



**MINKOWSKI 3-UZAYINDA
SPACELİKE NORMALLİ
EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN
KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeliha GENÇER

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeliha GENÇER

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELİKE NORMALLİ
EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN KÜRESEL
GÖSTERGE EĞRİLERİ

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

TEZ ONAY SAYFASI

Zeliha GENÇER tarafından hazırlanan “Minkowski 3-Uzayında Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Küresel Gösterge Eğrileri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 08/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özgür KALKAN

Başkan : Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon MYO

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

..... /..... /..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Bekir YALÇIN

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

08 / 08/ 2024

Zeliha GENÇER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELİKE NORMALLİ EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ

Zeliha GENÇER

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özgür KALKAN

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır. Bu bölümde küresel gösterge eğrileri ve equiform geometriye göre eğriler ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde Minkowski uzayı ve Minkowski uzayında equiform geometri hakkında temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike asli normale sahip equiform spacelike eğrilerin küresel gösterge eğrileri incelenmiştir. Ayrıca bu eğrilere ait örnekler verilerek şekilleri çizilmiştir.

2024, vi + 37 sayfa

Anahtar kelimeler: Minkowski uzayı, Frenet vektörleri, Equiform eğriler, Küresel gösterge eğrileri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SPHERICAL INDICATRIX CURVES OF EQUIFORM SPACELIKE CURVES WITH SPACELIKE NORMAL IN MINKOWSKI 3-SPACE

Zeliha GENÇER

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özgür KALKAN

This study consists of three chapters.

The first chapter is the entrance of the study. In this chapter, information in the literature about studies on spherical indicatrix curves and curves according to equiform geometry are given.

In the second chapter, basic definitions on Minkowski space and equiform geometry in Minkowski space are given.

The third chapter is the original part of the work.

In the third chapter spherical indicatrix curves of equiform spacelike curves with spacelike principal normal are examined in 3 dimensional Minkowski space. Moreover, examples of these curves and figures are given.

2024, vi + 37 sayfa

Keywords: Minkowski space, Frenet frames, Equiform curves, Spherical indicatrix of curves.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli vakitlerini esirgemedi bana ayıran, detaylı çalışma tarzı ve yapmış olduğu katkılarla desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Özgür KALKAN' a en derin teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Tez savunma sınavımda değerli katkılarını sunan Sayın Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK ve Sayın Doç. Dr. HATİCE KUŞAK SAMANCI hocalarıma teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca her türlü manevi destek ve fedakârlıklarından dolayı aileme, özellikle eşim Ömer Faruk SİĞİNAN 'a ve anneannem Fatma ASLAN' a sevgi, saygı ve teşekkürü bir borç bilirim.

Zeliha GENÇER

AFYONKARAHİSAR 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR	3
2.1 E_1^3 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	3
2.2 E_1^3 Minkowski Uzayında Equiform Eğrilerin Frenet Formülleri	6
3.MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELİKE NORMALLİ EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN GÖSTERGE EĞRİLERİ.....	9
3.1 Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Teğet Gösterge Eğrileri	9
3.2 Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Asli Normal Gösterge Eğrileri	14
3.3 Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Binormal Gösterge Eğrileri	19
4. TARTIŞMA ve SONUÇ	32
5. KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

E_1^3	3-boyutlu Minkowski Uzayı
$\square$	Reel sayılar
V	Vektör Uzayı
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\times$	Dış çarpım
$\ , \ $	Norm
t	Teğet vektör alanı
n	Asli normal vektör alanı
b	Binormal vektör alanı
κ	Eğrilik
τ	Burulma
T	Equiform teğet vektör alanı
N	Equiform aslinormal vektör alanı
B	Equiform binormal vektör alanı
κ_1	Birinci equiform eğriliği
κ_2	İkinci equiform eğriliği
β_T	β eğrisinin teğet gösterge eğrisi
β_N	β eğrisinin asli normal gösterge eğrisi
β_B	β eğrisinin binormal gösterge eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1 $C(\sigma)$ eğrisi	30
Şekil 3.2 $C_T(\sigma)$ teğet gösterge eğrisi.....	30
Şekil 3.3 $C_N(\sigma)$ asli normal gösterge eğrisi.....	31
Şekil 3.4 $C_B(\sigma)$ binormal gösterge eğrisi.....	31
Şekil 3.5 $C(\sigma)$ eğrisi ve küresel gösterge eğrisi	32

1.GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin eğriler teorisi konusu, uzun zamandır üzerinde çalışılan alanlardan birisidir. Eğrilerin kullanım alanları oldukça geniştir. Eğriler, mühendislik, fizik, bilgisayar grafikleri, robotik ve daha birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Bu teorenin geliştirilmesi ve anlaşılması, bu alanlarda yapılan çalışmalara büyük katkılar sağlamaktadır. Örneğin helis eğrileri, hayvan boynuzlarında, deniz kabuklarında ve en önemlisi DNA molekül yapısında görülür. En çok bilinen örneği vidadır. Eğri türlerinin farklı alanlardaki kullanımlarını görmek de mümkündür. Mesela eliptik eğriler kriptografide, Bezier eğrileri düzgün eğrileri modellemek için bilgisayar grafiklerinde kullanılmaktadır. İki ya da daha fazla eğri arasında matematiksel bir ilişki kurularak eğri teorileri de elde edilmiştir. Bu tür eğrilerin en iyi bilinen örnekleri, involüt-evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri, Mannheim eğri çiftleridir.

Küresel gösterge eğrileri de bu türden eğri sınıfına girmektedir ve yoğun olarak çalışılan eğrilerden birisidir. Küresel gösterge eğrisi “ α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri birim kürenin merkezine yerleştirildiğinde uç noktaları birim küre yüzeyi üzerinde küresel gösterge eğrilerini oluştururlar” esasına dayanmaktadır. Riemann geometride uzay eğrilerinin küresel gösterge eğrileri Lipschutz (1969) Chung (1982) ve Shikin (1995) tarafından incelenmiştir. Ali (2009) ise Öklid uzayında eğrilerin küresel göstergelerini araştırmıştır. Minkowski uzayındaki eğrilerin küresel gösterge eğrileri ise Bilici ve Ali (2011) Bilici ve Çalışkan (2017) Bilici ve Çalışkan (2019) tarafından yapılan çalışmalarda incelenmiştir. Arfah (2020) 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike eğrilerin küresel göstergelerinin karakterizasyonlarını vermişlerdir.

Çizgisel geometri, uzaydaki doğruların ve doğrusal elemanların geometrik özelliklerini inceleyen bir matematik dalıdır. Bu dal, özellikle kinematik, mühendislik, bilgisayar mühendisliği ve robotik gibi alanlarda geniş uygulamalara sahiptir.

Equiform eğriler ise çizgisel geometrinin yeni ve dikkat çeken uygulamalarından biridir. Equiform eğriler, belirli geometrik ve kinematik özelliklere sahip eğriler olarak tanımlanır. Bu eğriler hakkında yapılan ilk önemli çalışma, Boris Odehnal vd. (2006) tarafından "Equiform Kinematic and the Geometry of Line Elements" başlığı altında yayınlanmıştır. Uzay eğrileri ve yüzeylerinin equiform geometrisi, birçok matematikçinin

ilgi ve araştırma konusu olmuştur. Bu durum, equiform geometrisinin diğer geometrilerin bir uzantısı olduğu düşüncesinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple birçok farklı uzayda equiform geometri üzerine çalışmalar yapılmıştır. 3- boyutlu Minkowski uzayında equiform çatıya göre timelike normal eğriler Elsayied vd. (2017) tarafından incelenmiştir. Yapılan diğer bir çalışmada ise Elsayied vd. (2018) 3- boyutlu Minkowski uzayında equiform Bishop çatıya göre spacelike normal eğrileri ele almışlardır. S Solouma ve Mahmoud (2019), hiperbolik küre üzerinde spacelike equiform-Bishop Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Elsharkawy (2020) 3- boyutlu Minkowski uzayında timelike asli normale sahip equiform spacelike eğrilerin involüt evolüt eğrilerinin karakterizasyonlarını araştırmışlardır. Pavkovic ve Kamenarovic (1987), 3-boyutlu Galile uzayında eğrilerin equiform geometrisi ele almışlardır. Kızıltuğ ve Yaylı (2014), Galile uzayında $AW(k)$ tipli Bertrand eğrilerinin equiform geometrisini incelemişlerdir. Zlatko ve Blaenka Divjak (2008), 3-boyutlu pseudo-Galile uzayında eğrilerin equiform diferensiyel geometrisini ele almışlardır. Tashkandy vd. (2022), 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike normal eğrileri incelemişlerdir. 4-boyutlu Minkowski uzayında equiform eğrilerin diferensiyel geometrisi Abdel-Aziz vd. (2015) tarafından araştırılmıştır. 4-boyutlu Bulut ve Bektaş (2020), 4-boyutlu Minkowski uzayında equiform spacelike eğriler üzerinde k -tipli özel helis eğrilerini araştırmışlardır. Solouma (2017), 3-boyutlu Minkowski uzayında özel equiform Smarandache eğrilerini araştırmıştır. Aydın ve Ergüt (2013), 4-boyutlu Galile uzayında eğrilerin equiform diferansiyel geometrisini ele almışlardır. Solouma (2020), 4-boyutlu Minkowski uzayında ikinci binormal vektörü timelike olan spacelike eğrilerin Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Mahmoud ve Noreldeenn (2020), tarafından 4-boyutlu Minkowski uzayında spacelike eğrilerin elastik olmayan hareketleri ele alınmıştır. Bulut ve Bektaş (2020), tarafından equiform spacelike eğriler üzerinde özel helisler araştırılmıştır. Kalkan (2024), 4-boyutlu Minkowski uzayında equiform rectifiyan, normal ve osculatör eğrileri incelemiştir. Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında equiform Frenet çatıya göre spacelike asli normale sahip spacelike eğrilerin küresel gösterge eğrileri incelenmiştir. Spacelike asli normale sahip equiform spacelike eğrilerin teğet gösterge, asli normal gösterge ve binormal gösterge eğrilerinin equiform Frenet çatı elemanları esas eğrinin equiform Frenet çatı elemanları cinsinden elde edilerek bu eğriler ile ilgili örnekler verilerek Maple programı ile çizimleri yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1 E_1^3 Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.2.1 V bir lineer vektör uzayı ve $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik lineer form olsun.

