



**MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELİKE NORMALLİ
EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN SMARANDACHE
EĞRİLERİNDEN ÜRETİLEN ADJOİNT EĞRİLER**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cüneyt AKYOL

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

Ağustos 2024

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELİKE NORMALLİ
EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN SMARANDACHE
EĞRİLERİNDEN ÜRETİLEN ADJOİNT EĞRİLER

Cüneyt AKYOL

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2024

TEZ ONAY SAYFASI

Cüneyt AKYOL tarafından hazırlanan “Minkowski 3-Uzayında Spacelike Normalli Equiform Spacelike Eğrilerin Smarandache Eğrilerinden Üretilen Adjoint Eğriler” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 08/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özgür KALKAN

Başkan : Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon MYO

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

..... /..... /..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Bekir YALÇIN

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

08/ 08 / 2024

Cüneyt AKYOL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MINKOWSKI 3-UZAYINDA SPACELİKE NORMALLİ EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİNDEN ÜRETİLEN ADJOİNT EĞRİLER

Cüneyt AKYOL

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özgür KALKAN

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır. Bu bölümde Smarandache eğrileri ve equiform geometriye göre eğriler ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde Minkowski uzayı ve Minkowski uzayında equiform geometri hakkında temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır. Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında equiform Frenet çatıya göre spacelike asli normale sahip spacelike eğrilerden elde edilen özel Smarandache eğrilerinin integral eğrileri yardımıyla üretilen yeni adjoint eğriler incelenmiştir. Ayrıca bu eğrilere ait örnekler verilerek şekilleri çizilmiştir.

2024, vi + 42 sayfa

Anahtar kelimeler: Equiform geometri, Minkowski uzayı, Smarandache eğrileri, Adjoint eğriler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ADJOINT CURVES GENERATED BY SMARANDACHE CURVES OF EQUIFORM SPACELIKE CURVES WITH SPACELIKE NORMAL IN MINKOWSKI 3-SPACE

Cüneyt AKYOL

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özgür KALKAN

This study consists of three chapters.

The first chapter is the entrance of the study. In this chapter, information in the literature about studies on Smarandache curves and curves according to equiform geometry are given.

In the second chapter, basic definitions on Minkowski space and equiform geometry in Minkowski space are given.

The third chapter is the original part of the work. In this chapter new adjoint curves generated with the help of integral curves of special Smarandache curves of spacelike curves with spacelike principal normal according to equiform Frenet frame are examined in 3 dimensional Minkowski space. Moreover, examples of these curves and figures are given .

2024, vi+42 pages

Keywords: Equiform Geometry, Minkowski space, Smarandache curves, Adjoint curves.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi yazma sürecinde gösterdiği sabır, özverili yaklaşımı ve zorlandığım noktalarda yaptığı çok önemli katkıları için Sayın Doç. Dr. Özgür KALKAN hocama çok teşekkür ederim. Tez savunması sırasında katkılarından dolayı Sayın Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI ve Sayın Doç.Dr. Hakan ÖZTÜRK hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Cüneyt AKYOL
Afyonkarahisar 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar	4
2.2. E_1^3 Minkowski Uzayında Equiform Eğrilerin Frenet Formülleri	8
3. MINKOWSKI-3 UZAYDA SPACELİKE NORMALLİ EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİNDEN ÜRETİLEN ADJOİNT EĞRİLER	11
3.1 $T_\alpha \eta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi	12
3.2. $T_\alpha \zeta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi	17
3.3. $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi	21
3.4. $T_\alpha \eta_\alpha \zeta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi	26
4.TARTIŞMA ve SONUÇ	38
5.KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

E_1^3 3-boyutlu Minkowski Uzayı

R Reel sayılar

V Vektör Uzayı

$\langle, \rangle$ İç çarpım

$\times$ Dış Çarpım

$\|, \|$ Norm

t Teğet Vektör

n Aslinormal Vektör

b Binormal Vektör

κ Eğrilik

τ Burulma

T Equiform Teğet Vektör

η Equiform Aslinormal Vektör

ς Equiform Binormal Vektör

κ_1 1. Equiform Eğriliği

κ_2 2. Equiform Eğriliği

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1 $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve $T_\alpha \eta_\alpha$ -adjoint eğrisi	29
Şekil 3.2 $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve $T_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi	30
Şekil 3.3 $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi	30
Şekil 3.4 $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve $T_\alpha \eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi	31
Şekil 3.5 $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve adjoint eğrileri	31

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid veya diğer özel uzaylarda eğri teorisi diferansiyel geometrinin temel çalışma alanlarından birisidir. Eğrilerin geometrik özellikleri, diferansiyel ve integral hesabının yardımıyla tanımlanır.

Eğriler, bilgisayar grafikleri ve endüstride, yol ve demiryollarında metodik kıvrımlar olarak, kanallarda yön değişikliklerini düzenlemek, mühendislik, fizik, bilgisayar grafikleri, robotik ve daha birçok alanda önemli uygulamalara sahip olan bir alandır. Bu teorelin geliştirilmesi ve anlaşılması, bu alanlarda yapılan çalışmalara büyük katkılar sağlamaktadır. Örneğin helis eğrileri hayvan boynuzlarında, deniz kabuklarında ve en önemlisi DNA molekül yapısında görülür. En çok bilinen örneği ise vidadır.

Öklid uzayında regüler bir eğrinin konum vektörü diğer bir eğrinin Frenet çatısı ile belirlenebiliyorsa, bu eğri Smarandache eğrisi olarak adlandırılmıştır (Ali 2010). Smarandache eğrilerinin uygulama alanları oldukça geniştir. Bilgisayar grafikleri, robotik, mühendislik ve fizik gibi alanlarda kullanılabilirler. Özellikle, bu eğrilerin karmaşık geometrik yapılarının modellenmesi ve analizi, mühendislik uygulamalarında ve robotik sistemlerin hareket planlamasında önemli bir rol oynar. Ayrıca, Smarandache eğrileri, matematiksel modellemelerde ve teorik çalışmalarda yeni perspektifler sunar. Literatürde Smarandache eğrileri ile ilgili çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Turgut ve Yılmaz (2008), 4-boyutlu Minkowski uzayında Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır. Ali (2010), Öklid uzayında TN , NB ve TNB -Smarandache eğrileri adı verilen özel eğrileri tanımlamıştır. Elzawy ve Mosa (2017), 4-boyutlu Galile uzayında Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Şenyurt ve Çalışkan (2017), Mannheim eğri çiftine ait Smarandache eğrilerini ele almışlardır.

Çizgisel geometri, uzaydaki doğruların ve doğrusal elemanların geometrik özelliklerini inceleyen bir matematik dalıdır. Bu dal, özellikle kinematik, mühendislik, bilgisayar mühendisliği ve robotik gibi alanlarda geniş uygulamalara sahiptir. Çizgisel geometri,

bu alanlarda hareket, şekil analizi, modelleme ve kontrol süreçlerinde önemli bir rol oynar. Equiform eğriler ise çizgisel geometrinin yeni ve dikkat çeken uygulamalarından biridir. Equiform eğriler, belirli geometrik ve kinematik özelliklere sahip eğriler olarak tanımlanır. Bu eğriler hakkında yapılan ilk önemli çalışma, Boris Odeh vd. (2006) tarafından "Equiform Kinematic and the Geometry of Line Elements" başlığı altında yayınlanmıştır.

Equiform çatı, Frenet çatısından daha kullanışlı ve genel bir yapıdır. Uzak eğrileri ve yüzeylerinin equiform geometrisi, birçok matematikçinin ilgi ve araştırma konusu olmuştur. Bu durum, equiform geometrisinin diğer geometrilerin bir uzantısı olduğu düşüncesinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple birçok farklı uzayda equiform geometri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Zlatko, ve Blaenka (2008), 3-boyutlu pseudo-Galile uzayında eğrilerin equiform diferansiyel geometrisi araştırmışlardır. 3-boyutlu Galile uzayında $AW(k)$ -tipli equiform Bertrand eğrileri Kiziltuğ ve Yaylı (2014) tarafından incelenmiştir. 3- boyutlu Minkowski uzayında equiform çatıya göre timelike normal eğriler Elsayied vd. (2017) tarafından incelenmiştir. Yapılan diğer bir çalışmada ise Elsayied vd. (2018), 3-boyutlu Minkowski uzayında equiform Bishop çatıya göre spacelike normal eğrileri ele almışlardır.

Elsharkawy (2020), 3- boyutlu Minkowski uzayında timelike asli normale sahip spacelike eğrilerin involut evolut eğri çiftlerinin karakterizasyonlarını araştırmışlardır. Tashkandy vd. (2022), 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike normal eğrileri incelemişlerdir.

Solouma (2017), 3- boyutlu Minkowski uzayında özel equiform Smarandache eğrilerini ele almışlardır. Solouma ve Mahmoud (2019) yılında 3-boyutlu Minkowski uzayında S_1^2 üzerinde spacelike equiform Bishop Smarandache eğrilerini incelemiştir.

Aydın ve Ergüt (2013), G_4 uzayında eğrilerin equiform diferansiyel geometrisini tanımlamışlardır. Elzawy ve Mosa (2017) 4-boyutlu Galile uzayında Smarandache

eğrilerini araştırmıştır. 4-boyutlu Minkowski uzayında equiform eğrilerin diferensiyel geometrisi Abdel-Aziz vd. (2015) tarafından araştırılmıştır. Solouma (2020), 4-boyutlu Minkowski uzayında ikinci binormali timelike olan equiform spacelike Smarandache eğrilerini incelemiştir. Kalkan (2024), 4-boyutlu Minkowski uzayında equiform equiform rectifiyan, normal ve osculatör eğrileri incelemiştir.

