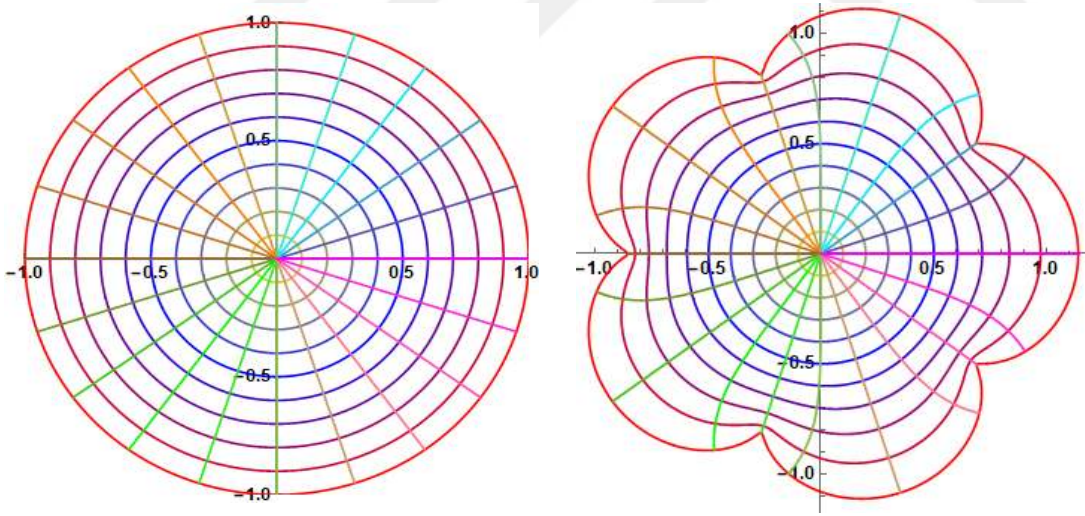
$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} - i\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = i\frac{9}{4}$$

olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde ünivalent değildir.

Teorem 3.1.3. (Riemann Dönüşüm Teoremi) Kompleks düzlemin her $D (\neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı alt bölgesi konform olarak $\mathcal{U} = \{ z: |z| < 1 \}$ birim diski üzerine resmedilir. Buna ek olarak $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve D bölgesini $\mathcal{U}$ diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

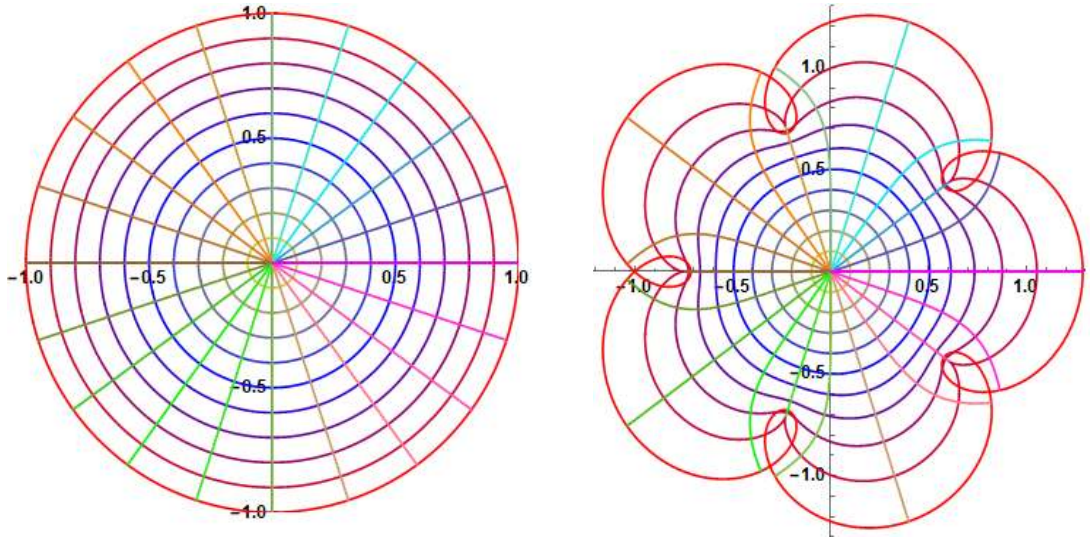
Riemann Dönüşüm Teoremine göre, sınırı birden fazla noktadan oluşan herhangi bir basit bağlantılı schlicht bölge, birim çemberin içi üzerine konformal olarak dönüştürülebilir. Buna göre D bölgesindeki herhangi bir ünivalent fonksiyon birim çember içindeki bir ünivalent fonksiyonla ilişkilidir. Eğer D bölgesini birim disk üzerine dönüştüren fonksiyon biliniyorsa, ikinci fonksiyonun özellikleri orijinal fonksiyonun özelliklerine kolayca dönüştürülebilir. Bir ünivalent fonksiyonun tanım kümesinin birim disk olarak seçilmesi hesaplama kolaylığı, kısa ve zarif formüller elde edilmesi gibi avantajlara sahiptir.

$f(z) = z + \frac{1}{7}z^6$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalenttir. (Şekil.3.1.)



Şekil 3.1. $f(z) = z + \frac{1}{7}z^6$ fonksiyonun grafiği

$f(z) = z + \frac{2}{7}z^6$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olmayan fonksiyonlara örnek olarak verilebilir (Şekil.3.2.).



Şekil 3.2. $f(z) = z + \frac{2}{7}z^6$ fonksiyonun grafiği

Eğer bir $h(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskte analitik ise,

$$h(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde Maclaurin açılımına sahiptir ve birim diskte yakınsaktır. Burada $h(z)$ fonksiyonunun $\{b_n\}$ katsayıları ve fonksiyonun geometrik özellikleri hakkında iki sorulabilir. Bunlardan ilki $\{b_n\}$ katsayılarının $h(z)$ fonksiyonun geometrik özelliklerini nasıl etkilediği, ikincisi ise $h(z)$ fonksiyonunun özellikleri ile $\{b_n\}$ katsayılarının birbiri ile bağlantılı olup olmadığıdır. Biz bu çalışmada ünivalent fonksiyonlarla ilgilendiğimizden, bu sorular aşağıdaki gibi özelleştirilebilir:

1. $h(z)$ fonksiyonun ünivalent olması onun Maclaurin açılımındaki $\{b_n\}$ katsayılarını nasıl etkiler?
2. Maclaurin açılımındaki $\{b_n\}$ katsayıları verildiğinde, $h(z)$ fonksiyonun ünivalent olup olmadığına karar verebilir miyiz?

Bir sabitin eklenmesi sadece görüntü bölgesini kaydıracağından, eğer $h(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskte ünivalent ise, $h(z) + c$ fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskte ünivalenttir. Normalizasyonun ilk adımı olarak Maclaurin açılımındaki b_0 sabit terimi

çıkararak $h(z) - b_0$ fonksiyonunu inceleyelim. Eğer $h'(z_0) = 0$ ise $h(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda ünivalent olamaz. Eğer $h(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ise $h'(0) \neq 0$ olmalıdır. Bu da $b_1 \neq 0$ demektir. O halde $h(z) - b_0$ fonksiyonunu b_1 sayısına bölerek $f(z) = (h(z) - b_0)/b_1$ fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. $1/b_1$ ile çarpmak resim bölgesini sadece döndürüp uzatacağından (veya kısaltacağından), eğer $h(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ise bu durumda $f(z) = (h(z) - b_0)/b_1$ fonksiyonu da aynı bölgede ünivalent ve tersine eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ise $h(z)$ fonksiyonu da ünivalent olacaktır.

Maclaurin açılımında $\frac{b_n}{b_1} = a_n$ dersek

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (3.1)$$

şeklindeki normalize formunu elde ederiz. $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ve analitik olan normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ sembolü ile gösterilir.

Eğer (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ise $|b_n|$ değerlerinin keyfi derecede büyük olabileceği açıktır. Bunu görmek için $h(z)$ fonksiyonunu uygun bir M sabitiyle çarpmak yeterlidir. Ancak normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfını göz önüne alırsak, her $f(z) \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için her bir $n > 2$ için $|a_n| < A_n$ olacak şekilde bir A_n sınırının olduğunu tahmin edebiliriz. A_n sınırı hakkında bir tahmin elde edebilmek için yeterince büyük katsayılarla sahip bir ünivalent fonksiyon oluşturmamız. Bunun için

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad , \quad h(z) = u^2(z) \quad , \quad f(z) = \frac{1}{4}(h(z) - 1)$$

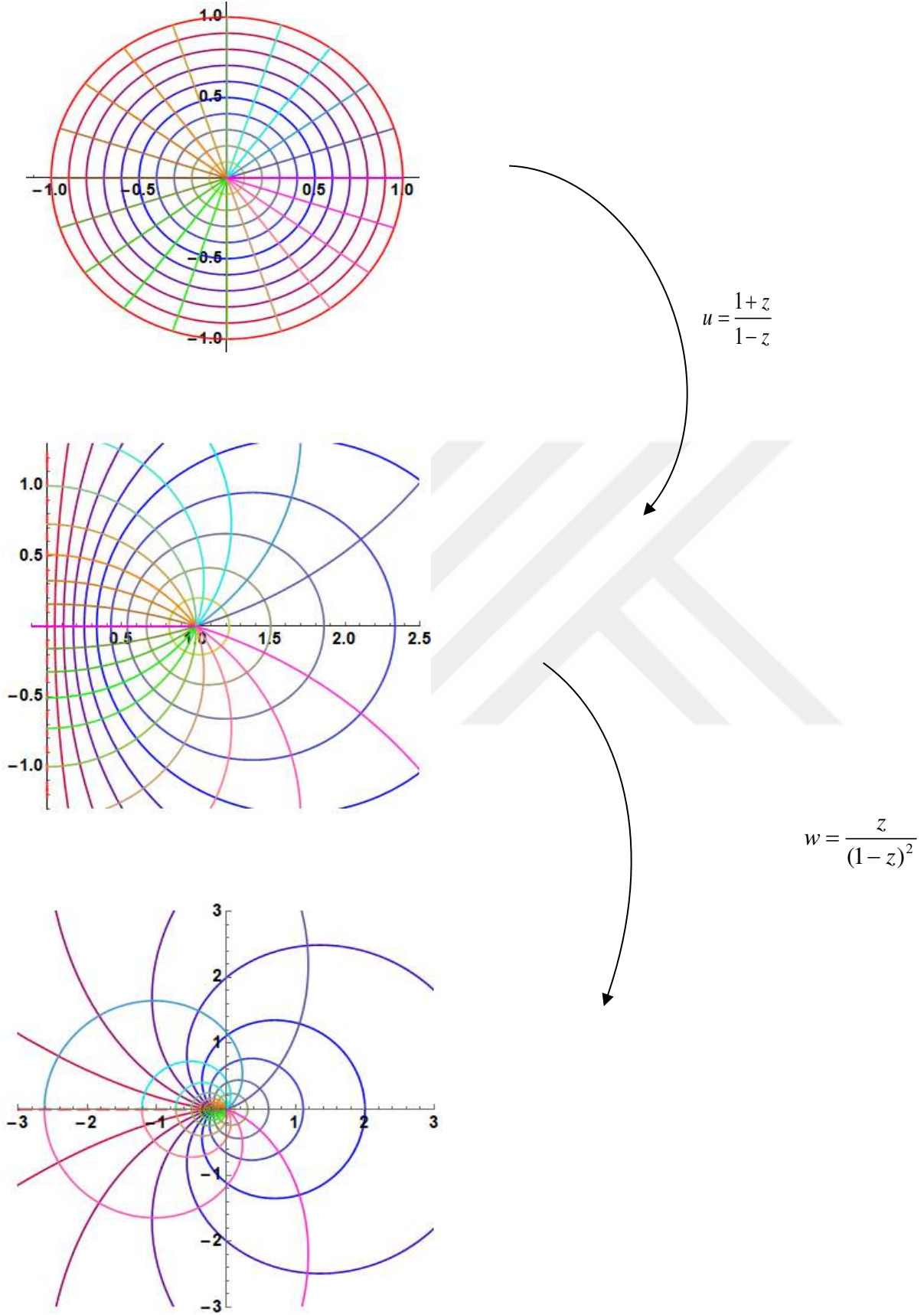
fonksiyonunu göz önüne alalım. $u(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\text{Re } u > 0$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür. Daha sonra $h(z) = u^2(z)$, bu yarı düzlemi negatif reel eksen dışındaki tüm kompleks düzlem üzerine dönüştürür. Son olarak $f(z) = \frac{1}{4}(h(z) - 1)$ ise sadece yukarıda açıklanan normalize işlemidir. $f(z)$ fonksiyonunu hesaplamak için

$$f(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right] = \frac{(1+z)^2 - (1-z)^2}{4(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

yazarız. Elde edilen bu fonksiyon o kadar önemlidir ki özel bir isme ve özel bir sembole sahiptir. Bu fonksiyona “*Koebe Fonksiyonu*” denir ve $k(z)$ sembolü ile gösterilir. Koebe fonksiyonunun elde edilişindeki dönüşümler dizisi Şekil.3.3.’te gösterilmiştir.

Teorem 3.1.4. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ ile tanımlı Koebe

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfındadır. $\mathcal{U}$ birim diskini $w = -\infty$ ’dan $w = -1/4$ ’e kadar negatif reel eksen boyunca olan yarık hariç, bütün kompleks düzlemde oluşan D bölgesi ile birebir eşler. (Goodman 1983)



Şekil 3.3. Koebe fonksiyonu

$\mathcal{S}$ sınıfına ait en önemli fonksiyon Koebe fonksiyonudur. Bununla birlikte $\mathcal{S}$ sınıfındaki diğer temel fonksiyon örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir:

(i) $\mathcal{U}$ birim diskini kendisi üzerine resmeden $g(z) = z$ birim dönüşümü,

(ii) $\mathcal{U}$ birim diskini konformal olarak $\operatorname{Re}\{w\} > -1/2$ bölgesi üzerine resmeden

$$g(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots \text{ fonksiyonu,}$$

(iii) $\mathcal{U}$ birim diskini $1/2 \leq x < \infty$ ve $-\infty < x \leq -1/2$ yarı doğruları çıkarılmış tüm

$$\text{düzlem üzerine resmeden } g(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \dots \text{ fonksiyonu,}$$

(iv) $\mathcal{U}$ birim diskini $\{-\pi/4 < \operatorname{Im}\{w\} < \pi/4\}$ şeridi üzerine resmeden $g(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümü,

(v) $\mathcal{U}$ birim diskini bir kardiodin içi üzerine resmeden $g(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}[1 - (1-z)^2]$ fonksiyonu.

$\mathcal{S}$ sınıfının önemli bir özelliği de toplama işlemine göre kapalı olmayışıdır. Diğer bir ifadeyle $g, h \in \mathcal{S}$ fonksiyonları için $g+h \in \mathcal{S}$ olmayabilir. Mesela $g(z) = \frac{z}{1-z}$ ve

$h(z) = \frac{z}{1+iz}$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfındadır. Ancak $g+h$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında değildir.

Çünkü

$$g'(z) + h'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+iz)^2} = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

olup, $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \in \mathcal{U}$ noktasında $g'(z) + h'(z) = 0$ olur.

Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfı birçok temel dönüşüm altında korunur. Eğer (3.1) eşitliği ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfının bir fonksiyonu ise bu durumda aşağıda verilen fonksiyonlar da $\mathcal{S}$ sınıfındadır (Duren 1983):

$$(i) \quad e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\alpha} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{Dönme})$$

$$(ii) \quad \overline{f(\bar{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{a}_n z^n \quad (\text{Eşlenik alma})$$

$$(iii) \quad \frac{1}{t} f(tz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} z^n \quad 0 < t \leq 1 \quad (\text{Genişleme})$$

$$(iv) \quad \left[f(z^m) \right]^{1/m} = z + \frac{a_2}{m} z^{m+1} + \frac{1}{2m^2} (2ma_3 - (m-1)a_2^2) z^{2m+1} + \dots, \quad m \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{Kök})$$

$$(v) \quad f(z) \neq w \text{ ise } g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)} = z + (a_2 + 1/w)z^2 + \dots \quad (\text{İhmal edilmiş değer})$$

$\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı problemi uzun süreden beri matematikçilerin uğraştığı bir alan olmuştur. Bu sınıftaki fonksiyonların ikinci katsayısının kesin sınırına 1916 yılında Bieberbach'ın (Bieberbach 1916) yaptığı bir çalışmada yer verilmiştir.

Teorem 3.1.5. (Bieberbach Teoremi) (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfında ise $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik

$$f(z) = e^{-i\alpha} k(e^{i\alpha} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}$$

fonksiyonu için sağlanır (Bieberbach 1916).

Verilen koşullar altında, eşitliğin sağlandığı bir fonksiyonun varlığı ile eşitsizliği düzeltmek yani alt sınırı arttırmak veya üst sınırı azaltmak mümkün değil ise, verilen eşitsizlik “kesin eşitsizlik” olarak adlandırılır. $\mathcal{S}$ sınıfındaki Koebe fonksiyonun a_2 katsayısı 2 olduğu için Teorem 3.1.5'teki “ $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği” kesindir. Ayrıca, kesin eşitsizlikte eşitliği sağlayan fonksiyona ise “*ekstremal fonksiyon*” denir.

Bieberbach Teoreminin en önemli sonucu, Koebe tarafından elde edilen örtme teoremidir. $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir fonksiyon $f(0)=0$ olan bir açık dönüşümdür. Bu sebeple f fonksiyonunun resmi, merkezi orijinde olan en az bir diski kapsar. Koebe 1907 yılında, φ mutlak bir sabit olmak üzere, tüm $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının görüntülerinin,

ortak bir $|w| < \varphi$ diskini kapsadıklarını ispatlamıştır (Koebe 1907). Koebe fonksiyonu, $\varphi \leq 1/4$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.1.6. (Koebe Dörtte Bir Teoremi) $\mathcal{S}$ sınıfında bulunan her fonksiyonun değer kümesi, $\{w : |w| < 1/4\}$ diskini kapsar. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir (Duren 1983).

Bu teorem, orijin merkezli $1/4$ yarıçaplı diskin, $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir fonksiyonun görüntü kümesinde kapsanan orijin merkezli en büyük disk olduğunu söyler.

$\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonlar için Bieberbach Teoreminin ispatlanmış olması, bu sınıfla ilgili başka teoremlerin elde edilmesine olanak tanımıştır. En önemli teoremler arasında Bükülme Teoremi ve Büyüme Teoremi gelir.

Teorem 3.1.7. (Bükülme Teoremi) Her bir $|z| = r < 1$ ve $f \in \mathcal{S}$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Teorem 3.1.8. (Büyüme Teoremi) Her bir $f \in \mathcal{S}$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Çoğu zaman daha pratik olan ve bükülme ve büyüme teoremlerinden elde edilen eşitsizlik aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 3.1.9. $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere,

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği sağlanır (Duren 1983).

Verilen bu son üç teoremdeki eşitliklerin gerçekleşmesi için $z \in U$ ve $z \neq 0$ iken f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir.

Teorem 3.1.10. (Bieberbach Tahmini veya Branges Teoremi) $\mathcal{S}$ sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_n| \leq n$ ($n = 2, 3, \dots$) eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik durumu Keobe fonksiyonunun dönmeleri için sağlanır. (Bieberbach 1916, De Branges 1985).

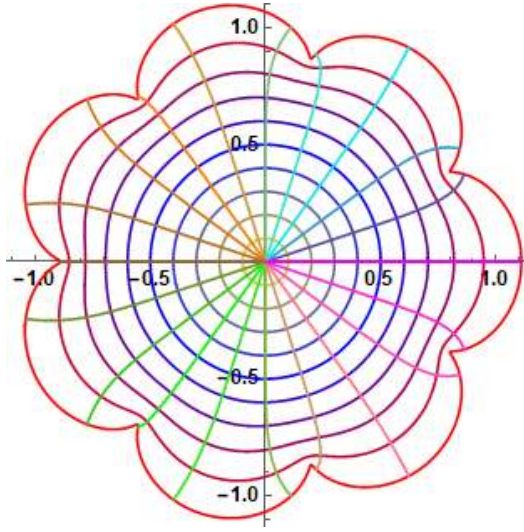
Bieberbach Tahmini olarak literatüre geçen bu tahmin, 1916 yılında Bieberbach tarafından verilmiştir. Uzun yıllar boyunca üzerinde çalışılmış, ancak 1985 yılında Louis de Branges tarafından tamamı ispatlanıncaya kadar, sadece $n = 7$ ye kadar olan değerler için sağlatılabilmektedir. Ünivalent fonksiyonlar teorisi üzerindeki araştırmaların büyük bir kısmının merkezinde Bieberbach Tahmini vardır.