- (i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- (ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,
- (iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,
- (iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif yarı- tanımlı,
- (v) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle = 0$ iken $v = 0$ olmak zorunda ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna non-dejenere, aksi halde dejenere dir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2 $\langle, \rangle, V$ reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik lineer form ve W, V nin herhangi bir alt uzayı olsun. $\langle, \rangle$ nin W üzerinde kısıtlaması $\langle, \rangle|_W$, negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3 Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik lineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir ve üzerinde skalar çarpım tanımlı olan V reel vektör uzayına skalar çarpım uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4 V skalar çarpım uzayının indeksi $\nu=1$ ve boyutu $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayı bir Minkowski vektör uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5 E^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayı olsun. $\forall u, v \in E^3$ ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: E^3 \times E^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle &= u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

- (i) Simetrik,
- (ii) Bilinear,

(iii) non-dejenere ($\forall u \in E^3$ için $\langle u^T, u^T \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$) dır.

E^3 üzerinde tanımlanan bu dönüşüme Minkowski metriği denir ve $E_1^3 = \{E^3, \langle, \rangle\}$ ikilisine de 3-boyutlu Minkowski uzayı adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6 $\forall u \in E_1^3$ için

- (i) $\langle u, u \rangle < 0$ ise timelike vektör (zaman benzeri),
 - (ii) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u spacelike vektör (uzay benzeri),
 - (iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ise null vektör (ışık benzeri)
- denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7 $u, v \in E_1^3$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise, bu durumda u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir. Eğer u timelike vektör ise bu durumda v spacelike vektördür (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8 $\forall u \in E_1^3$ için $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörünün normu

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|} = \sqrt{|u_1^2 + u_2^2 - u_3^2|}$$

biçiminde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9 $\forall u \in E_1^3$ için

- (i) $\|u\| > 0$
 - (ii) $\|u\| = -1$ ise u vektörüne birim timelike vektör,
 - (iii) $\|u\| = 1$ ise u vektörüne birim spacelike vektör,
 - (iv) u bir timelike vektör ise $\|u\|^2 = -\langle u, u \rangle$,
 - (v) u bir spacelike vektör ise $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$
- dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10 E_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$u = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (dış çarpım) denir ve $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere

$$u \times v = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

vektörel çarpımı

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_3 = -e_1$$

dir (Akutagawa ve Nishikawa 1990).

Tanım 2.1.11 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna E_1^3 de bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.12 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektörü t olmak üzere;

- (i) $\langle t, t \rangle > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- (ii) $\langle t, t \rangle < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- (iii) $\langle t, t \rangle = 0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.13 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ bir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda, α eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi denir. $a, b \in I$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu $\int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.14 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.15 $\alpha = \alpha(s)$ regüler birim hızlı bir eğri ve Frenet vektörleri t , n ve b olsun.

(i) α normali spacelike veya timelike olan spacelike eğri ise Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}, \quad b(s) = \varepsilon(t \times n)(s),$$

$$t' = \kappa n, \quad n' = -\varepsilon \kappa t + \tau b, \quad b' = \tau n, \quad (2.1.3)$$

$$\langle t, t \rangle = 1, \quad \langle n, n \rangle = \pm 1 = \varepsilon, \quad \langle b, b \rangle = -\varepsilon$$

$$\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle = 0$$

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|, \quad \tau(s) = \left(\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \right)(s), \quad (2.1.4)$$

$$t \times n = \varepsilon b, \quad n \times b = -t, \quad b \times t = -\varepsilon n$$

dir.

(ii) α timelike bir eğri ise bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}, \quad b(s) = -(t \times n)(s),$$

$$t'(s) = \kappa(s)n(s), \quad n'(s) = \kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s), \quad b'(s) = \tau(s)n(s),$$

$$\langle t, t \rangle = -1, \quad \langle n, n \rangle = 1, \quad \langle b, b \rangle = 1, \quad (2.1.5)$$

$$\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle = 0,$$

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|, \quad \tau(s) = \left(\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \right)(s)$$

$$t \times n = -b, \quad n \times b = -t, \quad b \times t = n$$

dir (Uğurlu 1997).

2.2 E_1^3 Minkowski Uzayında Equiform Eğrilerin Frenet Formülleri

Tanım 2.2.1 $\beta: I \rightarrow E_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin equiform parametresi

$$\sigma = \int \frac{ds}{d\rho} = \int \kappa ds \quad (2.2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $\rho = \frac{1}{\kappa}$ eşitliği β eğrisinin eğrilik yarıçapıdır. Bu durumda

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} \quad (2.2.2)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, β eğrisinin equiform değişmez parametresi σ ya göre Frenet formüllerini tanımlayalım.

$$T = \frac{d\beta}{d\sigma} \quad (2.2.3)$$

vektörü β eğrisinin equiform tanjant vektörü olarak adlandırılır. Buradan

$$T = \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \frac{d\beta}{ds} \cdot \rho = \rho t \quad (2.2.4)$$

olarak hesaplanır. Burada t , β eğrisinin tanjant vektörüdür. β eğrisinin, equiform birim normal vektörünü ve equiform binormal vektörünü sırasıyla

$$N = \rho n, \quad B = \rho b \quad (2.2.5)$$

olarak tanımlayalım. Burada n ve b sırasıyla β eğrisinin normal ve binormal vektörleridir. Bu takdirde β nin Frenet üç ayaklısı olarak adlandırılan $\{T, N, B\}$, E_1^3 in equiform bir ortogonal bir bazıdır (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Tanım 2.2.2 $\kappa_1 : I \rightarrow R$ olmak üzere

$$\kappa_1 = \frac{d\rho}{ds} \quad (2.2.6)$$

fonksiyonuna β eğrisinin 1.equiform eğriliği denir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Tanım 2.2.3 $\kappa_2 : I \rightarrow R$ olmak üzere

$$\kappa_2 = \frac{\tau}{\kappa} \quad (2.2.7)$$

fonksiyonuna β eğrisinin 2.equiform eğriliği denir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Tanım 2.2.4 $\beta : I \rightarrow E_1^3$ bir equiform eğri olsun. β eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere;

(i) $\langle T, T \rangle = \rho^2 > 0$ veya $T = 0$ ise β eğrisine equiform spacelike eğri,

- (ii) $\langle T, T \rangle = \rho^2 < 0$ ise β eğrisine equiform timelike eğri,
 (iii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise β eğrisine equiform null eğri denir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Şimdi β eğrisinin equiform parametreye göre Frenet formüllerini verelim.

- (i) Eğer β eğrisi, normali spacelike olan equiform spacelike bir eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 \\ -1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

şeklindedir. Burada

$$\langle T, T \rangle = \rho^2, \quad \langle N, N \rangle = \rho^2, \quad \langle B, B \rangle = -\rho^2$$

$$\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0.$$

- (ii) Eğer β eğrisi, normali timelike olan equiform spacelike bir eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 \\ 1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

şeklindedir. Burada

$$\langle T, T \rangle = \rho^2, \quad \langle N, N \rangle = -\rho^2, \quad \langle B, B \rangle = \rho^2$$

$$\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0.$$

- (ii) Eğer β eğrisi equiform timelike bir eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 \\ 1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & \kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

şeklindedir. Burada

$$\langle T, T \rangle = -\rho^2, \quad \langle N, N \rangle = -\rho^2, \quad \langle B, B \rangle = \rho^2$$

$$\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$$

dir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

3. SPACELIKE NORMALLI EQUIFORM SPACELIKE EĞRİLERİN KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında equiform geometriye göre normali spacelike olan spacelike eğrilerin küresel gösterge eğrilerinin Frenet çatı elemanları elde edilecektir.