Öklid uzayda bir eğrinin Frenet elemanlarından yararlanılarak (özellikle binormal vektör alanı) özel bir eğri kavramına değinilmiş ve bu eğriye Adjoint eğri adı verilmiştir Nurkan vd. (2019), Deshmukh vd. (2018) daha sonrasında Kelleci (2019), bu eğrileri 3-boyutlu Minkowski uzayında tanımlamıştır.

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında equiform Frenet çatıya göre spacelike asli normale sahip spacelike eğrilerden elde edilen özel Smarandache eğrilerinin integral eğrileri yardımıyla üretilen yeni adjoint eğriler incelenmiştir. Elde edilen yeni adjoint eğrilerin equiform Frenet çatı elemanları esas eğrinin equiform Frenet çatı elemanları cinsinden elde edilmiştir. Son olarak bu eğriler ile ilgili örnekler verilerek Maple programı ile çizimleri yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.2.1. V bir lineer vektör uzayı ve $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik lineer form olsun.

- (i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- (ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,
- (iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,
- (iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif yarı- tanımlı,
- (v) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle = 0$ iken $v = 0$ olmak zorunda ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna non-dejenere, aksi halde dejenere dir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2. $\langle, \rangle, V$ reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik lineer form ve W, V nin herhangi bir alt uzayı olsun. $\langle, \rangle$ nin W üzerinde kısıtlaması $\langle, \rangle|_W$, negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik lineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir ve üzerinde skalar çarpım tanımlı olan V reel vektör uzayına skalar çarpım uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4. V skalar çarpım uzayının indeksi $\nu=1$ ve boyutu $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayı bir Minkowski vektör uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5. E^3 , 3-boyutlu reel vektör uzayı olsun. $\forall u, v \in E^3$ ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, olmak $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ üzere

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: E^3 \times E^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\rightarrow \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

(i) Simetrik,

(ii) Bilineer,

(iii) non-dejenere ($\forall u \in E^3$ için $\langle u^T, u^T \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$) dır.

E^3 üzerinde tanımlanan bu dönüşüme Minkowski metriği denir ve $E_1^3 = \{E^3, \langle, \rangle\}$ ikilisine de 3-boyutlu Minkowski uzayı adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6. $\forall u \in E_1^3$ için

(i) $\langle u, u \rangle < 0$ ise timelike vektör (zaman benzeri),

(ii) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u spacelike vektör (uzay benzeri),

(iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ise null vektör (ışık benzeri)

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7. $u, v \in E_1^3$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise, bu durumda u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir. Eğer u timelike vektör ise bu durumda v spacelike vektördür (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8. $\forall u \in E_1^3$ için $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörünün normu

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|} = \sqrt{|u_1^2 + u_2^2 - u_3^2|}$$

biçiminde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9. $\forall u \in E_1^3$ için

(i) $\|u\| > 0$

(ii) $\|u\| = -1$ ise u vektörüne birim timelike vektör,

(iii) $\|u\| = 1$ ise u vektörüne birim spacelike vektör,

(iv) u bir timelike vektör ise $\|u\|^2 = -\langle u, u \rangle$,

(v) u bir spacelike vektör ise $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10. E_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$u \wedge v = (u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (dış çarpım) denir ve $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ olmak üzere

$$u \times v = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

vektörel çarpımı

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_3 = -e_1$$

dir (Akutagawa ve Nishikawa 1990).

Tanım 2.1.11 $\alpha : I \subset R \rightarrow E_1^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna E_1^3 de bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.12. $\alpha : I \subset R \rightarrow E_1^3$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektörü t olmak üzere;

- (i) $\langle t, t \rangle > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- (ii) $\langle t, t \rangle < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- (iii) $\langle t, t \rangle = 0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.13. $\alpha : I \subset R \rightarrow E_1^3$ bir eğri olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda, α eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi denir. $a, b \in I$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki

yay uzunluğu $\int_a^b \|\alpha'(s)\| dt$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.14. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.15. $\alpha = \alpha(s)$ regüler birim hızlı bir eğri ve Frenet vektörleri t, n ve b olsun.

(i) α normali spacelike veya timelike olan spacelike eğri ise Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}, \quad b(s) = \varepsilon(t \times n)(s),$$

$$t' = \kappa n, \quad n' = -\varepsilon \kappa t + \tau b, \quad b' = \tau n, \quad (2.1.3)$$

$$\langle t, t \rangle = 1, \quad \langle n, n \rangle = \varepsilon = \pm 1, \quad \langle b, b \rangle = -\varepsilon$$

$$\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle = 0$$

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|, \quad \tau(s) = \left(\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \right)(s), \quad (2.1.4)$$

$$t \times n = \varepsilon b, \quad n \times b = -t, \quad b \times t = -\varepsilon n$$

dir.

(ii) α timelike bir eğri ise bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$t(s) = \alpha'(s), \quad t(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}, \quad b(s) = -(t \times n)(s),$$

$$t'(s) = \kappa(s)n(s), \quad n'(s) = \kappa(s)t(s) - \tau(s)b(s), \quad b'(s) = \tau(s)n(s),$$

$$\langle t, t \rangle = -1, \quad \langle n, n \rangle = 1, \quad \langle b, b \rangle = 1,$$

$$\langle t, n \rangle = \langle t, b \rangle = \langle n, b \rangle = 0,$$

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|, \quad \tau(s) = \left(\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \right)(s)$$

$$t \times n = -b, \quad n \times b = -t, \quad b \times t = n \quad (2.1.5)$$

dir (Uğurlu 1997).

2.2. E_1^3 Minkowski Uzayında Equiform Eğrilerin Frenet Formülleri

Tanım 2.2.1. $\beta: I \rightarrow E_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı bir eğri olsun. $\beta(s)$ eğrisinin equiform parametresi

$$\sigma = \int \frac{ds}{d\rho} = \int \kappa ds \quad (2.2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $\rho = \frac{1}{\kappa}$ eşitliği β eğrisinin eğrilik yarıçapıdır. Bu durumda

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} \quad (2.2.2)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, β eğrisinin equiform değişmez parametresi σ ya göre Frenet formüllerini tanımlayalım.

$$T = \frac{d\beta}{d\sigma} \quad (2.2.3)$$

vektörü ξ eğrisinin equiform tanjant vektörü olarak adlandırılır. Buradan

$$T = \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \frac{d\beta}{ds} \cdot \rho = \rho t \quad (2.2.4)$$

olarak hesaplanır. Burada t , β eğrisinin tanjant vektörüdür. β eğrisinin, equiform birim normal vektörünü ve equiform binormal vektörünü sırasıyla

$$N = \rho n, \quad B = \rho b \quad (2.2.5)$$

olarak tanımlayalım. Burada n ve b sırasıyla β eğrisinin normal ve binormal vektörleridir. Bu takdirde β nin Frenet üç ayaklısı olarak adlandırılan $\{T, N, B\}$, E_1^3 in equiform bir ortogonal bir bazıdır (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Tanım 2.2.2. $\kappa_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\kappa_1 = \frac{d\rho}{ds} \quad (2.2.6)$$

fonksiyonuna β eğrisinin 1.equiform eğriliği denir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Tanım 2.2.3. $\kappa_2 : I \rightarrow R$ olmak üzere

$$\kappa_2 = \frac{\tau}{\kappa} \quad (2.2.7)$$

fonksiyonuna β eğrisinin 2.equiform eğriliği denir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Tanım. 2.1 $\beta : I \rightarrow E_1^3$ bir equiform eğri olsun. β eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere;

- (i) $\langle T, T \rangle = \rho^2 > 0$ veya $T = 0$ ise β eğrisine equiform spacelike eğri,
- (ii) $\langle T, T \rangle = \rho^2 < 0$ ise β eğrisine equiform timelike eğri,
- (iii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise β eğrisine equiform null eğri denir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

Şimdi β eğrisinin equiform parametreye göre Frenet formüllerini verelim.

- (i) Eğer β eğrisi, normali spacelike olan equiform spacelike bir eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 \\ -1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \rho^2, \quad \langle N, N \rangle = \rho^2, \quad \langle B, B \rangle = -\rho^2 \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0. \end{aligned}$$

- (ii) Eğer β eğrisi, normali timelike olan equiform spacelike bir eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 \\ 1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \rho^2, \quad \langle N, N \rangle = -\rho^2, \quad \langle B, B \rangle = \rho^2 \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0. \end{aligned}$$

(ii) Eğer β eğrisi equiform timelike bir eğri ise Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 \\ 1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & \kappa_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= -\rho^2, \quad \langle N, N \rangle = -\rho^2, \quad \langle B, B \rangle = \rho^2 \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0 \end{aligned}$$

dir (Elsayied vd. 2017, Elsayied vd. 2018).

3. MINKOWSKI-3 UZAYDA SPACELİKE NORMALLI EQUIFORM SPACELİKE EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİNDEN ÜRETİLEN ADJOINT EĞRİLER

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ normali spacelike olan equiform spacelike eğri olmak üzere, konum vektörü α eğrisinin equiform Frenet çatı vektörleri tarafından oluşturulan Smarandache eğrilerinin integralleri alınarak elde edilen $T_\alpha \eta_\alpha$, $T_\alpha \zeta_\alpha$, $\eta_\alpha \zeta_\alpha$, $T_\alpha \eta_\alpha \zeta_\alpha$ regüler adjoint eğrileri sırasıyla

$$\beta(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 + b^2 = 2, \quad (3.1)$$

$$\gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 - b^2 = 2, \quad (3.2)$$

$$\Gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (a\eta_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 - b^2 = 2, \quad (3.3)$$

$$\Psi(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{3}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma) + c\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 3 \quad (3.4)$$

şeklinde gösterilecek ve bu eğrilerin equiform Frenet vektörleri, 1. equiform ve 2.equiform eğrilikleri α eğrisinin equiform Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edilecektir.

