

MİNİMAL FC(veya CC)-OLMAYAN GRUPLAR

Sevgi ATLIHAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

93495

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

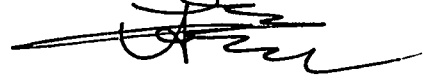
Temmuz 2000

ANKARA

Sevgi ATLIHAN tarafından hazırlanan MİNİMAL FC(veya CC)-OLMAYAN GRUPLAR adlı bu tezin Doktora Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Ahmet ARIKAN

Tez Yöneticisi

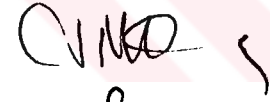


Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Erdoğan ESİN



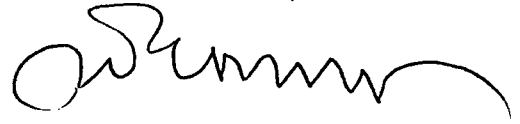
Üye : Doç.Dr.Ziya ARGÜN



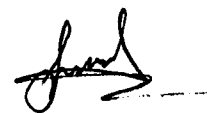
Üye : Yrd.Doç.Dr.Ahmet ARIKAN



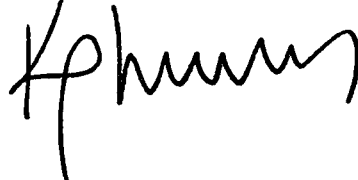
Üye : Yrd.Doç.Dr.Nejat EKMEKÇİ



Üye : Yrd.Doç.Dr.Aynur ARIKAN



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI	4
3. MİNİMAL FC-OLMAYAN VE MİNİMAL CC-OLMAYAN GRUPLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER.....	13
4. MİNİMAL FC (veya CC)-OLMAYAN GRUPLARIN KARAKTERİZASYONU.....	30
5. ALTNORMAL BİLEŞİM ÖZELLİĞİ (SJP), FC VE CC-GRUPLAR	38
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	46

MİNİMAL FC(veya CC)-OLMAYAN GRUPLAR

(Doktora Tezi)

Sevgi ATLIHAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2000

ÖZET

Bu tez çalışmasında lokal dereceli FC (veya CC) -olmayan grupların yapısı incelenmiştir. İlk defa minimal FC-olmayan gruplar ve minimal CC – olmayan gruplar sırasıyla V. V. Belyaev (Bkz.[1]) ve J.Otal-J.M. Peña (Bkz.[11]) tarafından incelenmiştir. M.Kuzucuoğlu ve R.E.Phillips bir mükemmel lokal sonlu minimal FC-olmayan grubun p-grubu olduğunu ispat etmişlerdir.(Bkz.[2])

Bu tezde lokal sonlu minimal FC- olmayan grup ve lokal sonlu minimal CC-olmayan grup arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca lokal sonlu minimal FC (veya CC) – olmayan gruplar üzerine bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak lokal sonlu minimal FC (veya CC)- olmayan grupların altnormal bileşim özelliğine (SJP) sahip olduğu durumlar için sonuçlar verilmiştir.

Bilim Kodu :403.01.01.

Anahtar Kelimeler :FC,CC,Minimal FC-olmayan, Minimal CC-olmayan

Sayfa Adedi :46

Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr. Ahmet ARIKAN

MINIMAL NON FC(OR CC)-GROUPS
(Ph.D. Thesis)
Sevgi ATLIHAN
GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
July 2000

ABSTRACT

In this thesis we consider the locally graded minimal non FC (or CC) – groups. Minimal non-FC groups and minimal non CC- groups are considered for the first time by V.V. Belyaev (see[1]) and J. Otal- J.M. Peña respectively (see[11]). M Kuzucuoglu and R.E. Phillips proved that a perfect locally finite minimal non FC – group must be a p-group (see [2]).

In this thesis the relations between locally finite minimal non CC-group and locally finite minimal non FC-group are considered. Furthermore a characterization was given for locally finite minimal non FC (or CC) – groups. Finally we have given some results related to subnormal join property (SJP) for locally finite minimal non FC (or CC) – groups.

Science code :403.01.01.
Key Words : FC,CC,Minimal non FC, Minimal non CC
Page number :46
Adviser :Assistant Profesör Ahmet ARIKAN

TEŞEKKÜR

Araştırma ve çalışmalarım sırasında bilgi birikimi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren danışmanım Yrd.Doç.Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkür ederim.



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$H \leq G$	H, G nin altgrubu
$H \triangleleft G$	H, G nin normal altgrubu
G/H	G nin H ile bölüm grubu
$\langle x \rangle$	x tarafından üretilen grup
$\langle H, K \rangle$	H ve K tarafından üretilen grup
G'	$[G, G]$
$G^{(n)}$	$[G^{(n-1)}, G]$
$C_G(A)$	A nın G içindeki merkezleyeni
$N_G(A)$	A nın G içindeki normalleyeni
$H \cong K$	H ile K izomorftur
G^0	G nin maksimal, normal, köklü, abeliyan altgrubudur
$\text{Hasc}G$	H, G nin artan altgrubudur
$\text{Hsn}G, H \triangleleft\triangleleft G$	H, G nin altnormal altgrubudur
$ G : H $	H nın G içindeki indeksi
G^n	$\langle g^n : g \in G \text{ ve } n \geq 1 \text{ tamsayı} \rangle$
$o(x)$	x in mertebesi
C_p^∞	Prüfer grup
$B(G)$	G nin Baer grubu
K^G	$\langle g^{-1}kg : g \in G, k \in K \rangle$
$Z(G)$	G nin merkezi
$Z_\alpha(G)$	G nin α -merkezi
$\gamma_i(G)$	$\gamma_1(G) = G, \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$
$s(G:H)$	H nın G içindeki altnormallik indeksi

1. GİRİŞ

G bir grup olsun. Eğer her $x \in G$ için x in G içindeki eşlenikleri sayısı sonlu ise yani $|G:C_G(x)|$ sonlu ise G ye bir FC-grup denir. FC- grupların bir genellemesi CC- gruplardır. Eğer her $x \in G$ için $G/C_G(x^{G_i})$ bir Chernikov grup ise G ye bir CC-grup denir. ϕ bir grup teorik özellik olsun. Eğer G nin her öz altgrubu bir ϕ -grup fakat G bir ϕ -grup değil ise G ye bir minimal ϕ -olmayan grup denir.

V.V Belyaev mükemmel lokal sonlu minimal FC-olmayan grupları incelemiştir ve ya $G/Z(G)$ nin bir basit grup veya G nin bir p-grup olduğunu göstermiştir [1]. M. Kuzucuoğlu ve R.E. Phillips G nin bir p-grubu olması gerektiğini göstermişlerdir [2]. Minimal CC- olmayan gruplarla ilgili olarak B.Hartley, J. Otal ve M.Peña, [3] de aşağıdaki teoremi ispat etmişlerdir:

Teorem: G bir lokal dereceli minimal CC-olmayan grup olsun. O zaman G bir F-mükemmel, mükemmel ve sayılabilir sonsuz lokal sonlu p-grubudur.

Daha sonra F.Leinen ve O.Puglisi, [4] de McLain grubuyla ilgilenmişler ve aşağıdaki teoremi ispat etmişlerdir :

Teorem: Eğer bir mükemmel minimal FC- olmayan p-grup varsa o zaman $M(Q, GF(p))$ McLain grubu bir mükemmel minimal FC- olmayan grup içerir.

A.O Asar ve A.Arıkan [5] de aşağıdaki sonucu ispat etmişlerdir:

Sonuç: G bir lokal nilpotent minimal CC- olmayan p -grup olsun. O zaman G/K bir minimal FC-olmayan grup ve G/K nin her öz normal altgrubu sonlu üslü nilpotent olacak şekilde G nin bir K öz normal altgrubu vardır.

En son gelişmelerden biri olarak F.Leinen [6] da aşağıdaki sonucu ispat etmiştir: (bu sonuca benzer bir sonuç V.V. Belyaev tarafından ispat edilmiştir. [7])

Sonuç: Her lokal dereceli minimal CC-olmayan grup, sonsuz bir küme üzerine finitary permütasyonların bir barely transitive p -grubu olarak etki eden bir bölüm grubuna sahiptir.

Minimal FC- olmayan gruplarla ilgili olarak başka bazı sonuçlarda ispat edilmiştir. Bunlar aşağıda özet olarak verilmiştir.

Teorem ([8]): G bir lokal dereceli grup olsun. O zaman G nin sonlu sayıda eşleniğe sahip FC- olmayan altgruplara sahip olması için gerek ve yeter şart G nin aşağıdaki şartlardan birisini sağlamasıdır.

- (a) G bir FC- grubudur.
- (b) G bir Chernikov gruptur. J, G nin sonlu residual kısmı olmak üzere her $x \in G/C_G(J)$ için J nin sonsuz öz $\langle x \rangle$ -invariant altgrupları yoktur.
- (c) G bir minimal FC- olmayan gruptur. G/H sonlu olacak şekilde G nin bir H mükemmel normal p -altgrubu vardır ve G nin H yı içermeyen her altgrubu bir FC-gruptur.

Teorem([9]): Eğer bir G finitary lokal sonlu barely transitive grubu varsa o zaman G bir minimal FC- olmayan gruptur.

Herhangi bir lokal sonlu minimal FC (veya CC)- olmayan grup olup olmadığı bilinmemektedir.

Bu çalışmada lokal nilpotent mükemmel minimal FC- olmayan ve lokal nilpotent minimal CC-olmayan p-gruplarının yapısı ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Bölüm 3 de minimal FC- olmayan ve minimal CC-olmayan gruplar arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir. Bölüm 4 de minimal FC (veya CC)- olmayan grupların bir karakterizasyonu verilmiştir. Bölüm 5 de ise CC, FC ve minimal CC-olmayan gruplar için altnormal bileşim özelliği (SJP) incelenmiştir.



2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

Tanım 2.1: G bir grup olsun. G nin aşikâr olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa G ye lokal dereceli grup denir. Yani eğer $1 \neq X$, G nin bir sonlu üreteçli altgrubu ise $|X:K| < \infty$ olacak şekilde X in bir K öz altgrubu vardır.

Tanım 2.2: Her elemanın mertebesi sonlu olan gruba torsiyon (periyodik) grup denir.