3.1 Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Teğet Gösterge Eğrileri

Tanım 3.1 $\beta: I \rightarrow E_1^3$ birim hızlı eğrisi $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ile verilen bir eğri olsun. (β) eğrisinin $T(s), N(s), B(s)$ Frenet vektörlerinin başlangıç noktaları eğriyi çizerken uç noktalarının hiperbolik birim küresi veya Lorentz birim küresi üzerinde meydana getirdiği eğriye $\beta(s)$ eğrisinin teğetler göstergesi (birincil küresel göstergesi), asli normaller göstergesi (ikincil küresel göstergesi) ve binormaller göstergesi (üçüncül küresel göstergesi) denir. Bu gösterge eğrisinin denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\beta_T &= T, \\ \beta_N &= N, \\ \beta_B &= B\end{aligned}$$

şeklindedir (Çalışkan ve Uğurlu, 2012).

Teorem 3.1.1 $\beta: I \rightarrow E_1^3$ spacelike eğrisi $\{T, N, B\}$ equiform Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin $\beta_T = T$ teğet gösterge eğrisi spacelike bir eğridir.

İspat 3.1.1 $\beta_T = T$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\beta_T' = \kappa_1 T + N, \quad (3.1.1)$$

$$\langle \beta_T', \beta_T' \rangle = \rho^2 (\kappa_1^2 + 1) > 0 \quad (3.1.2)$$

olduğundan β_T spacelike eğridir.

Teorem 3.1.2 $\beta_T = T$ eğrisi, birim hızlı β spacelike eğrisinin teğet gösterge eğrisi olsun. Bu takdirde β_T teğet gösterge eğrisinin equiform Frenet çatı vektörleri $\{T_T, N_T, B_T\}$ sırasıyla

$$\begin{aligned} T_T(\sigma_T) &= \frac{\kappa_1 T + N}{\rho \sqrt{\kappa_1^2 + 1}}, \\ N_T(\sigma_T) &= \frac{\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B}{\rho \sqrt{|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2|}}, \\ B_T(\sigma_T) &= \varepsilon \frac{-\lambda_3 T - \kappa_1 \lambda_3 N + (\kappa_1 \lambda_2 - \lambda_1) B}{\rho^2 \sqrt{\kappa_1^2 + 1} \sqrt{|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2|}} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \kappa_1' - \kappa_1^2 - 1, \\ \lambda_2 = \kappa_1^3 + \kappa_1 - \kappa_1 \kappa_1', \\ \lambda_3 = \kappa_2 \kappa_1^2 + \kappa_2 \end{cases}$$

dir.

İspat β_T teğet gösterge eğrisinin equiform parametresi σ_t olsun. $\beta_T = T$ ifadesinin σ equiform parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \beta_T'(\sigma_T) &= \frac{d\beta_T}{d\sigma_T} \cdot \frac{d\sigma_T}{d\sigma} = \kappa_1 T + N, \\ &= T_T(\sigma_T) \frac{d\sigma_T}{d\sigma} = \kappa_1 T + N, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.4) eşitliğinin her iki tarafının normu alınırsa

$$\|T_T(\sigma_T)\| \cdot \left\| \frac{d\sigma_T}{d\sigma} \right\| = \rho \sqrt{\kappa_1^2 + 1} \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma_T}{d\sigma} \right\| = \rho \sqrt{\kappa_1^2 + 1} \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) eşitliği (3.1.4) eşitliğinde kullanılırsa β_T eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_T(\sigma_T) = \frac{\kappa_1 T + N}{\rho \sqrt{\kappa_1^2 + 1}}, \quad (3.1.6)$$

şeklinde elde edilir.

(3.1.6) eşitliğinin σ parametresine göre her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{aligned} T'_T(\sigma_T) &= \frac{dT_T}{d\sigma_T} \frac{d\sigma_T}{d\sigma} \\ &= \frac{\left[((\kappa'_1 T + \kappa_1(\kappa_1 T + N) - T + \kappa_1 N + \kappa_2 B) \rho \sqrt{\kappa_1^2 + 1}) - \left(\frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{\kappa_1^2 + 1} + \rho \frac{\kappa_1 \kappa'_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + 1}} \right) (\kappa_1 T + N) \right]}{\rho^2 (\kappa_1^2 + 1)} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

eşitliğinde $\frac{d\rho}{ds} = \kappa_1$ ve $\frac{ds}{d\sigma} = \rho$ yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{dT_T}{d\sigma_T} = \frac{\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B}{\rho^2 (\kappa_1^2 + 1)^2}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \kappa'_1 - \kappa_1^2 - 1, \\ \lambda_2 = \kappa_1^3 + \kappa_1 - \kappa_1 \kappa'_1, \\ \lambda_3 = \kappa_2 \kappa_1^2 + \kappa_2 \end{cases}$$

şeklindedir. (3.1.7) bağıntısının her iki tarafının normu alınır

$$\|T'_T(\sigma_T)\| = \sqrt{\frac{\rho^2 |\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2|}{\rho^4 (\kappa_1^2 + 1)^4}} = \frac{\sqrt{|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2|}}{\rho (\kappa_1^2 + 1)^2} \quad (3.1.8)$$

elde edilir. β_T eğrisinin equiform asli normal vektörü hesaplanırsa

$$N_T(\sigma_T) = \frac{T'_T(\sigma_T)}{\|T'_T(\sigma_T)\|}, \quad (3.1.9)$$

olduğundan

$$N_T(\sigma_T) = \frac{\frac{dT_T}{d\sigma_T}}{\left\| \frac{dT_T}{d\sigma_T} \right\|} = \frac{\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B}{\rho \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} \quad (3.1.10)$$

şeklinde elde edilir.

Burada β_T teğet gösterge eğrisi normali spacelike veya timelike olan spacelike bir eğri olduğundan β_T eğrisinin equiform binormal vektörü

$$B_T(\sigma_T) = \varepsilon(T_T(\sigma_T) \times N_T(\sigma_T))$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} B_T(\sigma_T) &= \varepsilon \frac{\begin{vmatrix} -T & -N & B \\ \kappa_1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}}{\rho^2 \sqrt{\kappa_1^2 + 1} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} \\ &= \varepsilon \frac{-\lambda_3 T - \kappa_1 \lambda_3 N + (\kappa_1 \lambda_2 - \lambda_1) B}{\rho^2 \sqrt{\kappa_1^2 + 1} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.3 β ve β_T teğet gösterge eğrisinin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla $\kappa_1, \kappa_2, (\kappa_1)_T, (\kappa_2)_T$ ile gösterilirse

$$(\kappa_1)_T(\sigma_T) = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}}{\rho(\kappa_1^2 + 1)^2}, \quad (3.1.12)$$

$$(\kappa_2)_T(\sigma_T) = \frac{-\kappa_2 \eta_1 + \kappa_1 \kappa_2 \eta_2 - (\kappa_1^2 - \kappa_1' + 1) \eta_3}{\left| \kappa_2^2 (\kappa_1^2 + 1) - (\kappa_1^2 - \kappa_1' + 1)^2 \right|} \quad (3.1.13)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \kappa_1' - \kappa_1^2 - 1, \\ \lambda_2 = \kappa_1^3 + \kappa_1 - \kappa_1 \kappa_1', \\ \lambda_3 = \kappa_2 \kappa_1^2 + \kappa_2 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \eta_1 = \kappa_1'' + 3\kappa_1 \kappa_1' + \kappa_1^3 - 3\kappa_1, \\ \eta_2 = 3\kappa_1' + 3\kappa_1^2 - 1 + \kappa_2^2, \\ \eta_3 = 3\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2' \end{cases}$$

dir.

İspat β_T eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_T(\sigma_T)$ olmak üzere eğriliğin tanımından

$(\kappa_1)_T(\sigma_T) = \|T_T'(\sigma_T)\|$ olduğundan (3.1.8) eşitliğinden

$$(\kappa_1)_T(\sigma_T) = \|T_T'(\sigma_T)\| \quad (3.1.14)$$

olduğundan

$$(\kappa_1)_T(\sigma_T) = \frac{\sqrt{|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2|}}{\rho(\kappa_1^2 + 1)^2} \quad (3.1.15)$$

şeklinde elde edilir.

$\beta_T = T$ eşitliğinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanırsa

$$\beta_T' = \kappa_1 T + N,$$

$$\beta_T'' = (\kappa_1' + \kappa_1^2 - 1)T + 2\kappa_1 N + \kappa_2 B,$$

$$\beta_T''' = (\kappa_1'' + 3\kappa_1 \kappa_1' + \kappa_1^3 - 3\kappa_1)T + (3\kappa_1' + 3\kappa_1^2 - 1 + \kappa_2^2)N + (3\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2')B$$

şeklinde bulunur.