3.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

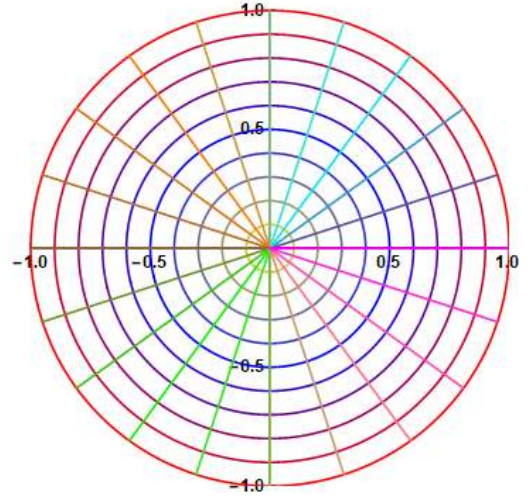
Eğer bir ünivalent fonksiyonun $\mathcal{U}$ birim diskini iyi özelliklere sahip bir bölge üzerine dönüştürdüğü bilirse, fonksiyonun daha derinlemesine incelenebilmesi mümkün olur. Konveks bir bölge, iyi özelliklere sahip olan bölgelerin en göze çarpan örneğidir. Bir diğer örnek ise bir noktaya göre yıldızlı olan bir bölgedir.

Tanım 3.2.1. (Yıldızlı Küme) $D \subset \mathbb{C}$ ve $w_0 \in D$ olsun. Eğer başlangıç noktası w_0 olan her bir ışının D 'nin içiyle kesişimi bir ışın ya da bir doğru parçası oluyorsa D 'ye “ w_0 noktasına göre yıldızlı küme” denir. $w_0 = 0$ alınırsa D 'ye yıldızlı küme adı verilir. (Şekil 3.4.)

Tanım 3.2.2. (Konveks Küme) $D \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer her $z, w \in D$ ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1-t)w \in D$ oluyorsa D 'ye “konveks küme” denir. (Şekil 3.5.)



Şekil 3.4. Yıldızlı Küme



Şekil 3.5. Konveks Küme

Dairesel diskler ve yarı düzlemler konveks kümelerdir. Konveks kümelerin arakesiti yine konveks kümedir. Eğer bir D kümesi konveks ise, bu durumda her bir iç noktasına göre yıldızlıdır. Bunun tersi de doğrudur. Eğer bir D kümesi, tüm iç noktalarına göre yıldızlı ise D kümesi konveks bir kümedir.

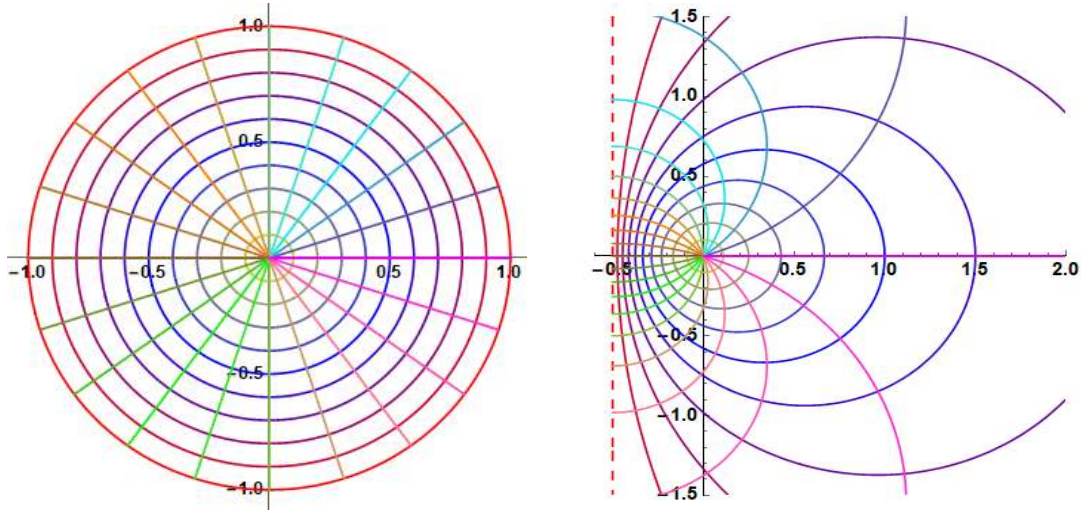
Tanım 3.2.3. (Konveks Fonksiyon) Eğer bir f fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskini konveks bir bölge üzerine resmediyorsa f fonksiyonuna “*konveks fonksiyon*” denir.

Tanım 3.2.4. (Yıldızlı Fonksiyon) Eğer bir f fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre yıldızlı bir bölge üzerine resmediyorsa f fonksiyonuna “ w_0 noktasına göre yıldızlı fonksiyon” adı verilir. $w_0 = 0$ olduğu özel durumda f fonksiyonuna “*yıldızlı fonksiyon*” adı verilir.

$\mathcal{U}$ birim diskini konformal olarak $\text{Re}\{w\} > -1/2$ bölgesi üzerine resmeden

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

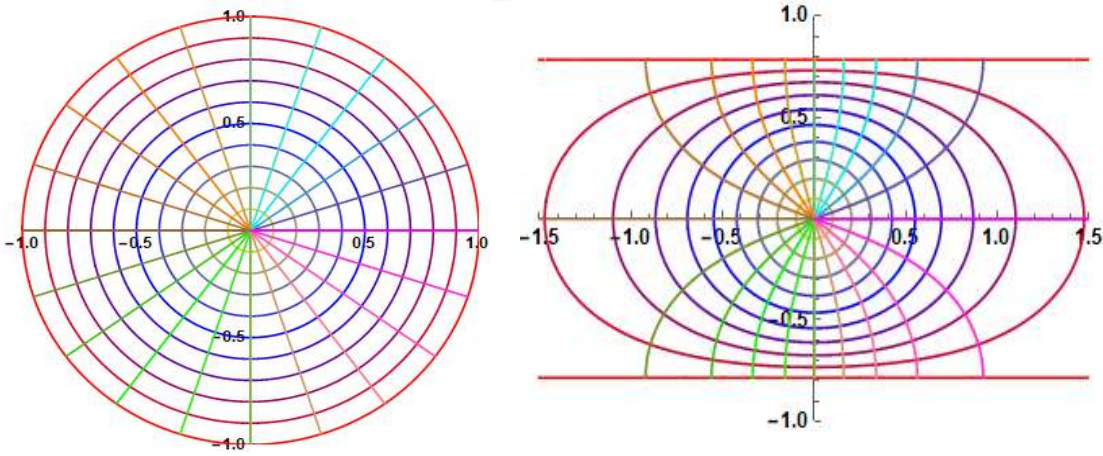
fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.



Şekil 3.6. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki resmi

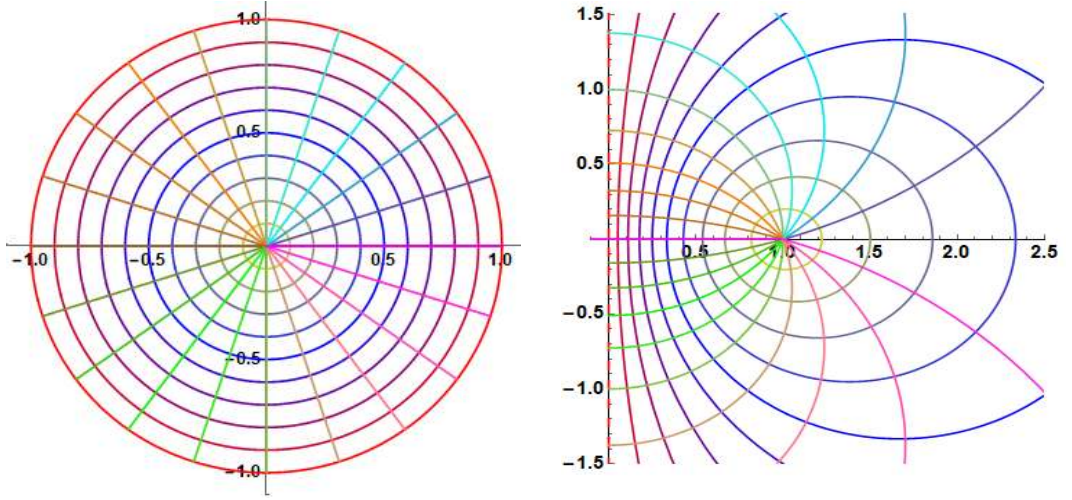
$\mathcal{U}$ birim diskini $\{-\pi/4 < \text{Im}\{w\} < \pi/4\}$ yatay şeridine resmeden

$f(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.



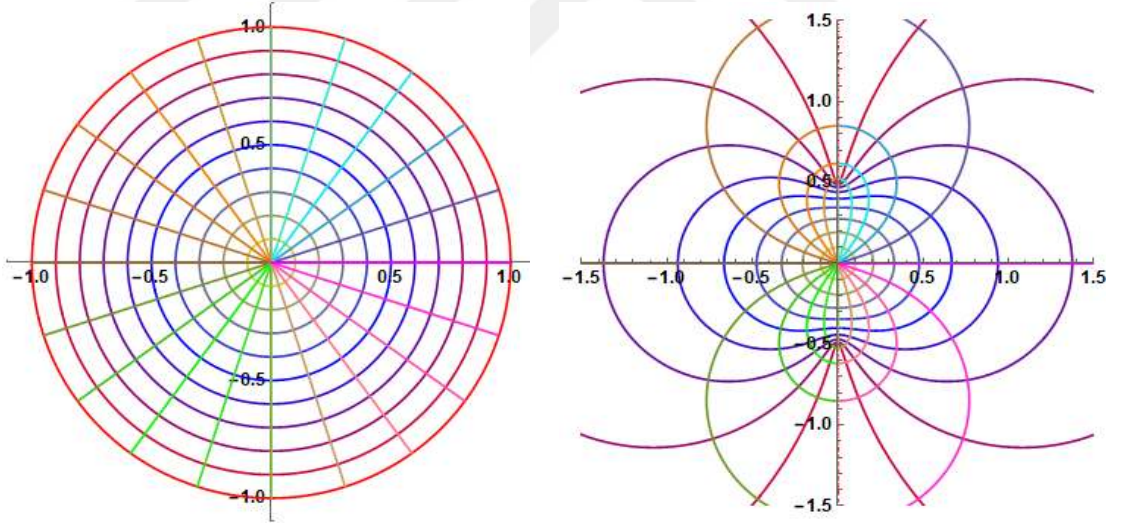
Şekil 3.7. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu altındaki resmi

$\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu konvektir.



Şekil 3.8. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki resmi

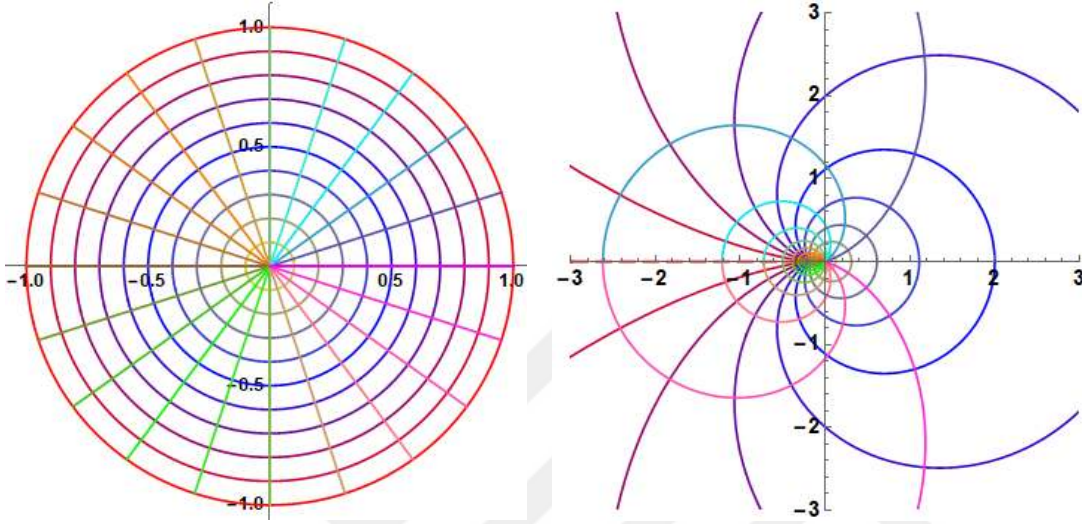
$\mathcal{U}$ birim diskini $[1/2, \infty)$ ve $(-\infty, -1/2]$ yarı doğruları çıkarılmış düzlem üzerine resmeden $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu yıldızlıdır.



Şekil 3.9. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altındaki resmi

$\mathcal{U}$ birim diskini negatif reel eksenin $w = -\infty$ 'dan $w = -1/4$ 'e kadar olan kısmı boyunca olan yarık hariç kompleks düzlem üzerine resmeden Koebe fonksiyonu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \text{ yıldızlı bir fonksiyondur.}$$



Şekil 3.10. $\mathcal{U}$ birim diskinin $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu altındaki resmi

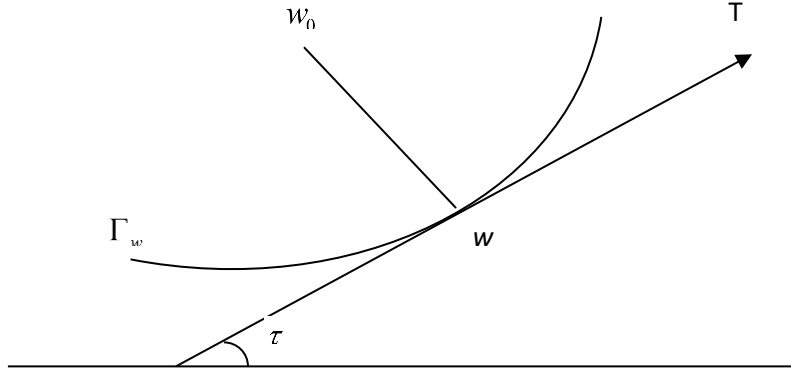
Γ_z kompleks düzlemde bir eğri ve $f(z)$ fonksiyonu bu eğri üzerinde analitik olsun. Γ_z eğrisinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resmini göz önüne alalım. Γ_z bir çember, bir doğru parçası veya herhangi bir temel eğri olabilir. Γ_z 'nin $x(t)$ ve $y(t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere bir

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

parametrizasyonuna sahip olduğunu ve

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0, \quad a \leq t \leq b$$

koşulunu sağlayan bir düzgün eğri olduğunu varsayalım. Bu durumda Γ_z yayı bir yönlendirilmiş yaydır ve yönü t artarken belirlenir. $f(z)$ fonksiyonu altında Γ_z yayının resmine Γ_w diyelim ve w_0 noktasının Γ_w üzerinde olmadığını varsayalım (Şekil 3.11.).



Şekil 3.11. $f(z)$ fonksiyonun Γ_z yayının üzerindeki analitik dönüşümü

Eğer $\arg(w - w_0)$, t nin azalmayan bir fonksiyonu ise yani,

$$\frac{d}{dt} \arg(w - w_0) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

oluyorsa, bu durumda “ Γ_w yayına w_0 noktasına göre yıldızıldır” denir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arg(w - w_0) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \ln(w - w_0) = \operatorname{Im} \left(\frac{d}{dt} \ln(w - w_0) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{d}{dz} \ln(w - w_0) \frac{dz}{dt} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu açıklamalardan aşağıdaki yardımcı önermeyi yazmak mümkündür.

Yardımcı Önerme 3.2.5. $\Gamma_z : z = z(t)$ eğrisinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin w_0 noktasına göre yıldızıl olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\operatorname{Im} \left(\frac{f'(z)}{f(z) - w_0} z'(t) \right) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. (Goodman 1983)

Eğer Γ_w yayının teğetinin argümanı, “ t ’nin azalmayan bir fonksiyonu” ise bu durumda Γ_w yayına **konvektir** denir. Γ_z yayının teğetinin yönü $\arg z'(t)$ olur ve dönüşüm, bu teğet vektörünü bir $\arg f'(z)$ açısı boyunca döndürür. Böylelikle Γ_w yayının konveks olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(\arg(z'(t) f'(z))) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\arg(z'(t) f'(z))) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\ln z'(t) + \ln f'(z)) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{d}{dz}(\ln f'(z)) \frac{dz}{dt} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)} z'(t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bilgilerden sonra aşağıdaki yardımcı önerme verilebilir.

Yardımcı Önerme 3.2.6. $\Gamma_z : z = z(t)$ yayı üzerinde $f'(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Γ_z yayının $f(z)$ fonksiyonu altındaki resminin konveks bir yay olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)} z'(t) \right) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

olmasıdır (Goodman 1983)

Yukarıda verilen formüller Γ_z eğrisini $C_R = \{z : |z| = R\}$ çemberi olarak tekrar düzenlenebilir. Γ_z eğrisi $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ şeklinde yazılırsa, $z'(t) = iRe^{it} = iz$ ve $z''(t) = -Re^{it} = -z$ olacağından, C_R eğrisi üzerindeki z ler için

$$\operatorname{Im} \left(i \frac{z f'(z)}{f(z) - w_0} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z f'(z)}{f(z) - w_0} \right) \geq 0$$

ve

$$\operatorname{Im} \left(i + i \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ve analitik olsun. Eğer $f(z)$, C_R eğrisini basit kapalı konveks bir eğri üzerine resmediyorsa bu eğri bir konveks bölgeyi

sınırlayacaktır. Tersine, eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}_R = \{z : |z| < R, R < 1\}$ diskini bir konveks bölge üzerine resmediyorsa, bu durumda bölgenin sınırı basit kapalı konveks bir eğridir. Yıldızlı eğriler için de aynı durum geçerlidir. Yukarıdaki eşitsizliklerde $w_0 = 0$ alınarak aşağıdaki teoremler yazılabilir.

Teorem 3.2.7. $\overline{\mathcal{U}_R} = \{z : |z| \leq R\}$ kapalı diskinde $f(z)$ fonksiyonu ünivalent ve analitik olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\overline{\mathcal{U}_R}$ kapalı diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul C_R çemberi üzerindeki z noktaları için

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0 \quad (3.2)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Study 1913).

Teorem 3.2.7’de $f(0) = 0$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.8. $\overline{\mathcal{U}_R} = \{z : |z| \leq R\}$ kapalı diskinde $f(z)$ fonksiyonu ünivalent ve analitik olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}_R$ bölgesini $w=0$ noktasına göre yıldızlı bir bölgeye dönüştürmesi için gerekli ve yeterli koşul C_R çemberi üzerindeki z noktaları için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \geq 0 \quad (3.3)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Nevanlinna 1920)

Teorem 3.2.7’de $f(z)$ fonksiyonu ünivalent alınmalıdır. Aksi takdirde hataya düşülür. Örneğin $f(z) = z^2$ fonksiyonu için, (3.2) ve (3.3) eşitsizliklerinden $2 \geq 0$ elde edilir. Bu durumda her iki eşitsizlik de sağlanır. Ancak $\mathcal{U}$ birim diskinin bu fonksiyon altındaki iki katlı resmi yıldızlı veya konveks bir bölge değildir. Konvekslik ve yıldızlılık kavramları çok katlı bölgelere genişletilebilir. Ancak bu tezde sadece düzlem bölgeler incelenmiştir.

$f(z) \in \mathcal{S}$ ve $R < 1$ olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}_R$ bölgesini konveks bir bölge üzerine resmederse, her bir pozitif $r < R$ için $\mathcal{U}_r$ bölgesini de bir konveks bölge üzerine resmeder. Benzer şekilde, eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}_R$ bölgesini orijine göre yıldızlı bir

bölge üzerine resmederse, her bir pozitif $r < R$ için $\mathcal{U}_r$ bölgesini de orijine göre yıldızlı bir bölge üzerine resmeder.