Tanım 2.3: G bir grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif n tamsayısı için

$$x = y^n$$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye köklü (radicable) grup denir. G bir toplamsal grup olsun. Her $x \in G$ ve her pozitif n tamsayısı için

$$x = ny$$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye bölümlü (divisible) grup denir.

Tanım 2.4: G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$$

elemanına x_1 ile x_2 nin komütatörü denir. Genel olarak $n \geq 2$ ağırlıklı basit bir komütatör indüksiyon yardımıyla

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], \dots, x_n]$$

X_1, X_2 G nin boştan farklı iki altkümesi olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör altgrubu

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G] = G'$ komütatör grubuna G nin derived altgrubu denir. Daha genel olarak $n \geq 2$ için

$$[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

ve $[X_1] = \langle X_1 \rangle$ dir.

Eğer $G = G'$ ise G ye bir mükemmel (perfect) grup denir.

Tanım 2.5 : G bir grup olsun.

$$Z(G) = \{z \in G : \text{her } g \in G \text{ için } zg = gz \text{ dir}\}$$

kümesine G nin merkezi denir. $Z(G)$, G nin bir normal alt grubudur.

G bir grup ve $x \in G$ olsun.

$$C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}$$

kümesine x in G içindeki merkezleyeni denir. $C_G(x)$, G nin bir alt grubudur.

Tanım 2.6: Sonlu indeksli bir öz alt grubu olmayan gruba F -mükemmel (F -perfect) grup denir.

Tanım 2.7: G bir grup olsun. Eğer $S = \{1 = G_0, G_1, \dots, G_n = G\}$, G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \triangleleft G_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ise S ye G nin bir serisi denir ve

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

şeklinde gösterilir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına serinin faktörleri ve G_i gruplarına serinin terimleri denir. Eğer S nin bütün terimleri farklı ise n ye serinin uzunluğu denir.

H , G nin bir altgrubu olsun. Ω tam sıralı indeks kümesi olmak üzere G nin altgruplarının $\{\wedge_{\sigma}, V_{\sigma} : \sigma \in \Omega\}$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa G de serialdır denir.

- i) her $\sigma \in \Omega$ için $H \leq V_{\sigma} \triangleleft \wedge_{\sigma}$
- ii) eğer $\sigma < t$ ise $\wedge_{\sigma} \leq V_t$
- iii) $G/H = \bigcup_{\sigma \in \Omega} (\wedge_{\sigma} / V_{\sigma})$

Burada $\{\wedge_{\sigma}, V_{\sigma} : \sigma \in \Omega\}$ kümesine H ve G arasında bir genelleştirilmiş seri denir. $\wedge_{\sigma} / V_{\sigma}$ bölüm grubuna serinin faktörleri denir. H , bir G grubunda serial ve Ω indeks kümesi iyi sıralıysa H ya G nin artan altgrubu denir. Bu durumda Ω , $\{\alpha : \alpha < \gamma\}$ ordinallerinin kümesi olarak alınabilir. Böylece serial altgruplarla ilgili bazı sonuçlardan dolayı, α limit ordinal olmak üzere

$V_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}$ olacak şekilde bir seri,

$$H = V_0 \triangleleft V_1 \triangleleft \dots \triangleleft V_{\alpha} \triangleleft V_{\alpha+1} \triangleleft \dots \triangleleft V_{\gamma} = G$$

şeklinde yazılabilir ve ascending (artan) seri denir. Benzer şekilde Ω ters yönde iyi sıralı olmak üzere G nin H azalan altgrubu tanımlanabilir. Bu takdirde seri $\bigwedge_{\beta < \alpha} V_{\beta}$ olmak üzere

$$H = \bigwedge_{\gamma} \dots \triangleleft \bigwedge_{\alpha+1} \triangleleft \bigwedge_{\alpha} \dots \triangleleft \bigwedge_1 \triangleleft \bigwedge_0 = G$$

şeklinde yazılabilir ve seriye descending (azalan) seri denir.

Tanım 2.8 : G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \triangleleft H_{r-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, \dots, H_r$ altgrupları varsa H, G de altnormaldir denir ve $H \triangleleft G$ veya H sn G ile gösterilir. H dan G ye bu şekilde uzanan serilerinin en kısasının uzunluğuna H nın G içindeki altnormallik indeksi denir ve $s(G:H)$ ile gösterilir.

G bir grup ve X , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun $X^{G,0} = G$ ve her $i \geq 0$ için $X^{X^{G,i}} = X^{G,i+1}$ olarak tanımlansın. O zaman G nin

$$\dots X^{G,2} \triangleleft X^{G,1} \triangleleft X^{G,0} = G$$

serisi elde edilir. Bu seriye X in G içindeki normal kapanış serisi denir. H, G nin bir altgrubu ve her $i \geq 0$ için $H_i = H^{G,i}$ olsun. Eğer $H \text{ sn } G$ ve $s(G:H) = n$ ise o zaman

$$H = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

dir. Böylece H nin G içindeki altnormallik indeksi H nin G içindeki normal kapanış serisinin uzunluğuna eşittir.

Tanım 2.9: G bir grup olsun, $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ G nin bir serisi olsun. Eğer her $0 \leq i \leq n$ için G_{i+1}/G_i abeliyan ise G ye çözülebilir grup denir. G nin bu şekildeki serilerinin en kisasının uzunluğuna G nin komütatör uzunluğu denir.

Tanım 2.10: G bir grup olsun. G nin artan bir $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$ serisi için $G_\alpha \triangleleft G$ ($\alpha \leq \beta$) ve her $\alpha \leq \beta$ için $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$ ise bu seriye G nin artan merkez serisi denir. Eğer bir grubun artan merkez serisi varsa gruba hipermerkez grup denir.

Eğer G nin sonlu artan merkez serisi varsa G ye nilpotent grup denir. G nin sonlu artan merkez serilerinin en kisasının uzunluğuna G nin nilpotentlik sınıfı denir.

Tanım 2.11: G bir grup, $G^{(0)} = G$ olsun. Her $i > 1$ için $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$\dots \leq G^{(2)} \leq G^{(1)} \leq G$$

dir. Bu seriye G nin komütatör serisi denir. $G^{(1)} = G'$ ve $G^{(2)} = G''$ ile gösterilir. G bir çözülebilir grup ise bir $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ dir. Bu şekildeki en küçük $n \geq 0$ tam sayısı G nin komütatör uzunluğuna eşittir.

Tanım 2.12: G bir grup ve $x, y \in G$ için $x^y = y^{-1}xy$ elemamına x in y ile eşleniği (konjügesi) denir,

X ve Y , G nin boştan farklı iki altkütmesi olsun. X in Y ile eşleniği olan alt grup

$$X^Y = \langle x^y : x \in X \text{ ve } y \in Y \rangle$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.13: p bir asal sayı olsun. G bir grup ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $H_i \triangleleft G$ olmak üzere

$$..H_3 \leq H_2 \leq H_1$$

şeklinde oluşturulan seriler her zaman sonlu adımda sona eriyorsa yani bir $n \geq 1$ için $H_n = H_{n+1} = \dots$ ise G ye normal altgrupları üzerinde minimum şartını ya da min i sağlıyor denir.

Tanım 2.14: $G = \langle c_i : c_i^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1, 2, 3, \dots \rangle$ şeklinde tanımlı G grubuna prüfer grup veya C_{p^∞} tipinde bir grup denir.

C_{p^∞} tipinde bir grup, sonsuz ve her öz altgrubu bir devirli p -grubudur.

Tanım 2.15: G bir grup olsun. Eğer G minimum şartını sağlayan bir abeliyan grubun sonlu genişlemesi ise o zaman G ye bir Chernikov grup denir.

Minimum şartını sağlayan bir abeliyan grup sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf olduğundan, bir Chernikov grup, sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf bir altgrubunun sonlu genişlemesi şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 2.16: G bir grup ve her $x \in G$ için $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ Chernikov ise G ye bir CC-grup denir.

Teorem 2.17: Bir Chernikov grubun otomorfizma grubu da Chernikovdur.

İspat: [8]Teorem 3.29

Teorem 2.18: G bir Chernikov grup ve A , G nin otomorfizmalarının bir periyodik grubu olsun. O zaman $A/A \cap \text{Inn}(G)$ sonludur.

İspat: [8]Teorem 3.29.2

Sonuç 2.19: G bir Chernikov grup ve $G/Z(G)$ sonlu ise o zaman G nin otomorfizmalarının periyodik altgrubunda sonludur.

Teorem 2.20: (Polovickii) G bir grup olsun. O zaman aşağıdaki şartlar birbirine denktir.

- i) $[G, x]$ Chernikov ve $G/C_G([G, x])$ periyodiktir.
- ii) x^G Chernikov bir grubun devirli bir grupla genişlemesi ve $G/C_G(\langle x \rangle^G)$ periyodiktir.
- iii) G bir CC-gruptur.

İspat: [8] Teorem 4.36

Teorem 2.21: G bir grup, $A \leq \text{Sn}G$ ve $B \leq \text{Sn}G$ olsun, B/B' periyodik, A bir periyodik, köklü abeliyan grup ve B nilpotent ise o zaman $[A, B] = 1$ dir.

İspat: [10] Lemma 1.5

Teorem 2.22: G bir CC-grup ise $G/Z(G)$ residually Chernikovdur.

Tanım 2.23: G bir grup olsun. G nin bütün abeliyan altnormal altgruplarının ürettiği normal altgrubuna G nin Baer grubu denir ve $B(G)$ ile gösterilir. $G = B(G)$ ise G ye bir Baer grubu denir. Eğer $G = B(G)$ ise G nin her sonlu üreteçli altgrubu G de altnormaldir.

Tanım 2.24 G bir grup ve Ω boştan farklı bir küme olsun

$$\theta: \Omega \times G \rightarrow \Omega$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha^x$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

Eğer

i) Her $x_1, x_2 \in G$ ve her $\alpha \in \Omega$ için

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

ii) Her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha^1 = \alpha$

ise o zaman θ ya G nin Ω üzerindeki bir etkisi denir.

Burada $\alpha \in \Omega$ olmak üzere

$$\alpha^G = \{\alpha^x : x \in G\}$$

kümesine α nın G altındaki orbiti denir. Eğer G tek orbite sahip ise yani her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha^G = \Omega$ ise G, Ω üzerine transitively (geçişli) etki eder denir.