$\beta_T' \times \beta_T''$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$\beta'_T \times \beta''_T = \begin{vmatrix} -T & -N & B \\ \kappa_1 & 1 & 0 \\ \kappa'_1 + \kappa_1^2 - 1 & 2\kappa_1 & \kappa_2 \end{vmatrix} \quad (3.1.16)$$

$$\beta'_T \times \beta''_T = -\kappa_2 T + \kappa_1 \kappa_2 N + (\kappa_1^2 - \kappa'_1 + 1) B$$

bulunur. (3.1.16) ifadenin normu alınır

$$\begin{aligned} \|\beta'_T \times \beta''_T\| &= \sqrt{(\kappa_2)^2 \rho^2 + (\kappa_1 \kappa_2)^2 \rho^2 - (\kappa_1^2 - \kappa'_1 + 1)^2 \rho^2}, \\ \|\beta'_T \times \beta''_T\|^2 &= \rho^2 |\kappa_2^2 (\kappa_1^2 + 1) - (\kappa_1^2 - \kappa'_1 + 1)^2| \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\langle \beta'_T \times \beta''_T, \beta'''_T \rangle = \rho^2 (-\kappa_2 \eta_1 + \kappa_1 \kappa_2 \eta_2 - (\kappa_1^2 - \kappa'_1 + 1) \eta_3)$$

bulunur.. β_T eğrisinin $(\kappa_2)_T(\sigma_T)$ ikinci equiform eğriliği

$$(\kappa_2)_T(\sigma_T) = \frac{\langle \beta'_T \times \beta''_T, \beta'''_T \rangle}{\|\beta'_T \times \beta''_T\|^2} \quad (3.1.17)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \kappa_1'' + 3\kappa_1 \kappa'_1 + \kappa_1^3 - 3\kappa_1, \\ \eta_2 &= 3\kappa'_1 + 3\kappa_1^2 - 1 + \kappa_2^2, \\ \eta_3 &= 3\kappa_1 \kappa_2 + \kappa'_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(\kappa_2)_T(\sigma_T) = \frac{-\kappa_2 \eta_1 + \kappa_1 \kappa_2 \eta_2 - (\kappa_1^2 - \kappa'_1 + 1) \eta_3}{|\kappa_2^2 (\kappa_1^2 + 1) - (\kappa_1^2 - \kappa'_1 + 1)^2|} \quad (3.1.18)$$

şeklinde hesaplanır.

3.2 Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Asli Normal Gösterge Eğrileri

Teorem 3.2.1 $\beta: I \rightarrow E_1^3$ spacelike eğrisi $\{T, N, B\}$ equiform Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin $\beta_N = N$ asli normal gösterge eğrisi spacelike veya timelike bir eğridir.

İspat 3.2.1 $\beta_N = N$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\beta_N' = -T + \kappa_1 N + \kappa_2 B, \quad (3.2.1)$$

$$\langle \beta_N', \beta_N' \rangle = \rho^2 (1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2), \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusu olur.

- i. $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 > 0$ ise asli normal gösterge eğrisi spacelike eğridir.
- ii. $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 < 0$ ise asli normal gösterge eğrisi timelike eğridir.

Teorem 3.2.2 $\beta_N = N$ eğrisi, birim hızlı β spacelike eğrisinin asli normal gösterge eğrisi olsun. Bu takdirde β_N asli normal gösterge eğrisinin equiform Frenet çatı vektörleri $\{T_N, N_N, B_N\}$ sırasıyla

a) $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 > 0$ ise

$$\begin{aligned} T_N(\sigma_N) &= \frac{-T + \kappa_1 N + \kappa_2 B}{\rho \sqrt{1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2}}, \\ N_N(\sigma_N) &= \frac{\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B}{\rho \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2}}, \\ B_N(\sigma_N) &= \varepsilon \frac{(\omega_2 \kappa_2 - \omega_3 \kappa_1)T - (\omega_3 + \omega_1 \kappa_2)N - (\omega_2 + \kappa_1 \omega_1)B}{\rho^2 \sqrt{1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2}} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

şeklinde elde edilir.

b) $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 < 0$ ise

$$\begin{aligned}
T_N(\sigma_N) &= \frac{-T + \kappa_1 N + \kappa_2 B}{\rho \sqrt{|1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2|}}, \\
N_N(\sigma_N) &= \frac{\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B(\sigma)}{\rho \sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}}, \\
B_N(\sigma_N) &= \frac{(\omega_3 \kappa_1 - \omega_2 \kappa_2)T + (\omega_3 + \omega_1 \kappa_2)N + (\omega_2 + \kappa_1 \omega_1)B}{\rho^2 \sqrt{|1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2|} \sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}}
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \omega_1 = \kappa_1 \kappa_1' - \kappa_2 \kappa_2' - \kappa_1^3 - \kappa_1 - \kappa_1 \kappa_2^2, \\ \omega_2 = -1 - \kappa_2 \kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2^4 + 2\kappa_2^2 - \kappa_1' \kappa_2^2 + \kappa_1' + \kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa_1^2, \\ \omega_3 = -\kappa_2 \kappa_1' \kappa_1 + \kappa_1^3 \kappa_2 - \kappa_2^3 \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2' \kappa_1^2 + \kappa_2' \end{cases}$$

dir.

İspat $\beta_N = N$ asli normal gösterge eğrisinin equiform parametresi σ_N olsun. $\beta_N = N$ ifadesinin σ parametresine göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
\beta_N'(\sigma_N) &= \frac{d\beta_N}{d\sigma_N} \cdot \frac{d\sigma_N}{d\sigma} = -T + \kappa_1 N + \kappa_2 B, \\
&= T_N(\sigma_N) \frac{d\sigma_N}{d\sigma} = -T + \kappa_1 N + \kappa_2 B
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$\langle \beta_N', \beta_N' \rangle = \rho^2(1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)$ olduğundan $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 > 0$ ise β_N spacelike ve $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 < 0$ ise β_N eğrisi timelike bir eğri olacaktır. (3.2.5) eşitliğinin normu alınır

$$\|T_N(\sigma_N)\| \cdot \left\| \frac{d\sigma_N}{d\sigma} \right\| = \rho \sqrt{|1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2|} \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma_N}{d\sigma} \right\| = \rho \sqrt{|1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2|}, \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

a) $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 > 0$ kabul edelim. (3.2.6) eşitliğinden β_N eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_N(\sigma_N) = \frac{-T + \kappa_1 N + \kappa_2 B}{\rho \sqrt{|1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2|}}, \tag{3.2.7}$$

şeklinde elde edilir. (3.2.7) eşitliğinin σ_N parametresine göre her iki tarafının türevi alınır

$$T'_N(\sigma_N) = \frac{dT_N}{d\sigma_N} \frac{d\sigma_N}{d\sigma} = \frac{\left[\begin{aligned} &\left(-(\kappa_1 T + N) + \kappa'_1 N + \kappa_1(-T + \kappa_1 N + \kappa_2 B) \right) \rho \sqrt{1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2} \\ &+ (\kappa'_1 B + (\kappa_2 N + \kappa_1 B) \kappa_2) \end{aligned} \right] - \left(\frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2} + \rho \frac{\kappa_1 \kappa'_1 - \kappa_2 \kappa'_2}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \right) (-T + \kappa_1 N + \kappa_2 B)}{\rho^2 (1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)} \quad (3.2.8)$$

eşitliğinde $\frac{d\rho}{ds} = \kappa_1$ ve $\frac{ds}{d\sigma} = \rho$ yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{dT_N}{d\sigma_N} = \frac{\omega_1 T(\sigma) + \omega_2 N(\sigma) + \omega_3 B(\sigma)}{\rho^2 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1)^2} \quad (3.2.9)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \omega_1 = \kappa_1 \kappa'_1 - \kappa_2 \kappa'_2 - \kappa_1^3 - \kappa_1 - \kappa_1 \kappa_2^2, \\ \omega_2 = -1 - \kappa_2 \kappa'_2 \kappa_1 - \kappa_2^4 + 2\kappa_2^2 - \kappa'_1 \kappa_2^2 + \kappa'_1 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa_1^2, \\ \omega_3 = -\kappa_2 \kappa'_1 \kappa_1 + \kappa_1^3 \kappa_2 - \kappa_2^3 \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa'_2 \kappa_1^2 + \kappa'_2 \end{cases}$$

şeklindedir. (3.2.9) bağıntısının her iki tarafının normu alınır

$$\|T'_N(\sigma_N)\| = \sqrt{\frac{\rho^2 |\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}{\rho^4 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1)^4}} = \frac{\sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}}{\rho (\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1)^2} \quad (3.2.10)$$

elde edilir β_N eğrisinin equiform asli normal vektörü hesaplanırsa

$$N_N(\sigma_N) = \frac{T'_N(\sigma_N)}{\|T'_N(\sigma_N)\|} \quad (3.2.11)$$

olduğundan

$$N_N = \frac{\frac{dT_N}{d\sigma_N}}{\left\| \frac{dT_N}{d\sigma_N} \right\|} = \frac{\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B}{\rho \sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi β_N eğrisinin equiform binormal vektörü

$$B_N(\sigma_N) = \varepsilon(T_N(\sigma_N) \times N_N(\sigma_N)), \quad (3.2.12)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} B_N(\sigma_N) &= \varepsilon \frac{\begin{vmatrix} -T & -N & B \\ -1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}}{\rho^2 \sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1} \sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}} \\ &= \varepsilon \frac{(\omega_2 \kappa_2 - \omega_3 \kappa_1)T - (\omega_3 + \omega_1 \kappa_2)N - (\omega_2 + \kappa_1 \omega_1)B}{\rho^2 \sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1} \sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

elde edilir.

b) $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 < 0$ durumunda ispat (a) ya benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3.2.3 β ve β_N normal gösterge eğrisinin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla

$\kappa_1, \kappa_2, (\kappa_1)_T, (\kappa_2)_T$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} (\kappa_1)_N(\sigma_N) &= \frac{\sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}}{\rho(1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2}, \\ (\kappa_2)_N(\sigma_N) &= \frac{\begin{bmatrix} (-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2) \mathcal{G}_1 \\ -\kappa_2' \mathcal{G}_2 - (1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2) \mathcal{G}_3 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} (-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2)^2 \\ +(\kappa_2')^2 - (1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2)^2 \end{vmatrix}}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \omega_1 = \kappa_1 \kappa_1' - \kappa_2 \kappa_2' - \kappa_1^3 - \kappa_1 - \kappa_1 \kappa_2^2, \\ \omega_2 = -1 - \kappa_2 \kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2^4 + 2\kappa_2^2 - \kappa_1' \kappa_2^2 + \kappa_1' + \kappa_1^2 \kappa_2^2 - \kappa_1^2, \\ \omega_3 = -\kappa_2 \kappa_1' \kappa_1 + \kappa_1^3 \kappa_2 - \kappa_2^3 \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2' \kappa_1^2 + \kappa_2' \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 = -3\kappa_1' - 3\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1, \\ \mathcal{G}_2 = \kappa_1^3 + 3\kappa_2 \kappa_1' + 3\kappa_1 \kappa_1' + 3\kappa_1 \kappa_2^2 + \kappa_1'' - 3\kappa_1, \\ \mathcal{G}_3 = 3\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2'' + \kappa_2^3 + 3\kappa_1 \kappa_2' + 3\kappa_1^2 \kappa_2 - \kappa_2 \end{cases}$$

dir.

İspat β_N eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_N(\sigma_N)$ olmak üzere eğriliğin tanımından

$(\kappa_1)_N(\sigma_N) = \|T_N'(\sigma_N)\|$ olduğundan (3.2.10) eşitliğinden

$$(\kappa_1)_N(\sigma_N) = \frac{\sqrt{|\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2|}}{\rho(1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2} \quad (3.2.14)$$

şeklinde elde edilir.

$\beta_N = N$ ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanırsa

$$\beta_N' = -T + \kappa_1 N + \kappa_2 B,$$

$$\beta_N'' = (-2\kappa_1)T + (-1 + \kappa_1' + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)N + (2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2')B,$$

$$\begin{aligned} \beta_N''' = & (-3\kappa_1' - 3\kappa_1^2 + 1 - \kappa_2^2)T + (\kappa_1^3 + 3\kappa_2 \kappa_1' + 3\kappa_1 \kappa_1' + 3\kappa_1 \kappa_2^2 + \kappa_1'' - 3\kappa_1)N \\ & + (3\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2'' + \kappa_2^3 + 3\kappa_2' \kappa_1 + 3\kappa_1^2 \kappa_2 - \kappa_2)B, \end{aligned}$$

elde edilir. $\beta_N' \times \beta_N''$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \beta_N' \times \beta_N'' &= \begin{vmatrix} -T & -N & B \\ -1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -2\kappa_1 & \kappa_1' + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1 & 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2' \end{vmatrix} \\ &= (-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2)T - \kappa_2' N + (1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2)B \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

şeklinde bulunur. (3.2.15) ifadenin normu alınır

$$\begin{aligned}\|\beta_N' \times \beta_N''\| &= \sqrt{(-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2)^2 \rho^2 + (\kappa_2')^2 \rho^2 - (1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2)^2 \rho^2} \\ \|\beta_N' \times \beta_N''\|^2 &= \rho^2 |(-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2)^2 + (\kappa_2')^2 - (1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2)^2|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 = -3\kappa_1' - 3\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + 1 \\ \mathcal{G}_2 = \kappa_1^3 + 3\kappa_2 \kappa_1' + 3\kappa_1 \kappa_1' + 3\kappa_1 \kappa_2^2 + \kappa_1'' - 3\kappa_1 \\ \mathcal{G}_3 = 3\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2'' + \kappa_2^3 + 3\kappa_1 \kappa_2' + 3\kappa_1^2 \kappa_2 - \kappa_2 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\langle \beta_N' \times \beta_N'', \beta_N''' \rangle = \rho^2 (-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2) \mathcal{G}_1 - \kappa_2' \mathcal{G}_2 - (1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2) \mathcal{G}_3$$

bulunur. Bu taktirde β_N eğrisinin $(\kappa_2)_N(\sigma_N)$ ikinci equiform eğriliği

$$(\kappa_2)_N(\sigma_N) = \frac{\langle \beta_N' \times \beta_N'', \beta_N''' \rangle}{\|\beta_N' \times \beta_N''\|^2}$$

eşitliğinden

$$(\kappa_2)_N(\sigma_N) = \frac{\begin{bmatrix} (-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2) \mathcal{G}_1 - \kappa_2' \mathcal{G}_2 \\ -(1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2) \mathcal{G}_3 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} (-\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 + \kappa_2^3 - \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2)^2 + (\kappa_2')^2 \\ -(1 - \kappa_1' - \kappa_2^2 + \kappa_1^2)^2 \end{vmatrix}} \quad (3.2.16)$$

şeklinde elde edilir.

3.3 Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Binormal Gösterge Eğrileri

Teorem 3.3.1 $\beta: I \rightarrow E_1^3$ spacelike eğrisi $\{T, N, B\}$ equiform Frenet çatısı ile verilen birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin $\beta_B = B$ binormal gösterge eğrisi spacelike veya timelike bir eğridir.

İspat 3.3.1 $\beta_B = B$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\beta_B' = \kappa_2 N + \kappa_1 B, \quad (3.3.1)$$

$$\langle \beta_B', \beta_B' \rangle = \rho^2 (\kappa_2^2 - \kappa_1^2), \quad (3.3.2)$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusu olur.

- i. $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 > 0$ ise binormal gösterge eğrisi spacelike eğridir.
- ii. $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 < 0$ ise binormal gösterge eğrisi timelike eğridir.

Teorem 3.3.2 $\beta_B = B$ eğrisi, birim hızlı β spacelike eğrisinin binormal gösterge eğrisi olsun. Bu takdirde β_B binormal gösterge eğrisinin equiform Frenet çatı vektörleri $\{T_B, N_B, B_B\}$ sırasıyla

a) $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 > 0$ ise

$$\begin{aligned} T_B(\sigma_B) &= \frac{\kappa_2 N + \kappa_1 B}{\rho \sqrt{|\kappa_2^2 - \kappa_1^2|}}, \\ N_B(\sigma_B) &= \frac{\psi_1 T + \psi_2 N + \psi_3 B}{\rho \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}, \\ B_B(\sigma_B) &= \varepsilon \frac{(\kappa_1 \psi_2 - \psi_3 \kappa_2) T - \psi_1 \kappa_1 N - \kappa_2 \psi_1 B}{\rho^2 \sqrt{|\kappa_2^2 - \kappa_1^2|} \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

şeklindedir.

b) $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 < 0$ ise

$$\begin{aligned}
T_B(\sigma_B) &= \frac{\kappa_2 N + \kappa_1 B}{\rho \sqrt{|\kappa_2^2 - \kappa_1^2|}}, \\
N_B(\sigma_B) &= \frac{\psi_1 T + \psi_2 N + \psi_3 B}{\rho \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}, \\
B_B(\sigma_B) &= \varepsilon \frac{(\psi_3 \kappa_2 - \kappa_1 \psi_2) T + \psi_1 \kappa_1 N + \kappa_2 \psi_1 B}{\rho^2 \sqrt{|\kappa_2^2 - \kappa_1^2|} \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \psi_1 = \kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2), \\ \psi_2 = \kappa_2^3 \kappa_1 - \kappa_1^3 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 \kappa_1 - \kappa_2' \kappa_1^2, \\ \psi_3 = \kappa_2^4 - \kappa_1^2 \kappa_2^2 + \kappa_1' \kappa_2^2 - \kappa_2' \kappa_1 \kappa_2 \end{cases}$$

dir.