Bir $g(z)$ fonksiyonu için

$$G(z) = z g'(z)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{zG'(z)}{G(z)} = z \frac{g'(z) + z g''(z)}{z g'(z)}$$

elde edilir ve buradan $G(z) \neq 0$ iken

$$\frac{zG'(z)}{G(z)} = 1 + \frac{z g''(z)}{g'(z)}$$

elde edilir. Eğer $g(z)$ fonksiyonu orijinde m -inci mertebeden bir sıfıra sahip ise, bu eşitliğin her iki tarafı da orijinde analitik olur. Böylece

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zG'(z)}{G(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{z g''(z)}{g'(z)} \right]$$

yazılabilir. Bu son eşitlik ile yıldızlı ve konveks fonksiyonlar için önceden verilen (3.2) ile (3.3) eşitsizlikleri karşılaştırılırsa ilk kez J.W.Alexander (Alexander 1915) tarafından verilen ve konveks fonksiyonlar ile yıldızlı fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.9. (Alexander Teoremi) $\mathcal{U}_R$ bölgesinde $g'(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $g(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}_R$ bölgesinde konveks olması için $G(z) = z g'(z)$ fonksiyonunun bu bölgede yıldızlı olması gerekli ve yeterlidir (Alexander 1915).

Örneğin $\mathcal{U}$ diskini $\operatorname{Re} w > -1/2$ bölgesi üzerine resmeden

$$g(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa bu fonksiyon birim diskte konveks olduğundan

$$G(z) = z g'(z) = z \frac{(1-z) - z(-1)}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ diskinde yıldızlıdır. Bu eşitliğin sağ tarafı Koebe fonksiyonudur.

$\mathcal{U}$ birim diskini konveks bir bölge üzerine resmeden, birim diskte ünivalent ve normalize edilmiş tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}$ sembolü ile gösterilir.

$\mathcal{U}$ birim diskini orijine göre yıldızlı bir bölge üzerine resmeden, birim diskte ünivalent ve normalize edilmiş tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}^*$ sembolü ile gösterilir.

Bu yeni semboller ile Teorem 3.2.9 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(i) \quad g(z) \in \mathcal{C} \Rightarrow z g'(z) \in \mathcal{S}^*$$

$$(ii) \quad G(z) \in \mathcal{S}^* \Rightarrow \int_0^z \frac{G(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{S}^*$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları ile ilgili aşağıdaki teorem Nevanlinna tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.10. Eğer (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ sınıfında ise, her bir n pozitif tamsayısı için

$$|a_n| \leq n$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Koebe fonksiyonun dönmeleri için eşitlik sağlanır. (Nevanlinna 1921).

Loewner 1917 yılında $\mathcal{C}$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir:

Teorem 3.2.11. Eğer (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{C}$ sınıfında ise, her bir pozitif n tamsayısı için

$$|a_n| \leq 1$$

olur. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu için sağlanır (Loewner 1917).

1920 yılında Nevanlinna (Nevanlinna 1920-21) $\mathcal{S}$ sınıfındaki bir fonksiyon altında $r \leq 2 - \sqrt{3}$ için her bir $|z| = r$ çemberinin resminin basit kapalı konveks bir eğri

olacağını göstermiş ve $r > R_k$ için $\mathcal{S}$ sınıfında olan ve $|z| = r$ çemberini konveks bir eğriye resmetmeyen bir fonksiyonun varlığını da ispatlamıştır. Bundan dolayı, $R_k = 2 - \sqrt{3}$ sayısı kesindir ve bu sayıya “ $\mathcal{S}$ sınıfının konvekslik yarıçapı” denir.

1934 yılında Grunsky (Grunsky 1934) “ $\mathcal{S}$ sınıfının yıldızlılık yarıçapının”

$\ln \frac{1+r}{1-r} = \frac{\pi}{2}$ denkleminin kökü olan

$$R_{S^*} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{e^{\pi/2} + 1} = \tanh \frac{\pi}{4} \approx 0,65579$$

sayısı olduğunu göstermiştir.

1936 yılında Robertson (Robertson 1936) tarafından α – mertebeli konveks ve α – mertebeli yıldızlı fonksiyon kavramları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.12. (α – Mertebeli Yıldızlı Fonksiyon) Eğer (3.1) ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu tüm $z \in \mathcal{U}$ değerleri için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) \geq \alpha$$

eşitsizliğini sağlarsa, $f(z)$ fonksiyonuna “ α – mertebeli yıldızlı fonksiyon” denir. α – mertebeli yıldızlı fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.13. (α – Mertebeli Konveks Fonksiyon): Eğer (3.1) ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu tüm $z \in \mathcal{U}$ değerleri için

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \alpha$$

eşitsizliğini sağlarsa, $f(z)$ fonksiyonuna “ α – mertebeli konveks fonksiyon” denir. α – mertebeli konveks fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir.

α – mertebeli yıldızlı ve α – mertebeli konveks fonksiyonların arasındaki Alexander Teoremine benzer ilişki aşağıda verilmiştir:

$$f(z) \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow F(z) \equiv z f'(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha).$$

Yıldızıl fonksiyonlar sınıfını kapsayan ve Kaplan (Kaplan 1952) tarafından verilen ilginç bir sınıf da konvekse-yakın fonksiyonlar sınıfıdır.

Tanım 3.2.14. (Konvekse-Yakın Fonksiyon) $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olsun. Eğer

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$$

olacak şekilde konveks bir $g(z)$ fonksiyonu veya eşdeğer olarak

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

olacak şekilde yıldızıl bir $g(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna **konvekse-yakın fonksiyon** adı verilir. $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş konvekse-yakın $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{K}$ sembolü ile gösterilir. Bu tanımdaki $f(z)$ fonksiyonunun ünivalent olması gerekmez. Bundan başka, $g(z)$ fonksiyonunun da $g(0)=g'(0)-1=0$ şeklindeki normalize koşullarını sağlaması gerekmez.

Konvekse-yakın fonksiyonlar için Kaplan Teoremi olarak bilinen teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.15. (Kaplan Teoremi) $f(z)$ fonksiyonu, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve yerel ünivalent, yani $f'(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun konvekse-yakın olması için gerekli ve yeterli koşul $\theta_1 < \theta_2$ olan her bir θ_1, θ_2 reel sayı çifti ve her bir r ($0 < r < 1$) sayısına karşılık $z = re^{i\theta}$ olmak üzere,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) d\theta > -\pi$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Kaplan 1952).

1955 yılında M.O. Reade konvekse yakın fonksiyonların katsayılarının Bieberbach tahminini sağladığını göstermiştir.

Teorem 3.2.16. Eğer (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu konvekse yakın fonksiyon ise, bu durumda her bir pozitif $n = 2, 3, \dots$ için

$$|a_n| \leq n$$

olur. $|a_n| = n$ eşitliği bir $n \geq 2$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması durumunda sağlanır (Reade 1955).

$\mathcal{S}$ sınıfındaki konvekse-yakın fonksiyonların “konvekse-yakınlık yarıçapı” 0.80... olarak hesaplanmıştır (Krzysz 1962).

Konveks olan her fonksiyon aynı zamanda konvekse-yakındır. Daha geneli, yıldızlı olan her fonksiyon konvekse-yakındır. Ayrıca her konvekse-yakın fonksiyon ünivalenttir. Bu durum

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$$

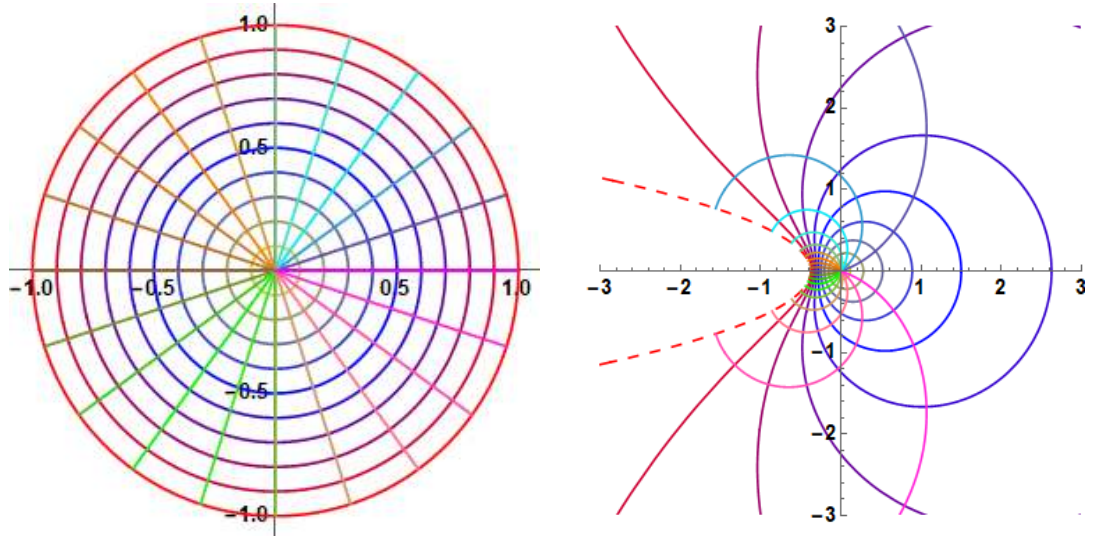
kapsama zinciri ile gösterilebilir.

Örneğin $f(z) = \frac{z - z^2/2}{(1-z)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right)$ fonksiyonu konvekse yakındır.

Gerçekten, $g(z) = \frac{z}{1-z}$ konveks fonksiyonu için $\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{g'(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-z} \right] > 0$ olur.

Ancak bu fonksiyon yıldızlı değildir çünkü $\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{(1-z)(2-z)} \right]$ olur ve bu

ifade $z = 0,7 + 0,7i$ değeri için pozitif değildir. (Şekil 3.12.)



Şekil 3.12. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = \frac{z - z^2/2}{(1 - z)^2}$ fonksiyonu altındaki resmi

$\mathcal{S}$ sınıfının düzgün yıldızlı ve düzgün konveks fonksiyonlardan oluşan altsınıfları Goodman tarafından çalışılmıştır.

Tanım 3.2.17. (Düzgün Yıldızlı Fonksiyon) Eğer $f(z)$ yıldızlı bir fonksiyon ve ζ merkezi de $\mathcal{U}$ birim diskinde kapsanan her γ dairesel yayı için $f(\gamma)$ yayı $f(\zeta)$ noktasına göre yıldızlı ise $f(z)$ fonksiyonuna $\mathcal{U}$ birim diskinde “**düzgün yıldızlı fonksiyon**” denir (Goodman, 1991a).

Tanım 3.2.18. (Düzgün Konveks Fonksiyon) Eğer $f(z)$ konveks bir fonksiyon ve ζ merkezi de $\mathcal{U}$ birim diskinde kapsanan her γ dairesel yayı için $f(\gamma)$ yayı konveks ise $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ diskinde “**düzgün konveks fonksiyon**” olarak adlandırılır. Bu sınıf UCV ile gösterilir (Goodman, 1991b).

Düzgün konveks fonksiyonlar sınıfının genelleştirmesi olan **k – uniform** konveks fonksiyonlar sınıfı 1999 yılında Kanas ve Wisniowska (Kanas ve Wisniowska, 1999) tarafından çalışılmıştır.

Tanım 3.2.19. (k – Düzgün Konveks Fonksiyon) $0 \leq k < \infty$ olsun. Eğer $|\zeta| \leq k$ olmak üzere $\mathcal{U}$ da kapsanan ζ merkezli her dairesel γ yayının resmi konveks ise (3.1) ile verilen f fonksiyonuna $\mathcal{U}$ birim diskinde “ **k – düzgün konveks (k – uniform konveks) fonksiyon**” denir. Bu sınıf k – UCV ile gösterilir. $k = 1$ için düzgün konveks fonksiyonlar

sınıfı ve $k=0$ için konveks fonksiyonlar sınıfı elde edilir. Bu durum sembolik olarak $1-UCV=UCV$ ve $0-UCV=\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Düzgün yıldızlı fonksiyonlar sınıfının genelleştirmesi olan k -yıldızlı fonksiyonlar sınıfı yine Kanas ve Wisniowska (Kanas ve Wisniowska, 2000) tarafından 2000 yılında verilmiştir.

Tanım 3.2.20. (k -Yıldızlı Fonksiyon) k -yıldızlı fonksiyonlar sınıfı

$$k-ST = \{f \in S : f = zg'(z), g \in k-UCV, 0 \leq k < \infty\}$$

ile tanımlıdır. k -yıldızlı fonksiyonlar sınıfı $k-ST$ ile gösterilir. $k=0$ ise yıldızlı fonksiyonlar sınıfı elde edilir.

$k-ST$ ve $k-UCV$ sınıfları arasında

$$f \in k-UCV \Leftrightarrow zf' \in k-ST$$

şeklinde Alexander bağıntısı vardır (Kanas ve Wisniowska 2000).

Kendisi S sınıfında olmadığı halde ünivalent fonksiyonlar teorisindeki birçok problemin çözümünde önemli bir role sahip olan fonksiyonların bir sınıfı da Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfıdır.

Tanım 3.2.21. (Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar) $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$f(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_n z^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$$

formunda, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve birim diskteki noktalar için $\operatorname{Re}\{f(z)\} > 0$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların sınıfına “*pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı*” veya “*Carathéodory Sınıfı*” denir. $\mathcal{P}$ ile gösterilir.

Bu sınıftaki fonksiyonların ünivalent olması gerekmez. Örneğin, $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $n \geq 0$ tamsayısı için Carathéodory sınıfındadır, ancak $n \geq 2$ için ünivalent fonksiyon değildir.

$$L_0(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \dots = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ Möbius fonksiyonu } \mathcal{P} \text{ sınıfındadır ve}$$

birim disk $H^+ : \operatorname{Re} w > 0$ yarı düzlemi üzerine resmeden analitik ve ünivalent bir fonksiyondur.

$\mathcal{P}$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları ile ilgili aşağıdaki teorem 1907 yılında Carathéodory tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.22. (Carathéodory Teoremi) $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, (3.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu Caratheodory sınıfında ise $|p_n| \leq 2$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik kesindir. $\mu_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ve $\rho = e^{2\pi i/n}$ iken

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1 + \rho^k z}{1 - \rho^k z} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m z^m$$

ve $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ ise, $G(z)$ fonksiyonu Caratheodory sınıfında olur, $P_n = 2$ eşitliği sağlanır (Carathéodory 1907).

Alexander, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar ile ünivalent fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.2.23. Eğer $f'(z) \in \mathcal{P}$ ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalenttir (Goodman 1983).

Teorem 3.2.23'ün genelleştirmesi olan aşağıdaki teorem birbirlerinden bağımsız olarak Noshiro (Noshiro 1935) ve Warschawski (Warschawski 1935) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.2.24. (Noshiro-Warschawski Teoremi) Bir konveks D bölgesindeki bütün z değerleri ve en az bir α reel sayısı için

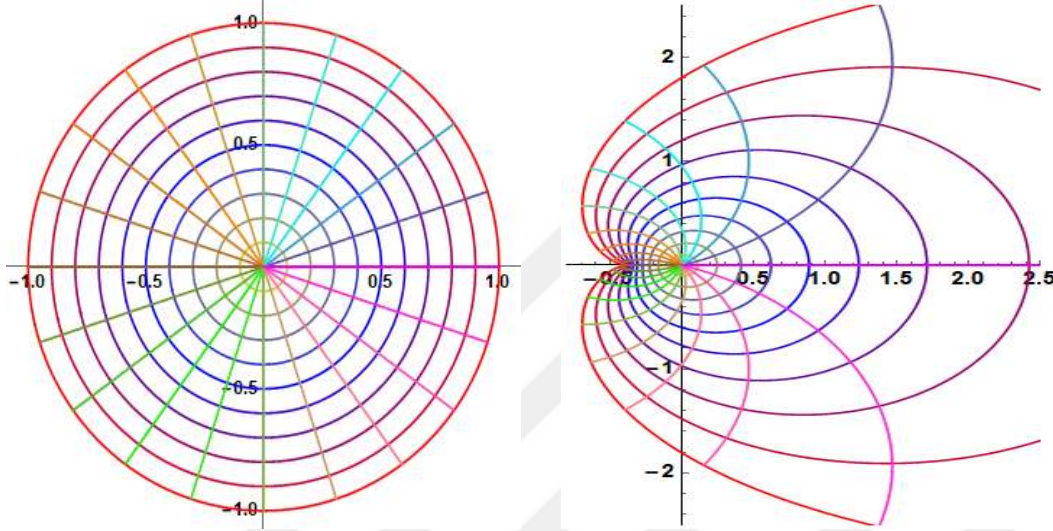
$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha} f'(z)) > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde ünivalenttir.

Örneğin, $f(z) = -z - 2\log(1-z)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(z) = \frac{1+z}{1-z} = L_0(z) \in \mathcal{P}$$

olup, $\mathcal{U}$ birim diski konveks bir bölge olduğundan $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ diskinde ünivalenttir. (Şekil 3.13.)



Şekil 3.13. $\mathcal{U}$ birim diskinin $f(z) = -z - 2\log(1-z)$ fonksiyonu altındaki resmi

3.3. Bazı Özel Fonksiyonlar

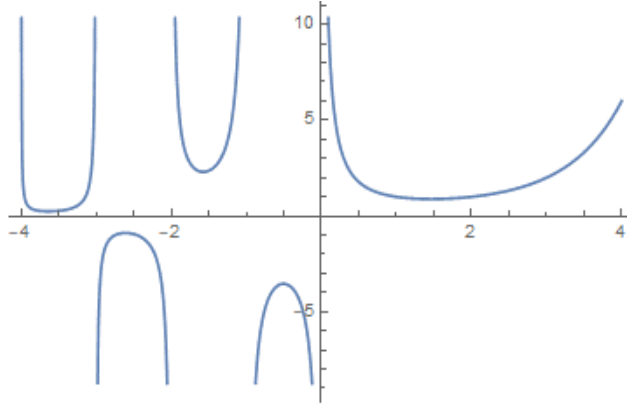
Bu bölümde çalışmamızda kullanılan bazı özel fonksiyonların tanımları ve temel özellikleri verilmiştir.

3.3.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu özel fonksiyonlar arasında en yaygın kullanılan fonksiyondur. Diğer ileri düzey matematiksel fonksiyonların hemen hemen tüm integral veya seri gösterimlerinde kullanıldığı için ilk olarak bu fonksiyonu vermek gerekir. $\Gamma(z)$ sembolü ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (3.4)$$

integral formülü ile tanımlıdır. Bu integral gösterimi yalnızca $\mathbb{C}$ 'nin sağ yarı düzleminde geçerli olsa da $\Gamma(z)$ için en yaygın gösterimdir. Farklı yollarla sol yarı düzleme analitik devam mümkündür. Analitik devamla, $\Gamma(z)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesi $D_\Gamma = \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ olur.



Şekil 3.14. $\Gamma(x)$ in fonksiyonun grafiği

(3.4) denkleminde kısmi integrasyon uygulanırsa, en azından bir $\text{Re}(z) > 0$ için $\Gamma(z)$ fonksiyonunun

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (3.5)$$

denklemini sağladığı görülür. Bu denklem yinelenerek $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)\Gamma(z) \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir. (3.5) ve (3.6) ile verilen formüller herhangi bir $z \in D_\Gamma$ noktasına genişletilebilir. $\Gamma(1) = 1$ olduğundan negatif olmayan tamsayı değerleri için

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

formülü elde edilir. Sonuç olarak $\Gamma(z)$ fonksiyonu,

$$z! = \Gamma(z+1)$$

kompleks faktöriyel fonksiyonunu tanımlamak için kullanılabilir.

(3.4) denkleminde $u = v^2$ yazılırsa,

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2z-1} dv \quad \text{Re}(z) > 0$$

Gauss integral gösterimi elde edilir. Bu formül kullanılarak

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi} \approx 1.77245$$

hesaplanır. Buradan, $n \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{2n} dv = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

formülü elde edilir.

Yansıma formülü olarak bilinen ve Gamma fonksiyonu ile sinüs fonksiyonu arasındaki ilişkiyi gösteren

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

formülü oldukça önemlidir. Bu formül $\Gamma(z)$ fonksiyonunun sıfırının olmadığını gösterir. Gerçekten $z = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ noktalarında sıfırı olamaz ve eğer $\Gamma(z)$ tamsayı olmayan bir z değeri için sıfır oluyorsa, yansıma formülünden bu sıfır $\Gamma(1-z)$ 'nin bir kutbu olmalıdır. Bu doğru olamaz. Bu durum $1/\Gamma(z)$ 'nin bir tam fonksiyon olduğu anlamına gelir.

Gauss aşağıdaki çarpım formülünü ispatlamıştır:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right), \quad n = 2, 3, \dots$$

Bu formülde $n = 2$ alınırsa

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Legendre İkileme (duplication) Formülü ve $n = 3$ alınırsa

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 3^{3z-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)$$

üçleme (triplication) formülü elde edilir.