G, Ω nın permütasyonlarının bir grubu ve G, Ω üzerine transitively etki etsin. Eğer G nin her öz altgrubunun orbitleri sonlu ise G ye barely transitive grup denir. Bu tanıma denk olan şu tanımı verebiliriz: G nin her K öz altgrubu için

$$|K : K \cap H| < \infty \text{ ve } \bigcap_{g \in G} H^g = 1$$

olacak şekilde G nin bir H altgrubu varsa G ye bir barely transitive grup denir. Burada H ya G nin sabit bırakanı denir.

G, Ω nın permütasyonlarının bir grubu olsun. Eğer her $g \in G$ için $\{\omega \in \Omega : \omega^g \neq \omega\}$ bir sonlu küme ise G ye bir finitary grup denir.

Tanım 2.25: G bir grup olsun. G nin herhangi iki altnormal altgrubunun bileşimi yine G de altnormal ise G ye altnormal bileşim özelliğini (subnormal join property SJP) sağlıyor denir.

3. MİNİMAL FC-OLMAYAN VE MİNİMAL CC-OLMAYAN GRUPLAR ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

Bu bölümde lokal nilpotent minimal FC (veya CC)-olmayan gruplar için bazı önemli özellikler elde edilmiş ve minimal CC-olmayan grupların hangi şartlarda minimal FC- olmayan grup olduğuna dair sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.1: G bir lokal nilpotent minimal CC- olmayan p -grup olsun. O zaman G bir minimal FC-olmayan grup olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birini sağlamasıdır.

- (a) G bir Baer grubudur.
- (b) G nin her öz alt grubunun hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ dur.
- (c) her $x \in G$ için $G^\circ \langle x \rangle$ bir FC- gruptur.

İspat:

(a) G bir minimal FC-olmayan grup olsun. O zaman G nin bir Baer grubu olduğu açıktır.

Karşıt olarak G bir Baer grubu olsun. N , G nin bir öz alt grubu olsun. O zaman N bir CC-gruptur. $x \in N$ ve $A = \langle x \rangle^N$ olsun. Böylece A/A' sonlu üslü ve Chernikov gruptur. Yani A/A' sonludur. [8] Lemma 2.22 den dolayı her $i \geq 1$ için

$$A = \gamma_i(A) F$$

olacak şekilde N nin bir F sonlu alt grubu vardır. [10] Lemma 1.5 den dolayı $A^\circ \leq Z(A)$ dir ve dolayısıyla $A/Z(A)$ bir sonlu p -grubudur. Böylece A nilpotenttir. Bundan dolayı A bir sonlu gruptur ve dolayısıyla N bir FC-gruptur.

(b) G bir minimal FC- olmayan grup olsun. O zaman [5] Teorem 3 den dolayı G nin her öz altgrubunun hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ dur.

Karşıt olarak G nin her öz altgrubunun hipermerkez uzunluğu $\leq \omega$ olsun. $x \in G$ olsun. O zaman kabulden dolayı $x \in Z_i(\langle x \rangle^G)$ olacak şekilde bir $i \geq 1$ vardır. Böylece $\langle x \rangle$ sn G dir. Yani G bir Baer grubudur. (a) dan dolayı G bir minimal olmayan FC- gruptur.

(c) G bir minimal olmayan FC- grup olsun. O zaman her $x \in G$ için $G^\circ \langle x \rangle$ nin bir FC- grup olduğu açıktır.

Karşıt olarak her $x \in G$ için $G^\circ \langle x \rangle$ bir FC-grup olsun. O zaman $A = \langle x \rangle^{(G^\circ \langle x \rangle)}$ bir nilpotent gruptur. Böylece $\langle x \rangle$ sn A dır. [5] Teorem 1 den dolayı G/G° bir minimal olmayan FC-grup olduğundan (a) dan dolayı bir Baer grubudur. Böylece G bir Baer grubudur. (a) dan dolayı G bir minimal olmayan FC- gruptur.

Teorem 3.2: G bir lokal nilpotent minimal CC-olmayan grup ve B, G nin Baer radikali olsun. O zaman,

(a) Eğer B, G nin bir öz altgrubu ise o zaman B bir FC- gruptur ve G nin bütün altnormal FC-altgruplarını içerir. Özel olarak N, G nin bir öz altnormal altgrubu ise $Z_\omega(N)$, B tarafından içerilir,

(b) her $x \in G$ için $[C_G(x)]^G = G$ dir.

İspat:

(a) B, G nin bir öz altgrubu olsun. O zaman B, CC-p-grup olduğundan $\langle x \rangle^B / (\langle x \rangle^B)'$ sonludur. [8] Lemma 2.22 den dolayı her $i \geq 1$ için

$$\langle x \rangle^B = \gamma_i(\langle x \rangle^B) F$$

olacak şekilde B nin bir F sonlu altgrubu vardır. [10] Lemma 1.5 den dolayı $(\langle x \rangle^B)^o \leq Z(\langle x \rangle^B)$ dir ve dolayısıyla $\langle x \rangle^B / Z(\langle x \rangle^B)$ sonlu p-grubudur. Böylece $\langle x \rangle^B$ nilpotenttir. Bundan dolayı $\langle x \rangle^B$ sonludur ve dolayısıyla B bir FC- gruptur.

M, G nin bir öz altnormal altgrubu olsun. O zaman $FC(M) \leq M \cap B$ olduğu açıktır. Şimdi $x \in M \cap B$ olsun. B, bir FC-grup olduğundan

$$|M \cap B : C_{M \cap B}(x)| < \infty$$

dur. Yani $M \cap B$ bir FC-gruptur. [11] Lemma 4.3 den dolayı $M \cap B \leq FC(M)$ dir. Böylece $M \cap B = FC(M)$ dir. Eğer M bir FC-grup ise $M \cap B = M$ olduğundan M, B nin bir altgrubudur. $x \in Z_\omega(N)$ olsun. $Z_\omega(N) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i(N)$ olduğundan

$x \in Z_i(N)$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. [12] Teorem 2.3 den dolayı $Z_i(N)$ bir FC- gruptur. Böylece $Z_i(N)$, B tarafından içerilir. Yani $x \in B$ dir.

(b) $x \in G \setminus Z(G)$ ve $C = C_G(x)$ olsun. Kabul edelim ki $C^G \neq G$ ve $\bar{G} = G/C^G$ olsun. N, G nin bir öz normal altgrubu ve $M = \langle x \rangle^G \cap N$ olsun. M, G nin öz altgrubu olduğundan $M/C_M(\langle x \rangle^M)$ bir Chernikov gruptur. $C_M(\langle x \rangle^M) \leq C$ olduğundan $\bar{M}$ bir Chernikov gruptur ve dolayısıyla $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{M})$ bir Chernikov gruptur. Fakat $\bar{G}$ bir minimal CC-olmayan grup olduğundan $\bar{G} = C_{\bar{G}}(\bar{M})$ ve dolayısıyla $\bar{N}$ abeliyandır. $\bar{G}$, öz normal

altgruplarının birleşimi olarak yazılabildiğinden $\overline{G}$ çözülebilir olur ki bu G nin mükemmelliği ile çelişir. Bundan dolayı her $x \in G$ için $C^G = G$ dir.

Teorem 3.3: G bir lokal nilpotent minimal CC- olmayan p -grup olsun O zaman G ,

(a) minimal çözülebilir – olmayan grup

(b) minimal B_n – olmayan grup

olamaz.

İspat:

(a) [3] Teorem den dolayı G mükemmel olduğundan $Z(G) = 1$ alabiliriz. $1 \neq x \in G$ olsun. O zaman $C_G(x)$, G nin bir öz alt grubudur. $C = C_G(x)$ olsun. Mümkünse G bir minimal çözülebilir - olmayan grup olsun. O zaman C bir çözülebilir gruptur. C nin çözülebilir uzunluğu $n \geq 1$ ve K , G nin bir öz normal alt grubu olmak üzere $M = K \langle x \rangle^G$ olsun. M , G nin bir öz normal alt grubu olduğundan $M/C_M(x^M)$ Chernikovdur. $C_M(\langle x \rangle^M) \leq C_M(\langle x \rangle) \leq C$ olduğundan $C_M(\langle x \rangle^M)$ nin çözülebilir uzunluğu en fazla n dir. [12] Sonuç 4.3 ard arda uygulanırsa $M^{(n)}/[C_M(\langle x \rangle^M)]^{(n)}$ Chernikovdur. Yani $M^{(n)}$ Chernikovdur. [8] Teorem 3.29 dan dolayı $G/C_G(M^{(n)})$ Chernikovdur. Fakat G bir minimal CC – olmayan grup olduğundan $G = C_G(M^{(n)})$ dir. Buradan $M^{(n)} \leq Z(G) = 1$ dir. Dolayısıyla $K^{(n)} = 1$ dir. Yani G nin her öz normal alt grubunun çözülebilir uzunluğu en fazla n dir. Fakat G öz normal alt gruplarının birleşimi olarak yazılabildiğinden G çözülebilir olur ki bu G nin mükemmel olması ile çelişir. Bundan dolayı G minimal çözülebilir – olmayan grup olamaz.

(b) $\bar{G} = G/G^\circ$ olsun. [5] Teorem 1 den dolayı $\bar{G}$ bir minimal olmayan FC-gruptur. Böylece $\bar{G}$ bir Baer gruptur.

Mümkünse G bir minimal B_n - olmayan grup olsun. H , G nin bir öz altgrubu olsun. O zaman [10] Lemma 2.4.1 den dolayı $\bar{H}$ nilpotenttir. Dolayısıyla $\bar{G}$ nin her öz altgrubu nilpotenttir. Fakat bir mükemmel minimal olmayan FC-p-grup minimal CC- olmayan p - grup olduğundan bu (a) ile çelişir.

Yukarıdaki teoremin (a) sonucu [13] Sonuç 1 den direkt olarak da elde edilebilir. Burada biz bu sonucun bir elemanter ispatını veriyoruz.

Lemma 3.4: G bir periyodik CC-grup olsun. O zaman,

(a) $G^{(n)}$ Chernikov olacak şekilde bir $n \geq 1$ olması için gerek ve yeter şart G nin bir çözülebilir-by- Chernikov grup olmasıdır.

(b) Eğer $\gamma_n(G)$ Chernikov olacak şekilde bir $n \geq 1$ var ise o zaman G bir NC-gruptur.