Tanım 3.1 α eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ ve adjoint eğrisi β ile gösterilirse

$$\beta(s) = \int b_\alpha(s) ds$$

şeklinde tanımlanır (Nurkan vd. 2019, Do Carmo 1976).

Tanım 3.2. Herhangi bir eğrinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında bu vektörlerin lineer bileşimi olarak yazılan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut and Yılmaz 2008).

Regüler birim hızlı $\alpha = \alpha(\sigma)$ eğrisinin equiform Frenet çatısı $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$ olmak üzere $T_\alpha \eta_\alpha, T_\alpha \zeta_\alpha, \eta_\alpha \zeta_\alpha, T_\alpha \eta_\alpha \zeta_\alpha$ -Smarandache eğrileri sırasıyla

$$\beta_{tn} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma)), \quad a^2 + b^2 = 2,$$

$$\beta_{tb} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} (aT_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)), \quad a^2 - b^2 = 2,$$

$$\beta_{nb} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} (a\eta_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)), \quad a^2 - b^2 = 2,$$

$$\beta_{tnb} = \frac{1}{\sqrt{3}\rho} (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma) + c\zeta_\alpha(\sigma)), \quad a^2 + b^2 - c^2 = 3$$

şeklinde tanımlanır (Solouma ve Mahmoud 2019).

3.1. $T_\alpha \eta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi

Tanım 3.1.1. Regüler birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin equiform Frenet çatısı

$\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$ olmak üzere, α eğrisinin $T_\alpha \eta_\alpha$ -adjoint eğrisi

$$\beta(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 + b^2 = 2 \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.1 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ equiform eğrisinin $T_\alpha \eta_\alpha$ -adjoint eğrisi β olsun. α ve β nın equiform Frenet çatıları sırasıyla $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$, $\{T_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta\}$ olmak üzere

$$T_\beta(\sigma^*) = \frac{aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{2}}, \quad (3.1.2)$$

$$\eta_\beta(\sigma^*) = \frac{-bT_\alpha(\sigma) + a\eta_\alpha(\sigma) + b\kappa_2(\sigma)\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{|2 - b^2\kappa_2^2(\sigma)|}}, \quad (3.1.3)$$

$$\zeta_\beta(\sigma^*) = \varepsilon \frac{-b^2\kappa_2(\sigma)T_\alpha(\sigma) + ab\kappa_2(\sigma)\eta_\alpha(\sigma) + 2\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho^2\sqrt{|4 - 2b^2\kappa_2^2(\sigma)|}}, \quad (3.1.4)$$

şeklindedir.

İspat (3.1.1) bağıntısı ile verilen β eğrisinin σ^* equiform parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(\sigma^*) = \frac{d\beta}{d\sigma^*} \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha}{\sqrt{2}\rho}, \quad (3.1.5)$$

$$T_\beta(\sigma^*) \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha}{\sqrt{2}\rho} \quad (3.1.6)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\langle \beta'(\sigma^*), \beta'(\sigma^*) \rangle = \frac{\rho^2(a^2 + b^2)}{2\rho^2} = 1 \quad (3.1.7)$$

olduğundan β eğrisi birim hızlı spacelike eğridir. Bu durumda (3.1.6) ifadesinin her iki tarafının normu alınır ve $\|T_\beta(\sigma^*)\| = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\| \frac{d\sigma^*}{d\sigma} \right\| = 1 \quad (3.1.8)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (3.1.6) ifadesinde yerine yazılırsa β eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_\beta(\sigma^*) = \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha}{\rho\sqrt{2}} \quad (3.1.9)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.9) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\frac{dT_\beta}{d\sigma^*} \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{\left(\sqrt{2}\rho(a(\kappa_1 T_\alpha + \eta_\alpha) + b(-T + \kappa_1 \eta_\alpha + \kappa_2 \zeta_\alpha)) - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (aT_\alpha + b\eta_\alpha) \right)}{2\rho^2} \quad (3.1.10)$$

bulunur. Burada $\frac{d\rho}{d\sigma^*} = \kappa_1$, $\frac{ds}{d\sigma} = \rho$ ve $\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = 1$ eşitlikleri kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$T'_\beta(\sigma^*) = \frac{-bT_\alpha + a\eta_\alpha + b\kappa_2 \zeta_\alpha}{\rho\sqrt{2}} \quad (3.1.11)$$

elde edilir. (3.1.11) bağıntısının her iki tarafının normu alınır

$$\|T'_\beta(\sigma^*)\| = \sqrt{\frac{\rho^2 |b^2 + a^2 - b^2 \kappa_2^2|}{2\rho^2}} = \frac{\sqrt{|2 - b^2 \kappa_2^2|}}{\sqrt{2}} \quad (3.1.12)$$

bulunur. β eğrisinin equiform asli normali η_β ile gösterilirse (3.1.11.) ve (3.1.12) bağıntılarından

$$\eta_{\beta}(\sigma^*) = \frac{T'_{\beta}(\sigma^*)}{\|T'_{\beta}(\sigma^*)\|} = \frac{-bT_{\alpha} + a\eta_{\alpha} + b\kappa_2\zeta_{\alpha}}{\rho\sqrt{|2-b^2\kappa_2^2|}} \quad (3.1.13)$$

elde edilir.

$\zeta_{\beta} = \varepsilon(T_{\beta} \times \eta_{\beta})$ olduğundan β eğrisinin equiform binormal vektörü ζ_{β} ile gösterilirse

$$\zeta_{\beta}(\sigma^*) = \varepsilon \frac{-b^2\kappa_2T_{\alpha} + ab\kappa_2\eta_{\alpha} + 2\zeta_{\alpha}}{\rho^2\sqrt{|4-2b^2\kappa_2^2|}} \quad (3.1.14)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.2 α ve β 'nin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla $\kappa_1, \kappa_2, (\kappa_1)_{\beta}, (\kappa_2)_{\beta}$ ile gösterilirse

$$(\kappa_1)_{\beta}(\sigma^*) = \frac{\sqrt{|2-b^2\kappa_2^2(\sigma)|}}{\sqrt{2}}, \quad (3.1.15)$$

$$(\kappa_2)_{\beta}(\sigma^*) = \frac{\rho(ab^2\kappa_2^3(\sigma) - 2a\kappa_2(\sigma) - 2b\kappa_2'(\sigma))}{\sqrt{2}|b^2\kappa_2^2(\sigma) - 2|}} \quad (3.1.16)$$

şeklindedir.

İspat β eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_{\beta}(\sigma^*)$ olmak üzere eğriliğin tanımından

$(\kappa_1)_{\beta}(\sigma^*) = \|T'_{\beta}(\sigma^*)\|$ olduğundan (3.1.12) eşitliğinden

$$(\kappa_1)_{\beta}(\sigma^*) = \|T'_{\beta}(\sigma^*)\| = \frac{\sqrt{|2-b^2\kappa_2^2|}}{\sqrt{2}} \quad (3.1.17)$$

elde edilir. $\beta'(\sigma^*), \beta''(\sigma^*)$ ve $\beta'''(\sigma^*)$ sırasıyla

$$\begin{aligned}
\beta'(\sigma^*) &= \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha}{\sqrt{2\rho}}, \\
\beta''(\sigma^*) &= \frac{\sqrt{2\rho}((a(\kappa_1 T_\alpha + \eta_\alpha) + b(-T_\alpha + \kappa_1 \eta_\alpha + b\kappa_2 \zeta_\alpha)) - \sqrt{2\rho}\kappa_1(aT_\alpha + b\eta_\alpha))}{2\rho^2} \\
&= \frac{-bT_\alpha + a\eta_\alpha + b\kappa_2 \zeta_\alpha}{\sqrt{2\rho}}, \\
\beta'''(\sigma^*) &= \frac{\left(\sqrt{2\rho}(-b((\kappa_1 T_\alpha + \eta_\alpha) + a(-T_\alpha + \kappa_1 \eta_\alpha + \kappa_2 \zeta_\alpha)) \right.}{2\rho^2} \\
&\quad \left. + b\kappa_2' \zeta_\alpha + b\kappa_2(\kappa_2 \eta_\alpha + \kappa_1 \zeta_\alpha)) - \sqrt{2\rho}\kappa_1(-bT_\alpha + a\eta_\alpha + b\kappa_2 \zeta_\alpha) \right)}{2\rho^2} \\
&= \frac{-aT_\alpha + (-b + b\kappa_2^2)\eta_\alpha + (a\kappa_2 + b\kappa_2')\zeta_\alpha}{\sqrt{2\rho}}
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

şeklinde hesaplanır. (3.1.18) ifadesinde verilen eşitlikler kullanılarak

$$\beta'(\sigma^*) \times \beta''(\sigma^*) = \frac{-b^2 \kappa_2 T_\alpha + ab\kappa_2 \eta_\alpha + 2\zeta_\alpha}{2\rho^2} \tag{3.1.19}$$

$$\langle \beta'(\sigma^*) \times \beta''(\sigma^*), \beta'''(\sigma^*) \rangle = \frac{ab^2 \kappa_2^3 - 2a\kappa_2 - 2b\kappa_2'}{2\sqrt{2\rho}}, \tag{3.1.20}$$

elde edilir. (3.1.19) eşitliğinin normu alınırsa

$$\|\beta'(\sigma^*) \times \beta''(\sigma^*)\| = \frac{\sqrt{|2b^2 \kappa_2^2 - 4|}}{2\rho} \tag{3.1.21}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda β eğrisinin 2.equiform eğriliği $(\kappa_2)_\beta$ ile gösterilirse

$$(\kappa_2)_\beta(\sigma^*) = \frac{\langle \beta'(\sigma^*) \times \beta''(\sigma^*), \beta'''(\sigma^*) \rangle}{\|\beta'(\sigma^*) \times \beta''(\sigma^*)\|^2}$$

eşitliğinden

$$(\kappa_2)_\beta(\sigma^*) = \frac{\rho(ab^2\kappa_2^3 - 2a\kappa_2 - 2b\kappa_2')}{\sqrt{2}|b^2\kappa_2^2 - 2|} \quad (3.1.22)$$

elde edilir.