$(z)_n$ ile gösterilen **Pochhammer sembolü**, $(z)_0 = 1$ ve negatif olmayan n tamsayıları için

$$(z)_n := z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

şeklinde tanımlıdır. Pochhammer sembolü

$$(z)_{-n} := z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

tanımlanarak negatif tamsayılara genişletilir.

(3.4) ile verilen Gamma fonksiyonunun integrasyon aralığının bölünmesiyle **Eksik Gamma fonksiyonu** elde edilir. Ortak tanımları

$$\gamma(\alpha, z) := \int_0^z u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

$$\Gamma(\alpha, z) := \int_z^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

şeklindedir. $\gamma(\alpha, z)$ fonksiyonu için $\text{Re}(\alpha) > 0$ olduğu ve z kompleks sayısına göre $|\arg(z)| < \pi$ olduğu varsayılır. Böylece $\text{Re}(\alpha) > 0$ ve $|\arg(z)| < \pi$ için

$$\gamma(\alpha, z) = \Gamma(\alpha) - \Gamma(\alpha, z)$$

ve

$$\Gamma(\alpha, z) = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, z)$$

elde edilir.

3.3.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu

$$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du, \quad \begin{cases} \text{Re}(p) > 0 \\ \text{Re}(q) > 0 \end{cases}$$

integrali ile tanımlıdır. Gamma fonksiyonu ikinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılırken, Beta fonksiyonunun bu gösterimi birinci çeşit Euler integrali olarak bilinir. Gamma fonksiyonu ile arasında

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

3.3.3. Bessel Fonksiyonu

Bessel fonksiyonu başta fiziğin hidrodinamik, radyo fiziği, matematiksel fizik, nükleer fizik ve atom fiziği gibi uygulama alanları olmak üzere matematiğin ve bir çok farklı alanların problemlerinin çözümünde kullanılan bir özel fonksiyondur. Bu fonksiyon D. Bernoulli (Bernoulli 1734) tarafından ilk olarak 1734 yılında tanımlanmış olmasına rağmen, ismini F.W. Bessel'den (1784-1846) almaktadır. L. Euler dairesel bir zarın titreşimlerinin analizinde mertebesi tamsayı olan Bessel fonksiyonunu kullanmıştır (Euler 1759). Bessel, bu fonksiyonu Kepler'in hareket eden farklı üç kütlenin hareketini aynı yerçekimi ivmesi altında hesaplama problemini çözmeye çalışırken sistematik olarak incelemiştir (Bessel 1824).

Birinci tür Bessel fonksiyonu, $z \in \mathbb{C}$ ve ν reel ya da kompleks değerli bir parametre olmak üzere

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (3.7)$$

kuvvet serisi gösterimi ile tanımlıdır.

ν bir tamsayı olduğunda Bessel fonksiyonu bir tam fonksiyon olarak karşımıza çıkar. Bu durumda

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots$$

olur. Gerçekten de

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n},$$

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{(n+s)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}$$

şeklindedir. ν 'nin bazı özel değeri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir.

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$$

Eğer ν bir tamsayı değilse $(z/2)^\nu$ çarpanı nedeniyle Bessel fonksiyonu $z=0$ da bir dallanma noktasına sahip olur. Bu yüzden $|\arg(z)| < \pi$ olan yani kompleks düzlemde negatif reel yarı eksen atılarak z noktaları seçilir. Kesilmiş düzlemde belirli z noktaları için (3.7) ile verilen serinin terimleri ν değişkeninin analitik fonksiyonu olduklarından serinin düzgün yakınsaklığı, $J_\nu(z)$ 'nin ν . mertebeden bir tam fonksiyon olduğunu söyler.

Bessel fonksiyonlarıyla genellikle $p(z)$ ve $q(z)$ analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d^2}{dz^2} u(z) + p(z) \frac{d}{dz} u(z) + q(z) u(z) = 0$$

formundaki ikinci derece diferensiyel denklemlerin teorisinde karşılaşılır. Eğer bu diferensiyel denklemde $p(z) = \frac{1}{z}$ ve $q(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}$ seçilir ve kuvvet serileri ile çözülürse (3.7) elde edilir. Sonuç olarak birinci tür Bessel fonksiyonu

$$u''(z) + \frac{1}{z} u'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u(z) = 0$$

denklemini sağlar. Bu denkleme Bessel diferensiyel denklemi denir.

3.3.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu kesirli kalkülüsün çeşitli uygulamalarında önemli bir yere sahip olan bir özel fonksiyondur. $E_\alpha(z)$ sembolüyle gösterilen Mittag-Leffler fonksiyonu, onu yirminci yüzyılın başında tanıtan ve araştıran büyük İsveçli matematikçi Gösta M. Mittag-Leffler'in onuruna bu isimle anılmaktadır (Mittag-Leffler, 1903a, 1903b, 1904, 1905). Bu fonksiyon, tüm kompleks düzlemde yakınsak olan

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0, \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.8)$$

seri gösterimi ile tanımlanır. Bu yüzden $E_\alpha(z)$ bir tam fonksiyondur.

$\alpha \rightarrow 0^+$ için limit alınrsa

$$\mathbb{E}_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

olduğundan tüm kompleks düzlemde analitiklik kaybolur.

Üstel fonksiyonun seri açılımında $k! = \Gamma(k+1)$ yerine $\alpha k! = \Gamma(\alpha k + 1)$ alınırsa Mittag-Leffler fonksiyonunun üstel fonksiyonun bir basit genellemesi olduğu görülür. Böylece

$$\mathbb{E}_1(z) := e^z$$

yazılabilir. Ayrıca (3.8) ile verilen kuvvet serisinin yakınsaklığı için $\text{Re}(\alpha) > 0$ olmak koşuluyla, α kompleks olarak alınabilir. $\mathbb{E}_\alpha(z)$ fonksiyonu için

$$\mathbb{E}_2(+z^2) = \cosh(z), \quad \mathbb{E}_2(-z^2) = \cos(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

ve

$$\mathbb{E}_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z \left[1 + \text{erf}(\pm z^{1/2}) \right] = e^z \text{erfc}(\pm z^{1/2}), \quad z \in \mathbb{C}$$

yazılır. Burada erf ve erfc sembolleri ile sırasıyla

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad z \in \mathbb{C}$$

ve

$$\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

ile tanımlı hata fonksiyonu ve tamamlayıcı hata fonksiyonu gösterilmektedir.

(3.8) ile verilen Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımında Gamma fonksiyonundaki 1 sabitinin keyfi bir β kompleks sayısı ile değiştirilmesiyle

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \text{Re } \alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.9)$$

şeklindeki genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyona *iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu* da denir. $\beta = 1$ için $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ olduğu açıktır. Bu fonksiyonun bazı özel parametre değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir.

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z & E_{1,2}(z) &= \frac{e^z - 1}{z} \\ E_{2,2}(+z^2) &= \frac{\sinh(z)}{z} & E_{2,2}(-z^2) &= \frac{\sin(z)}{z} \end{aligned}$$

3.3.5. Miller Ross Fonksiyonu

1923 yılında Kenneth S. Miller and Bertram Ross

$$E_{v,c}(z) = z^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cz)^k}{\Gamma(v+k+1)} \quad (3.10)$$

seri gösterimine sahip fonksiyonu çalışmışlardır (Miller ve Ross 1923). (3.9) ile verilen iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ile karşılaştırıldığında,

$$E_{v,c}(z) = z^v E_{1,v+1}(cz)$$

olduğu açıktır. Eksik gamma fonksiyonunun seri gösterimi yardımıyla

$$E_{v,c}(z) = z^v e^{cz} \gamma^*(v, cz) = \frac{c^{-v} e^{cz}}{\Gamma(v)} \gamma(v, cz)$$

şeklinde yazılabilir. $e^{cz} \gamma^*(v, cz)$ bir tam fonksiyon olduğundan, $E_{v,c}(z)$ fonksiyonu $v > -1$ için herhangi mertebeden hem kesirli integrali hem de kesirli türevi bulunan fonksiyonlardandır. Miller-Ross fonksiyonunun bazı özel parametre değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir.

$$E_{v,c}(0) = 0, \quad \operatorname{Re} v > 0$$

$$E_{0,c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cz)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{cz},$$

$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$$

3.3.6. Rabotnov Fonksiyonu

1948 yılında Yu. N. Rabotnov, katı mekanik üzerine çalışan Yu. N. Rabotnov, viskoelastisitede uygulanan özel bir fonksiyon kullanmıştır. Günümüzde Rabotnov kesirli üstel fonksiyonu veya kısaca Rabotnov fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyon

$$R_{\alpha,\beta}(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k z^{k(1+\alpha)}}{\Gamma((k+1)(\alpha+1))} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır (Rabotnov 1948). Bu serinin herhangi bir değişkeninin herhangi bir değerinde yakınsak olduğu açıktır. $\alpha = 0$ için Rabotnov fonksiyonu standart üstel $e^{\beta z}$ fonksiyonuna indirgenir. Rabotnov fonksiyonu ile Mittag Leffler arasında $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$R_{\alpha,\beta}(z) = z^\alpha E_{1+\alpha,1+\alpha}(\beta z^{1+\alpha}),$$

bağıntısı vardır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

4.1. k – Yıldızlı ve k – Düzgün Konveks Fonksiyonlar ile Bağlantılı Normalize Dini Fonksiyonu

Bu bölümde, normalize edilmiş Dini fonksiyonu k –yıldızlı ve k –düzgün konveks fonksiyonlar sınıflarında yer alması için yeterli koşullar verilmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar, “*Journal of Applied Mathematics and Informatics*” adlı dergide yayına kabul edilmiştir. (Ece ve ark. 2021)

Elde edilen sonuçları vermeden önce bazı önemli bilgileri hatırlatalım.

$\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (4.1)$$

formunda olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$ sınıfındaki ünivalent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilsin. k –UCV ve k –ST, Tanım 3.2.19 ve Tanım 3.2.20 ile verilmiş olan k –düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı ve k –yıldızlı fonksiyonlar sınıfı olsunlar. Bu sınıfların analitik gösterimi sırasıyla

$$k\text{--}UCV = \left\{ f \in \mathcal{S} : \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > k \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| ; z \in \mathcal{U}, 0 \leq k < \infty \right\}$$

$$k\text{--}ST = \left\{ f \in \mathcal{S} : \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > k \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| ; z \in \mathcal{U}, 0 \leq k < \infty \right\}$$

şeklindedir. Bu sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki yardımcı önermelerde verilen katsayı eşitsizlikleri Kanas ve Wisniowska tarafından elde edilmiştir.

Yardımcı Önerme 4.1.1. (4.1) ile verilen f fonksiyonu ve k ($0 \leq k < \infty$) için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| \leq \frac{1}{k+2}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f \in k-UCV$ olur. $\frac{1}{k+2}$ sayısı artırılmaz. (Kanas ve Wisniowska, 1999)

Yardımcı Önerme 4.1.2. (4.1) ile verilen f fonksiyonu ve k ($0 \leq k < \infty$) için

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+k(n-1)) |a_n| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f \in k-ST$ olur. (Kanas ve Wisniowska 2000)

$J_\nu(z)$ birinci tür Bessel fonksiyonu olmak üzere Bessel fonksiyonlarının özel bir kombinasyonu olan Dini fonksiyonu $w_\nu: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$w_\nu(z) = (1-\nu)J_\nu(z) + zJ_\nu'(z)$$

ile tanımlıdır. Dini fonksiyonunun $\mathcal{A}$ sınıfında olmadığı açıktır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} f_\nu(z) &= 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{\frac{1-\nu}{2}} \left((1-\nu)J_\nu(\sqrt{z}) + \sqrt{z} J_\nu'(\sqrt{z}) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n+1) \Gamma(\nu+1)}{4^n n! \Gamma(\nu+n+1)} z^{n+1} \end{aligned}$$

ile normalize edilebilir. Elde edilen bu yeni fonksiyon

$$f_\nu(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1) \Gamma(\nu+1)}{4^{n-1} (n-1)! \Gamma(\nu+n)} z^n \quad (4.2)$$

şeklinde düzenlendiğinde $\mathcal{A}$ sınıfında olduğunu görmek kolaydır. Bu durumda, yukarıda verilen yardımcı önermeleri kullanarak, normalize edilmiş Dini fonksiyonunun $k-UCV$ ve $k-ST$ sınıflarında olması için yeterli koşullar elde edilebilir.

Teorem 4.1.3. $\nu > -1$ ve

$$(k+2)e^{\frac{1}{4\nu+4}} \left(\frac{1}{32(\nu+1)^3} + \frac{9}{16(\nu+1)^2} + \frac{3}{2(\nu+1)} \right) \leq 1$$

olsun. Bu durumda (4.2) ile verilen normalize edilmiş Dini fonksiyonu $k-UCV$ sınıfındadır.

İspat: Yardımcı Önerme 4.1.1'den (4.2) ile verilen $f_\nu(z)$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \right| \leq \frac{1}{k+2} \quad (4.3)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$L_1(v) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{(2n-1)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)}$$

şeklinde tanımlansın.

$$n^3 = (n-1)(n-2)(n-3) + 6(n-1)(n-2) + 7(n-1) + 1$$

$$n^2 = (n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1$$

$$n = (n-1) + 1$$

eşitliklerinden faydalananarak $L_1(v)$ ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} L_1(v) &= \sum_{n=2}^{\infty} 2[(n-1)(n-2)(n-3) + 6(n-1)(n-2) + 7(n-1) + 1] \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad - 3 \sum_{n=2}^{\infty} 2[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1] \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1) + 1] \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} + 9 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n-2) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + 6 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-4)!\Gamma(v+n)} + 9 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-3)!\Gamma(v+n)} + 6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-2)!\Gamma(v+n)} \end{aligned}$$

elde edilir. $(v)_n$ Pochhammer sembolünü göstermek üzere,

$$\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+n)} = \frac{1}{(v+1)_{n-1}} \quad (4.4)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$L_1(v) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{4^{n-1}(n-4)!(v+1)_{n-1}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{9}{4^{n-1}(n-3)!(v+1)_{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{4^{n-1}(n-2)!(v+1)_{n-1}}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

yazılır. Ayrıca $v > -1$ için

$$(v+1)_{n-1} = (v+1)(v+2)\dots(v+n-1) \geq (v+1)^{n-1} \quad (4.5)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. (4.5) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} L_1(v) &\leq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{4^{n-1}(n-4)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{9}{4^{n-1}(n-3)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{4^{n-1}(n-2)!(v+1)^{n-1}} \\ &= \frac{2}{4^3(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{9}{4^2(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{3}{4(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eğer

$$\left(\frac{1}{32(v+1)^3} + \frac{9}{16(v+1)^2} + \frac{3}{2(v+1)} \right) e^{\frac{1}{4v+4}} \leq \frac{1}{k+2}$$

eşitsizliği sağlanırsa, (4.3) ile verilen eşitsizlik doğru olur. Bu ise

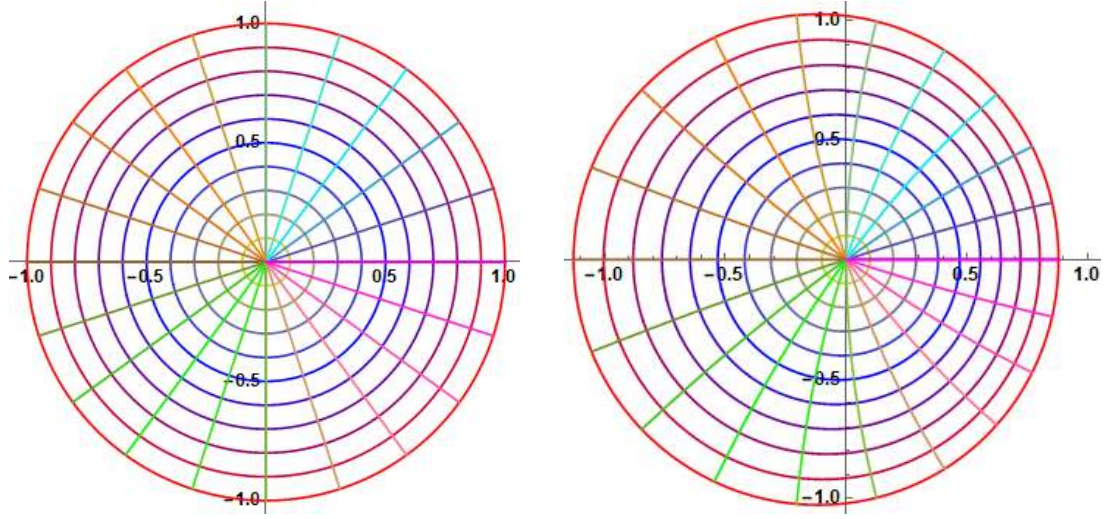
$$(k+2) \left(\frac{1}{32(v+1)^3} + \frac{9}{16(v+1)^2} + \frac{3}{2(v+1)} \right) e^{\frac{1}{4v+4}} \leq 1$$

koşuluna eşittir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.4. Eğer $k=1$ alınırsa, Teorem 4.1.3'ün varsayımları gereği $v \geq 4.07978$ olmalıdır. $v=5$ için elde edilen

$$f_5(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\Gamma(6)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(5+n)} z^n$$

fonksiyonu $1-UCV = UCV$ sınıfındadır. (Şekil 4.1.)



Şekil 4.1. $\mathcal{U}$ diskinin $f_5(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\Gamma(6)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(5+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.1.5. $v > -1$ ve

$$e^{\frac{1}{4v+4}} \left(\frac{k+1}{8(v+1)^2} + \frac{3k+5}{4(v+1)} + 1 \right) \leq 2$$

olsun. Bu durumda (4.2) ile verilen normalize edilmiş Dini fonksiyonu $k-ST$ sınıfındadır.

İspat: Yardımcı Önerme 4.1.2'den (4.2) ile verilen $f_v(z)$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+k(n-1)) |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} (n+k(n-1)) \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \right| \leq 1 \quad (4.6)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$L_2(v) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+k(n-1)) \frac{(2n-1)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)}$$

olsun. Teorem 4.1.3'teki hesaplamalara benzer işlemler ile

$$\begin{aligned}
 L_2(v) &= \sum_{n=2}^{\infty} 2(k+1)(n-1)(n-2) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (3k+5)(n-1) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\
 &= \sum_{n=3}^{\infty} 2(k+1) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-3)!\Gamma(v+n)} \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (3k+5) \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-2)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) ile verilen ifadeler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 L_2(v) &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(k+1)}{4^{n-1}(n-3)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3k+5}{4^{n-1}(n-2)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(v+1)^{n-1}} \\
 &= \frac{2(k+1)}{4^2(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{3k+5}{4(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} + e^{\frac{1}{4v+4}} - 1
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eğer

$$\frac{k+1}{8(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{3k+5}{4(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} + e^{\frac{1}{4v+4}} - 1 \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa, (4.6) ile verilen eşitsizlik doğru olur. Bu ise

$$\left(\frac{k+1}{8(v+1)^2} + \frac{3k+5}{4(v+1)} + 1 \right) e^{\frac{1}{4v+4}} \leq 2$$

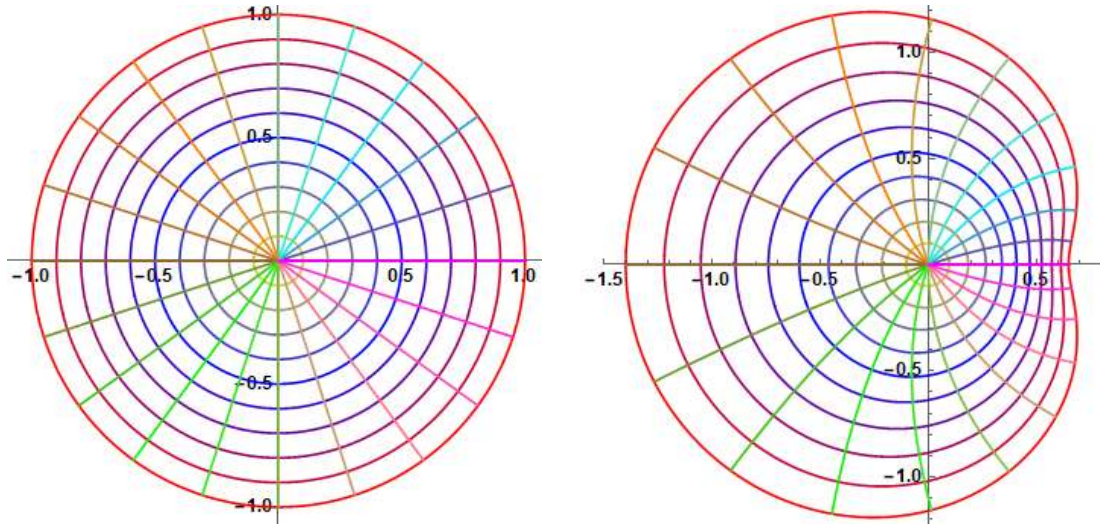
eşitsizliğine denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.6. Eğer $k = 0$ alınırsa, Teorem 4.1.5'in varsayımı gereği $v \geq 0.787$ olmalıdır.