İspat β_B binormal gösterge eğrisinin equiform parametresi σ_B olsun. $\beta_B = B$ ifadesinin σ parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta_B'(\sigma_B) &= \frac{d\beta_B}{d\sigma_B} \cdot \frac{d\sigma_B}{d\sigma} = \kappa_2 N + \kappa_1 B, \\
&= T_B(\sigma_B) \frac{d\sigma_B}{d\sigma} = \kappa_2 N + \kappa_1 B,
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

$\langle \beta_B', \beta_B' \rangle = \rho^2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)$ olduğundan $(\kappa_2^2 - \kappa_1^2) > 0$ ise β_B spacelike, $(\kappa_2^2 - \kappa_1^2) < 0$ ise timelike eğri olacaktır. (3.3.5) eşitliğinin normu alınırsa

$$\|T_B(\sigma_B)\| \cdot \left\| \frac{d\sigma_B}{d\sigma} \right\| = \rho \sqrt{|\kappa_2^2 - \kappa_1^2|} \Rightarrow \left\| \frac{d\sigma_B}{d\sigma} \right\| = \rho \sqrt{|\kappa_2^2 - \kappa_1^2|} \tag{3.3.6}$$

elde edilir.

a) $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 > 0$ kabul edelim. β_B eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_B(\sigma_B) = \frac{\kappa_2 N + \kappa_1 B}{\rho \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}}, \tag{3.3.7}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.7) eşitliğinin σ_B parametresine göre her iki tarafının türevi alınır

$$T'_B(\sigma_B) = \frac{dT_B}{d\sigma_B} \frac{d\sigma_B}{d\sigma} = \frac{\left[\left(-\kappa_2 T + (\kappa'_2 + 2\kappa_1 \kappa_2) N + (\kappa'_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2) B \right) \rho \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} - \left(\frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} + \rho \frac{(\kappa_2 \kappa'_2 - \kappa_1 \kappa'_1)}{\sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \right) (\kappa_2 N + \kappa_1 B) \right]}{\rho^2 \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}} \quad (3.3.8)$$

eşitliğinde $\frac{d\rho}{ds} = \kappa_1$ ve $\frac{ds}{d\sigma} = \rho$ yazılarak gerekli düzenlemeler yapılır

$$\frac{dT_B}{d\sigma_B} = \frac{\psi_1 T + \psi_2 N + \psi_3 B}{\rho^2 (\kappa_2^2 - \kappa_1^2)^2} \quad (3.3.9)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} \psi_1 = \kappa_2 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \\ \psi_2 = \kappa_2^3 \kappa_1 - \kappa_1^3 \kappa_2 + \kappa'_1 \kappa_2 \kappa_1 - \kappa'_2 \kappa_1 \kappa_2^2 \\ \psi_3 = \kappa_2^4 - \kappa_1^2 \kappa_2^2 + \kappa'_1 \kappa_2^2 - \kappa'_2 \kappa_1 \kappa_2 \end{cases}$$

şeklindedir. (3.3.9) bağıntısının her iki tarafının normu alınır

$$\|T'_B(\sigma_B)\| = \sqrt{\frac{\rho^2 |\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}{\rho^4 (\kappa_2^2 - \kappa_1^2)^4}} = \frac{\sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}{\rho (\kappa_2^2 - \kappa_1^2)^2} \quad (3.3.10)$$

bulunur. β_B eğrisinin equiform asli normal vektörü hesaplanırsa

$$N_B(\sigma_B) = \frac{T'_B(\sigma_B)}{\|T'_B(\sigma_B)\|} \quad (3.3.11)$$

olduğundan

$$N_B = \frac{\frac{dT_B}{d\sigma_B}}{\left\| \frac{dT_B}{d\sigma_B} \right\|} = \frac{\psi_1 T + \psi_2 N + \psi_3 B}{\rho \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi β_B eğrisinin equiform binormal vektörü

$$B_B(\sigma_B) = \varepsilon(T_B(\sigma_B) \times N_B(\sigma_B)) \quad (3.3.12)$$

eşitliğinden

$$B_B(\sigma_B) = \varepsilon \frac{\begin{vmatrix} -T & -N & B \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}}{\rho^2 \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}} = \varepsilon \frac{(\kappa_1 \psi_2 - \psi_3 \kappa_2)T - \psi_1 \kappa_1 N - \kappa_2 \psi_1 B}{\rho^2 \sqrt{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} \sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}$$

bulunur.

b) $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 < 0$ durumunda ispat (a) ya benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3.3.4 β ve β_B binormal gösterge eğrisinin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla

$(\kappa_1)_B, (\kappa_2)_B$ ile gösterilirse

$$(\kappa_1)_B(\sigma_B) = \frac{\sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}{\rho(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)^2}, \quad (3.3.13)$$

$$(\kappa_2)_B(\sigma_B) = \frac{(\kappa_1^2 \kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2 \kappa_1') \zeta_1 + \kappa_1 \kappa_2 \zeta_2 - \kappa_2^2 \zeta_3}{\left| (\kappa_1^2 \kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2 \kappa_1')^2 + (\kappa_1 \kappa_2)^2 - (\kappa_2^2)^2 \right|},$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \psi_1 = \kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2), \\ \psi_2 = \kappa_2^3 \kappa_1 - \kappa_1^3 \kappa_2 + \kappa_1' \kappa_2 \kappa_1 - \kappa_2' \kappa_1^2, \\ \psi_3 = \kappa_2^4 - \kappa_1^2 \kappa_2^2 + \kappa_1' \kappa_2^2 - \kappa_2' \kappa_1 \kappa_2 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \varsigma_1 = -2\kappa_2' - 3\kappa_1\kappa_2, \\ \varsigma_2 = \kappa_2^3 + 3\kappa_1\kappa_2' + 3\kappa_2\kappa_1' + 3\kappa_2\kappa_1^2 + \kappa_2'' - \kappa_2, \\ \varsigma_3 = 3\kappa_1'\kappa_1 + \kappa_1'' + \kappa_1^3 + 3\kappa_1\kappa_2^2 + 3\kappa_2'\kappa_2 \end{cases}$$

dir.

İspat β_B eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_B(\sigma_B)$ olmak üzere eğriliğin tanımından

$$(\kappa_1)_B(\sigma_B) = \|T_B'(\sigma_B)\| \quad (3.3.14)$$

olduğundan

$$(\kappa_1)_B(\sigma_B) = \frac{\sqrt{|\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2|}}{\rho(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

$\beta_B = B$ eşitliğinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanırsa

$$\beta_B' = \kappa_2 N + \kappa_1 B$$

$$\beta_B'' = -\kappa_2 T + (2\kappa_1\kappa_1' + \kappa_2')N + (\kappa_1' + \kappa_2^2 + \kappa_1^2)B$$

$$\begin{aligned} \beta_B''' &= (-2\kappa_2' - 3\kappa_1\kappa_2)T + (\kappa_2^3 + 3\kappa_1\kappa_2' + 3\kappa_2\kappa_1' + 3\kappa_2\kappa_1^2 + \kappa_2'' - \kappa_2)N \\ &\quad + (3\kappa_1'\kappa_1 + \kappa_1'' + \kappa_1^3 + 3\kappa_1\kappa_2^2 + 3\kappa_2'\kappa_2)B \end{aligned}$$

elde edilir. $\beta' \times \beta''$ vektörel çarpımı hesaplanırsa

$$\beta_B' \times \beta_B'' = \begin{vmatrix} -T & -N & B \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_2 & \kappa_2' + 2\kappa_1\kappa_2 & \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1' \end{vmatrix}$$

$$\beta_B' \times \beta_B'' = (\kappa_1^2\kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1')T + \kappa_1\kappa_2 N + \kappa_2^2 B.$$

Bu ifadenin normu alınırsa

$$\begin{aligned} \|\beta_B' \times \beta_B''\| &= \sqrt{(\kappa_1^2\kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1')^2 \rho^2 + (\kappa_1\kappa_2)^2 \rho^2 - (\kappa_2^2)^2 \rho^2} \\ \|\beta_B' \times \beta_B''\|^2 &= \rho^2 |(\kappa_1^2\kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1')^2 + (\kappa_1\kappa_2)^2 - (\kappa_2^2)^2| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\zeta_1 = -2\kappa_2' - 3\kappa_1\kappa_2$$

$$\zeta_2 = \kappa_2^3 + 3\kappa_1\kappa_2' + 3\kappa_2\kappa_1' + 3\kappa_2\kappa_1^2 + \kappa_2'' - \kappa_2$$

$$\zeta_3 = 3\kappa_1'\kappa_1 + \kappa_1'' + \kappa_1^3 + 3\kappa_1\kappa_2^2 + 3\kappa_2'\kappa_2$$

olmak üzere

$$\langle \beta_B' \times \beta_B'', \beta_B''' \rangle = \rho^2 \left[(\kappa_1^2\kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1')\zeta_1 + \kappa_1\kappa_2\zeta_2 - \kappa_2^2\zeta_3 \right]$$

bulunur. Bu taktirde β_B eğrisinin $(\kappa_2)_B(\sigma_B)$ ikinci equiform eğriliği

$$(\kappa_2)_B(\sigma_B) = \frac{\langle \beta_B' \times \beta_B'', \beta_B''' \rangle}{\|\beta_B' \times \beta_B''\|^2}$$

eşitliğinden

$$(\kappa_2)_B(\sigma_B) = \frac{(\kappa_1^2\kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1')\zeta_1 + \kappa_1\kappa_2\zeta_2 - \kappa_2^2\zeta_3}{\left| (\kappa_1^2\kappa_2 - \kappa_2^3 + \kappa_1\kappa_2' - \kappa_2\kappa_1')^2 + (\kappa_1\kappa_2)^2 - (\kappa_2^2)^2 \right|} \quad (3.3.15)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1 $C : I \rightarrow R^3$ birim hızlı spacelike normalli spacelike bir eğri

$$C(s) = (s \sin(\sqrt{3} \ln s), s \cos(\sqrt{3} \ln s), \sqrt{3}s)$$

olsun. $C(s)$ eğrinin teğet vektör alanı ve birim normal vektör alanı binormal vektör alanı, eğriliği ve torsiyonu (2.1.3) ve (2.1.4) eşitliklerden

$$t(s) = (\sin(\sqrt{3} \ln s) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln s), \cos(\sqrt{3} \ln s) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln s), \sqrt{3}),$$

$$n(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\sqrt{3} \ln s) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln s), -\sin(\sqrt{3} \ln s) - \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \ln s), 0),$$

$$b(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3} \ln s) + \frac{3}{2} \cos(\sqrt{3} \ln s), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\sqrt{3} \ln s) - \frac{3}{2} \sin(\sqrt{3} \ln s), 2 \right),$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{3}}{s}, \quad \tau = \frac{3}{s}$$

dır. Eğrilik yarıçapı, birinci ve ikinci equiform eğrilikleri (2.2.2) ve (2.2.6) ve (2.2.7) eşitliklerinden

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{s}{2\sqrt{3}}, \quad \kappa_1 = \rho' = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \kappa_2 = \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olur. (2.2.1) eşitliğinden equiform parametresi $\sigma = \int \kappa(s)ds = 2\sqrt{3} \ln s + c$ elde edilir.