3.2. $T_\alpha\zeta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi

Tanım 3.2.1. Regüler birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin equiform Frenet çatısı $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$ olmak üzere, α eğrisinin $T_\alpha\zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi

$$\gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 - b^2 = 2 \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.1 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin $T_\alpha\eta_\alpha$ -adjoint eğrisi γ olsun. α ve γ 'nın equiform Frenet çatıları sırasıyla $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$, $\{T_\gamma, \eta_\gamma, \zeta_\gamma\}$, 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla κ_1, κ_2 , $(\kappa_1)_\gamma, (\kappa_2)_\gamma$ ile gösterilirse

$$T_\gamma(\sigma^*) = \frac{aT_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{2}}, \quad (3.2.2)$$

$$\eta_\gamma(\sigma^*) = \pm \frac{\eta_\alpha(\sigma)}{\rho}, \quad (3.2.3)$$

$$\zeta_\gamma(\sigma^*) = \pm \varepsilon \frac{bT_\alpha(\sigma) + a\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho^2\sqrt{2}} \quad (3.2.4)$$

şeklindedir.

İspat (3.2.1) bağıntısı ile verilen γ eğrisinin σ^* equiform yay parametresine göre türevi alınır

$$\gamma'(\sigma^*) = \frac{d\gamma}{d\sigma^*} \cdot \frac{d\sigma^*}{d\alpha} = \frac{aT_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2\rho}} \quad (3.2.5)$$

$$T_\gamma(\sigma^*) \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{aT_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2\rho}} \quad (3.2.6)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\langle \gamma'(\sigma^*), \gamma'(\sigma^*) \rangle = \frac{\rho^2 (a^2 - b^2)}{2\rho^2} = 1 \quad (3.2.7)$$

eşitliğinden γ eğrisi birim hızlı spacelike eğridir. Bu durumda (3.2.6) ifadesinin her iki tarafının normu alınır ve $\|T_\gamma(\sigma^*)\| = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\| \frac{d\sigma^*}{d\sigma} \right\| = 1 \quad (3.2.8)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (3.2.6) ifadesinde yerine yazılırsa γ eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_\gamma(\sigma^*) = \frac{aT_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2\rho}} \quad (3.2.9)$$

şeklinde elde edilir. (3.2.9) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\frac{dT_\gamma}{d\sigma^*} \cdot \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{\left[\begin{pmatrix} a(\kappa_1 T_\alpha + \eta_\alpha) \\ +b(\kappa_2 \eta_\alpha + \kappa_1 \zeta_\alpha) \end{pmatrix} \sqrt{2\rho} - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (aT_\alpha + b\zeta_\alpha) \right]}{2\rho^2} \quad (3.2.10)$$

bulunur. Burada $\frac{d\rho}{ds} = \kappa_1$, $\frac{ds}{d\sigma} = \rho$ ve $\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = 1$ eşitlikleri kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$T'_\gamma(\sigma^*) = \frac{(a + b\kappa_2)\eta_\alpha}{\sqrt{2}\rho} \quad (3.2.11)$$

elde edilir. (3.2.11) bağıntısının her iki tarafının normu alınır

$$\|T'_\gamma(\sigma^*)\| = \frac{|a + b\kappa_2|}{\sqrt{2}} \quad (3.2.12)$$

bulunur. γ eğrisinin equiform asli normali η_γ ile gösterilirse (3.2.11) ve (3.2.12) bağıntılarından

$$\eta_\gamma(\sigma^*) = \frac{T'_\gamma(\sigma)}{\|T'_\gamma(\sigma)\|} = \pm \frac{\eta_\alpha}{\rho} \quad (3.2.13)$$

elde edilir.

$\varsigma_\gamma(\sigma^*) = \varepsilon(T_\gamma(\sigma^*) \times \eta_\gamma(\sigma^*))$ olduğundan equiform binormal vektörü

$$\varsigma_\gamma(\sigma^*) = \pm \varepsilon \frac{bT_\alpha + a\varsigma_\alpha}{\rho^2 \sqrt{2}} \quad (3.2.14)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.2 α ve γ eğrilerinin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla κ_1, κ_2 , $(\kappa_1)_\gamma, (\kappa_2)_\gamma$ ile gösterilirse

$$(\kappa_1)_\gamma(\sigma^*) = \frac{|a + b\kappa_2(\sigma)|}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.15)$$

$$(\kappa_2)_\gamma(\sigma^*) = \frac{\sqrt{2}\rho(-ab^2\kappa_2(\sigma)(1+\kappa_2^2(\sigma))-b\kappa_2^2(\sigma)(b^2+a^2))}{\left|(ab+b^2\kappa_2(\sigma))^2-(a^2+ab\kappa_2(\sigma))^2\right|} \quad (3.2.16)$$

şeklindedir.

İspat γ eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_\gamma(\sigma^*)$ olmak üzere eğriliğin tanımından

$(\kappa_1)_\gamma(\sigma^*) = \|T'_\gamma(\sigma)\|$ olduğundan (3.2.12) eşitliğinden

$$(\kappa_1)_\gamma(\sigma^*) = \|T'_\gamma(\sigma)\| = \frac{|a+b\kappa_2|}{\sqrt{2}} \quad (3.2.17)$$

ifadesi bulunur. $\gamma'(\sigma^*)$, $\gamma''(\sigma^*)$ ve $\gamma'''(\sigma^*)$ sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma'(\sigma^*) &= \frac{aT_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho}, \\ \gamma''(\sigma^*) &= \frac{\left[\begin{pmatrix} a(\kappa_1 T_\alpha + \eta_\alpha) \\ +b(\kappa_2 \eta_\alpha + \kappa_1 \zeta_\alpha) \end{pmatrix} \sqrt{2}\rho - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (aT_\alpha + b\zeta_\alpha) \right]}{2\rho^2} = \frac{(a+b\kappa_2)\eta_\alpha}{\sqrt{2}\rho}, \\ \gamma'''(\sigma^*) &= \frac{\left[\sqrt{2}\rho(b\kappa_2'\eta_\alpha + b\kappa_2(-T_\alpha + \kappa_1\eta_\alpha + \kappa_2\zeta_\alpha)) - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (a+b\kappa_2)\eta_\alpha \right]}{2\rho^2} \\ &= \frac{-b\kappa_2 T_\alpha + (b\kappa_2' - a\kappa_1)\eta_\alpha + b\kappa_2^2 \zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

şeklinde hesaplanır. (3.2.18) ifadesinde verilen eşitlikler kullanılarak

$$\gamma'(\sigma^*) \times \gamma''(\sigma^*) = \frac{(ab+b^2\kappa_2)T_\alpha + (a^2+ab\kappa_2)\zeta_\alpha}{2\rho^2} \quad (3.2.19)$$

$$\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle = \frac{-ab^2\kappa_2(1+\kappa_2^2) - b\kappa_2^2(b^2+a^2)}{2\sqrt{2}\rho}, \quad (3.2.20)$$

elde edilir. (3.2.19) eşitliğinin normu alınırsa

$$\left\| \gamma'(\sigma^*) \times \gamma''(\sigma^*) \right\| = \frac{\sqrt{(ab + b^2 \kappa_2)^2 - (a^2 + ab \kappa_2)^2}}{2\rho} \quad (3.2.21)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda γ eğrisinin 2.equiform eğriliği $(\kappa_2)_\gamma(\sigma^*)$ ile gösterilirse

$$(\kappa_2)_\gamma(\sigma^*) = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\left\| \gamma'(\sigma^*) \times \gamma''(\sigma^*) \right\|^2}$$

eşitliğinden

$$(\kappa_2)_\gamma(\sigma^*) = \frac{\sqrt{2}\rho(-ab^2\kappa_2(1+\kappa_2^2) - b\kappa_2^2(b^2 + a^2))}{|(ab + b^2\kappa_2)^2 - (a^2 + ab\kappa_2)^2|} \quad (3.2.22)$$

elde edilir.

3.3. $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -Adjoint Eğrisi

Tanım 3.3.1. Regüler birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin equiform Frenet çatısı

$\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$ olmak üzere, α eğrisinin $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi

$$\Gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (a\eta_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 - b^2 = 2 \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.1 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi Γ olsun. α ve Γ 'nın equiform Frenet çatıları $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha\}$, $\{T_\Gamma, \eta_\Gamma, \zeta_\Gamma\}$, 1. ve 2. equiform eğrilikleri

sırasıyla $\kappa_1, \kappa_2, (\kappa_1)_\Gamma, (\kappa_2)_\Gamma$ ile gösterilirse

$$T_\Gamma(\sigma^*) = \frac{a\eta_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{2}}, \quad (3.3.2)$$

$$\eta_\Gamma(\sigma^*) = \frac{-aT_\alpha(\sigma) + b\kappa_2(\sigma)\eta_\alpha(\sigma) + a\kappa_2(\sigma)\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{|a^2 - 2\kappa_2^2(\sigma)|}}, \quad (3.3.3)$$

$$\zeta_\Gamma(\sigma^*) = \varepsilon \frac{-2\kappa_2(\sigma)T_\alpha(\sigma) - ab\eta_\alpha(\sigma) + a^2\zeta_\alpha(\sigma)}{\rho^2\sqrt{|2a^2 - 4\kappa_2^2(\sigma)|}}, \quad (3.3.4)$$

şeklindedir.