$v = 1$ için elde edilen

$$f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(1+n)} z^n$$

fonksiyonu $0-ST = \mathcal{S}^*$ sınıfındadır. (Şekil 4.2.)



Şekil 4.2. $\mathcal{U}$ diskinin $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(1+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi

4.2. Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları ile Bağlantılı Genelleştirilmiş Dini Fonksiyonu

Bu bölümde, genelleştirilmiş Dini fonksiyonu yıldızıl ve konveks fonksiyonların bazı alt sınıflarında yer alması için yeterli koşullar verilmiştir.

Thulasiram ve arkadaşları 2014 yılında $0 \leq \alpha < 1$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z f'(z) + \beta z^2 f''(z)}{f(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}$$

eşitsizliğini sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt sınıfını tanımlamışlar ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı eşitsizliğini ispatlamışlardır.

Yardımcı Önerme 4.2.1. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n + \beta n(n-1) - \alpha) |a_n| \leq (1 - \alpha)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ sınıfındadır (Thulasiram ve ark. 2014)

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bundan başka, $0 \leq \alpha < 1$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left(\frac{(z f'(z) + \beta z^2 f''(z))'}{f'(z)} \right) > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}$$

eşitsizliğini sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{K}(\beta, \alpha)$ ile gösterelim. Bu iki sınıf arasında

$$f \in \mathcal{K}(\beta, \alpha) \Leftrightarrow z f' \in \mathcal{G}(\beta, \alpha)$$

şeklindeki Alexander bağıntısı vardır. Ayrıca $\beta = 0$ için $\mathcal{G}(0, \alpha) = \mathcal{S}^*(\alpha)$ ve $\mathcal{K}(0, \alpha) = \mathcal{C}(\alpha)$ olduğunu görmek kolaydır.

$\mathcal{K}(\beta, \alpha)$ sınıfı için katsayı eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Yardımcı Önerme 4.2.2. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n + \beta n(n-1) - \alpha) |a_n| \leq (1 - \alpha)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\mathcal{K}(\beta, \alpha)$ sınıfındadır. (Şeker ve Sümer Eker 2020)

$J_\nu(z)$ birinci tür Bessel fonksiyonu olmak üzere Bessel fonksiyonlarının özel bir kombinasyonu olan genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $w_{c,\nu}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$

$$w_{c,\nu}(z) = (c - \nu)J_\nu(z) + zJ_\nu'(z)$$

ile tanımlıdır. Genelleştirilmiş Dini fonksiyonunun $\mathcal{A}$ sınıfında olmadığı açıktır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} f_{c,\nu}(z) &= \frac{2^\nu}{c} \Gamma(\nu + 1) z^{1-\frac{\nu}{2}} \left((c - \nu)J_\nu(\sqrt{z}) + \sqrt{z} J_\nu'(\sqrt{z}) \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} (2n - 2 + c) \Gamma(\nu + 1)}{c 4^{n-1} (n-1)! \Gamma(\nu + n)} z^n \end{aligned}$$

ile normalize edilebilir. Elde edilen bu yeni fonksiyonun $\mathcal{A}$ sınıfında olduğunu görmek kolaydır. Bu durumda, yukarıda verilen yardımcı önermeleri kullanarak, normalize genelleştirilmiş Dini fonksiyonunun $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ ve $\mathcal{K}(\beta, \alpha)$ sınıflarında olması için yeterli koşullar elde edilebilir.

Teorem 4.2.3. $v > -1$ ve

$$2(1-\alpha) - e^{\frac{1}{4v+4}} \left(1 - \alpha + \frac{\beta}{32c(v+1)^3} + \frac{(8+c)\beta+2}{16c(v+1)^2} + \frac{2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)}{4c(v+1)} \right) \geq 0$$

olsun. Bu durumda $f_{c,v}(z)$ ile verilen normalize genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ sınıfındadır.

İspat: $f_{c,v}(z)$ fonksiyonunu

$$f_{c,v}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2+c)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} z^n, \quad (4.7)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Yardımcı Önerme 4.2.1'den bu fonksiyonun

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n + \beta n(n-1) - \alpha) \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n-2+c)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \right| \leq (1-\alpha) \quad (4.8)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$L_3(v, \alpha, \beta) = \sum_{n=2}^{\infty} (n + \beta n(n-1) - \alpha) \frac{(2n-2+c)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)}$$

şeklinde tanımlansın.

$$n^3 = (n-1)(n-2)(n-3) + 6(n-1)(n-2) + 7(n-1) + 1$$

$$n^2 = (n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1$$

$$n = (n-1) + 1$$

eşitliklerinden faydalananarak $L_3(\alpha, \beta, v)$ ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} L_3(v, \alpha, \beta) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\beta(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(8+c)\beta+2](n-1)(n-2)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)](n-1)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c(1-\alpha)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$L_3(v, \alpha, \beta) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2\beta \Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-4)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{[(8+c)\beta+2]\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-3)!\Gamma(v+n)} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)]\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-2)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)}$$

yazılır. (4.4) ile verilen eşitlik kullanılırsa,

$$L_3(v, \alpha, \beta) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2\beta}{c4^{n-1}(n-4)!(v+1)_{n-1}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(8+c)\beta+2}{c4^{n-1}(n-3)!(v+1)_{n-1}} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)}{c4^{n-1}(n-2)!(v+1)_{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{c4^{n-1}(n-1)!(v+1)_{n-1}}$$

olur. (4.5) eşitsizliği ile

$$L_3(v, \alpha, \beta) \leq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2\beta}{c4^{n-1}(n-4)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(8+c)\beta+2}{c4^{n-1}(n-3)!(v+1)^{n-1}} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)}{c4^{n-1}(n-2)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{4^{n-1}(n-1)!(v+1)^{n-1}} \\ = (1-\alpha) \left(e^{\frac{1}{4v+4}} - 1 \right) + \frac{\beta}{32c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{(8+c)\beta+2}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}}$$

elde edilir. Böylece eğer

$$(1-\alpha) \left(e^{\frac{1}{4v+4}} - 1 \right) + \frac{\beta}{32c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{(8+c)\beta+2}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} \leq 1-\alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa, (4.8) ile verilen eşitsizlik doğru olur. Bu ise

$$(1-\alpha) \left(2 - e^{\frac{1}{4v+4}} \right) - \frac{\beta}{32c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{(8+c)\beta+2}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{2\beta(2+c)+c+2(2-\alpha)}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} \geq 0$$

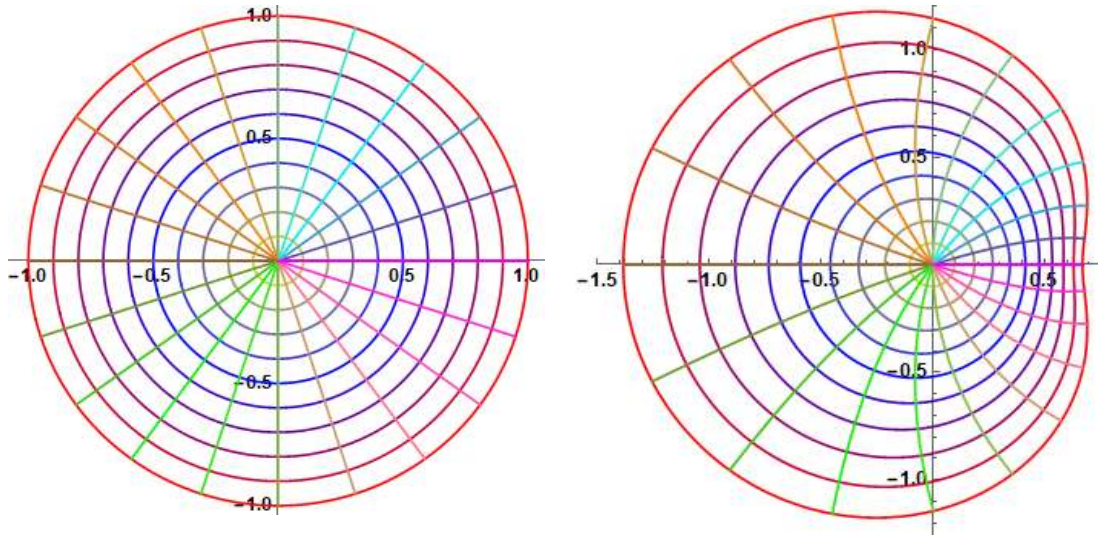
koşuluna denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.4. Eğer $\alpha = \beta = 1/16$ ve $c = 2$ alınırsa Teorem 4.2.3'ün varsayımları gereği

$v \geq 0.37143$ olmalıdır. $v = 2/5$ için elde edilen

$$f_{2, \frac{2}{5}}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \Gamma(7/5)}{4^{n-1} (n-1)! \Gamma(2/5+n)} z^n$$

fonksiyonu $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ sınıfındadır. (Şekil 4.3.)



Şekil 4.3. $\mathcal{U}$ diskinin $f_{2, \frac{2}{5}}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \Gamma(7/5)}{4^{n-1} (n-1)! \Gamma(2/5 + n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.2.5: $v > -1$ ve

$$(1-\alpha)(2 - e^{\frac{1}{4v+4}}) - \frac{\beta}{128c(v+1)^4} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{(16+c)\beta + 2}{64c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{(28+5c)\beta + c + 10 - 2\alpha}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{4\beta(2+c) + 3c + 8 - (4+c)\alpha}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} \geq 0$$

olsun. Bu durumda (4.7) ile verilen $f_{c,v}(z)$ normalize genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $\mathcal{K}(\beta, \alpha)$ sınıfındadır

İspat: Yardımcı Önerme 4.2.2'den (4.7) ile verilen $f_{c,v}(z)$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n + \beta n(n-1) - \alpha) \left| \frac{(-1)^{n-1} (2n-2+c) \Gamma(v+1)}{c 4^{n-1} (n-1)! \Gamma(v+n)} \right| \leq (1-\alpha) \quad (4.9)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$L_2(v, \alpha, \beta) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n + \beta n(n-1) - \alpha) \frac{(2n-2+c) \Gamma(v+1)}{c 4^{n-1} (n-1)! \Gamma(v+n)}$$

olsun.

$$n^4 = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 10(n-1)(n-2)(n-3) + 25(n-1)(n-2) + 15(n-1) + 1$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$$n^3 = (n-1)(n-2)(n-3) + 6(n-1)(n-2) + 7(n-1) + 1$$

$$n^2 = (n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1$$

$$n = (n-1) + 1$$

eşitliklerinden faydalanarak $L_2(v, \alpha, \beta)$ ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} L_4(v, \alpha, \beta) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\beta(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(16+c)\beta+2](n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[\beta(28+5c)+c+10-2\alpha](n-1)(n-2)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[4\beta(2+c)+3c+8-(4+c)\alpha](n-1)\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \\ &= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2\beta\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-5)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{[(16+c)\beta+2]\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-4)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{[(28+5c)\beta+c+10-2\alpha]\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-3)!\Gamma(v+n)} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[4\beta(2+c)+3c+8-(4+c)\alpha]\Gamma(v+1)}{c4^{n-1}(n-2)!\Gamma(v+n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)\Gamma(v+1)}{4^{n-1}(n-1)!\Gamma(v+n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.4) ve (4.5) ile verilen ifadeler kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_4(v, \alpha, \beta) &\leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2\beta}{c4^{n-1}(n-5)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(16+c)\beta+2}{c4^{n-1}(n-4)!(v+1)^{n-1}} \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(28+5c)\beta+c+10-2\alpha}{c4^{n-1}(n-3)!(v+1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\beta(2+c)+3c+8-(4+c)\alpha}{c4^{n-1}(n-2)!(v+1)^{n-1}} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{4^{n-1}(n-1)!(v+1)^{n-1}} \\ &= \frac{\beta}{128c(v+1)^4} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{(16+c)\beta+2}{64c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{(28+5c)\beta+c+10-2\alpha}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} \\ &\quad + \frac{4\beta(2+c)+3c+8-(4+c)\alpha}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} + (1-\alpha) \left(e^{\frac{1}{4v+4}} - 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eğer

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{128c(v+1)^4} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{(16+c)\beta+2}{64c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} + \frac{(28+5c)\beta+c+10-2\alpha}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} \\ & + \frac{4\beta(2+c)+3c+8-(4+c)\alpha}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} + (1-\alpha) \left(e^{\frac{1}{4v+4}} - 1 \right) \leq 1-\alpha \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanırsa, (4.9) ile verilen eşitsizlik doğru olur. Bu ise

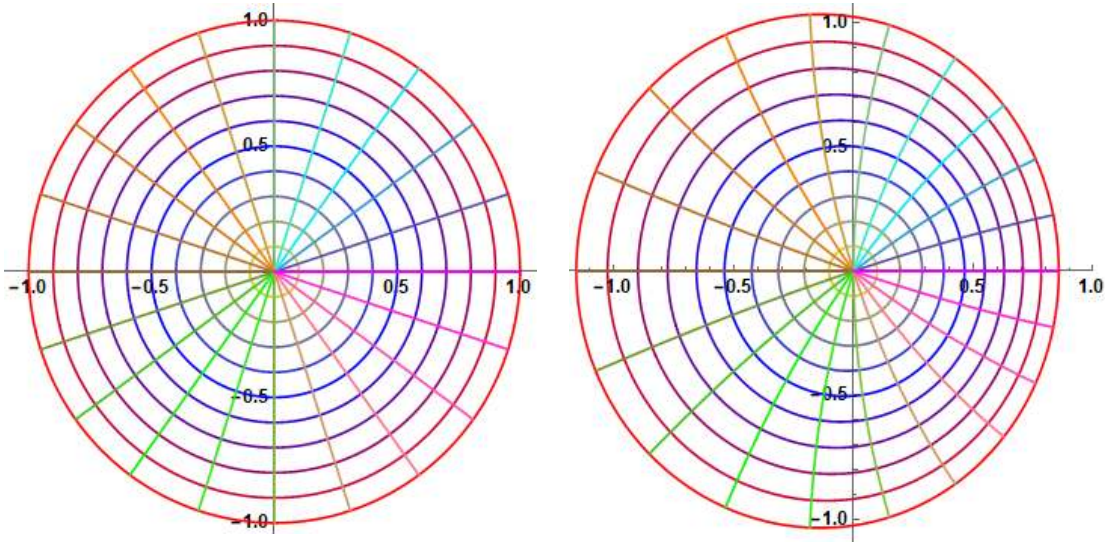
$$\begin{aligned} & (1-\alpha) \left(2 - e^{\frac{1}{4v+4}} \right) - \frac{\beta}{128c(v+1)^4} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{(16+c)\beta+2}{64c(v+1)^3} e^{\frac{1}{4v+4}} \\ & - \frac{(28+5c)\beta+c+10-2\alpha}{16c(v+1)^2} e^{\frac{1}{4v+4}} - \frac{4\beta(2+c)+3c+8-(4+c)\alpha}{4c(v+1)} e^{\frac{1}{4v+4}} \geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğine denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.6 $\alpha = \beta = 1/16$ ve $c = 4$ alınır. Teorem 4.2.5'in varsayımı gereği $v \geq 1.01326$ olmalıdır. $v = 3/2$ alınır. elde edilen

$$f_{4, \frac{3}{2}}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n+2) \Gamma(5/2)}{4^n (n-1)! \Gamma(3/2+n)} z^n$$

fonksiyonu $\mathcal{K}(\beta, \alpha)$ sınıfındadır. (Şekil 4.4.)



Şekil 4.4. $\mathcal{U}$ diskinin $f_{4, \frac{3}{2}}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n+2) \Gamma(5/2)}{4^n (n-1)! \Gamma(3/2+n)} z^n$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.5'te $\beta = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.7. $v > -1$ olsun. Eğer

$$2(1-\alpha) - e^{\frac{1}{4v+4}} \left(1 - \alpha + \frac{1}{8c(v+1)^2} + \frac{c+2(2-\alpha)}{4c(v+1)} \right) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa $f_{c,v}(z)$ genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfındadır.

Sonuç 4.2.8. $v > -1$ olsun. Eğer

$$2(1-\alpha) - e^{\frac{1}{4v+4}} \left(1 - \alpha + \frac{1}{32c(v+1)^3} + \frac{c+10-2\alpha}{16c(v+1)^2} + \frac{3c+8-(4+c)\alpha}{4c(v+1)} \right) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa $f_{c,v}(z)$ genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfındadır.

Sonuç 4.2.7 ve Sonuç 4.2.8'de $\alpha = 0$ ve $c = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.9.

$$2 - e^{\frac{1}{4x+4}} \left(1 + \frac{1}{8(x+1)^2} + \frac{5}{4(x+1)} \right) = 0$$

denkleminin kökü $x_1 \cong 0,7865597011$ olmak üzere $v > x_1$ olsun. Bu durumda $f_{1,v}(z)$ genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ sınıfındadır.

Sonuç 4.2.10.

$$2 - e^{\frac{1}{4x+4}} \left(1 + \frac{1}{32(x+1)^3} + \frac{11}{16(x+1)^2} + \frac{11}{4(x+1)} \right) = 0$$

denkleminin kökü $x_2 \cong 2,435030799$ olmak üzere $v > x_2$ olsun. Bu durumda $f_{1,v}(z)$ genelleştirilmiş Dini fonksiyonu $\mathcal{C}$ sınıfındadır.

4.3. Miller-Ross Fonksiyonunun Geometrik Özellikleri

Bu bölümde, Miller-Ross fonksiyonunun bazı geometrik özellikleri incelenmiş ve normalize edilmiş Miller-Ross fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalentliği, konveksliği, yıldızlılığı ve konvekse yakınlığı için yeterli koşullar elde edilmiştir.

Miller-Ross fonksiyonunun geometrik özelliklerini inceleyebilmek için aşağıdaki yardımcı önermeleri vermek faydalı olacaktır.

Yardımcı Önerme 4.3.1. $f \in \mathcal{A}$ olsun ve

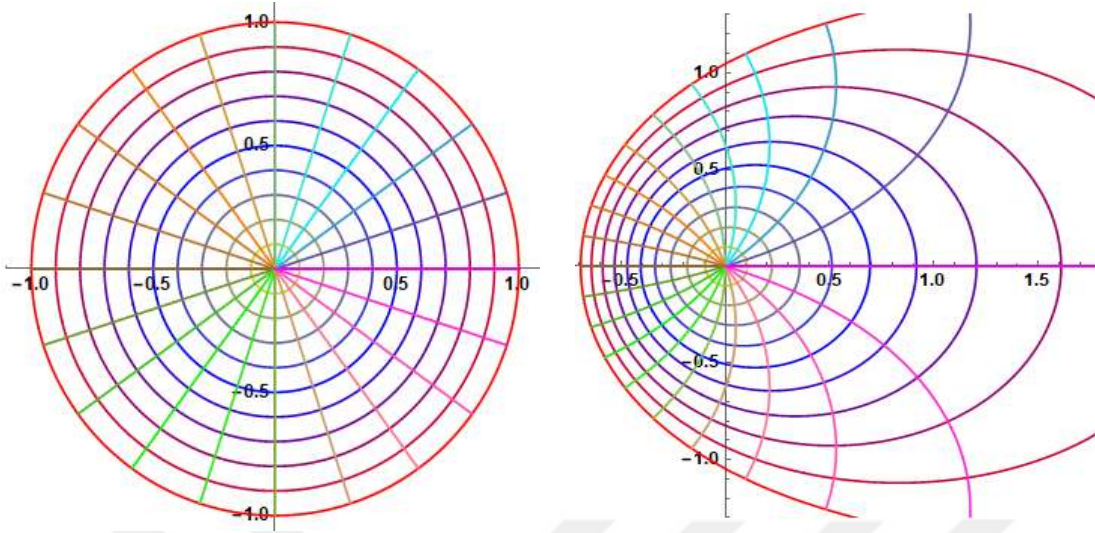
$$1 \geq 2a_2 \geq \dots \geq ka_k \geq \dots \geq 0$$

veya

$$1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq ka_k \leq \dots \leq 2$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde regüler ve ünivalenttir (Ozaki 1935).