$c = 0$ alınırsa

$$s = e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}, \quad \rho = \frac{e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}}{2\sqrt{3}},$$

bulunur.

Buradan $C(\sigma)$ equiform spacelike eğrisi

$$C(\sigma) = \left(e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \sqrt{3}e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}} \right)$$

şeklinde elde edilir. $C(\sigma)$ eğrisinin equiform Frenet vektörleri (2.2.4) ve (2.2.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} T(\sigma) &= \frac{e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), 1 \right), \\ N(\sigma) &= \frac{e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), 0 \right), \\ B(\sigma) &= \frac{e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}}{4} \left(\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

i. $C(\sigma)$ eğrisinin teğet gösterge eğrisi

$$C_T(\sigma) = T(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), 1 \right)$$

teğet gösterge eğrisi için $\rho^2(\kappa_1^2 + 1) > 0$ olduğundan eğrimiz spacelike bir eğridir.

Teorem 3.1.2. uygulanarak C_T eğrisinin Frenet elemanları hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
T_T(\sigma_T) &= \frac{12}{\sqrt{13}} \left(-\frac{1}{6} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{1}{6} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{1}{4\sqrt{3}} \right), \\
N_T(\sigma_T) &= \frac{72}{13} \left(-\frac{13\sqrt{3}}{144} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{13}{144} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{13\sqrt{3}}{144} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{13}{144} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), 0 \right), \\
B_T(\sigma_T) &= \frac{864}{13\sqrt{13}} e^{-\sigma/2\sqrt{3}} \left(\frac{13}{144} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{13}{144} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{13\sqrt{3}}{108} \right), \\
(\kappa_1)_T(\sigma_T) &= \frac{24}{13e^{\sigma/2\sqrt{3}}}, \\
(\kappa_2)_T(\sigma_T) &= -\frac{3}{13},
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

ii. **$C(\sigma)$ eğrisinin aslinormal gösterge eğrisi**

$$C_N(\sigma) = N(\sigma) = \frac{e^{\sigma/2\sqrt{3}}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{-1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), 0 \right)$$

asli normal gösterge eğrisi için $1 + \kappa_1^2 - \kappa_2^2 > 0$ olduğundan asli normal gösterge eğrisi equiform spacelike eğri olacaktır. Teorem 3.2.2. uygulanarak C_N eğrisinin Frenet elemanları hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
T_N(\sigma_N) &= 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{12} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{1}{12} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{12} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{1}{12} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), 0 \right), \\
N_N(\sigma_N) &= \frac{72}{11} \left(-\frac{5}{72} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{13\sqrt{3}}{72} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{5}{72} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{13\sqrt{3}}{72} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{8} \right), \\
B_N(\sigma_N) &= \frac{432}{11} e^{-\sigma/2\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{48} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{48} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{1}{48} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{48} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{5\sqrt{3}}{54} \right),
\end{aligned}$$

$$(\kappa_1)_N(\sigma_N) = \frac{99}{4e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}},$$

$$(\kappa_2)_N(\sigma_N) = 0$$

olarak hesaplanır.

iii. $C(\sigma)$ eğrisinin binormal gösterge eğrisi

$$C_B(\sigma_B) = B(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}}{4} \left(\sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$$

binormal gösterge eğrisi için $\kappa_2^2 - \kappa_1^2 > 0$ olduğundan binormal gösterge eğrisi equiform spacelike eğri olacaktır. Teorem 3.3.2. uygulanarak C_B eğrisinin Frenet aparatları hesaplanırsa

$$T_B(\sigma_B) = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{12} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{12} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{1}{6} \right),$$

$$N_B(\sigma_B) = 6\sqrt{3} \left(-\frac{1}{12} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{36} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{1}{12} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{36} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), 0 \right),$$

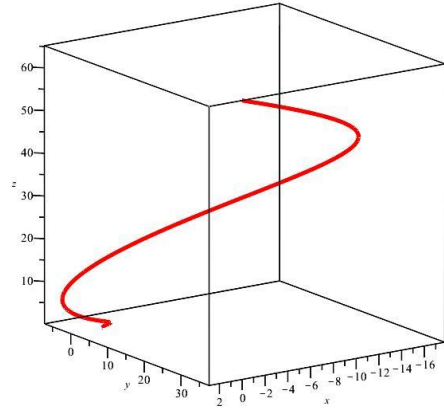
$$B_B(\sigma_B) = 18\sqrt{6}e^{-\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{36} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{36} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \frac{1}{36} \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{36} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{18} \right),$$

$$(\kappa_1)_B(\sigma_B) = \frac{3\sqrt{3}}{2e^{\frac{\sigma}{2\sqrt{3}}}},$$

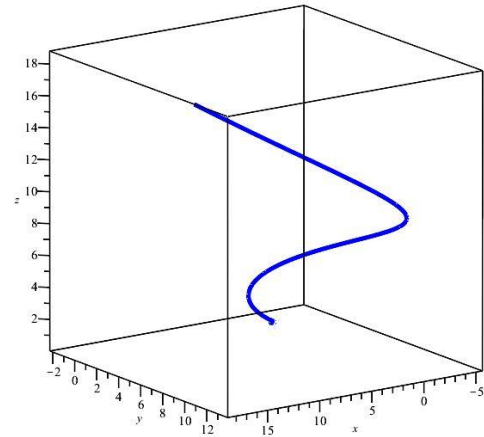
$$(\kappa_2)_B(\sigma_B) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

olarak hesaplanır.

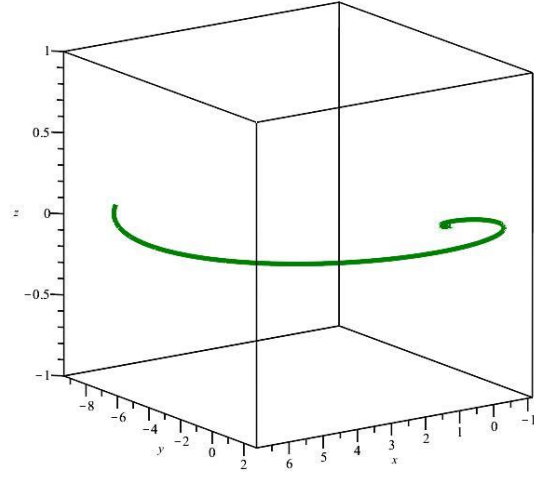
Aşağıda equiform eğri $C(\sigma)$ ve C_T, C_N, C_B küresel gösterge eğrilerinin grafikleri sırasıyla kırmızı, mavi, yeşil, turuncu renkte gösterilmiştir. Grafiklerin çiziminde Maple programından yararlanılmıştır.



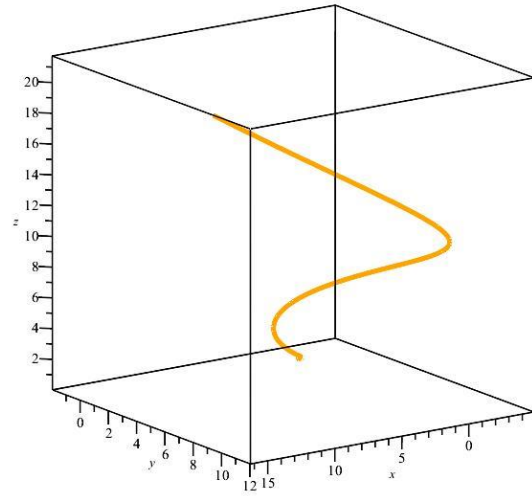
Şekil 3.1: $C(\sigma)$ eğrisi



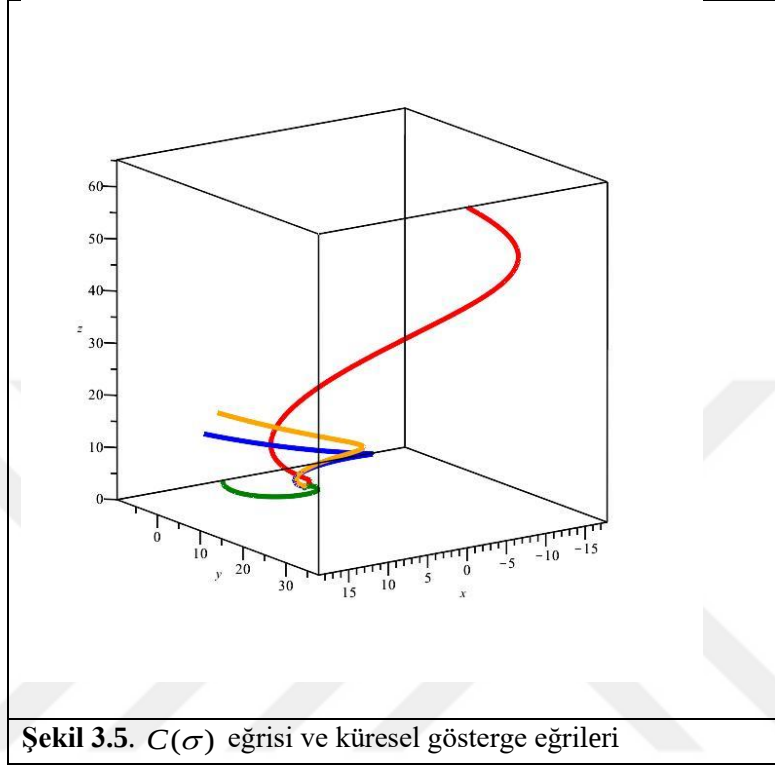
Şekil 3.2. $C_T(\sigma)$ teğet gösterge eğrisi