İspat (3.3.1) bağıntısı ile verilen Γ eğrisinin σ^* equiform parametresine göre türevi alınır

$$\Gamma'(\sigma^*) = \frac{d\Gamma}{d\sigma^*} \cdot \frac{d\sigma^*}{d\alpha} = \frac{a\eta_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho}, \quad (3.3.5)$$

$$T_\Gamma(\sigma^*) \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{a\eta_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho} \quad (3.3.6)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\langle \Gamma'(\sigma^*), \Gamma'(\sigma^*) \rangle = \frac{\rho^2(a^2 - b^2)}{2\rho^2} = 1 \quad (3.3.7)$$

eşitliğinden Γ eğrisi birim hızlı spacelike eğridir. Bu durumda (3.3.6) ifadesinin her iki tarafının normu alınır ve $\|T_\Gamma(\sigma^*)\| = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\| \frac{d\sigma^*}{d\sigma} \right\| = 1 \quad (3.3.8)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (3.3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa Γ eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_{\Gamma}(\sigma^*) = \frac{a\eta_{\alpha} + b\zeta_{\alpha}}{\rho\sqrt{2}} \quad (3.3.9)$$

şeklinde elde edilir. (3.3.9) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\frac{dT_{\Gamma}}{d\sigma^*} \cdot \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{\left[\begin{aligned} & \left(a(-T_{\alpha} + \kappa_1\eta_{\alpha} + \kappa_2\zeta_{\alpha}) \right) \sqrt{2\rho} \\ & + b(\kappa_2\eta_{\alpha} + \kappa_1(\sigma)\zeta_{\alpha}) \\ & - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (a\eta_{\alpha} + b\zeta_{\alpha}) \end{aligned} \right]}{2\rho^2} \quad (3.3.10)$$

bulunur. Burada $\frac{d\rho}{d\sigma^*} = \kappa_1$, $\frac{ds}{d\sigma} = \rho$ ve $\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \rho$ eşitlikleri kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$T'_{\Gamma}(\sigma^*) = \frac{-aT_{\alpha} + b\kappa_2\eta_{\alpha} + a\kappa_2\zeta_{\alpha}}{\sqrt{2\rho}} \quad (3.3.11)$$

elde edilir. (3.3.11) bağıntısının her iki tarafının normu alınır

$$\left\| T'_{\Gamma}(\sigma^*) \right\| = \frac{\sqrt{a^2 - 2\kappa_2^2}}{\sqrt{2}} \quad (3.3.12)$$

bulunur. Γ eğrisinin equiform asli normali η_{Γ} ile gösterilirse (3.3.11) ve (3.3.12) bağıntılarından

$$\eta_{\Gamma}(\sigma^*) = \frac{T'_{\Gamma}(\sigma^*)}{\|T'_{\Gamma}(\sigma^*)\|} = \frac{-aT_{\alpha} + b\kappa_2\eta_{\alpha} + a\kappa_2\zeta_{\alpha}}{\rho\sqrt{|a^2 - 2\kappa_2^2|}} \quad (3.3.13)$$

elde edilir.

$\zeta_{\Gamma} = \varepsilon(T_{\Gamma} \times \eta_{\Gamma})$ olduğundan Γ eğrisinin equiform binormal vektörü

$$\zeta_{\Gamma}(\sigma^*) = \varepsilon \frac{-2\kappa_2T_{\alpha} - ab\eta_{\alpha} + a^2\zeta_{\alpha}}{\rho^2\sqrt{|2a^2 - 4\kappa_2^2|}} \quad (3.3.14)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.3.2 α ve Γ eğrilerinin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla κ_1, κ_2 , $(\kappa_1)_{\Gamma}, (\kappa_2)_{\Gamma}$ ile gösterilirse

$$(\kappa_1)_{\Gamma}(\sigma^*) = \frac{\sqrt{|a^2 - 2\kappa_2^2(\sigma)|}}{\sqrt{2}} \quad (3.3.15)$$

$$(\kappa_2)_{\Gamma}(\sigma^*) = \frac{\rho(2b\kappa_2^2(\sigma) + ab^2\kappa_2'(\sigma) - a^3\kappa_2'(\sigma) - a^2b)}{\sqrt{2}|2\kappa_2^2(\sigma) - a^2|}} \quad (3.3.16)$$

İspat Γ eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_{\Gamma}(\sigma^*)$ olmak üzere eğriliğin tanımından

$(\kappa_1)_{\Gamma}(\sigma^*) = \|T'_{\Gamma}(\sigma^*)\|$ olduğundan (3.3.14) eşitliğinden

$$(\kappa_1)_{\Gamma}(\sigma^*) = \|T'_{\Gamma}(\sigma^*)\| = \frac{\sqrt{|a^2 - 2\kappa_2^2|}}{\sqrt{2}} \quad (3.3.17)$$

eşitliği bulunur. $\Gamma'(\sigma^*), \Gamma''(\sigma^*)$ ve $\Gamma'''(\sigma^*)$ sırasıyla

$$\Gamma'(\sigma^*) = \frac{a\eta_\alpha + b\zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho},$$

$$\Gamma''(\sigma^*) = \frac{\left[\begin{pmatrix} a(-T_\alpha + \kappa_1\eta_\alpha + \kappa_2\zeta_\alpha) \\ +b(\kappa_2\eta_\alpha + \kappa_1\zeta_\alpha) \end{pmatrix} \sqrt{2}\rho - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (a\eta_\alpha + b\zeta_\alpha) \right]}{2\rho^2}$$

$$= \frac{-aT_\alpha + b\kappa_2\eta_\alpha + a\kappa_2\zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho}$$

$$\Gamma'''(\sigma^*) = \frac{\left[\begin{pmatrix} \sqrt{2}\rho \left(-a(\kappa_1T_\alpha + \eta_\alpha) + b\kappa_2'\eta_\alpha + b\kappa_2(-T_\alpha + \kappa_1\eta_\alpha + \kappa_2\zeta_\alpha) \right) \\ +a\kappa_2'\zeta_\alpha + a\kappa_2(\kappa_2\eta_\alpha + \kappa_1\zeta_\alpha) \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \sqrt{2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (-aT_\alpha + b\kappa_2\eta_\alpha + a\kappa_2\zeta_\alpha) \right]}{2\rho^2}$$

(3.3.18)

$$= \frac{-b\kappa_2T_\alpha + (b\kappa_2' + a\kappa_2^2 - a)\eta_\alpha + (b\kappa_2^2 + a\kappa_2')\zeta_\alpha}{\sqrt{2}\rho}$$

şeklinde hesaplanır. (3.3.18) ifadesinde verilen eşitlikler kullanılarak

$$\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma''' \rangle = \frac{2b\kappa_2^2 + ab^2\kappa_2' - a^3\kappa_2' - a^2b}{2\sqrt{2}\rho}, \quad (3.3.19)$$

$$\Gamma'(\sigma^*) \times \Gamma''(\sigma^*) = \frac{-2\kappa_2T_\alpha + ab\eta_\alpha + a^2\zeta_\alpha}{2\rho^2} \quad (3.3.20)$$

elde edilir. Bu (3.3.20) eşitliğinin normu alınır

$$\|\Gamma'(\sigma^*) \times \Gamma''(\sigma^*)\| = \frac{\sqrt{|4\kappa_2^2 - 2a^2|}}{2\rho} \quad (3.3.21)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda Γ eğrisinin 2.equiform eğriliği $(\kappa_2)_\Gamma(\sigma^*)$ ile gösterilirse

$$(\kappa_2)_\Gamma(\sigma^*) = \frac{\langle \Gamma' \times \Gamma'', \Gamma''' \rangle}{\|\Gamma'(\sigma^*) \wedge \Gamma''(\sigma^*)\|^2}$$

eşitliğinden

$$(\kappa_2)_\Gamma(\sigma^*) = \frac{\rho(2b\kappa_2^2 + ab^2\kappa_2' - a^3\kappa_2' - a^2b)}{\sqrt{2}|2\kappa_2^2 - a^2|} \quad (3.3.22)$$

elde edilir.

3.4. $T_\alpha\eta_\alpha\varsigma_\alpha$ -Adjoint Eğrisi

Tanım 3.4.1. Regüler birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin equiform Frenet çatısı $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \varsigma_\alpha\}$ olmak üzere, α eğrisinin $T_\alpha\eta_\alpha\varsigma_\alpha$ -adjoint eğrisi

$$\Psi(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{3}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma) + c\varsigma_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 3 \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.1 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin $T_\alpha\eta_\alpha\varsigma_\alpha$ -adjoint eğrisi Ψ olsun. α ve Ψ 'nin equiform Frenet çatıları $\{T_\alpha, \eta_\alpha, \varsigma_\alpha\}$, $\{T_\Psi, \eta_\Psi, \varsigma_\Psi\}$, 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla κ_1, κ_2 , $(\kappa_1)_\Psi, (\kappa_2)_\Psi$ ile gösterilirse

$$T_\Psi(\sigma^*) = \frac{aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma) + c\varsigma_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{3}} \quad (3.4.2)$$

$$\eta_\Psi(\sigma^*) = \frac{-aT_\alpha(\sigma) + b\kappa_2(\sigma)\eta_\alpha(\sigma) + a\kappa_2(\sigma)\varsigma_\alpha(\sigma)}{\rho\sqrt{b^2 + (a + c\kappa_2(\sigma))^2 - b^2\kappa_2^2(\sigma)}} \quad (3.4.3)$$

$$\zeta_\psi(\sigma^*) = \varepsilon \frac{\left[\left((ac + (c^2 - b^2)\kappa_2(\sigma))T_\alpha(\sigma) - (ab\kappa_2(\sigma) + bc)\eta_\alpha(\sigma) \right) + (a^2 + b^2 + ac\kappa_2(\sigma))\zeta_\alpha(\sigma) \right]}{\rho^2 \sqrt{3} \sqrt{b^2 + (a + c\kappa_2(\sigma))^2 - b^2\kappa_2^2(\sigma)}} \quad (3.4.4)$$

şeklindedir.