İspat:

(a) G bir çözülebilir- by- Chernikov grup olsun. O zaman G/T Chernikov olacak şekilde G nin bir çözülebilir normal T altgrubu vardır. T nin çözülebilir uzunluğu $n \geq 1$ olsun. [12] Sonuç 4.3 den dolayı $G^{(n)}/T^{(n)}$ Chernikovdur. Yani $G^{(n)}$ Chernikovdur.

Karşıt olarak $G^{(n)}$ Chernikov olacak şekilde bir $n \geq 1$ vardır. G periyodik CC - grup olduğundan [14] Lemma 2.4.1 den dolayı $G/Z(G)$ residually

Chernikovdur. $G^{(n)} \leq Z(G)/Z(G)$, $G/Z(G)$ nin bir normal Chernikov altgrubu olduğundan [12] Lemma 3.1 den dolayı

$$[G^{(n)} \leq Z(G)/Z(G)] \cap [K/Z(G)] = 1$$

ve G/K Chernikov olacak şekilde $G/Z(G)$ nin bir normal $K/Z(G)$ altgrubu vardır.

$$[G^{(n)} \leq Z(G)/Z(G)] \cap [K^{(n)} \leq Z(G)/Z(G)] = 1 = K^{(n)} \leq Z(G)/Z(G)$$

dir. Böylece $K^{(n)} \leq Z(G)$ dir. Yani K çözülebilirdir. Aynı zamanda G/K Chernikov olduğundan G bir çözülebilir- by - Chernikov gruptur.

(b) G bir periyodik CC-grup olduğundan [14] Lemma 2.41 den dolayı $G/Z(G)$ residually Chernikovdur. [12] Lemma 3.1 den dolayı

$$[\gamma_n(G) \leq Z(G)/Z(G)] \cap [G/Z(G)] = 1$$

ve G/K Chernikov olacak şekilde $G/Z(G)$ nin bir normal $K/Z(G)$ altgrubu vardır. Böylece

$$\gamma_n(G) \leq Z(G)/Z(G) \cap \gamma_n(K) \leq Z(G)/Z(G) = 1$$

dir. Yani $\gamma_n(K) \leq Z(G)$ dir. Buradan K nilpotenttir. Aynı zamanda G/K Chernikov olduğundan G bir NC-gruptur.

Yukarıdaki Lemma 3.4(b) daha genel bir şekilde [15] de görülebilir. Biz burada ihtiyacımız olan kısmı oldukça farklı bir şekilde ispat ediyoruz.

Teorem 3.5: G bir lokal nilpotent p -grup ve G nin her öz altgrubu CC-grup olsun.

(a) Eğer G nin her N öz altgrubu için $N^{(n)}$ Chernikov olacak şekilde bir $n \geq 1$ varsa o zaman G bir CC-gruptur.

(b) Eğer G nin her N öz altgrubu için $\gamma_n(N)$ Chernikov olacak şekilde bir $n \geq 1$ varsa o zaman G bir CC-gruptur.

İspat:

(a) Mümkünse G bir CC-grup olmasın. O zaman hipotezden dolayı G bir minimal olmayan CC-gruptur. N , G nin bir öz altgrubu olsun. O zaman hipotezden dolayı N bir CC- p -grup ve bir $n \geq 1$ için $N^{(n)}$ bir Chernikov gruptur. Böylece Lemma 3.4 (a) dan dolayı N bir çözülebilir gruptur. Dolayısıyla G nin her öz altgrubu çözülebilir olur ki bu Teorem 3.3(a) ile çelişir. Bundan dolayı G bir CC-gruptur.

(b) Mümkünse G , bir CC-grup olmasın. O zaman hipotezden dolayı G bir minimal CC-olmayan gruptur. N , G nin bir öz altgrubu olsun. O zaman hipotezden dolayı N bir CC- p -grup ve bir $n \geq 1$ için $\gamma_n(N)$ bir Chernikov gruptur. Böylece Lemma 3.4(b) den dolayı N bir çözülebilir gruptur. Dolayısıyla G nin her öz altgrubu çözülebilir olur ki bu Teorem 3.3(a) ile çelişir. Bundan dolayı G bir CC-gruptur.

Lemma 3.6: G bir lokal nilpotent minimal CC- olmayan p -grup olsun. Eğer G nin her altnormal altgrubu nilpotent ise o zaman G bir minimal FC- olmayan gruptur.

İspat: Mümkünse G bir minimal FC- olmayan grup olmasın. O zaman B , G nin Baer radikali olmak üzere bir $x \in G \setminus B$ vardır. G öz normal altgruplarının birleşimi olarak yazılabildiğinden $\langle x \rangle^G$ G nin bir öz normal alt grubudur. Böylece $\langle x \rangle^G$ bir CC- gruptur, ve dolayısıyla $\langle x \rangle^{\langle x \rangle^G}$ Chernikov gruptur. Ayrıca $\langle x \rangle^{\langle x \rangle^G} \triangleleft\triangleleft G$ olduğundan hipotezden dolayı $\langle x \rangle^{\langle x \rangle^G}$ nilpotenttir. Böylece $\langle x \rangle \triangleleft\triangleleft \langle x \rangle^{\langle x \rangle^G}$ dir. Yani $x \in B$ olur ki bu x in seçimiyle çelişir. Bundan dolayı G bir minimal FC- olmayan gruptur.

Lemma 3.7: G bir lokal nilpotent minimal CC – olmayan p - grup ve B , G nin Baer radikali olmak üzere $B \neq G$ olsun. Eğer N , G nin bir öz abeliyan olmayan normal alt grubu ise o zaman $FC(N) \neq Z(N)$ dir.

İspat: N , G nin bir öz abeliyan olmayan normal alt grubu ve $x \in Z(N)$ olsun. O zaman $C_N(x) = N$ olduğundan $|N : C_N(x)| < \infty$ dur. Böylece $Z(N) \leq FC(N)$ dir. Ayrıca Teorem 3.2(a) nın ispatından dolayı $N \cap B = FC(N)$ dir.

Mümkünse $Z(N) = FC(N)$ olsun. O zaman [12] Teorem 2.1(ii) den dolayı

$$1 \triangleleft Z_1(N) \triangleleft Z_2(N) \triangleleft \dots \triangleleft Z_{\omega}(N) \triangleleft Z_{\omega+1}(N) \dots Z_{\omega+2}(N) = N$$

olacak şekilde N nin bir artan merkez serisi vardır. Teorem 3.2(a) dan dolayı $Z_{\omega}(N) \leq B$ dir. Böylece $Z_{\omega}(N) \leq Z(N)$ dir, ve dolayısıyla $Z_{\omega}(N) = N$ dir. Bundan dolayı $N \leq B$ dir. Böylece N abeliyan olur ki bu hipotezle çelişir.

Burada minimal FC- olmayan mükemmel lokal sonlu barely transitive gruplarla ilgili bazı sonuçlar vereceğiz.

İlk olarak B.Hartley tarafından [16] ve [17] de mükemmel olmayan barely transitive gruplara örnekler verilmiştir. M.Kuzucuoğlu [18]de mükemmel lokal sonlu barely transitive grupların olup olmadığı üzerine çalışmıştır, eğer varsa genel özelliklerini incelemiştir ve bir basit lokal sonlu barely transitive grubun olmadığını göstermiştir.

Lemma 3.7: G bir lokal sonlu barely transitive p -grup olsun. G nin her CC-altgrubu bir FC- gruptur. Özel olarak G bir minimal CC- olmayan grup ise o zaman G bir minimal FC- olmayan gruptur.

İspat: G bir lokal nilpotent p -grup olduğundan lokal p -çözülebilir gruptur. Böylece [18] Teorem 1.1(2) den dolayı G nin her öz normal altgrubu sonlu üslü ve nilpotenttir. $x \in G$ olsun. G öz normal altgruplarının birleşimi olarak yazılabildiğinden x^G , G nin bir öz normal alt grubudur. Böylece x^G nilpotenttir. Dolayısıyla x , G nin Baer radikali içerisinde. Yani G bir Baer grubudur. O zaman Teorem 3.1(a) dan dolayı G nin her CC-altgrubu bir FC-gruptur.

Teorem 3.8: G bir mükemmel lokal sonlu barely transitive p -grup olsun. Eğer G nin sabit bırakanı çözülebilir ve çözülebilir uzunluğu $n \geq 1$ ise o zaman G nin her öz normal FC - altgrubu çözülebilir ve çözülebilir uzunluğu $\leq n + 1$ dir.

İspat: N, G nin bir öz normal FC-altgrubu ve H, G nin sabit bırakanı olsun. N, G nin bir öz altgrubu olduğundan

$$|N:N \cap H| < \infty$$

dır. O zaman $|N / \bigcap_{g \in G} (N \cap H)^g| < \infty$ dır.

$K = \bigcap_{g \in G} (N \cap H)^g$ olsun. $K \leq N \cap H$ olduğundan K bir FC-gruptur ve hipotezden dolayı K nın çözülebilir uzunluğu $\leq n$ dir. [12] Sonuç 4.3 den dolayı $N^{(n)}/K^{(n)}$ bir Chernikov gruptur. Aynı zamanda $N^{(n)}/K^{(n)}$ sonlu üslü olduğundan $N^{(n)}$ bir sonlu gruptur. O zaman $G/C_G(N^{(n)})$ bir sonlu gruptur.[18] Lemma 2.2 (ii) den dolayı $N^{(n)} \leq Z(G)$ dir ve dolayısıyla $N^{(n+1)} = 1$ dir.

Sonuç 3.9: G bir mükemmel barely transitive minimal FC- olmayan p -grup olsun. O zaman G nin sabit bırakanı çözülebilir olamaz.

İspat: H, G nin sabit bırakanı olsun. Mümkünse H çözülebilir ve çözülebilir uzunluğu $n \geq 1$ olsun. Teorem 3.8 den dolayı G nin her öz altgrubu çözülebilir ve çözülebilir uzunluğu $\leq n+1$ dir. G öz normal altgruplarının birleşimi olarak yazılabildiğinden G çözülebilir olur ki bu G nin mükemmel olması ile çelişir.

Sonuç 3.10: G bir finitary lokal sonlu barely transitive p -grup olsun. O zaman G nin sabit bırakanı çözülebilir olamaz.

İspat: H, G nin sabit bırakanı olsun. O zaman [9] Teorem 2 den dolayı G bir minimal FC- olmayan gruptur. Ayrıca [9] Lemma 1 den dolayı G bir mükemmel gruptur. Böylece Sonuç 3.9 dan dolayı H çözülebilir olamaz.