Şekil 3.3. $C_N(\sigma)$ asli normal gösterge eğrisi



Şekil 3.4. $C_B(\sigma)$ binormal gösterge eğrisi



4.TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike asli normale sahip spacelike $\beta:I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin equiform Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere, β eğrisinin

$$\beta_T = T,$$

$$\beta_N = N,$$

$$\beta_B = B$$

küresel gösterge eğrileri incelenmiştir. Elde edilen equiform teğet, asli normal gösterge ve binormal gösterge eğrilerinin equiform Frenet çatı elemanları β eğrisinin equiform Frenet çatı elemanları cinsinden elde edilmiştir. Bu eğriler ile ilgili örnekler verilerek Maple programı ile çizimleri yapılmıştır. Benzer şekilde bu çalışma 4-boyutlu Minkowski uzayında verilen bir equiform eğri için yapılabilir.

5. KAYNAKLAR

- Abdel-Aziz H S, Khalifa Saad M, Abdel-Salam A A, 2015, Equiform Differential Geometry of Curves in Minkowski Space-Time,'arXiv.org/math/arXiv:1501.02283.
- Ali A T, 2009, New spherical curves and their spherical indicatrices, Global Journal of Advance Research on Classical and Modern Geometries, 2(1), 28-38.
- Arfah A, 2020, On Causal Characterization of Spherical Indicatrices of Timelike Curves in Minkowski 3-space, Hagia Sofia Journal of Geometry, 2(2), 26-37.
- Aydın M, Ergüt M, 2013, The equiform differential geometry of curves in 4-dimensional Galilean space G_4 , Stud. Univ. Babes,-Bolyai Math, 58, 399–406.
- Bilici M, Ahmad T A, 2017, On the Natural Lift Curves for the Involute Spherical Indicatrices in Minkowski 3-space, Malaya Journal of Matematik, 5(2), 407-415.
- Bilici M, Çalışkan M, 2011, Some new notes on the involutes of the timelike curves in Minkowski 3-space, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6(41), 2019-2030.
- Bilici M, Çalışkan M, 2019, Some New Results on The Curvatures of The Spherical Indicatrices of The Involute of a Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-space, MathLAB Journal, 2(1), 110-119.
- Bulut F, Bektaş M, 2020, Special Helices on Equiform Differential Geometry of Spacelike Curves in Minkowski Space-Time, Communations.Faculty of Sciences University of Ankara Series, A1 Mathematics and Statistics, 69(2), 1045-1056.
- Carmo do M P, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Pearson Education, 1976.
- Chung S K, 1982, A Study on The Spherical Indicatrix of Space Curve in E^3 , The Mathematical Education, 20(3), 23-26.
- Çalışkan A, Uğurlu H H, 2012. Spacelike ve timelike yüzeyler geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Rektörlük Matbaası, Manisa
- Elsayied H K, Elzawy M, Elsharkawy A, 2018, Equiform spacelike normal curves according to equiform-Bishop frame in E_1^3 , Mathematical Methods in. Applied Science, 41, 5754–5760.

- Elsayied H K, Elzawy M, Elsharkawy A, 2017, Equiform timelike normal curves in Minkowski space, Far East Journal of Mathematical Science, 101, 1619–1629.
- Elsharkawy A, 2020, Generalized involute and evolute curves of equiform spacelike curves with a timelike equiform principal normal in E_1^3 , Journal of Egyptian Mathematical Society. 28, 1–10.
- Elsharkawy N, Cesarano C, Dmytryshyn R, Elsharkawy A, 2023, Timelike spherical curves according to equiform Bishop frame in 3-dimensional Minkowski space, Carpathian Mathematical. Publications, 5(2), 388–395.
- Elzawy M, Mosa S, 2017, Smarandache curves in the Galilean 4-space G_4 , Journal of Egyptian Mathematical Society, 25(1), 53-56.
- Elzawy M, Mosa S, 2023, Equiform rectifying curves in Galilean space G_4 , Scientific African, 22, e01931.
- Fakharany M, El-Abed A, Elzawy M, Mosa S, 2022, On the Geometry of Equiform Normal Curves in the Galilean Space G_4 , Information Sciences Letter, 11(5), 1711-1715.
- Hacısalıhoğlu H H, Diferensiyel Geometri I-II, 1994.
- Kalkan Boyacıoğlu Ö, 2024, On Equiform Rectifying, Normal and Osculating Curves in Minkowski Space-Time, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13(2), 467-473.
- Kızıltuğ S, Yaylı Y, 2014, Bertrand Curves of AW(k)-type in the Equiform Geometry of the Galilean Space. Abstract and Applied. Analysis, 1–6.
- Kızıltuğ S, Yaylı Y, 2014, Bertrand Curves of AW(k)- Type in the Equiform Geometry of the Galilean Space, Abstract and Applied Analysis, 10, 1-6.
- Kuhnel W, 1999, Differential geometry, Curves-surfaces-manifolds, Braunschweig, Wiesbaden.
- Lipschutz M M, 1969, Schaum's Outline of Differential Geometry, McGraw-Hill, Canada.
- Mahmoud W M, Noreldeen A H, 2020, Inextensible flows of spacelike curves according to equiform frame in 4-dimensional Minkowski space R_1^4 , WSEAS Transactions on Mathematics, DOI: 10.37394/23206.2020.19.75.

- Montiel S, Ros A, 1998, Curves and surfaces, Real Sociedad Matematica, Espanola Madrid, Spain.
- Nawratil G, 2016, Quaternionic approach to equiform kinematics and line-elements of Euclidean 4-space and 3-space, Computer Aided Geometric Design, 47, 150–162.
- ONeill B, 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, NY, USA.
- Odehnal B, Pottmann H, Wallner J, 2006, Equiform kinematics and the geometry of line elements, Beitrage zur Algebra und Geometrie, 47 (2), 567-582.
- Öztürk U, Koç Öztürk E B, Yaylı Y, 2012, Point-line geometry and equiform kinematics in Minkowski 3-space, 5, 27-35.
- Pavkovic B J, 1986, Equiform geometry of curves in the isotropic spaces and $\xi_3^{(1)}$ and $\xi_3^{(2)}$, Rad HAZU, 39-44.
- Pavkovic B J, Kamenarovic I, 1987, The equiform differential geometry of curves in the Galilean space G_3 , Glasnik Matematicki 22(42), 449-457.
- Samanci H K, Kalkan O, Celik S, 2019, The Timelike Bezier Spline in Minkowski 3-Space. Journal of Science and Arts, 19(2), 357-374.
- Shikin E V, 1995, Handbook and Atlas of Curves, CRC Press, Florida.
- Solouma E M, 2017, Special equiform Smarandache curves in Minkowski space-time, Journal. of Egyptian Math. Society, 25(3), 319–325.
- Solouma E M, Mahmoud W M, 2019, On spacelike equiform-Bishop Smarandache curves on S_1^2 , Journal of Egyptian Mathematical Society, 27 (7), <https://doi.org/10.1186/s42787-019-0009-x>.
- Solouma E M, 2020, Generalized Smarandache curves of spacelike and equiform spacelike curves via timelike second binormal in R_1^4 , Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), 15(2), 1369-1380.
- Tashkandy Y, Emam W, Cesarano C, Abd El-Raouf M. M, Elsharkawy A. 2022, Generalized Spacelike Normal Curves in Minkowski Three-Space, Mathematics 10(21), 4145.

- Walrave J, 1995, Curves and Surfaces in Minkowski Space. Doctoral Thesis, K. U. Leuven, Faculty of Science, Leuven, Belgium.
- Woestijne V D I, 1990, Minimal Surfaces of the 3-Dimensional Minkowski Space, Proc. Congres Geometrie Differentielle Et Applications, Avignon (30 May 1988), World Scientific Publishing Singapore, 344-369.
- Zlatko E, Blaenka Divjak B, 2008, The equiform differential geometry of curves in the pseudo-Galilean space, Mathematical Communications, 13(2), 321-332.