İspat (3.4.1) bağıntısı ile verilen ψ eğrisinin σ^* equiform parametresine göre türevi alınır

$$\Psi'(\sigma^*) = \frac{d\psi}{d\sigma^*} \cdot \frac{d\sigma^*}{d\alpha} = \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha + c\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho}, \quad (3.4.5)$$

$$T_\Psi(\sigma^*) \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha + c\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho} \quad (3.4.6)$$

eşitlikleri bulunur.

$$\langle \Psi'(\sigma^*), \Psi''(\sigma^*) \rangle = \frac{\rho^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{3\rho^2} = 1 \quad (3.4.7)$$

eşitliğinden Ψ eğrisi birim hızlı spacelike eğridir. Bu durumda (3.4.6) ifadesinin her iki tarafının normu alınır ve $\|T_\Psi(\sigma^*)\| = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left\| \frac{d\sigma^*}{d\sigma} \right\| = 1 \quad (3.4.8)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (3.4.6) ifadesinde yerine yazılırsa Ψ eğrisinin equiform teğet vektörü

$$T_\Psi(\sigma^*) = \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha + c\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho}. \quad (3.4.9)$$

şeklinde elde edilir. (3.4.9) ifadesinin tekrar türevi alınır

$$\frac{dT_\Psi}{d\sigma^*} \cdot \frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \frac{\left[\begin{aligned} & \left(a(\kappa_1 T_\alpha + \eta_\alpha) + b(-T_\alpha + \kappa_1 \eta_\alpha + \kappa_2 \zeta_\alpha) \right) \sqrt{3} \rho \\ & + c(\kappa_2 \eta_\alpha + \kappa_1 \zeta_\alpha) \\ & - \sqrt{3} \frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{d\sigma} (aT_\alpha + b\eta_\alpha + c\zeta_\alpha) \end{aligned} \right]}{3\rho^2} \quad (3.4.10)$$

bulunur. Burada $\frac{d\rho}{d\sigma^*} = \kappa_1$ ve $\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \rho$ eşitlikleri kullanılarak düzenleme yapılırsa

$$T_\Psi'(\sigma^*) = \frac{-bT_\alpha + (a + c\kappa_2)\eta_\alpha + b\kappa_2\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho} \quad (3.4.11)$$

elde edilir. (3.4.11) bağıntının her iki tarafının normu alınır

$$\|T_\Psi'(\sigma^*)\| = \frac{\sqrt{b^2 + (a + c\kappa_2)^2 - b^2\kappa_2^2}}{\sqrt{3}} \quad (3.4.12)$$

bulunur. Ψ eğrisinin equiform asli normal η_Ψ ile gösterilirse (3.4.11.) ve (3.4.12) bağıntılarından

$$\eta_\Psi(\sigma^*) = \frac{T_\Psi'(\sigma^*)}{\|T_\Psi'(\sigma^*)\|} = \frac{-bT_\alpha + (a + c\kappa_2)\eta_\alpha + b\kappa_2\zeta_\alpha}{\rho \sqrt{b^2 + (a + c\kappa_2)^2 - b^2\kappa_2^2}} \quad (3.4.13)$$

elde edilir.

$\zeta_\Psi = \varepsilon(T_\Psi \times \eta_\Psi)$ olduğundan Ψ eğrisinin equiform binormal vektörü

$$\zeta_\Psi(\sigma^*) = \varepsilon \frac{\left[\begin{aligned} & ((ac + (c^2 - b^2)\kappa_2)T_\alpha - (ab\kappa_2 + bc)\eta_\alpha) \\ & + (a^2 + b^2 + ac\kappa_2)\zeta_\alpha \end{aligned} \right]}{\rho^2 \sqrt{3} \sqrt{b^2 + (a + c\kappa_2)^2 - b^2\kappa_2^2}} \quad (3.4.14)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.4.2 α ve Ψ eğrilerinin 1. ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla κ_1, κ_2 ,

$(\kappa_1)_\Psi, (\kappa_2)_\Psi$ ile gösterilirse

$$(\kappa_1)_\Psi(\sigma^*) = \frac{\sqrt{b^2 + (a + c\kappa_2(\sigma))^2 - b^2\kappa_2^2(\sigma)}}{\sqrt{3}}, \quad (3.4.15)$$

$$(\kappa_2)_\psi(\sigma^*) = \frac{\sqrt{3}\rho \left[\begin{aligned} &-(a+c\kappa_2(\sigma)) \left(\frac{ac(1+\kappa_2(\sigma))+\kappa_2(\sigma)(c^2-b^2)}{a^2+b^2} \right) \\ &+(c\kappa_2'(\sigma)+b\kappa_2^2(\sigma)-b)(ab\kappa_2(\sigma)+bc) \end{aligned} \right]}{\left| \begin{aligned} &(ac+c^2\kappa_2(\sigma))-b^2\kappa_2(\sigma))^2+(ab\kappa_2(\sigma)+bc)^2 \\ &-(a^2+b^2+ac\kappa_2(\sigma))^2 \end{aligned} \right|}} \quad (3.4.16)$$

İspat Ψ eğrisinin 1.equiform eğriliği $(\kappa_1)_\psi(\sigma^*)$ olmak üzere eğriliğin tanımından $(\kappa_1)_\psi(\sigma^*) = \|T'_\psi(\sigma)\|$ olduğundan (3.4.12) eşitliğinden

$$(\kappa_1(\sigma^*))_\psi = \|T'_\psi(\sigma)\| = \frac{\sqrt{b^2 + (a+c\kappa_2)^2 - b^2\kappa_2^2}}{\sqrt{3}} \quad (3.4.17)$$

ifadesi bulunur. $\Psi'(\sigma^*), \Psi''(\sigma^*)$ ve $\Psi'''(\sigma^*)$ sırasıyla

$$\begin{aligned} \Psi'(\sigma^*) &= \frac{aT_\alpha + b\eta_\alpha + c\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho}, \\ \Psi''(\sigma^*) &= \frac{\left[\begin{aligned} &(a(\kappa_1T_\alpha + \eta_\alpha) + b(-T_\alpha + \kappa_1\eta_\alpha + \kappa_2\zeta_\alpha)) \\ &+ c(\kappa_2\eta_\alpha + \kappa_1\zeta_\alpha) \end{aligned} \right] \sqrt{3}\rho}{3\rho^2} \\ &= \frac{-bT_\alpha + (a+c\kappa_2)\eta_\alpha + b\kappa_2\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho}, \\ \Psi'''(\sigma^*) &= \frac{\left[\begin{aligned} &\sqrt{3}\rho \left(\begin{aligned} &-b(\kappa_1T_\alpha + \eta_\alpha) + c\kappa_2'\eta_\alpha \\ &+(a+c\kappa_2)(-T_\alpha + \kappa_1\eta_\alpha + \kappa_2\zeta_\alpha) \\ &+ b\kappa_2'\zeta_\alpha + b\kappa_2(\kappa_2\eta_\alpha + \kappa_1\zeta_\alpha) \end{aligned} \right) \\ &-\sqrt{3} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot (-bT_\alpha + (a+c\kappa_2)\eta_\alpha + b\kappa_2\zeta_\alpha) \end{aligned} \right]}{3\rho^2} \\ &= \frac{(-a-c\kappa_2)T_\alpha + (-b+c\kappa_2'+b\kappa_2^2)\eta_\alpha + (a+c\kappa_2)\kappa_2\zeta_\alpha}{\sqrt{3}\rho} \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

şeklinde hesaplanır. (3.4.18) ifadesinde verilen eşitlikler kullanılarak

$$\Psi'(\sigma^*) \times \Psi''(\sigma^*) = \frac{\begin{bmatrix} (ac + c^2\kappa_2 - b^2\kappa_2)T_\alpha \\ + (ab\kappa_2 + bc)\eta_\alpha \\ + (a^2 + b^2 + ac\kappa_2)\zeta_\alpha \end{bmatrix}}{3\rho^2} \quad (3.4.19)$$

$$\langle \Psi'(\sigma^*) \times \Psi''(\sigma^*), \Psi'''(\sigma^*) \rangle = \frac{\begin{bmatrix} -(a + c\kappa_2)(ac + c^2\kappa_2 - b^2\kappa_2 + ac\kappa_2 + a^2 + b^2) \\ + (-b + c\kappa_2' + b\kappa_2^2)(ab\kappa_2 + bc) \end{bmatrix}}{3\sqrt{3}\rho}, \quad (3.1.20)$$

elde edilir. (3.4.19) eşitliğinin normu alınırsa

$$\|\Psi'(\sigma^*) \times \Psi''(\sigma^*)\| = \frac{\sqrt{\begin{bmatrix} (ac + c^2\kappa_2 - b^2\kappa_2)^2 \\ + (ab\kappa_2 + bc)^2 \\ - (a^2 + b^2 + ac\kappa_2)^2 \end{bmatrix}}}{3\rho} \quad (3.4.21)$$

şeklinde bulunur. .Bu durumda Ψ eğrisinin 2.equiform eğriliği olmak üzere

$$(\kappa_2)_\Psi(\sigma^*) = \frac{\langle \Psi'(\sigma^*) \times \Psi''(\sigma^*), \Psi'''(\sigma^*) \rangle}{\|\Psi'(\sigma^*) \times \Psi''(\sigma^*)\|^2}$$

eşitliğinden

$$(\kappa_2)_\Psi(\sigma^*) = \frac{\sqrt{3}\rho \begin{bmatrix} -(a + c\kappa_2)(ac + c^2\kappa_2 - b^2\kappa_2 + ac\kappa_2 + a^2 + b^2) \\ + (c\kappa_2' + b\kappa_2^2 - b)(ab\kappa_2 + bc) \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} (ac + c^2\kappa_2 - b^2\kappa_2)^2 + (ab\kappa_2 + bc)^2 \\ - (a^2 + b^2 + ac\kappa_2)^2 \end{vmatrix}} \quad (3.4.22)$$

elde edilir.