Ozaki'nin ispatını takiben, eğer bir f fonksiyonu Yardımcı Önerme 4.3.1'deki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyonunun $-\log(1-z)$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğu söylenebilir.



Şekil 4.5. $\mathcal{U}$ diskinin $f(z) = -\log(1-z)$ fonksiyonu altındaki resmi

Yardımcı Önerme 4.3.2. Eğer $a_k \geq 0$, $\{ka_k\}$ ve $\{ka_k - (k+1)(a_{k+1})\}$ her ikisi de artmayan yani 2. dereceden monoton ise, bu durumda $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ sınıfındadır (Fejér 1936).

Yardımcı Önerme 4.3.3. $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun aşağıdaki dört koşuldan birini sağladığını kabul edelim.

$$1 \geq 3a_3 \geq 5a_5 \geq \dots \geq (2k+1)a_{2k+1} \geq \dots \geq 2a_2 \geq 4a_4 \geq \dots \geq 2ka_{2k} \geq \dots \geq 0$$

$$1 \leq 3a_3 \leq 5a_5 \leq \dots \leq (2k+1)a_{2k+1} \leq \dots \leq 2a_2 \leq 4a_4 \leq \dots \leq 2ka_{2k} \leq \dots \leq 2$$

$$1 \geq 3a_3 \geq 5a_5 \geq \dots \geq (2k+1)a_{2k+1} \geq \dots \geq 2ka_{2k} \geq \dots \geq 4a_4 \geq 2a_2 \geq 0$$

$$1 \leq 3a_3 \leq 5a_5 \leq \dots \leq (2k+1)a_{2k+1} \leq \dots \leq 2ka_{2k} \leq 2ka_{2k} \leq \dots \leq 4a_4 \leq 2a_2 \leq 2$$

Bu durumda f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde regüler ve ünivalenttir (Ozaki 1935).

Yardımcı Önerme 4.3.3'ten, f fonksiyonunun

$$1 \geq 3a_3 \geq 5a_5 \geq \dots \geq (2k+1)a_{2k+1} \geq \dots \geq 0$$

eşitsizliğini veya

$$1 \leq 3a_3 \leq 5a_5 \leq \dots \leq (2k+1)a_{2k+1} \leq \dots \leq 2$$

eşitsizliğini sağlayan tek fonksiyon olması (yani her bir $k \geq 1$ için $a_{2k} = 0$ olması) durumunda f fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde regüler ve ünivalent olduğu kolayca

söylenebilir. Ayrıca bu son iki eşitsizlikten birini sağlayan tek fonksiyonun $2^{-1} \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğu söylenebilir.

Yardımcı Önerme 4.3.4. Eğer $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu her $z \in \mathcal{U}$ için $|f(z)/z - 1| < 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda f fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1/2\}$ diskinde yıldızlı ve ünivalenttir (MacGregor 1963).

Yardımcı Önerme 4.3.5. Eğer $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu her $z \in \mathcal{U}$ için $|f'(z) - 1| < 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda f fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konvekstir (MacGregor 1964).

$c, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $E_{v,c}(z) = z^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cz)^k}{\Gamma(v+k+1)}$ ile tanımlı Miller-Ross fonksiyonunun $\mathcal{A}$ sınıfında olmadığı açıktır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{v,c}(z) &= z^{1-v} \Gamma(v+1) E_{v,c}(z) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c^{k-1} \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+k)} z^k \end{aligned} \quad (4.10)$$

ile normalize edilebilir. Elde edilen bu yeni fonksiyonun $\mathcal{A}$ sınıfında olduğu kolaylıkla görülebilir. Miller-Ross fonksiyonunun tanımında c üzerinde herhangi bir kısıtlama olmamasına rağmen, bu tezde reel $c > 0$ değerleri ve $z \in \mathcal{U}$ alınarak çalışılmıştır.

Teorem 4.3.6. $c > 0$ olsun. Eğer $v \geq 2c - 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır böylelikle ünivalenttir.

İspat: (4.10) ile verilen normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ Miller-Ross fonksiyonunu

$$a_1 = 1 \quad \text{ve} \quad a_k = \frac{c^{k-1} \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+k)} \quad (k \geq 2) \quad (4.11)$$

olmak üzere

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$$\mathbb{E}_{v,c}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

şeklinde yazalım.

$\mathbb{E}_{v,c}(z)$ fonksiyonun $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğunu göstermek için Yardımcı Önerme 4.3.1'i kullanacağız. Teoremin varsayımları altında tüm $k \geq 1$ değerleri için $a_k \geq 0$ ve $2a_2 \leq 1$ eşitsizlikleri sağlandığı açıktır. $\{ka_k\}$ dizisinin pozitif reel sayıların bir azalan dizisi olduğunu göstermeliyiz. (4.11)'den

$$\begin{aligned} ka_k - (k+1)a_{k+1} &= \frac{k c^{k-1} \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+k)} - \frac{(k+1)c^k \Gamma(v+1)}{\Gamma(v+k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k+1)} X(k) \end{aligned}$$

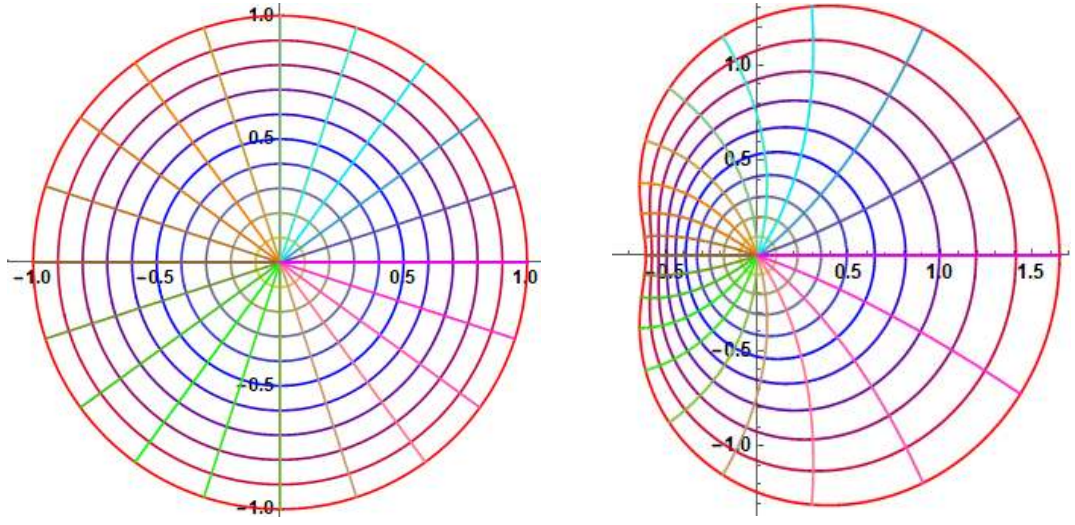
elde edilir. Bu denklemde $X(k) = k(v+k) - c(k+1)$ olur. Her $k \geq 1$ için $k^2 \geq 2k-1$ olduğundan, teoremin varsayımları altında

$$\begin{aligned} X(k) &= k^2 + (v-c)k - c \\ &\geq (2+v-c)k - c - 1 \\ &\geq v - 2c + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{ka_k\}$ bir azalan dizi olur. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.3.7. $\mathbb{E}_{0, \frac{1}{2}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1} \Gamma(k)} z^k$ fonksiyonu $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre

konvekse yakındır ve böylece $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalenttir. (Şekil 4.6.)



Şekil 4.6. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{E}_{0,1/2}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1} \Gamma(k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.3.8. $c > 0$ olsun. Eğer $v \geq \frac{4c-3+\sqrt{4c^2+8c+1}}{2}$ ise normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$

Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır.

İspat: a_k katsayıları (4.10) ile verilmek üzere, $\mathbb{E}_{v,c}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonunu alalım.

$\mathbb{E}_{v,c}(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlı olduğunu ispatlamak için Yardımcı

Önerme 4.3.2'yi kullanacağız. $c > 0$ için

$$\frac{4c-3+\sqrt{4c^2+8c+1}}{2} > 2c-1$$

olduğundan, v üzerindeki koşul $v > 2c-1$ eşitsizliğini sağlar. Bu da $\{ka_k\}$ dizisinin artmayan dizi olduğu anlamına gelir. İspatı tamamlamak için $\{ka_k - (k+1)a_{k+1}\}$ dizisinin de artmayan olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $b_k = ka_k - (k+1)a_{k+1}$ diyelim. (4.11) ile verilen a_k katsayısının tanımından faydalanarak

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$$\begin{aligned} b_k - b_{k+1} &= ka_k - 2(k+1)a_{k+1} + (k+2)a_{k+2} \\ &= \frac{k\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} - \frac{2(k+1)\Gamma(v+1)c^k}{\Gamma(v+k+1)} + \frac{(k+2)\Gamma(v+1)c^{k+1}}{\Gamma(v+k+2)} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k+2)} Y(k) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$Y(k) = k^3 + (2v+1-2c)k^2 + [v(v+1) - 2(2+v)c + c^2]k - 2(v+1)c + 2c^2$$

şeklindedir. Her $k \geq 1$ için $Y(k) \geq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Her $k \geq 1$ tamsayısı için $k^3 \geq 3k^2 - 3k + 1$ eşitsizliği sağlanır. Böylece her $k \geq 1$ için

$$Y(k) \geq (4+2v-2c)k^2 + [v(v+1) - 2(2+v)c + c^2 - 3]k - 2(v+1)c + 2c^2 + 1 = Z(k)$$

olur. Teoremin varsayımından $4+2v-2c > 0$ olduğu açıktır. Her $k \geq 1$ tamsayısı için sağlanan $k^2 \geq 2k - 1$ eşitsizliğini kullanırsak

$$Z(k) \geq [v^2 + (5-2c)v + c^2 - 8c + 5]k - 2v(1+c) + 2c^2 - 3 = W(k)$$

elde edilir. Teoremin varsayımından

$$v^2 + (5-2c)v + c^2 - 8c + 5 = (v-c)2 + 5v - 8c + 5 \geq 0$$

eşitsizliği kolayca görülür. Buradan da

$$W(k) \geq W(1) = v^2 + 3c^2 + 3v - 8c - 4vc + 2$$

olur. $v \geq \frac{4c-3+\sqrt{4c^2+8c+1}}{2}$ olduğu için $W(1) \geq 0$ yazılabilir. Böylece her $k \geq 1$

tamsayısı için

$$Y(k) \geq Z(k) \geq W(k) \geq W(1) \geq 0$$

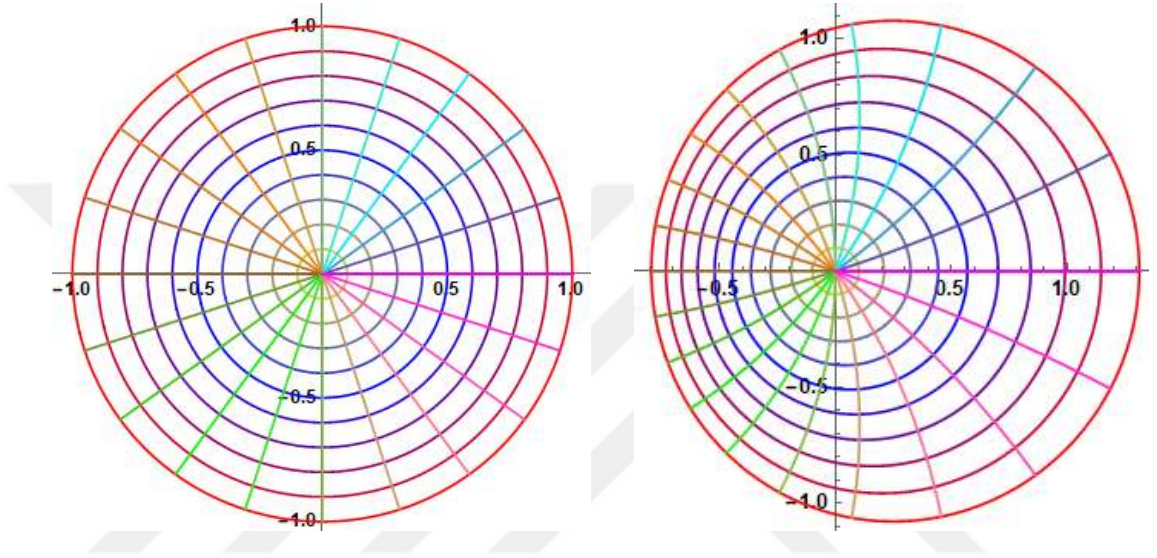
eşitsizliklerini ispatlamış oluruz. O halde $\{b_k\}$ dizisi ve böylece $\{ka_k - (k+1)a_{k+1}\}$ dizisi artmayandır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.3.9. Eğer $c=1$ alırsak Teorem 4.3.8’de verilen koşula göre $v \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

olmalıdır. Böylece

$$\mathbb{E}_{3,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3+k)} z^k$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır. (Şekil 4.7.)



Şekil 4.7. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{E}_{3,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3+k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.3.10. $c > 0$ olsun. Eğer $v \geq (\sqrt{2} + 2)c - 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır.

İspat : $p(z)$ fonksiyonunu

$$p(z) = \frac{z\mathbb{E}'_{v,c}(z)}{\mathbb{E}_{v,c}(z)}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\frac{\mathbb{E}_{v,c}(z)}{z} \neq 0, \quad (z \in \mathcal{U})$$

olduğundan p fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $p(0)=1$ olur. Teoremi ispatlamak için $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$, $(z \in \mathcal{U})$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $|p(z)-1| < 1$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$(z \in \mathcal{U})$ ise bu durumda $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Verilen varsayımlar altında

$$\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+k)} \leq \frac{1}{(v+1)^{k-1}} \quad (4.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $z \in \mathcal{U}$ ise (4.10) ve (4.12) ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}'_{v,c}(z) - \frac{\mathbb{E}_{v,c}(z)}{z} \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} z^{k-1} \right| \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \left(\frac{c}{v+1} \right)^{k-1} \\ &= \frac{c(v+1)}{(v+1-c)^2}, \quad (|c| < v+1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbb{E}_{v,c}(z)}{z} \right| &= \left| 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} z^{k-1} \right| \\ &> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} \\ &> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c}{v+1} \right)^{k-1} \\ &= \frac{v+1-2c}{(v+1-c)}, \quad (|c| < v+1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
|p(z)-1| &= \left| \frac{z\mathbb{E}'_{v,c}(z)}{\mathbb{E}_{v,c}(z)} - 1 \right| \\
&= \left| \frac{\mathbb{E}'_{v,c}(z) - \frac{\mathbb{E}_{v,c}(z)}{z}}{\frac{\mathbb{E}_{v,c}(z)}{z}} \right| \\
&< \frac{c(v+1)}{(v+1-c)(v+1-2c)}
\end{aligned}$$

yazılır. Eğer $v > (\sqrt{2} + 2)c - 1$ ise son ifade 1'den küçüktür. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.11. $c > 0$ olsun. Eğer $v \geq 3c - 1$ ise $\mathbb{E}_{v,c}(z^2)/z$ fonksiyonu $2^{-1} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

İspat: (4.10) ile verilen $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ fonksiyonunun tanımında z yerine z^2 yazılır ve elde edilen fonksiyon z 'ye bölünürse,

$$a_1 = 1 \quad \text{ve} \quad a_{2k-1} = \frac{c^{k-1}\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+k)}, \quad k \geq 2$$

olmak üzere

$$\frac{\mathbb{E}_{v,c}(z^2)}{z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$$

fonksiyonu elde edilir. $\mathbb{E}_{v,c}(z^2)/z$ fonksiyonunun $2^{-1} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğunu göstermek için Yardımcı Önerme 4.3.3'ü kullanacağız. Teoremin varsayımları altında her $k \geq 2$ için $a_{2k-1} \geq 0$ ve $3a_3 \leq 1$ eşitsizlikleri sağlandığı açıktır. Şimdi $\{(2k-1)a_{2k-1}\}$ azalan bir dizi olduğunu göstermeliyiz. Temel matematiksel işlemler ile

$$\begin{aligned}
(2k-1)a_{2k-1} - (2k+1)a_{2k+1} &= \Gamma(v+1)c^{k-1} \left[\frac{2k-1}{\Gamma(v+k)} - \frac{(2k+1)c}{\Gamma(v+k+1)} \right] \\
&= \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k+1)} T(k)
\end{aligned}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

yazılır. Burada $T(k) = (2k-1)(v+k) - (2k+1)c$ şeklindedir. $k^2 \geq 2k-1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T(k) &= 2k^2 + (2v-2c-1)k - v - c \\ &\geq (2v-2c+3)k - v - c - 2 \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin varsayımından $2v-2c+3 \geq 0$ olduğu görülmektedir. Böylece

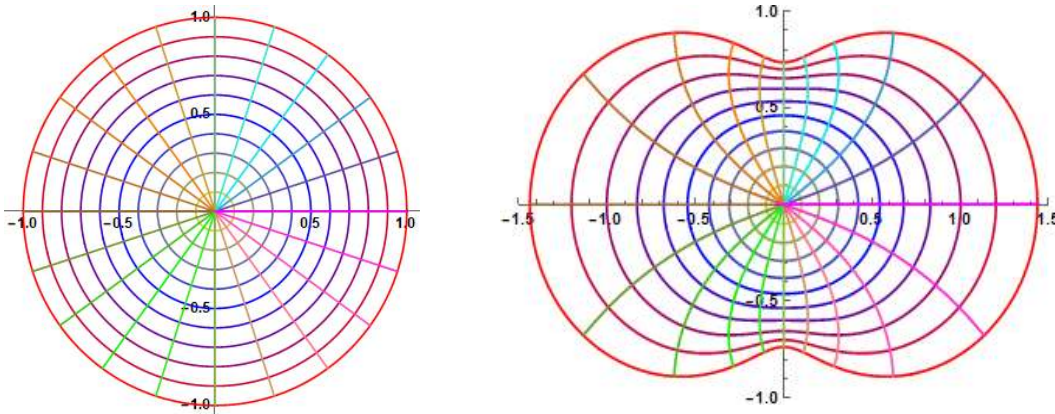
$$T(k) \geq T(1) = v - 3c + 1 \geq 0$$

bulunur. O halde $(2k-1)a_{2k-1} - (2k+1)a_{2k+1}$ negatif değildir. Diğer bir ifadeyle $\{(2k-1)a_{2k-1}\}_{k \geq 2}$ azalan bir dizidir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.3.12. $c=1$ alınırsa Teorem 4.3.11’de verilen koşullara göre $v \geq 2$ olmalıdır. Böylece $v=2$ için elde edilen

$$\frac{\mathbb{E}_{2,1}(z^2)}{z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+k)} z^{2k-1}$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde $2^{-1} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakındır. (Şekil 4.8.)



Şekil 4.8. $\mathcal{U}$ diskinin $\frac{\mathbb{E}_{2,1}(z^2)}{z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+k)} z^{2k-1}$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.3.13. $c > 0$ olsun. Eğer $v > 2c - 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde ünivalent ve yıldızlıdır.

İspat: (4.12) eşitsizliği kullanılırsa

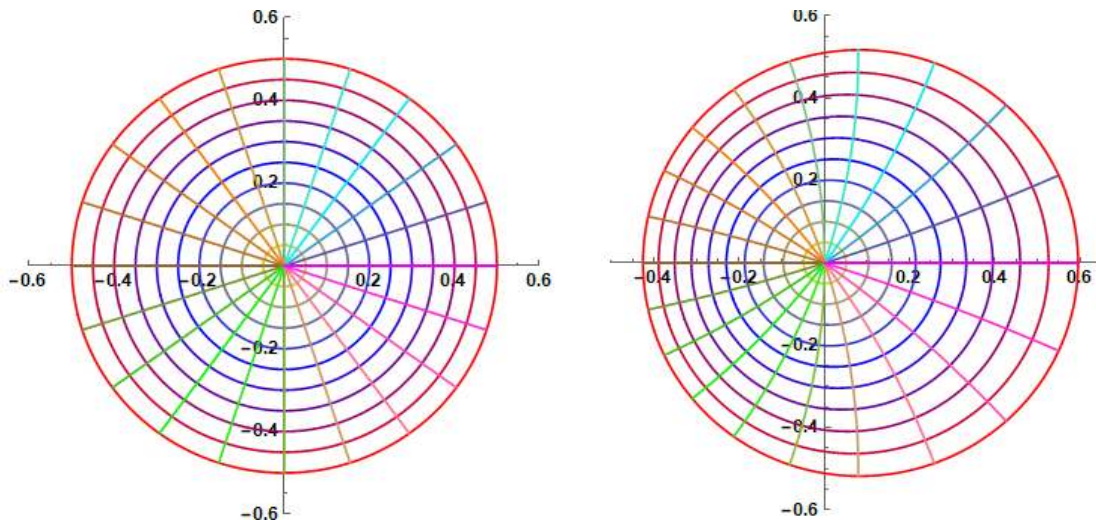
$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbb{E}_{v,c}(z)}{z} - 1 \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} z^{k-1} \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{c}{v+1} \right)^{k-1} \\ &= \frac{c}{v+1-c}, \quad (|c| < |v+1|) \end{aligned}$$

yazılabilir. Yardımcı Önerme 4.3.4'e göre eğer $\frac{c}{v+1-c} < 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$

Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde yıldızlıdır. Bu ise teoremin varsayımına denktir.

Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.3.14. $\mathbb{E}_{2,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+k)} z^k$ fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde ünivalent ve yıldızlıdır. (Şekil 4.9.)



Şekil 4.9. $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinin $\mathbb{E}_{2,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2+k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

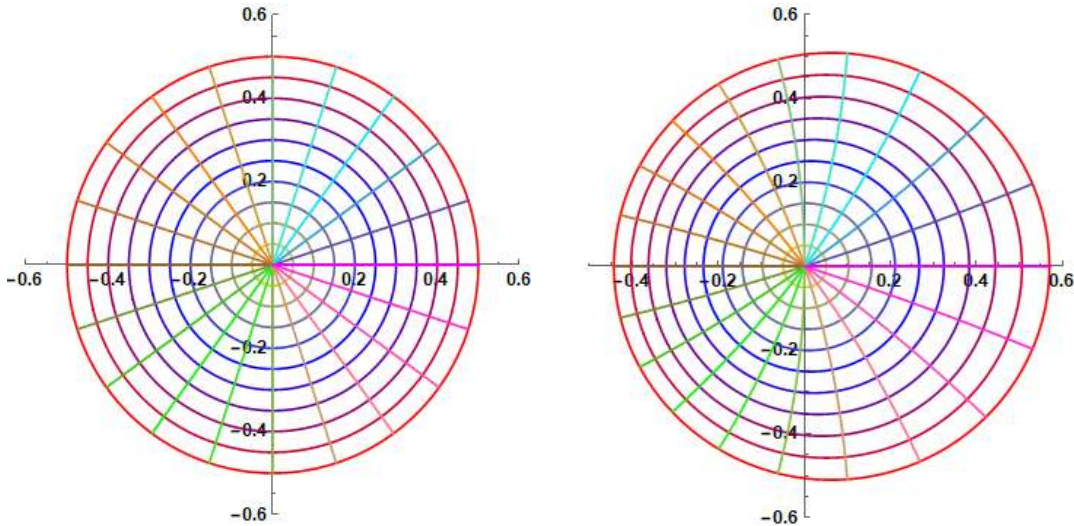
Teorem 4.3.15. $c > 0$ olsun. Eğer $v > (\sqrt{2} + 2)c - 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konvektir.

İspat: (4.12) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}'_{v,c}(z) - 1 \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} z^{k-1} \right| \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\Gamma(v+1)c^{k-1}}{\Gamma(v+k)} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{c}{v+1} \right)^{k-1} \\ &= \frac{2vc + 2c - c^2}{(v+1-c)^2}, \quad (|c| < |v+1|) \end{aligned}$$

yazılabilir. Teoremin varsayımından $\frac{2vc + 2c - c^2}{(v+1-c)^2} < 1$ olur. Yardımcı Önerme 4.3.5'ten normalize edilmiş $\mathbb{E}_{v,c}(z)$ Miller-Ross fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konvektir.

Örnek 4.3.16. $\mathbb{E}_{3,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3+k)} z^k$ fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konvektir. (Şekil 4.10.)



Şekil 4.10. $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinin $\mathbb{E}_{3,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3+k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

4.4. Normalize Edilmiş Rabotnov Fonksiyonun Geometrik Özellikleri

Bu bölümde, Rabotnov fonksiyonunun bazı geometrik özellikleri incelenmiş ve normalize edilmiş Rabotnov fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalentliği, konveksliği, yıldızlılığı ve konvekse yakınlığı için yeterli koşullar elde edilmiştir.

$$R_{\alpha,\beta}(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{\Gamma((k+1)(1+\alpha))} z^{k(1+\alpha)}$$

ile tanımlı Rabotnov fonksiyonu $\mathcal{A}$ sınıfının elemanı değildir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z) &= z^{1/(1+\alpha)} R_{\alpha,\beta}(z^{1/(1+\alpha)}) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} z^k \end{aligned} \quad (4.15)$$

ile normalize edilebilir. Elde edilen bu yeni fonksiyonun $\mathcal{A}$ sınıfında olduğu kolaylıkla görülebilir. Rabotnov fonksiyonunun tanımında değişkenler ile ilgili herhangi bir kısıtlama olmamakla birlikte, bu tezde reel $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ değerleri ve $z \in \mathcal{U}$ alınarak çalışılmıştır.

Teorem 4.4.1. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $\alpha \geq 2\beta - 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır böylece $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalentir.

İspat: (4.15) ile tanımlanan $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu

$$a_1 = 1 \quad \text{ve} \quad a_k = \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)}, \quad (k \geq 2) \quad (4.16)$$

olmak üzere

$$\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonun $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğunu göstermek için Yardımcı Önerme 4.3.1'i kullanacağız. Teoremin varsayımları

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

altında tüm $k \geq 1$ değerleri için $a_k \geq 0$ ve $2a_2 = \frac{\beta \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2(1+\alpha))} \leq 1$ eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır. $\{ka_k\}$ dizisinin pozitif reel sayıların bir azalan dizisi olduğunu göstermeliyiz. $\alpha \geq 0$ için (4.16)'dan

$$\begin{aligned} ka_k - (k+1)a_{k+1} &= \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)(k+1))} \\ &\geq \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} \\ &= \frac{k^2(1+a)\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} - \frac{(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(1+a)\beta^{k-1}}{\Gamma((1+a)k+1)} X(k) \end{aligned}$$

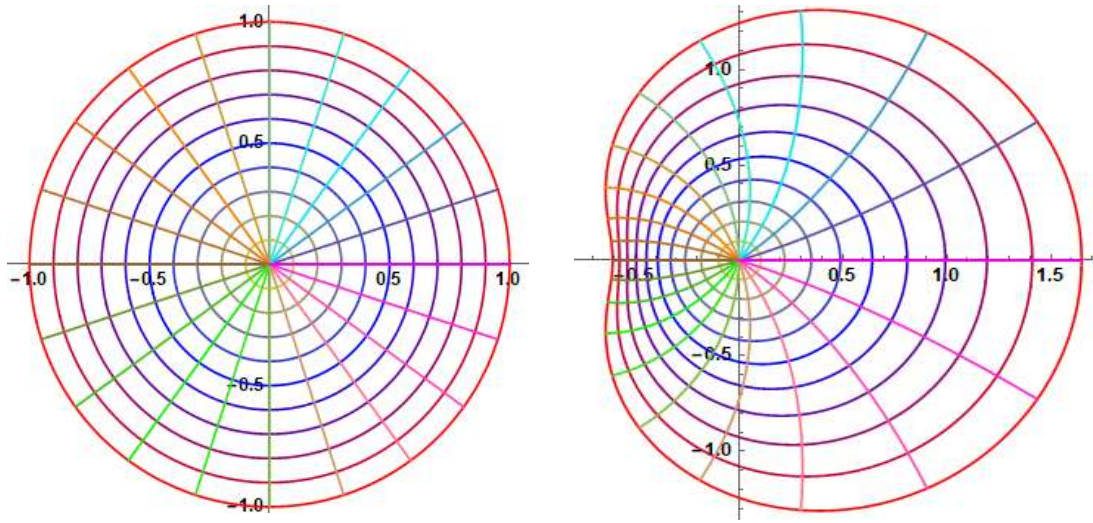
olur. Bu eşitlikte $X(k) = k^2(1+a) - (k+1)\beta$ şeklindedir. Tüm $k \geq 1$ tamsayıları için $k^2 \geq 2k - 1$ olduğundan, teoremin varsayımları altında

$$\begin{aligned} X(k) &= k^2(1+a) - (k+1)\beta \\ &\geq (2a - \beta + 2)k - a - \beta - 1 \\ &\geq a - 2\beta + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{ka_k\}$ bir azalan dizi olur. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.4.2. $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{2}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k-1}\Gamma(k)}$ fonksiyonu $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre

konvekse yakındır ve böylece $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalentir.



Şekil 4.11. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{R}_{0,1/2}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k-1}\Gamma(k)}$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.4.3. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $\alpha \geq 4\beta - 1$ ise, bu durumda normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır.

İspat: a_k katsayıları (4.16) ile verilmek üzere, $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonunu alalım. $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlı olduğunu ispatlamak için Yardımcı Önerme 4.3.2'yi kullanacağız.

$\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olduğundan $\alpha \geq 4\beta - 1$ koşulu $\alpha \geq 2\beta - 1$ olmasını sağlar ve bu Teorem 4.4.1'den $\{ka_k\}$ dizisinin artmayan bir dizi olduğunu gösterir. İspatı tamamlamak için $\{ka_k - (k+1)a_{k+1}\}$ dizisinin de artmayan olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $b_k = ka_k - (k+1)a_{k+1}$ diyelim. a_k katsayısının (4.16) ile verilen tanımdan faydalananarak

$$\begin{aligned} b_k - b_{k+1} &= ka_k - 2(k+1)a_{k+1} + (k+2)a_{k+2} \\ &= \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{2(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)(k+1))} + \frac{(k+2)\beta^{k+1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)(k+2))} \\ &\geq \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{2(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)(k+1))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{2(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} \\
 &= \frac{k^2(1+a)\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} - \frac{2(k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} \\
 &= \frac{\Gamma(1+a)\beta^{k-1}}{\Gamma((1+a)k+1)} Y(k)
 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede $Y(k) = k^2(1+\alpha) - 2(k+1)\beta$ şeklindedir. Tüm $k \geq 1$ değerleri için $Y(k)$ ifadesinin negatif olmadığını göstermeliyiz. $Y(k)$ ifadesinde $k \geq 1$ için $k^2 \geq 2k - 1$ eşitsizliğini kullanırsak

$$Y(k) \geq 2(\alpha - \beta + 1)k - (\alpha + 2\beta + 1)$$

elde ederiz. Teoremin varsayımlarından $2(\alpha - \beta + 1)$ ifadesi negatif değildir ve

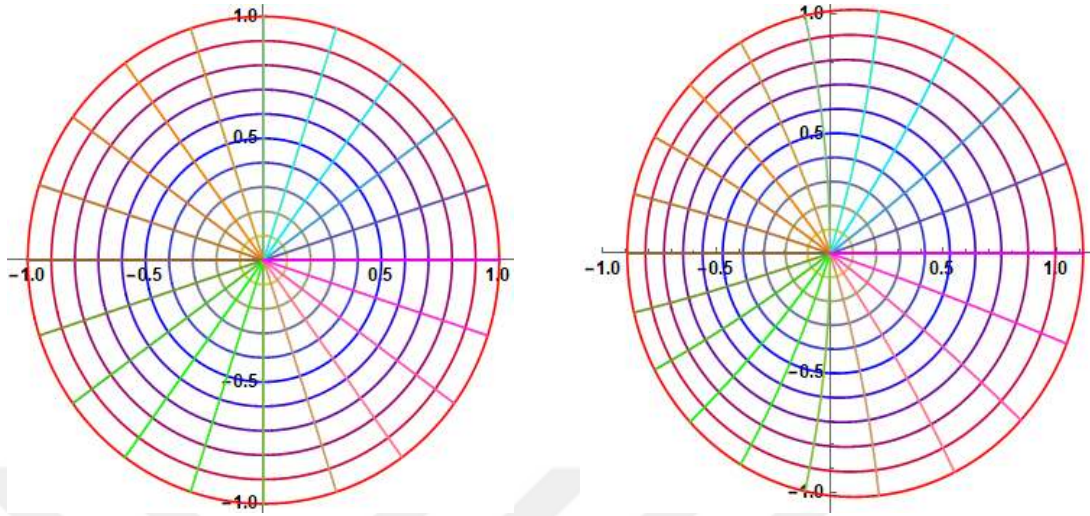
$$Y(k) \geq Y(1) = \alpha - 4\beta + 1 \geq 0$$

olur. Böylece $\{b_k\}$ dizisi ve böylece $\{ka_k - (k+1)a_{k+1}\}$ dizisi artmayandır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.4.4. Teorem 4.4.3'te $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 1/4$ alınırsa, bu durumda

$$\mathbb{R}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{4^{k-1}\Gamma(3k/2)} z^k$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır. (Şekil 4.12.)



Şekil 4.12. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{4^{k-1} \Gamma(3k/2)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

Aşağıdaki yardımcı önerme bir sonraki teoremimizi kanıtlamamızı sağlar.

Yardımcı Önerme 4.4.5. Eğer $k \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \geq 0$ ise, bu durumda

$$(1+\alpha)^{k-1} (k-1)! \Gamma(1+\alpha) \leq \Gamma((1+\alpha)k)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bu yardımcı önermeyi $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tamsayıları için tümevarım yöntemi ile ispatlayalım. $k=1$ durumu açıktır. $k=n$ için eşitsizliğin doğru olduğunu kabul edelim. Diğer bir deyişle

$$(1+\alpha)^{n-1} (n-1)! \Gamma(1+\alpha) \leq \Gamma((1+\alpha)n)$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^n n! \Gamma(1+\alpha) &= (1+\alpha)n (1+\alpha)^{n-1} (n-1)! \Gamma(1+\alpha) \\ &\leq (1+\alpha)n \Gamma((1+\alpha)n) \\ &\leq \Gamma((1+\alpha)(n+1)) \\ &\leq \Gamma((1+\alpha)(n+1)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $k=n+1$ için doğru olduğu anlamına gelir. Bu ispatı tamamlar.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Yardımcı Önerme 4.4.5'ten $k \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} \leq \frac{1}{(1+\alpha)^{k-1}(k-1)!} \quad (4.17)$$

yazılabilir.

Teorem 4.4.6. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. W , Lambert W fonksiyonunu göstermek üzere eğer $\alpha \geq \frac{\beta}{W(2e)-1} - 1$ ise, bu durumda normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu

$\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır.

İspat: $p(z)$ fonksiyonu

$$p(z) = \frac{z\mathbb{R}'_{\alpha,\beta}(z)}{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

şeklinde tanımlansın.

$$\frac{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)}{z} \neq 0, \quad (z \in \mathcal{U})$$

olduğundan p fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $p(0)=1$ olur. Teoremi ispatlamak için $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$, $(z \in \mathcal{U})$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $|p(z)-1| < 1$ $(z \in \mathcal{U})$ ise bu durumda $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Eğer $z \in \mathcal{U}$ ise (4.15) ve (4.17) ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{R}'_{\alpha,\beta}(z) - \frac{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)}{z} \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\beta^{k-1}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha+1)k)} z^{k-1} \right| \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\beta^{k-1}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha+1)k)} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)\beta^{k-1}}{(1+\alpha)^{k-1}(k-1)!} \\ &= \frac{\beta}{1+\alpha} e^{\frac{\beta}{1+\alpha}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)}{z} \right| &= \left| 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha+1)k)} z^{k-1} \right| \\
&> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha+1)k)} \\
&\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1}}{(1+\alpha)^{k-1} (k-1)!} \\
&= 2 - e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.18) ve (4.19) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
|p(z) - 1| &= \left| \frac{z \mathbb{R}'_{\alpha,\beta}(z)}{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)} - 1 \right| \\
&= \left| \frac{\mathbb{R}'_{\alpha,\beta}(z) - \frac{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)}{z}}{\frac{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)}{z}} \right| \\
&< \frac{\frac{\beta}{1+\alpha} e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}}{2 - e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}}
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece eğer $\frac{\beta}{1+\alpha} e^{\frac{\beta}{1+\alpha}} < 2 - e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}$ veya eşdeğer olarak W Lambert W

fonksiyonu olmak üzere $\alpha \geq \frac{\beta}{W(2e)-1} - 1$ ise son ifade 1'den küçüktür. Bu ispatı

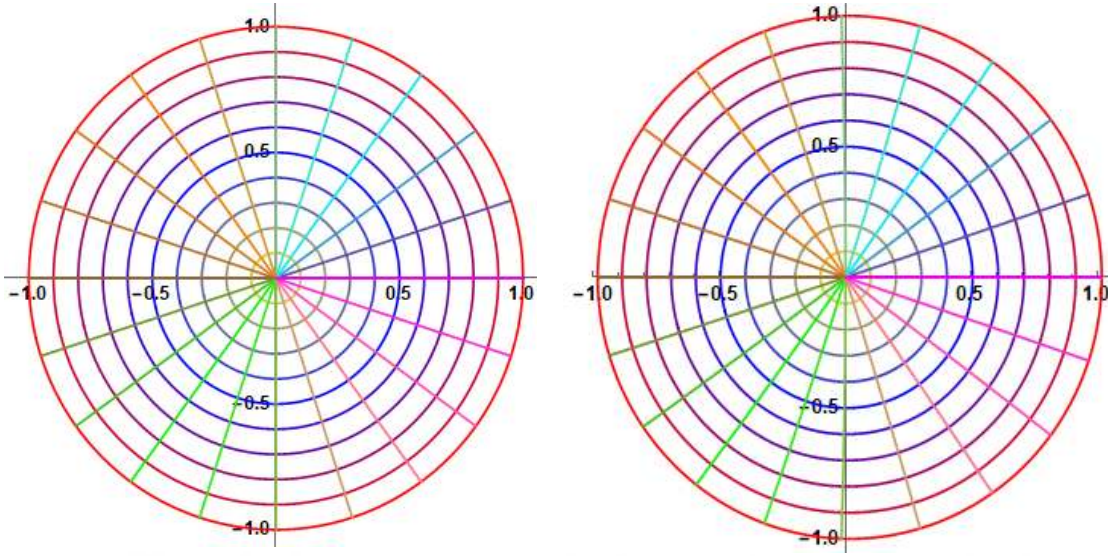
tamamlar.

Örnek 4.4.7. $\beta = 1$ alınırsa, Teorem 4.4.6'ya göre $\alpha \geq \frac{1}{W(2e)-1} - 1 \approx 1,67$ olmalıdır.

$\alpha = 2$ için elde edilen

$$\mathbb{R}_{2,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3k)} z^k$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızlıdır. (Şekil 4.13.)



Şekil 4.13. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{R}_{2,1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.4.8. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $\frac{\beta}{1+\alpha} < 0,199496$ ise normalize edilmiş

$\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde konvektir.