Burada “sonlu tam” kavramını kullanarak mükemmel lokal nilpotent minimal FC- olmayan gruplar için bir sonuç ispat edeceğiz. Okuyucuya kolaylık olması açısından bu kavramla ilgili bazı temel özellikleri aşağıda vereceğiz. Daha fazla bilgi için [20] ye bakılabilir.

$\mathcal{X}$ altgrup kapalı grupların bir sınıfı olsun. G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. O zaman G nin

$$\theta(H, \mathcal{X}) = \langle X \leq G : X \in \mathcal{X}, \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(X) \rangle$$

altgrubunu tanımlayalım. Burada $\theta(H, \mathcal{X}) = \theta(H)$ olsun. Eğer G nin her H sonlu altgrubu için $H, \theta(H) \in \mathcal{X}$ ise θ ya G de sonlu tam denir.

Lemma 3.11: G bir grup, H , G nin bir altgrubu ve $\mathcal{X}$ altgrup kapalı grupların sınıfı olsun.

- (i) her $x \in G$ için $\theta(H^x) = \theta(H)^x$,
- (ii) Eğer $H \in \mathcal{X}$ ise o zaman $H \leq \theta(H)$,
- (iii) $\theta(G) = \theta(1) \leq \theta(H)$,
- (iv) Eğer θ , G de sonlu tam ve H sonlu ise o zaman $\theta(G) = \text{Core}_G(\theta(H))$ dır.

İspat:

(i) $g \in G$ olsun. Önce $X \leq \theta(H^g)$ olsun. $X = (X^{g^{-1}})^g$ dir. $X \cong X^{g^{-1}}$ olduğundan $X^{g^{-1}} \in \mathcal{X}$ dir. $X^{g^{-1}} \leq N_G(X)$ olduğundan $(H^g)^{g^{-1}} \leq N_G(X^{g^{-1}})$ dir. Yani $H \leq N_G(X^{g^{-1}})$ dir. $C_G(H^g) \leq N_G(X)$ olduğundan $C_G((H^g)^{g^{-1}}) \leq N_G(X^{g^{-1}})$ dir. Yani $C_G(H) \leq N_G(X^{g^{-1}})$ dir. Böylece $X^{g^{-1}} \leq \theta(H)$ dır ve dolayısıyla $\theta(H^g) \leq \theta(H)^g$ dir.

Şimdi $X \leq \theta(H)^g$ olsun. O zaman $X = Y^g$ olacak şekilde $\theta(H)$ nın bir Y altgrubu vardır. $s \in C_G(H)$ olsun.

$$(Y^g)^{s^g} = (s^g)^{-1} (Y^g) s^g$$

$$= (g^{-1}s^{-1}g) (g^{-1}Yg) (g^{-1}sg)$$

$$= g^{-1}(s^{-1}Ys)g \text{ dir. } C_G(H) \leq N_G(Y) \text{ olduğundan } (Y^g)^{s^g} = Y^g \text{ elde edilir.}$$

Böylece $(C_G(H))^g = C_G(H^g) \leq N_G(Y^g)$ dir.

$h \in H$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} (Y^g)^{h^g} &= (h^g)^{-1} (Y^g) h^g \\ &= (g^{-1}h^{-1}g) (g^{-1}Yg) (g^{-1}hg) \\ &= g^{-1}(h^{-1}Yh)g \text{ dir.} \end{aligned}$$

dir. $H \leq N_G(Y)$ olduğundan $(Y^g)^{h^g} = Y^g$ elde edilir. Böylece $H^g \leq N_G(Y^g)$

dir. Aynı zamanda $X \in \mathcal{X}$ olduğundan $X \leq \theta(H^g)$ dir.

(ii) $H \in \mathcal{X}$ olsun. $\theta(H)$ nin tanımından dolayı $H \leq \theta(H)$ dir.

(iii) Tanımdan dolayı

$$\theta(G) = \theta(1) = \langle X \leq G \mid X \in \mathcal{X}, X \triangleleft G \rangle$$

dir.

$X \leq \theta(G)$ olsun. O zaman $N_G(X) = G$ ve $X \in \mathcal{X}$ dir. $\langle H, C_G(H) \rangle \leq G$ olduğundan

$X \leq \theta(H)$ dir.

(iv) θ , G de bir sonlu tam ve H , G nin bir sonlu altgrubu olsun, $\text{Core}_G(\theta$

$(H)) = C$ olsun. O zaman C , G nin bir normal altgrubu ve $C \leq \theta(H)$ dir. θ , G de

bir sonlu tam olduğundan $C \in \mathcal{X}$ dir. Buradan $C \leq \theta(G)$ dir.

$X \leq \theta(G)$ olsun. (iii) den dolayı $X \leq \theta(H)$ dir. $g \in G$ olsun. O zaman $X^g \leq \theta(H)^g$ dir. X , G nin bir normal altgrubu olduğundan $X \leq \theta(H)^g$ dir. Yani $\theta(G) \leq C$ dir.

Lemma 3.12: G bir grup ve θ G de bir sonlu tam olsun. Eğer H , G nin sonlu bir altgrubu ise H nin her K altgrubu için

$$\text{Core}_{C_G(K)}(\theta(H)) \leq \theta(K)$$

dir.

İspat: θ , G de sonlu tam olduğundan $H \in \mathcal{X}$ dir. $L = \text{Core}_{C_G(K)}(\theta(H))$ ve $t \in C_G(K)$ olsun. O zaman $C_G(K)t = C_G(K)$

$$L^t = \bigcap_{c \in C_G(K)} (\theta(H))^{ct} = \bigcap_{ct \in C_G(K)} (\theta(H))^{ct} = L$$

dir. Bundan dolayı $C_G(K) \leq N_G(L)$ dir.

$x \in C_G(K)$ olsun. O zaman $K \leq H^x$ dir. Lemma 3.11 (i) ve (ii) den dolayı $K \leq \theta(H)^x$ dir. Böylece $K \leq L$ dir. $\theta(H) \in \mathcal{X}$ olduğundan $L \in \mathcal{X}$ dir. L nin tanımından dolayı $K \leq N_G(L)$ dir. Böylece $L \leq \theta(K)$ dir.

G bir grup olsun. G nin aşağıdaki şekilde tanımlanan bir ϕ endomorfizması varsa ϕ ye G nin bir lokal iç endomorfizması denir: Her $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ ve $i=1, 2, \dots, n$ için $\phi(x_i) = x_i^g$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. G bir grup olsun. Eğer G nin G ye izomorf bir öz altgrubu yoksa G ye bir co-Hopfian grup denir

ϕ lokal iç endomorfizmasının bir lokal iç monomorfizma olduğu açıktır. Ayrıca G bir co-Hopfian gruptur gerek ve yeter şart G nin lokal iç endomorfizmaları lokal iç otomorfizmalarıdır.

Teorem 3.13: G sayılabilir lokal sonlu grup ve θ , G de bir sonlu tam olsun. Eğer $\theta(G) \neq G$ ise o zaman her $g \in G \setminus \theta(G)$ için $g \notin \phi(G)$ olacak şekilde G nin bir ϕ lokal iç endomorfizması vardır. Özel olarak G co-Hopfian olamaz.

İspat: G bir lokal sonlu sayılabilir grup olduğundan [19] 1.4.2 Lemma dan dolayı her $i \geq 1$ için G_i , G nin bir sonlu altgrubu olmak üzere bir $\{G_i\}_{i \geq 1}$ sıralı lokal sistemi vardır. Her $i \geq 1$ için

$$x_{i+1}x_i^{-1} \in C_G(G_i) \text{ fakat } g \notin \theta(G_i^{x_i}) \dots (1)$$

olacak şekilde G nin bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ altkümesinin olduğunu n üzerine indüksiyon yaparak göstereyim.

$n=1$ olsun. $g \in G \setminus \theta(G)$ olsun. Lemma 3.11 (iv) den dolayı $\theta(G) = \bigcap_{x \in G} \theta(G_1)^x$

dir. Böylece $g \notin \theta(G_1)^{x_1}$ olacak şekilde bir $x_1 \in G$ vardır. Lemma 3.12 den dolayı

$$\text{Core}_{C_G(G_1^{x_1})}(\theta(G_2^{x_1})) \leq \theta(G_1^{x_1})$$

dir.

O zaman $g \notin \theta(G_2^{x_1})^{c_1}$ olacak şekilde $c_1 \in C_G(G_1^{x_1})$ vardır. $x_2 = x_1 c_1$ olsun.

Böylece $x_2 x_1^{-1} \in x_1 C_G(G_1^{x_1}) x_1^{-1}$ dir ve dolayısıyla $x_2 x_1^{-1} \in C_G(G_1)$ dir. Böylece $n=1$ için (1) doğrudur.

Şimdi $\{x_1, \dots, x_n\}$ (1) i sağlasın. O zaman Lemma 3.22 den dolayı

$$\bigcap \left\{ \theta \left(G_{n+1}^{x_n} \right)^c : c \in C_G \left(G_n^{x_n} \right) \right\} \leq \theta \left(G_n^{x_n} \right)$$

dir. İndüksiyon hipotezinden dolayı $g \notin \theta \left(G_n^{x_n} \right)$ dir. Böylece $g \notin \theta$

$\left(G_{n+1}^{x_n} \right)^{c_n} = \theta \left(G_{n+1}^{x_n c_n} \right)$ olacak şekilde bir $c_n \in C_G \left(G_n^{x_n} \right)$ vardır. $x_{n+1} = x_n c_n$ olsun. O zaman $x_{n+1} x_n^{-1} \in x_n C_G \left(G_n^{x_n} \right) x_n^{-1} = C_G \left(G_n \right)$ dir ve dolayısıyla indüksiyon tamamdır.

Şimdi her $h \in G_i$ için

$$\phi(h) = h^{x_i}$$

olacak şekilde $\phi: G \rightarrow G$ tanımlansın. ϕ nin iyi tanımlı olduğu açıktır.

$\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subseteq G$ olsun. O zaman $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subseteq G_j$ olacak şekilde bir $j \geq 1$ vardır. ϕ nin tanımından dolayı $\phi(h_i) = h_i^{x_j}$ dir. Böylece ϕ bir lokal iç endomorfizmadır.