Örnek 3.1 $\alpha : (-\pi, \pi) \rightarrow E_1^3$ birim hızlı spacelike normalli spacelike

$$\alpha(s) = (s \sin(\ln s), s \cos(\ln s), s)$$

eğrisinin Frenet elemanları $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ ile gösterilirse (2.1.3) ve (2.1.4) eşitliklerden

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\ln s) + \cos(\ln s), \cos(\ln s) - \sin(\ln s), 1),$$

$$n(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\ln s) - \sin(\ln s), -\sin(\ln s) - \cos(\ln s), 0),$$

$$b(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\ln s) + \cos(\ln s), \cos(\ln s) - \sin(\ln s), 2)$$

ve eğrilik ve burulması sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{s},$$

$$\tau(s) = \frac{1}{s}$$

olarak bulunur. (2.2.1) eşitliğinden

$$\rho = \frac{1}{\kappa(s)} = \frac{s}{\sqrt{2}},$$

$$\sigma = \int \frac{ds}{\rho} = \sqrt{2} \int \frac{ds}{s} = \sqrt{2} \ln(s) + c_1$$

olup burada $c_1 = 0$ alınarak $s = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$ dönüşümü yapılırsa

$$\alpha(\sigma) = \left(e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \right)$$

$\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi elde edilir. Bu takdirde $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisinin Frenet vektörleri (2.2.4) ve (2.2.5) eşitliklerinden

$$T(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), 1 \right),$$

$$\eta(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{2} \left(\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), 0 \right),$$

$$\varsigma(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{2} \left(\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), 2 \right)$$

ve 1. equiform ve 2. equiform eğrilikleri sırasıyla (2.2.6), (2.2.7) eşitliklerinden

$$\kappa_1(\sigma) = \rho'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\kappa_2(\sigma) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur.

$\alpha(\sigma)$ eğrisinin $T_\alpha \eta_\alpha$ -adjoint eğrisi $\beta(\sigma^*)$ ile gösterilirse

$$\beta(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (aT_\alpha + b\eta_\alpha) d\sigma, \quad a^2 + b^2 = 2$$

olmak üzere $a = b = 1$ alınırsa $\beta(\sigma^*)$ adjoint eğrisi

$$\beta(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int \left(\frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{2} \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{2}+1)\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \\ -(\sqrt{2}+1)\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{2}-1)\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2} \end{pmatrix} \right) d\sigma$$

şeklinde elde edilir. Burada integraller hesaplanırsa $\beta(\sigma^*)$ eğrisi

$$\beta(\sigma^*) = \left(\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), 1 \right) + (c_1, c_2, c_3)$$

olarak hesaplanır .Burada c_1, c_2, c_3 birer sabittir.

$\alpha(\sigma)$ eğrisinin $T_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi $\gamma(\sigma^*)$ ile gösterilirse

$$\gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 - b^2 = 2$$

olmak üzere $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ alınırsa $\gamma(\sigma^*)$ adjoint eğrisi

$$\gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}+1}{4} \left(\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right), \\ \frac{3\sqrt{2}+1}{4} \left(\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right), \frac{3\sqrt{2}+2}{4} \end{pmatrix} d\sigma$$

şeklinde olup burada integraller alınıp gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\gamma(\sigma^*) = \left(\frac{6+\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \frac{6+\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \frac{3+\sqrt{2}}{2} \right) + (c_1, c_2, c_3)$$

olarak bulunur.Burada c_1, c_2, c_3 birer sabittir.

$\alpha(\sigma)$ eğrisinin $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi $\Gamma(\sigma^*)$ ile gösterilirse

$$\Gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int (a\eta_\alpha(\sigma) + b\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 - b^2 = 2,$$

olmak üzere $a = \frac{11}{6}, b = \frac{7}{6}$ alınırsa $\Gamma(\sigma^*)$ adjoint eğrisi

$$\Gamma(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \int e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \left(\begin{array}{c} 3\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{3}\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\ -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 3\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \frac{14}{6} \end{array} \right) d\sigma$$

şeklinde olup burada integraller alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma(\sigma^*) = \left(\frac{7\sqrt{2}}{12} \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \frac{11\sqrt{2}}{12} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \frac{7\sqrt{2}}{12} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{11\sqrt{2}}{12} \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \frac{7\sqrt{2}}{6} \right) + (c_1, c_2, c_3)$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2, c_3 birer sabittir.

$\alpha(\sigma)$ eğrisinin $T_\alpha \eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi $\Psi(\sigma^*)$ ile gösterilirse

$$\Psi(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{3}\rho} \int (aT_\alpha(\sigma) + b\eta_\alpha(\sigma) + c\zeta_\alpha(\sigma)) d\sigma, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 3$$

olmak üzere $a = 1, b = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{2}$ alınırsa $\Psi(\sigma^*)$ adjoint eğrisi

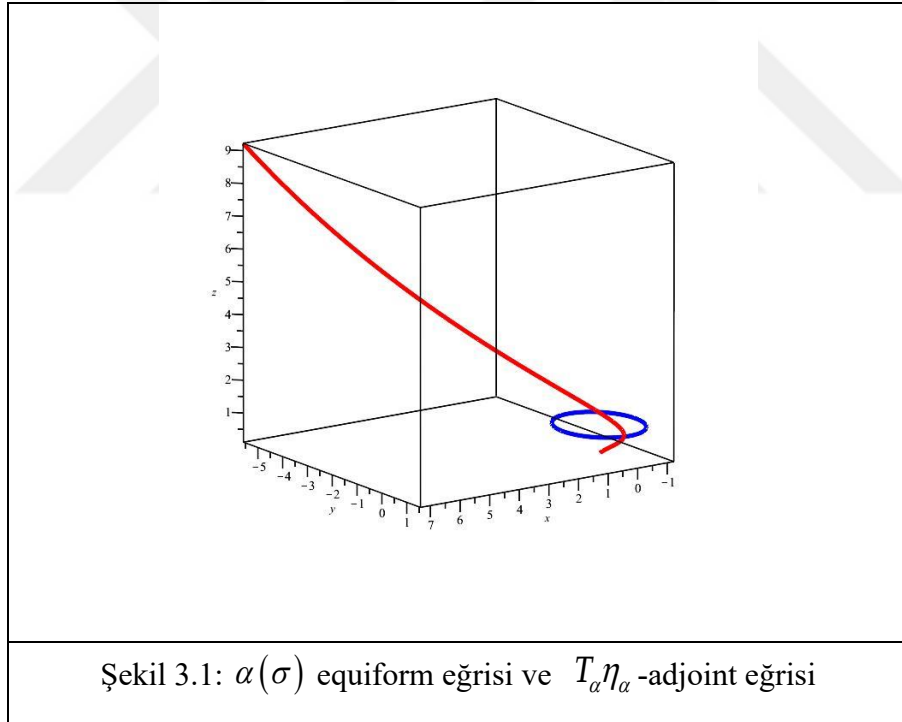
$$\Psi(\sigma^*) = \frac{1}{\sqrt{3}\rho} \int e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \left(\begin{array}{c} (\sqrt{2}+2)\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{2}-1)\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \\ (\sqrt{2}-1)\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - (\sqrt{2}+2)\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2}+1 \end{array} \right) d\sigma$$

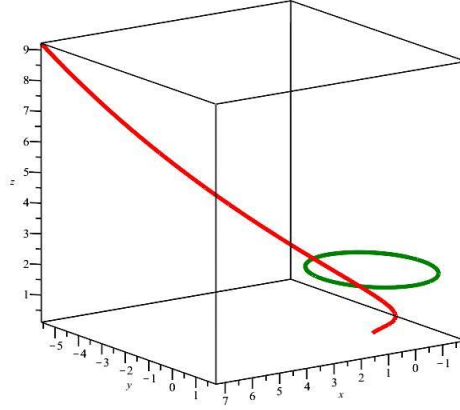
elde edilir. Burada integral alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa $\Psi(\sigma^*)$ eğrisi

$$\Psi(\sigma^*) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4+\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{4+\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix} \right) + (c_1, c_2, c_3)$$

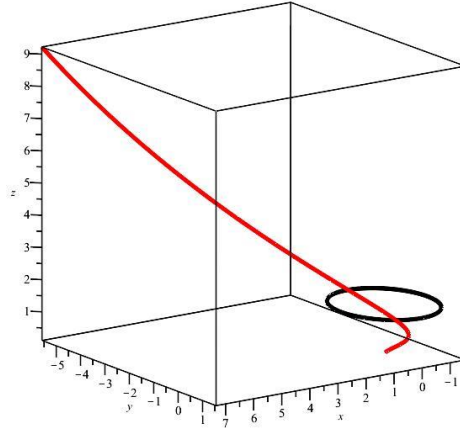
bulunur. Burada c_1, c_2, c_3 birer sabittir.

Aşağıda equiform eğri $\alpha(\sigma)$ ve $T_\alpha \eta_\alpha$, $T_\alpha \zeta_\alpha$, $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ ve $T_\alpha \eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrilerinin grafikleri sırasıyla kırmızı, mavi, yeşil, siyah ve kahverengi renkte gösterilmiştir. Grafiklerin çiziminde Maple programından yararlanılmıştır.