İspat: $p(z)$ fonksiyonu

$$p(z) = 1 + \frac{z\mathbb{R}_{\alpha,\beta}''(z)}{\mathbb{R}_{\alpha,\beta}'(z)}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda p fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $p(0) = 1$ olur. $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde konveks olduğunu göstermek için $|p(z) - 1| < 1$ $z \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermemiz gerekir. $z \in \mathcal{U}$ için (4.15) ve (4.17)'den

$$\begin{aligned} |z\mathbb{R}_{\alpha,\beta}''(z)| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\beta^{k-1}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} z^{k-1} \right| \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\beta^{k-1}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\beta^{k-1}}{(1+\alpha)^{k-1}(k-1)!} \\ &= \frac{\beta(2\alpha + \beta + 2)e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}}{(1+\alpha)^2} \end{aligned} \tag{4.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \left| \mathbb{R}'_{\alpha, \beta}(z) \right| &= \left| 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} z^{k-1} \right| \\
 &> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} \\
 &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \beta^{k-1}}{(1+\alpha)^{k-1} (k-1)!} \\
 &= 2 - \frac{\alpha + \beta + 1}{1+\alpha} e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

(4.20) ve (4.21) ifadelerinden

$$\left| \frac{z \mathbb{R}''_{\alpha, \beta}(z)}{\mathbb{R}'_{\alpha, \beta}(z)} \right| < \frac{\frac{\beta(2\alpha + \beta + 2)}{(1+\alpha)^2} e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}}{2 - \frac{(\alpha + \beta + 1)}{1+\alpha} e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}}$$

elde edilir. Böylece, eğer

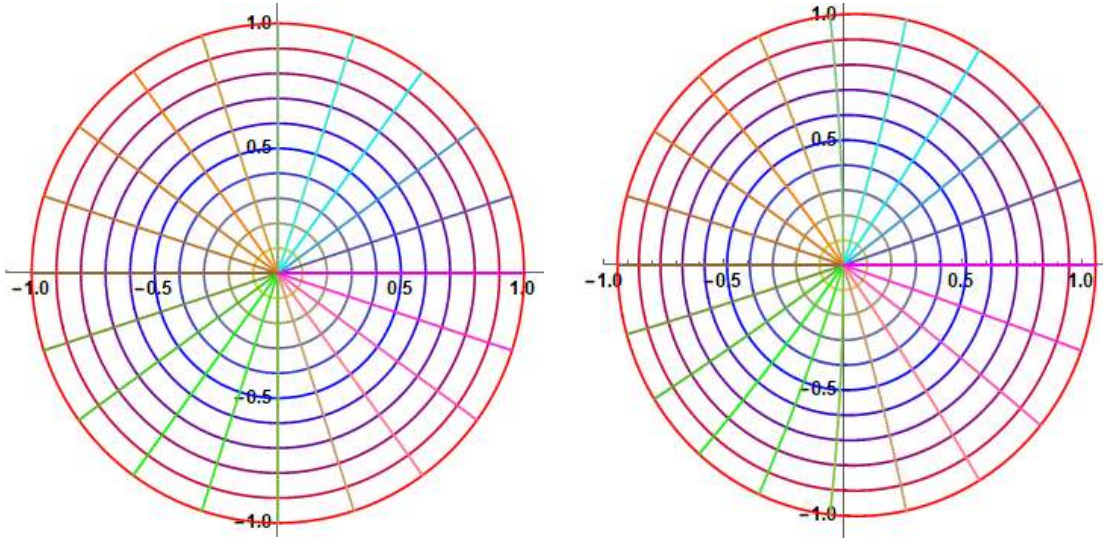
$$\frac{\beta}{1+\alpha} \left(\frac{\left(2 + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}}{2 - \left(1 + \frac{\beta}{1+\alpha} \right) e^{\frac{\beta}{1+\alpha}}} \right) < 1$$

ise veya eşdeğer olarak $\frac{\beta}{1+\alpha} < 0,199496$ ise normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z) \in \mathcal{C}$ olur. Bu da

ispatı tamamlar.

Örnek 4.4.9. $\mathbb{R}_{1, \frac{1}{3}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1} \Gamma(2k)} z^k$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde konvektir.

(Şekil 4.14.)



Şekil 4.14. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{R}_{1, \frac{1}{3}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1} \Gamma(2k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.4.10. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $a \geq 3\beta - 1$ ise bu durumda $\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z^2)/z$ fonksiyonu $2^{-1} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

İspat: $\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z^2)/z$ seri açılımı yapılırsa

$$a_1 = 1 \quad \text{ve} \quad a_{2k-1} = \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)}, \quad k \geq 2$$

olmak üzere

$$\frac{\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z^2)}{z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1}$$

elde edilir. $\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z^2)/z$ fonksiyonunun $2^{-1} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğunu göstermek için Yardımcı Önerme 4.3.3'ü kullanacağız. Teoremin varsayımları altında her $k \geq 2$ için $a_{2k-1} \geq 0$ ve $3a_3 = \frac{3\beta \Gamma(1+a)}{\Gamma(2(1+a))} \leq 1$ eşitsizliklerinin

sağlandığı açıktır. Şimdi $\{(2k-1)a_{2k-1}\}$ azalan bir dizi olduğunu göstermeliyiz. Temel matematiksel işlemler ile

$$\begin{aligned} (2k-1)a_{2k-1} - (2k+1)a_{2k+1} &= \frac{(2k-1)\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{(2k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)(k+1))} \\ &\geq \frac{(2k-1)\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k)} - \frac{(2k+1)\beta^k\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} \\ &\geq \frac{\beta^{k-1}\Gamma(1+a)}{\Gamma((1+a)k+1)} T(k) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $T(k) = 2(1+a)k^2 - (1+\alpha+2\beta)k - \beta$ şeklindedir. $k^2 \geq 2k-1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T(k) &= 2(1+a)k^2 - (1+\alpha+2\beta)k - \beta \\ &\geq (3\alpha-2\beta+3)k - (2\alpha+\beta+2) \end{aligned}$$

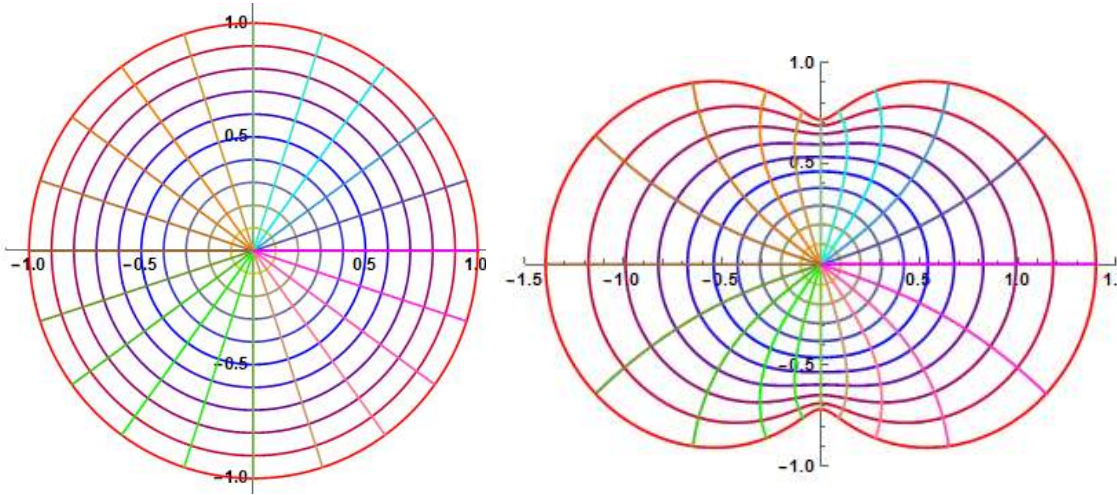
elde edilir. Teoremin varsayımından $3\alpha-2\beta+3 \geq 0$ olduğu görülmektedir. Böylece

$$T(k) \geq T(1) \geq a-3\beta+1 \geq 0$$

bulunur. O halde $\{(2k-1)a_{2k-1}\}_{k \geq 2}$ azalan bir dizidir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.4.11. $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{3}}(z^2)/z = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}\Gamma(k)} z^{2k-1}$ fonksiyonu $2^{-1} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ konveks

fonksiyonuna göre konvekse yakındır. (Şekil 4.15.)



Şekil 4.15. $\mathcal{U}$ diskinin $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{3}}(z^2)/z = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}\Gamma(k)} z^{2k-1}$ fonksiyonu altındaki resmi

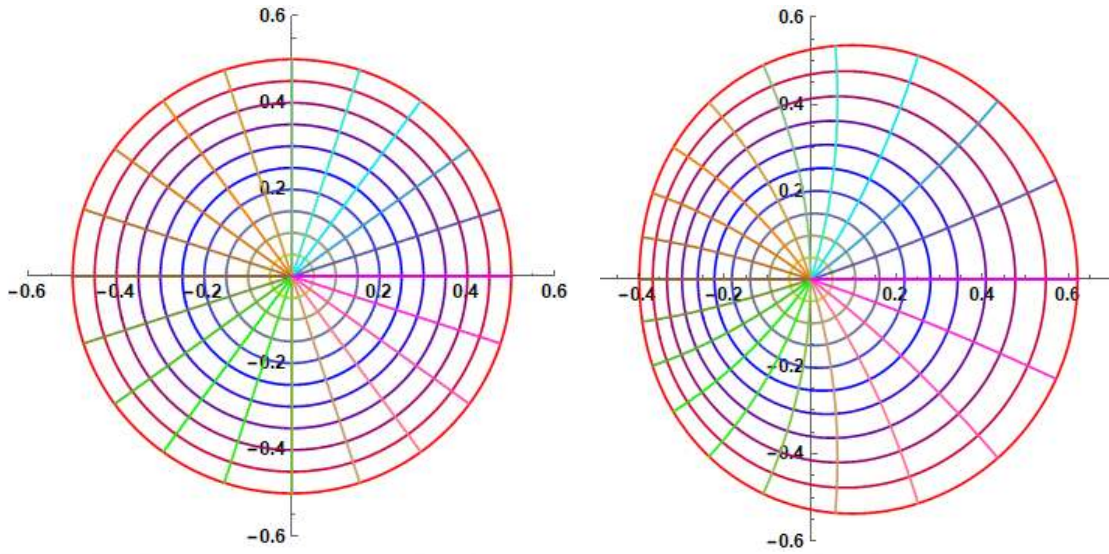
Teorem 4.4.12: $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $\alpha \geq \beta \log_2 e - 1$ ise, bu durumda normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde ünivalent ve yıldızlıdır.

İspat: (4.17) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z)}{z} - 1 \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha+1)k)} z^{k-1} \right| \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1} \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-1}}{(1+\alpha)^{k-1} (k-1)!} \\ &= e^{\frac{\beta}{1+\alpha}} - 1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Yardımcı Önerme 4.3.4'e göre eğer $e^{\frac{\beta}{1+\alpha}} - 1 < 1$ ise normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha, \beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde yıldızlıdır. Bu ise teoremin varsayımına denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 4.4.13. $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}, 1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3k/2)} z^k$ fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde yıldızlıdır (Şekil 4.16.)



Şekil 4.16. $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinin $\mathbb{R}_{\frac{1}{2},1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3k/2)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

Teorem 4.4.14. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ olsun. W , Lambert W fonksiyonunu göstermek üzere eğer $a > \frac{\beta}{W(2e)-1} - 1$ ise, bu durumda normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonu

$\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konvektir.

İspat: (4.17) eşitsizliği kullanılırsa

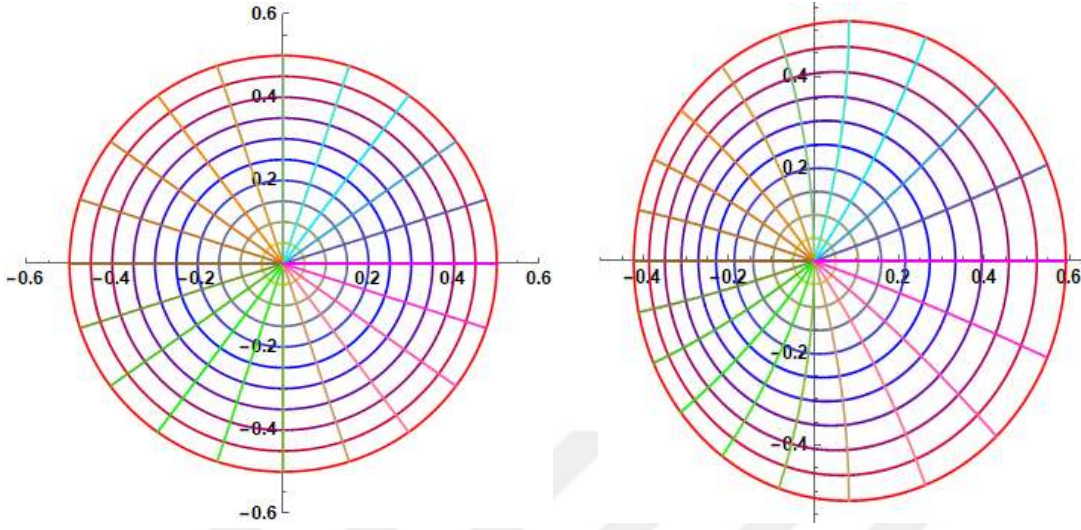
$$\begin{aligned}
 |\mathbb{R}'_{\alpha,\beta}(z) - 1| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} z^{k-1} \right| \\
 &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\beta^{k-1}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((1+\alpha)k)} \\
 &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\beta^{k-1}}{(1+\alpha)^{k-1}(k-1)!} \\
 &= \left(1 + \frac{\beta}{1+\alpha}\right) e^{\frac{\beta}{1+\alpha}} - 1
 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Teoremin varsayımları altında $\left(1 + \frac{\beta}{1+\alpha}\right) e^{\frac{\beta}{1+\alpha}} - 1 < 1$ olur. Yardımcı

Önerme 4.3.5'ten normalize edilmiş $\mathbb{R}_{\alpha,\beta}(z)$ Rabotnov fonksiyonunun $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konveks olduğu elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Örnek 4.4.15. $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{3}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1} \Gamma(k)} z^k$ fonksiyonu $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinde konvektir.



Şekil 4.17. $\mathcal{U}_{1/2}$ diskinin $\mathbb{R}_{0, \frac{1}{3}}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1} \Gamma(k)} z^k$ fonksiyonu altındaki resmi

5. SONUÇLAR

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde ünivalent fonksiyonlar teorisi ve özel fonksiyonlar hakkında tanıtıcı kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ünivalent fonksiyonlar ve önemli alt sınıfları ile ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde bazı özel fonksiyonlar tanımlanmış ve bu fonksiyonların temel özellikleri verilerek geometrik özelliklerini inceleyebilmek için zemin hazırlanmıştır.

Dördüncü Bölümde dört ayrı çalışma yer almaktadır. İlk olarak Dini fonksiyonunun k -düzgün konveks ve k -yıldızlı sınıflarında olması için yeter koşullar incelenmiştir. Daha sonra Genelleştirilmiş Dini Fonksiyonunun yıldızlı ve konveks fonksiyonların bazı alt sınıflarında olmaları için yeterli koşullar elde edilmiştir. Bundan başka, birer özel fonksiyon olan Miller-Ross ve Robatnov fonksiyonları ele alınmış, bu fonksiyonların birim diskte ünivalent, konveks, yıldızlı, $-\log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın ve $2^{-1} \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın olmaları için yeterli koşullar ispatlanmıştır. Ayrıca, $U_{1/2}$ diskinde konveks ve yıldızlı olma koşulları da incelenmiştir.

Miller-Ross ve Rabotnov fonksiyonlarının geometrik özellikleri ile ilgili herhangi bir çalışma bulunmaması sebebiyle, literatüre katkısı olacağı ve bu alanda çalışan araştırmacıların ilgisini çekeceği düşünülmektedir.



6. KAYNAKLAR

Agarwal R.P., Perera K., Pinelas S. 2011. An Introduction to Complex Analysis. Springer, Boston, MA.

Alexander, J.W. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann. of Math.*, 17: 12-22.

Bernoulli, D. 1740. Demonstrationes theorematum suorum de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae, *Comm. Acad. Sci. Petr.* 7: 162–173.

Bessel, F. W. 1824. Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen aus der Bewegung der Sonne entsteht, *Berliner Abh.*: 1–52.

Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.* : 940–955

Carathéodory, C. 1907. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, *Math. Ann.*, 64 : 95-115.

De Branges, L., 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math*, 154: 137–152.

Duren, P.L. 1983. Univalent Functions, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo,

Ece, S. SÜMER EKER, S. and ŞEKER, B. Normalized Dini Functions associated with $\mathcal{S}_k^*$ -Uniformly Convex and $\mathcal{S}_k^*$ -Starlike Functions, *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, in press

Euler, L. 1759. De motu vibratorum tympanorum, *Comm. Acad. Sci. Petr.* 10 : 243–260; *Opera Omnia II*, vol. 10, pp. 344–358.

Fejér L. 1936. Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Acta Litt. Sci. Szeged* 8 :89- 115.

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Goodman, A.W. 1991a. On Uniformly Starlike Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 155 : 364-370.

Goodman, A.W. 1991b. On Uniformly Convex Functions. *Annales Polonici Mathematici* LVI.1.

Grunsky, H. 1934. Zwei Bemerkungen zur konformen. *Abbildung, Jber. Deutsch. Math. Verein.* 43 : 140-143.

Kanas, S. and Wisniowska, A. 1999. Conic regions and k-uniform convexity. *J.Comput. and Math* 105: 327–336.

Kanas, S. And Wisniowska, A. 2000. Conic domains and starlike functions, *Rev.Roumaine Math.Pures Appl.* 45 (4) : 647–657.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Math.J.* 1: 169-185.

Krzyz, J. 1962. The radius of close-to convexity within the family of univalent functions. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 10 : 201-204.

Koebe, P. 1907. Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nach. Ges.Wiss. Gottingen* :191-210.

Loewner, C. 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, *Ber.Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig.* 69: 89-106

MacGregor, TH. 1963. The radius of univalence of certain analytic functions II. *Proc. Amer. Math. Soc.* 14: 521–524.

MacGregor, TH. 1964. A class of univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15: 311–317.

Miller KS., Ross B. 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley and Sons, New York Press,

Mittag-Leffler, G.M. 1903a. Une generalisation de l'integrale de Laplace- Abel. *C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. II)*.137: 537–539.

Mittag-Leffler, G.M. 1903b. Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. *C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. II)*. 137: 554–558.

Mittag-Leffler, G.M. 1904. Sopra la funzione $E_a(x)$. *Rendiconti R. Accad. Lincei (Ser. V)*. 13 : 3–5.

Mittag-Leffler, G.M. 1905. Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene. *Acta Math.* 29: 101–181.

Nevanlinna, R. 1920-1921. Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, Översiktav Finska Vetenskaps, Societetens Förhandlingar, No. 6 63, 1-21.

Noshiro, K. 1934-1935. On the theory of schlicht functions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.* 2: 129-155.

Ozaki S. 1935. On the theory of multivalent functions. *Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A*, Vol. 2, No. 40: 167-188.

Robertson, M.S. 1936. On the theory of univalent functions. *Ann. of Math.* 37: 374–408.

Rabotnov, Yu.N. 1948. Equilibrium of an elastic medium with after effect. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 12 No 1: 81–91. [in Russian], see also, Rabotnov, Y. (2014). Equilibrium of an elastic medium with after-effect. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17(3), 684-696.

Reade, M. O. 1955-56. On close-to-convex univalent functions. *Mich. Math. J.* 3: 59-62.

Study, E. 1913. Konforme Abbildung Einfache-Zusammenhangender Bereiche, B. G. Teubner, Leipzig/Berlin.

6. KAYNAKLAR

Şeker, B., and Sümer Eker, S. 2020. On certain subclasses of starlike and convex functions associated with Pascal distribution series, *Turkish Journal of Mathematics*. 44(6):1982-1989.

Thulasiram, T., Suchithra, K., Sudharsan, T. and Murugusundaramoorthy, G. 2014. Some inclusion results associated with certain subclass of analytic functions involving Hohlov operator, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM* 108(2): 711-720.

Warschawski, S.E. 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. *Trans.Amer.Math.Soc.* 38: 310-340.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Sadettin ECE

ÖĞRENİM DURUMU

2002- 2006 Kızıltepe Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi
2007- 2011 Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
2013-2016 Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans
2017-2021 Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Programı

İŞ TECRÜBELERİ

2014-2015 Kızıltepe Seçkin Kadro Dersanesi Matematik Öğretmeni
2014-2015 Kızıltepe İstiklal Ortaokulu Matematik Öğretmeni
2015-2017 Kızıltepe İpekyolu Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni
2017- Kızıltepe İpekyolu Kız Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni

YABANCI DİL VE DÜZEYİ

İngilizce (Yökdil 61.25)

KURS, SERTİFİKALAR VE DERECELER

- V.Mersin Matematik Olimpiyatı Üniversite Kategorisinde Birincilik Ödülü
- VI.Mersin Matematik Olimpiyatı Üniversite Kategorisinde Birincilik Ödülü
- Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Sürekli Eğitim Merkez Müdürlüğü Robotik Kodlama Eğitimlik Sertifikası





DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Sadettin ECE
ÖĞRENCİ NO	17804502
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2020-2021
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Doktora
TEZ KONUSU	Miller-Ross ve Rabotnov Fonksiyonlarının Bazı Geometrik Özellikleri
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	101
BENZERLİK ORANI	%23
RAPORLAMA TARİHİ	12/08/ 2021
Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 101 sayfalık kısmına ilişkin, 12/08/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından <i>Turnitin</i> adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezin benzerlik oranı % 23 ‘tür. Uygulanan filtrelemeler: ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç ☐ Alıntılar hariç/dâhil ☐ Diğer Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim. Gereğini saygılarımla arz ederim. Prof.Dr. Sevtap SÜMER EKER Tez Danışmanı 16/08/2021 Öğrencinin Adı ve Soyadı: Sadettin ECE Tarih: 16/08/2021 İmza:	
Prof.Dr. Sevtap SÜMER EKER Tez Danışmanı 16/08/2021 Prof.Dr.H.Özlem GÜNEY Anabilim Dalı Başkanı 16/08/2021	

Formdaki bilgiler, bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersizdir.

KGK-FRM-340/01