Eğer $g \in \phi(G)$ ise o zaman $g = \phi(h)$ olacak şekilde bir $h \in G$ vardır. $h \in G_k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ vardır. Fakat θ, G de bir sonlu tam olduğundan $g \in G_k^{x_k} \leq \theta \left(G_k^{x_k} \right)$ dir ki bu x_k nın inşasıyla çelişir. Bundan dolayı $g \notin \phi(G)$ dir.

Teorem 3.14: G bir lokal nilpotent minimal FC-olmayan p grubu olsun. O zaman G nin öyle bir F sonlu altgrubu ve sonsuz sayıda, sonlu altgruplarının bir ailesi $\{X_i; i \in I\}$ vardır ki

$$\langle F, C_G(F) \rangle \leq N_G(X_i) \quad (i \in I)$$

dır.

İspat:

F sonlu grupların sınıfını gösterebiliriz ve E, F nin bir sonlu altgrubu olsun.

$$\theta(E) = \langle X : X \in F, \langle E, C_G(E) \rangle \leq N_G(X) \rangle$$

olsun. G nin aşikar olmayan sonlu normal altgrubu olmadığından $\theta(G) = 1$ dir ve dolayısıyla $\theta(G) \neq G$ dir.

Mümkünse $\theta(E)$, sonlu tane X altgrubu tarafından üretilsin, o zaman G lokal sonlu olduğundan $\theta(E) \in F$ dir. Bu G nin her sonlu E altgrubu için sağlanıyorsa θ, G de sonlu tamdır. Teorem 3.13 den dolayı G co-Hopfian değildir. Yani $H \cong G$ olacak şekilde G nin bir H öz altgrubu vardır. Bu ise G nin minimal olmayan FC-grup olmasıyla çelişir.

Bundan dolayı

$$\langle F, C_G(F) \rangle \leq N_G(X_i) \quad (i \in I)$$

olacak şekilde G nin bir F altgrubu ve sonsuz sayıda, sonlu altgruplarının bir ailesi $\{X_i; i \in I\}$ vardır.

Lemma 3.15: G bir minimal CC- olmayan p -grup ve G nin her H altgrubu için

$$\theta(H) = \langle X \leq G: X \text{ bir CC-grup, } \langle H, C_G(H) \rangle \leq N_G(X) \rangle$$

olsun. O zaman $\theta(F) = G$ olacak şekilde G nin bir F sonlu altgrubu vardır.

İspat: Mümkünse Lemma doğru olmasın. O zaman G nin her K sonlu altgrubu için $\theta(K)$, G nin bir öz altgrubudur. Böylece G bir minimal CC-olmayan grup olduğundan θ, G de sonlu tamdır. Teorem 3.13 den dolayı $\theta(G) = G$ dir. Fakat Lemma 3.11 (iii) den dolayı G nin her K sonlu altgrubu için $\theta(K) = G$ olur ki kabulde çelişir. Bundan dolayı $\theta(F) = G$ olacak şekilde G nin bir F sonlu altgrubu vardır.

Aşağıda verilen Lemma S.D.Bell tarafından ispat edilmiş ve yayınlanmamıştır. Burada bu Lemma'nın ispatı ve lokal nilpotent minimal FC-olmayan gruplara bir uygulaması verilecektir.

Eğer Lemma'daki şartları sağlayan altgruplar inşa edilebilirse o zaman lokal nilpotent minimal FC-olmayan grupların olmadığı ispat edilmiş olur. Fakat henüz böyle bir inşa yapılabilmemiş değildir.

Lemma 3.16: G bir grup, $1 = H_0 < H_1 < H_2 < \dots$ G nin öz altgrupları ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$

olsun. Kabul edelim ki her $n \geq 1$ için H_n, H_{n+1} in bir altgrubu P_n yi normallesin ve t_n, P_n nin H_{n-1} i merkezleyen bir elemanı ve $n \geq 1$ için $N_n = C_{P_n}(t_{n+1})$ olsun.

Eğer $C_{H_n}(t_n) = N_{H_n}(N_n t_n)$ ise o zaman $b_n = t_n \dots t_2 t_1$ ise olmak üzere, eğer $g \in H_n$ ise $\phi(g) = g^{b_n}$ şeklinde tanımlanan $\phi: G \rightarrow G$ bir lokal iç endomorfizmadır.

Bundan başka $\phi(G) \cap H_n = [C_{H_n}(t_n)]^{h_{n-1}}$ dir. Böylece eğer bir H_n , t_n yi merkezlemiyor ise o zaman ϕ örten değildir.

İspat: Eğer $g \in H_n$ ise o zaman her $i > n$ için $g \in H_i$ dir. Fakat her $k > i$ için t_{i+1} , H_i yi merkezlediğinden

$$g^{t_1 t_{i-1} \dots t_i} = g^{t_k \dots t_{i+1}}$$

dir. Bundan dolayı ϕ iyi tanımlıdır. Ayrıca

$$H_n N_n = H_n C_{P_n}(t_{n+1}) = C_{H_n P_n}(t_{n+1})$$

dir. H_n , P_n yi normallediğinden ve t_{n+1} , H_n yi merkezlediğinden H_n , N_n yi normaller. Önce

$$H_n \cap (H_n N_n)^{t_n} = C_{H_n}(t_n)$$

olduğunu gösterelim.

$$C_{H_n}(t_n) \leq H_n \cap (H_n N_n)^{t_n}$$

olduğu aşikârdır. $g \in H_n \cap (H_n N_n)^{t_n}$ olsun. O zaman $g^{t_n^{-1}} \in H_n N_n$ dir ve böylece

$$g^{-1} g^{t_n^{-1}} \in H_n N_n \cap P_n = C_{P_n}(t_{n+1}) = N_n$$

dir.

$$g \in N_{H_n}(N_n t_n) = C_{H_n}(t_n)$$

dir. Ayrıca

$$C_{H_n}(t_n) = [C_{H_n}(t_n)]^{t_n} \leq H_n^{t_n}$$

olduğundan

$$C_{H_n}(t_n) \leq H_n^{t_n} \cap H_n \leq (H_n N_n)^{t_n} \cap H_n = C_{H_n}(t_n)$$

dir. Böylece

$$C_{H_n}(t_n) = H_n^{l_n} \cap H_n \dots (*)$$

elde edilir. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi(H_{n+1}) \cap H_n &= \phi(H_{n+1}) \cap H_{n+1} \cap H_n \\ &= H_{n+1}^{l_{n+1}b_n} \cap H_{n+1}^{b_n} \cap H_n \\ &= [C_{H_{n+1}}(t_{n+1})]^{b_n} \cap H_n \\ &= [C_{H_{n+1}}(t_{n+1})]^{b_n} \cap (P_n H_n)^{b_n} \cap H_n \\ &= [C_{P_n H_n}(t_{n+1})]^{b_n} \cap H_n \\ &= [(H_n N_n) \cap H_n]^{b_{n-1}} \\ &= [C_{H_n}(t_n)]^{b_{n-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (*) eşitliği

$$\phi(H_n) \cap H_n = [C_{H_n}(t_n)]^{b_{n-1}}$$

olduğunu da söyler. Böylece induksiyon yaparak, $\phi(H_{i+1}) \cap H_i = \phi(H_i) \cap H_i$ eşitliğini kullanarak her $m \geq n$ için $\phi(H_m) \cap H_n = \phi(H_n) \cap H_n$ olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\begin{aligned} \phi(G) \cap H_n &= \phi\left(\bigcup_{m \geq n} H_m\right) \cap H_n \\ &= \bigcup_{m \geq n} (\phi(H_m) \cap H_n) \\ &= \phi(H_n) \cap H_n \\ &= [C_{H_n}(t_n)]^{b_{n-1}} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.17: G bir lokal nilpotent minimal FC (veya CC) – olmayan p -grup ve kabul edelim ki H_i, P_j, N_k altgrupları ve t_r elemanları Lemma 3.16 daki gibi olsun. O zaman en az bir $m \geq 1$ için $C_{H_m}(t_m) \neq N_{H_m}(N_m t_m)$ veya her $n \geq 1$ için $[t_n, H_n] = 1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki her $m \geq 1$ için $C_{H_m}(t_m) = N_{H_m}(N_m t_m)$ ve en az bir $n \geq 1$ için $[t_n, H_n] \neq 1$ olsun. O zaman Lemma 3.16 daki gibi tanımlanan $\phi: G \rightarrow G$ bir lokal iç endomorfizmadır. Böylece ϕ bir monomorfizmadır ve $[t_n, H_n] \neq 1$ olduğundan Lemma 3.16 dan dolayı ϕ bir epimorfizma değildir. Buradan $\phi(G) \neq G$ dir ve $\phi(G) \cong G$ dir. Fakat $\phi(G)$, G nin bir öz altgrubu olduğundan $\phi(G)$ bir FC (veya CC) – gruptur. Böylece $\phi(G) \cong G$ olduğundan G bir FC (veya CC) – grup olur ki bu bir çelişkidir.

4. MİNİMAL FC (veya CC) -OLMAYAN GRUPLARIN BİR KARAKTERİZASYONU

Bu bölüme önemli bir lemmayı ispat ederek başlıyoruz.

Lemma 4.1: G bir lokal nilpotent minimal FC- olmayan p -grup ve $x \in G \setminus Z(G)$ olsun. O zaman $C = C_G(x)$ olmak üzere G nin her sonlu V altgrubuna karşılık öyle bir U sonlu altgrubu vardır ki

$$L = \bigcap_{y \in G \setminus \langle U, V, C \rangle} \langle U, V, C, y \rangle \neq \langle U, V, C \rangle$$

dir. Ayrıca $|L/\langle U, V, C \rangle| = p$ dir.

İspat: Kabul edelim ki Lemma doğru olmasın. $t_1 \in G \setminus C$ ve $U_1 = \langle t_1 \rangle$ olsun. Kabulümüzden dolayı U_1 e karşılık gelen öyle bir V sonlu altgrubu vardır ki

$$\bigcap_{y \in G \setminus \langle U_1, V, C \rangle} \langle U_1, V, C, y \rangle = \langle U_1, V, C \rangle$$

dir. $G \neq \langle U_1, V, C \rangle$ olduğundan $a \in \langle U_1, V, C \rangle$ olacak şekilde bir $1 \neq a \in G$ vardır. Böylece $a \notin \langle U_1, V, C, t_2 \rangle$ olacak şekilde bir $t_2 \in G \setminus \langle U_1, V, C \rangle$ vardır. $U_2 = \langle U_1, V, t_2 \rangle$ ve $V_2 = \langle U_1, C \rangle$ olsun, $C, t_1 C, t_2 C$ C nin G içindeki birbirinden farklı sol kosetleri olduğundan

$$|V_2: C_{V_2}(x)| \geq 3$$

dür. Bu şekilde devam edilirse her $i \geq 1$ için $a \notin V_i$ ve $|V_i: C_{V_i}(x)| \geq i+1$

olacak şekilde $U_i = \langle U_{i-1}, V, t_i \rangle$ ve $V_i = \langle U_i, C \rangle$ altgrupları elde edilir.