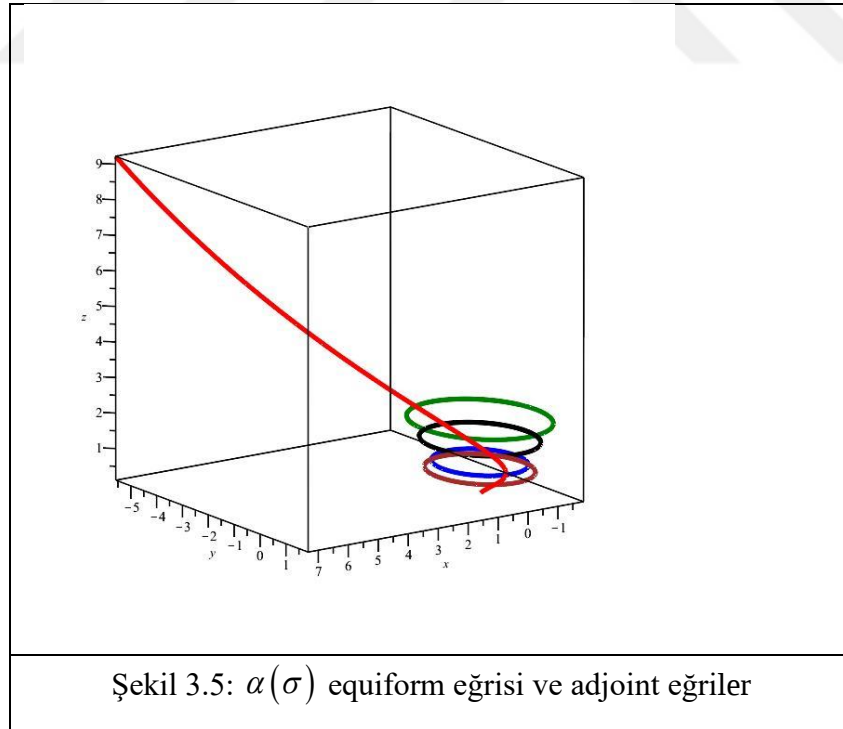
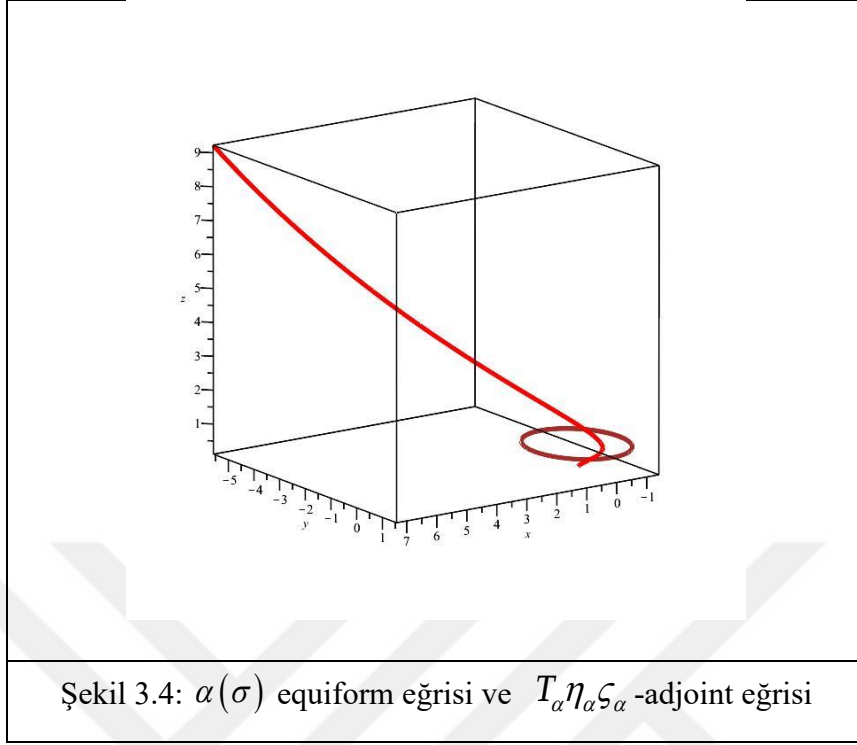




Şekil 3.2: $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve $T_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi



Şekil 3.3: $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi ve $\eta_\alpha \zeta_\alpha$ -adjoint eğrisi



4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında equiform Frenet çatıya göre spacelike asli normale sahip spacelike eğrilerden elde edilen özel Smarandache eğrilerinin integral eğrileri yardımıyla üretilen yeni adjoint eğriler incelenmiştir. Elde edilen yeni adjoint eğrilerin equiform Frenet çatı elemanları esas eğrinin equiform Frenet çatı elemanları cinsinden elde edilmiştir. Son olarak bu eğriler ile ilgili örnekler verilerek Maple programı ile çizimleri yapılmıştır. Benzer şekilde bu çalışma 4 boyutlu Minkowski uzayında verilen bir eğri için yapılabilir.



5. KAYNAKLAR

- Abdel-Aziz H S, Khalifa Saad M , A A Abdel-Salam A A, 2015, Equiform Differential Geometry of Curves in Minkowski Space-Time, [arXiv.org/ math/ arXiv:1501.02283](https://arxiv.org/math/1501.02283).
- Ali A T, 2010, Special Smarandache curves in the Euclidean space. International Journal of Mathematical. Combinatorics, ,30-36.
- Akutagawa K, Nishikawa S, 1990, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 42(1), 67-82.
- Aydın M, Ergüt M, 2013, The equiform differential geometry of curves in 4-dimensional Galilean space G_4 ,. Stud. Univ. Babes,-Bolyai Math., 58, 399–406.
- Deshmukh S, Chen, B -Y, Alghanemi, A 2018, Natural Mates of Frenet Curves in Euclidean 3-space, Turkish.Journal of Mathematics, 42, 2826-2840.
- Do Carmo M, 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces. New Jersey, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs.
- Elsayied H K, Elzawy M, Elsharkawy A, 2017, Equiform timelike normal curves in Minkowski space, Far East Journal of Mathematical Science. 101, 1619–1629.
- Elsayied H K, Elzawy M, Elsharkawy A, 2018, Equiform spacelike normal curves according to equiform-Bishop frame in E_1^3 , Mathematical. Methods in Applied Science, 41,5754–5760.
- Elsharkawy A, 2020, Generalized involute and evolute curves of equiform spacelike curves with a timelike equiform principal normal in E_1^3 , Journal of Egyptian Mathematical Society, 28,1–10.
- Elzawy M, Mosa S, 2017, Smarandache curves in the Galilean 4-space G_4 , Journal of Egyptian Mathematical Society, 25(1), 53–56.
- Kalkan Boyacıoğlu Ö, 2024, On Equiform Rectifying, Normal and Osculating Curves in Minkowski Space-Time, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13(2), 467-473.
- Kelleci A 2019, Conjugate mates for non-null Frenet curves, Sakarya University Journal of Science, 23(4), 600-604, DOI: 10.16984/sofenbilder.494471.
- Kızıltuğ S, Yaylı Y, 2014, Y Bertrand Curves of AW(k)-type in the Equiform Geometry of the Galilean Space, Abstract and Applied Analysis, 1–6.

- Nurkan S K, Güven İ A, Karacan M K, 2019, “Characterizations of Adjoint Curves in Euclidean 3-Space”, Proceedings of National. Academy of Sciences, India, Sect. A Phys. Sci. 89, 155–161.
- Odehnal B, Pottmann H, Wallner J, 2006, Equiform kinematics and the geometry of line elements, *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, 47 (2), 567-582.
- ONeill B Semi, 1983 -Riemannian Geometry with Applications to Relativity; Academic Press, New York, NY, USA.
- Öztürk U, Koç Öztürk E B, Yaylı Y, 2012, Point-line geometry and equiform kinematics in Minkowski 3-space, 5, 27-35.
- Pavkovic, B J 1986, Equiform geometry of curves in the isotropic spaces and $\xi_3^{(1)}$ and $\xi_3^{(2)}$, *Rad HAZU*, 39-44.
- Pavkovic B J, Kamenarovic I, 1987, The equiform differential geometry of curves in the Galilean space G_3 , *Glasnik Matematicki*, 22(42), 449-457.
- Solouma E M, 2017, Special equiform Smarandache curves in Minkowski space-time, *Journal of Egyptian Mathematical Society*, 25(3), 319–325.
- Solouma E M, Mahmoud W M, 2019, On spacelike equiform-Bishop Smarandache curves on S_1^2 , *Journal of Egyptian Mathematical Society*, 27(7).
- Solouma E, 2020, Generalized Smarandache curves of spacelike and equiform spacelike curves via timelike second binormal in R_1^4 , *Applications and Applied Mathematics An International Journal (AAM)*, 15(2), 1369-1380.
- Şenyurt S, Çalışkan A, 2017, Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 5(1), 122–136.
- Uğurlu H H, 1997, On the Geometry of Timelike Surfaces, *Communications Faculty of Sciences. University of Ankara Seriesaa, A1 Mathematics and Statics*, 46, 211-223.
- Tashkandy Y, Emam W, Cesarano C, Abd El-Raouf M M, Elsharkawy A, 2022, Generalized Spacelike Normal Curves in Minkowski Three-Space, *Mathematics* 10(21), 4145.
- Turgut M, Yılmaz S, 2008, S, Smarandache curves in Minkowski space time, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3, 51–55.

- Walrave J, 1995, Curves and Surfaces in Minkowski Space. Doctoral Thesis, K. U. Leuven, Faculty of Science, Leuven, Belgium.
- Woestijne V D I, 1990, Minimal Surfaces of the 3-Dimensional Minkowski Space, Proc. Congres Geometrie Dierentielle Et Applications, Avignon (30 May 1988), Word Scientific Publishing Singapore, 344-369.
- Zlatko E, Blaenka Divjak B, 2008, The equiform differential geometry of curves in the pseudo-Galilean space, Mathematical Communications, 13(2), 321-332.