Şimdi $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ olsun. $a \notin W$ olduğundan W , G nin bir öz altgurubudur. O

zaman W bir FC- gruptur. Böylece

$$|W : C_W(x)| = n$$

olacak şekilde bir $n \geq 1$ vardır. Bundan dolayı

$$|V_n : V_n \cap C_W(x)| = |V_n : V_{V_n}(x)| \leq n$$

olur ki bu V_n nin seçimiyle çelişir. [20] Teorem 1.16 dan dolayı G bir minimal hipermerkez- olmayan gruptur. Böylece G normalleyen şartını sağlar. O zaman $1 \neq y \in N_G(\langle U, V, C \rangle) \setminus \langle U, V, C \rangle$ vardır ve dolayısıyla $L \leq \langle U, V, C, y \rangle$ dir. Böylece $\langle U, V, C \rangle$ L nin bir normal altgurubudur. $N = N_G(\langle U, V, C \rangle)$, $\bar{N} = N / \langle U, V, C \rangle$ ve $\bar{b}, \bar{N}$ nin mertebesi p olan bir elemanı olsun. O zaman her $\bar{a} \in \bar{L}$ için $\bar{a} \in \langle \bar{b} \rangle$ dir. Böylece $\bar{L} = \langle \bar{b} \rangle$ dir. Yani $|L / \langle U, V, C \rangle| = p$ dir.

Lemma 4.2: G .bir lokal nilpotent üssü p olan minimal FC- olmayan p -grup olsun. O zaman $|N_G(T) / T| = p$ olacak şekilde G nin bir T öz altgrubu vardır.

İspat: N, L, C, U ve V Lemma 4.1 deki gibi olsun ve $b \in N$ olsun. $o(b) = p$ olduğundan her $a \in L$ için $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ dir. Böylece $L = N$ dir. Lemma 4.1 den dolayı $|N / \langle U, V, C \rangle| = p$ dir. $T = \langle U, C, V \rangle$ alırsak ispat tamamdır.

Şimdi aşağıdaki karakterizasyonu verebiliriz.

Teorem 4.3: G bir mükemmel lokal nilpotent minimal FC- olmayan (veya CC) p -grup olsun. O zaman

(a) G bir yarı-bölümlü gruptur veya

(b) her $i \geq 1$ için $|N_G(V_i): V_i| = p$ ve

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

olacak şekilde G nin $V_1 < V_2 < \dots$ öz altgrupları vardır. Ayrıca X , G nin bir öz altgrubu olmak üzere $X \leq V_i$ olacak şekilde bir V_i altgrubu vardır.

İspat: Kabul edelim ki G bir yarı-bölümlü grup olmasın. O zaman $G^p < G$ dir.

Önce $G^p = 1$ olsun. O zaman G nin üssü p dir. $x \in G \setminus Z(G)$ ve $C = C_G(x)$ olsun.

Lemma 4.1 den dolayı

$$L_1 = \bigcap_{y \in G \setminus \langle U_1, C \rangle} \langle U_1, C, y \rangle \neq \langle U_1, C \rangle$$

olacak şekilde G nin bir U_1 sonlu altgrubu vardır. $V_1 = \langle U_1, C \rangle$ olsun. O zaman

Lemma 4.2 den dolayı $|L_1 / V_1| = p$ dir. Böylece

$$L_1 = V_1 \langle a_1 \rangle$$

olacak şekilde bir $a_1 \in G$ vardır.

$S_2 = \langle U_1, a_1 \rangle$ olsun. Lemma 4.1 den dolayı,

$$L_2 = \bigcap_{y \in G \setminus \langle U_2, C \rangle} \langle U_2, C, y \rangle \neq \langle U_2, C \rangle$$

olacak şekilde S_2 yi içeren G nin bir U_2 sonlu altgrubu vardır. $V_2 = \langle U_2, C \rangle$ olsun. O zaman Lemma 4.2 den dolayı $|L_2 / V_2| = p$ dir. Böylece $L_2 = V_2 \langle a_2 \rangle$ olacak şekilde bir $a_2 \in G$ vardır. Bu şekilde devam edilirse her $i \geq 1$ için $a_i \notin V_i$ fakat $a_i \in V_{i+1}$ ve $|N_G(V_i) : V_i| = p$ olacak şekilde G nin $V_1 < V_2 < \dots$ öz altgrupları elde edilir. $C, a_1C, a_2C, \dots$ C nin G içindeki birbirinden farklı sol kosetleri olduğundan,

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

dir.

Şimdi $G^p \neq 1$ ve $\bar{G} = G/G^p$ olsun. Yukarıdaki benzer inceleme yapılırsa her

$i \geq 1$ için $|N_{\bar{G}}(\bar{V}_i) : \bar{V}_i| = p$ ve

$$\bar{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{V}_i$$

olacak şekilde $\bar{G}$ nin $\bar{V}_1 < \bar{V}_2 < \dots$ öz altgrupları vardır.

Eğer $V_i, \bar{V}_i$ nin G de ters görüntüsü ise o zaman

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

dir. $\bar{G}$ normalleyen şartını sağladığından $N_{\bar{G}}(\bar{V}_i) = N_G(V_i)/G^p$ dir. Böylece $|N_G(V_i) : (V_i)| = p$ dir.

Şimdi G bir lokal nilpotent minimal CC-olmayan p -grup olsun. [5] Teorem 1 den dolayı G° , G nin maksimal köklü abeliyan altgrubu olmak üzere G/G° bir minimal FC- olmayan gruptur. Teoremin başındaki benzer inceleme yapılırsa her $i \geq 1$ için $|N_{G/G^\circ}(V_i/G^\circ): (V_i/G^\circ)| = p$ ve

$$G/G^\circ = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i/G^\circ$$

olacak şekilde G/G° in $V_1/G^\circ < V_2/G^\circ < \dots$ öz altgrupları elde edilir.

Eğer $V_i, V_i/G^\circ$ in G de ters görüntüsü ise o zaman

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$

dir.

G/G° normalleyen şartını sağladığından $N_{G/G^\circ}(V_i/G^\circ) = N_G(V_i)/G^\circ$ dir. Böylece $|N_G(V_i): V_i| = p$ dir.

5. ALTNORMAL BİLEŞİM ÖZELLİĞİ (SJP), FC VE CC-GRUPLAR

Genel olarak FC-gruplar SJP yi sağlamazlar. Bunun için [20] Problem 8 e bakılabilir.

Teorem 5.1: G bir minimal FC- olmayan p -grup olsun. O zaman G/N SJP yi sağlayacak şekilde G nin bir N öz normal altgrubu vardır.

İspat: [5] Sonuç 1 den dolayı G/N bir minimal FC- olmayan grup ve G/N nin her öz normal altgrubu sonlu üslü ve nilpotent olacak şekilde G nin bir N öz normal altgrubu vardır. $\bar{G} = G/N$ olsun. $\bar{H}$ ve $\bar{K}$, $\bar{G}$ nin iki öz altnormal altgrubu olsun. $\bar{H}^{\bar{G}}$, $\bar{K}^{\bar{G}}$, $\bar{G}$ nin iki öz normal altgrubu olduğundan $\bar{H}^{\bar{G}}$, $\bar{K}^{\bar{G}}$, $\bar{G}$ nin bir öz normal nilpotent altgrubudur. Bundan dolayı $\langle \bar{H} \bar{K} \rangle \triangleleft \triangleleft \bar{G}$ dir.

Lemma 5.2: G bir periyodik FC- grup, K, L G nin iki altnormal altgrubu ve L sonlu olsun. O zaman $J = \langle H, K \rangle$ olmak üzere J , G nin bir altnormal altgrubudur.

İspat: $|L| = s$ olacak şekilde $s \geq 1$ olsun. $J = KL^K$ dir. G periyodik FC- grup olduğundan her $x \in G$ için x^G sonludur. $L = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ olsun. O zaman $L^K \leq e_1^K \dots e_s^K$ sonludur ve dolayısıyla L^K sonludur. Böylece $|J: K| < \infty$ dur. [21] Sonuç 1.3.6. dan dolayı J , G nin bir altnormal altgrubudur.

Sonuç 5.3: G bir lokal nilpotent minimal CC-olmayan p -grup olsun. Eğer H, K G nin iki altnormal altgrubu ve K sonlu ise o zaman $\langle H, K \rangle$, G nin bir altnormal altgrubudur.

İspat: $\bar{G} = G/G^\circ$ olsun. [5] Teorem 1 den dolayı $\bar{G}$ bir minimal FC- olmayan gruptur. $\bar{H} = \bar{G}$ veya $\bar{K} = \bar{G}$ ise sonuç açıktır. Bundan dolayı $\bar{H}, \bar{K}, \bar{G}$ nin iki öz altnormal altgrubu olsun. O zaman Lemma 5.2 den dolayı $\langle \bar{H}, \bar{K} \rangle$ sn $\bar{G}$ dir . Yani $\langle H, K \rangle \triangleleft \langle H, K \rangle G^\circ \triangleleft \triangleleft G$ dir.

Sonuç 5.4: G bir lokal nilpotent minimal CC-olmayan p-grup ve B, G nin Baer radikali olmak üzere B,G nin öz altgrubu olsun. Eğer H,K B nin iki altnormal altgrubu ve K sonlu ise $\langle H, K \rangle$, G nin bir altnormal altgrubudur.

İspat: K, B nin bir sonlu altgrubu olduğundan [22] 12.2.8 den dolayı K,B nin bir altnormal altgrubudur. Teorem 3.2(a) dan dolayı B bir FC- gruptur. Lemma 5.2 den dolayı

$$\langle H, K \rangle \triangleleft \triangleleft B \triangleleft G$$

dir.

Teorem 5.5:G bir Chernikov grup olsun.O zaman G SJP yi sağlar.

İspat: H,K G nin iki öz altnormal altgrubu olsun. G bir Chernikov grup olduğundan G/G° sonludur. Burada G° sonlu sayıda prüfer grubun direkt çarpımına izomorftur. [21] Teorem 1.3.1 den dolayı $\langle H, K \rangle G^\circ/G^\circ \triangleleft \triangleleft G/G^\circ$ dir.Böylece $\langle H, K \rangle G^\circ \triangleleft \triangleleft G$ dir. [10] Lemma 1.5 den dolayı $\langle H, K \rangle$, G nin altnormal altgrubudur.

Teorem 5.6: G bir lokal nilpotent minimal CC-olmayan p-grup olsun. Eğer [5] Teorem 1 de $K = Z(G)G^\circ$ ise o zaman G,SJP yi sağlar.

İspat: [5] Teorem 1 den dolayı G/K nin her öz normal altgrubu sonlu üslü ve nilpotenttir. S, T G nin iki öz altnormal altgrubu olsun. O zaman $S^G T^G K$, G

nin bir öz normal altgrubu olduğundan $S^G T^G K/K$ nilpotenttir. Böylece $\langle S, T \rangle K \triangleleft\triangleleft G$ dir. [10] Lemma 1.5 den dolayı $\langle S, T \rangle \triangleleft\triangleleft G$ dir.

Lemma 5.7: G bir CC-p-grup ve H, K G nin iki altnormal altgrubu olsun. G nin X sonlu altkümesi için $H, K \leq X^G$ ise $\langle H, K \rangle$, G nin bir altnormal altgrubudur.

İspat: X , G nin bir sonlu altkümesi olsun. G bir CC-p-grup olduğundan X^G bir Chernikov gruptur. Böylece

$$G/C_G(X^G)$$

bir Chernikov gruptur. $C_G(X^G) = C$ olsun. Teorem 4.5 den dolayı $\langle H, K \rangle C \triangleleft\triangleleft G$ dir. $H, K \leq X^G$ olduğundan C, H ve K y_1 ve dolayısıyla $\langle H, K \rangle y_1$ normaller. Bundan dolayı $\langle H, K \rangle$ nin bir altnormal altgrubudur.

Teorem 5.8: G bir periyodik Baer CC-grup olsun. H, K G nin iki altnormal altgrubu ve K sonlu üreteçli ise $\langle H, K \rangle$ G nin bir altnormal altgrubudur.

İspat: G bir Baer grubu olduğundan lokal nilpotenttir ve dolayısıyla [23] 1 1.3) den dolayı G bir hipermerkez gruptur. [22] 12.2.3 den dolayı G normalleyen şartını sağlar.

Önce T , G nin bir Chernikov altgrubu olmak üzere $T \triangleleft\triangleleft G$ olduğunu göstereyim. T bir Chernikov grup olduğundan $|T/T^\circ| < \infty$ dir. Burada T° , sonlu sayıda Prüfer grubun direkt çarpımına izomorftur. Böylece $T = T^\circ F$ olacak şekilde G nin bir F sonlu üreteçli altgrubu vardır. G bir Baer grubu olduğundan $F \triangleleft\triangleleft G$ dir. Böylece [10] Lemmal 1.5 den dolayı $T^\circ F$ yi

normaller. [22] 13.1.5 den dolayı $T \triangleleft\triangleleft G$ dir. K bir sonlu üreteçli altgrup olduğundan

$$K = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

olacak şekilde $1 \leq i \leq k$ için $x_i \in G$ vardır.

$$\begin{aligned} K^H &= \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle^H \leq \langle x_1 \rangle^H \langle x_2 \rangle^H \dots \langle x_k \rangle^H \\ &\leq \langle x_1 \rangle^G \langle x_2 \rangle^G \dots \langle x_k \rangle^G \end{aligned}$$

dir. G bir CC-grup olduğundan her $1 \leq i \leq k$ için $\langle x_i \rangle^G$, G nin bir normal Chernikov altgrubudur. Böylece K^H bir Chernikov gruptur. Yukarıdaki gözlemden dolayı $K^H \triangleleft\triangleleft G$ dir. $J = \langle H, K \rangle$ olsun. O zaman $J = H K^H$ dir. K^H , H yı normallediğinden [22] 13.1.5 den dolayı $J \triangleleft\triangleleft G$ dir.

Lemma 5.9: G bir CC- p -grup olsun. Eğer $1 \neq x \in G$ için $C_G(x^G)$ abeliyan ise G , SJP yi sağlar.

İspat: G bir p -grubu olduğundan $G/Z(G)$ periyodiktir. $1 \neq x \in G$ ve $C_G(x^G) = N$ olsun. G bir CC-grup olduğundan G/N bir Chernikov gruptur. Hipotezden dolayı N bir abeliyan gruptur ve dolayısıyla $N \leq C_G(N)$ dir. [24] Lemma 4.4 den dolayı $C_G(N)/Z(G)$ bir Chernikov gruptur. Ayrıca G/N bir Chernikov grup olduğundan $G/C_G(N)$ bir Chernikov gruptur. Böylece

$$\frac{G/Z(G)}{C_G(N)/Z(G)} \cong G/C_G(N)$$

oldüğundan $G/Z(G)$ bir Chernikov gruptur. H, K G nin iki altnormal altgrubu olsun. Teorem 5.5 den dolayı $G/Z(G)$, SJP yi sağlar. Böylece $\langle H, K \rangle Z(G)/Z(G) \triangleleft\triangleleft G/Z(G)$ dir ve dolayısıyla $\langle H, K \rangle Z(G) \triangleleft\triangleleft G$ dir. $Z(G)$,

$\langle H, K \rangle Z(G)$ yi normallediğinden $\langle H, K \rangle \triangleleft \langle H, K \rangle Z(G) \triangleleft G$ dir. Yani $\langle H, K \rangle \triangleleft G$ dir.

Lemma 5.10: G bir FC p -grup olsun. Eğer $1 \neq x \in G$ için $C_G(x^{G_i})$ nilpotent ise G nilpotenttir. Özel olarak G , SJP yi sağlar.

İspat: $C_G(x^{G_i})$ nilpotent grup ve G bir FC-grup olduğundan G bir NC – gruptur [25] Lemma 4.4 den dolayı G nilpotenttir. Böylece özel olarak G SJP yi sağlar.



KAYNAKLAR

1. Belyaev, V.V., 1980, Minimal non FC-groups, **Proc. All Symposium on Group Theory**, Kiev, 97-108
2. Kuzucuoğlu, M., Phillips, R.E., 1989, Locally finite minimal non FC-groups, **Math. Proc. Comb. Phil. Soc.**, 105, 417-420
3. Hartley, B., Otal, J., Peña, M., 1991, Locally graded minimal non CC – groups are p-groups, **Arch. Math.** Vol. 57, 209-211
4. Leinen, F., Puglisi, O., 1993, Unipotent finitary linear groups, **J. London Math. Soc (2)**, 48, 56-76
5. Asar, A.O., Arıkan, A., 1997, On minimal non CC groups, **Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid**, Vol. 10, numero 1, 31-37
6. Leinen, F., 1999, A reduction theorem perfect locally finite minimal non FC – groups, **Glasgow Math. J.**, 41, 81-83
7. Belyaev, V.V., 1998, On the existence of minimal non FC-groups (Russian), **Sibirsk. Math. Zh.**, 39(6), 1267-1270
8. Robinson, D.J.S., 1972, Finiteness conditions and generalized soluble groups, **Berlin Heidelberg-New York**, Vol. 1, Springer

9. Hartley, B., Kuzucuoğlu, M., 1997, Non-Simplicity of locally finite barely transitive groups, **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, 40, 483-490
10. Arıkan, A., 1988, Altınormal indisleri üzerinde bir sınıra sahip periyodik çözümlü gruplar, **Yüksek Lisans Tezi**
11. González, M., Otal, J., Peña, M., 1990, CC-groups with periodic central factor, **Manuscripta Math.**, 69, 93-105
12. Francoisi, S., De Giovanni, F., Tomkinson, M.J., 1991, Groups with Chernikov conjugacy classes, **J. Austral. Math. Soc. (Series A)**, 50, 1-14
13. Asar, A.O., 1997, Barely transitive locally nilpotent p-groups. **J. London Math. Soc (2)**, 55, 357-362
14. Özcan, T., 1998, CC-gruplar, **Yüksek Lisans Tezi**
15. Otal, J., Peña, M., 1992, Nilpotent-by-Chernikov CC-groups, **J. Austral. Math. Soc. (Series A)**, 53, 120-130
16. Hartley, B., 1974, On the normalizer condition and barely transitive permutation groups, **Algebra and Logic** 13, 334-340
17. Hartley, B., 1973, A note on normalizer condition. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, 74, 11-15

- 18.Kuzucuoğlu, M., 1990, Barely transitive permutation groups, **Arch. Math.**,55,521-532
- 19.Dixon, Martyn R., 1994, Sylow theory formations and Fitting classes in locally finite groups, **Series in Algebra**, Vol.2
- 20.Tomkinson, M.J., 1984, FC-groups, **Pitman-Boston-London-Melbourne**
- 21.Lennox, J.D., Stonehewer, S.E., 1997, Subnormal subgroups of groups, **Clarendon Press. , Oxford**
- 22.Robinson, D.J.S., 1982, A course in the theory of groups, **Springer-Verlag-New York-Heidelberg-Berlin**
- 23.Otal, J., Peña, M., 1988, Minimal non CC-groups, **Communications in Algebra**, 16 (6), 1231-1242
- 24.Otal, J., Peña, M., Tomkinson, M.J., 1991, Locally inner automorphisms of CC-groups, **Journal of Algebra**, 141, 382-398
- 25.Arikan, Aynur, 1996, Her öz altgrubu NC-grup olan lokal nilpotent p-grupları, **Doktora Tezi**

ÖZGEÇMİŞ

Sevgi ATLIHAN 1968 yılında Ankara’da doğdu. İlk öğrenimini Eskişehir Porsuk İlk Okulu’nda , orta öğrenimini Eskişehir Cumhuriyet Lise’si ve Nevşehir Kız Öğretmen Lise’sinde tamamladı. Üniversite lisans öğrenimini Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı’nda tamamladı.

Gazi Üniversitesi Fen BilimleriEnstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisansını tamamladı. Halen Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.