



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MINKOWSKI 3- UZAYINDA TIMELIKE REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mohammed Balo ABDULJABAR

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN

AKSARAY, 2018

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342631 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Mohammed Balo ABDULJABAR", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "MINKOWSKI 3- UZAYINDA TIMELIKE REGLE YÜZEYLER" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN


.....

Trakya Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Gülhan AYAR


.....

Karamanoğlu Mehmet Bey Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Zeynep CAN


.....

Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 29.12.2017

Savunma Tarihi: 25.01.2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım. Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Mohammed Balo ABDULJABAR

TEŞEKKÜR

Bana Türkiye’de eğitim alma fırsatı veren Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitim süresince yardımlarını esirgemeyen Fen Bilimleri Enstitüsü idareci ve çalışanlarına, Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında sürekli yardım ve desteğini gördüğüm danışmanım Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN’e ve çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma en derin şükranlarımı sunarım.

Mohammed Balo ABDULJABAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

DOĞRULUK BEYANI.....	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Öklid Uzayı	3
2.2 Lorentz Uzayı.....	5
2.3 Yarı-Riemann Manifoldları.....	7
2.4 IR_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım	9
2.5 IR_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler.....	12
3. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE REGLE YÜZEYLER.....	17
3.1. Timelike Regle Yüzeyler	17
3.2. Açılabilir Timelike Regle Yüzeyler	19
3.3. Bir Merkez Noktanın Konum Vektörü	20
3.4. Timelike Regle Yüzeyin Dağılma Parametresi.....	23
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ.....	34

ÖZET

MINKOWSKI 3-UZAYINDA TIMELIKE REGLE YÜZEYLER

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde bazı literatür bilgilerine yer verilmiştir. İkinci bölüm temel tanım ve teoremlerin sunulduğu bölümdür. Üçüncü bölüm de Minkowski 3- uzayında timelike regle yüzeyler hakkında detaylı bilgiler verilmiştir. Dördüncü ve son bölüm ise sonuç ve öneriler bölümüdür, yapılan çalışma özetlenmiş ve çalışma hakkındaki fikirler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3- Uzayı, Regle Yüzey, Timelike Regle Yüzey, Açılabilir Timelike Regle Yüzey

ABSTRACT

TIMELIKE RULED SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

This thesis consists four chapters. The first chapter devoted to historical development of ruled surfaces. In the second chapter some fundamental definitions and theorems that we used in this thesis are given. In the third chapter, detailed informations about timelike rules surfaces in Minkowski 3-space are given. In the fourth and the final chapter some suggestions and conclusions are given.

Key Words: Minkowski 3-Space, Ruled Surfaces, Timelike Ruled Surfaces, Developable Timelike Ruled Surface

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1: Minkowski uzayının casual karakteri.....	6
Şekil 3.1: Komşu anadoğruları ile verilen regle yüzey.....	20
Şekil 3.2: İkinci tür helikoid.....	28
Şekil 3.3: Birinci tür helikoid.....	29
Şekil 3.4: İkinci tür enneper yüzeyine conjugate olan yüzeyler.....	30



SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{B}$	: Binormal vektör alanı
$\mathbf{D}$	: Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
D	: Riemann koneksiyonu
$\mathbf{E}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
κ	: Eğrilik
$\mathbf{k}_i$	: i-inci eğrilik
$\mathbf{N}$	: Asli normal vektör alanı
P_X	: Regle yüzeyin dağılma parametresi
$\mathbb{R}_1^3$	: Minkowski 3-uzayı
$\mathbf{R}$	: Riemann eğrilik tensörü
$\mathbf{S}$	: Şekil operatörü
$\mathbf{T}$	: Teget vektör alanı
$T_M(\mathbf{P})$	: $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
τ	: Torsiyon
ν	: İndeks
$\chi(M)$	: M nin vektör alanları uzayı
$\mathbf{X}$	: Doğrutman vektör
ξ	: M manifoldun birim normal vektör alanı
∇	: Yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
$\varphi(t, \nu)$	: Regle yüzey

1. GİRİŞ

Regle yüzeyler, ilk olarak tüm regle yüzeyler için diferensiyel denklemlerini elde eden G. Monge (1850) tarafından keşfedilmiştir. Daha sonraki yıllarda regle yüzeylerin diferensiyel geometrisi klasik geometride çeşitli yaklaşımlar kullanılarak Guggenheimer (1963), Hoschek (1971) tarafından çalışılmış ve regle yüzeyler; bir parametrelili doğruların kümesi tarafından oluşturulmuştur.

E_1^3 Minkowski uzayında bir regle yüzey, parametrik olarak $\Phi(s, t) = c(s) + tX(s)$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadedeki $c(s)$, regüler bir eğrinin dayanak eğrisi, $X(s)$ ise eğrinin doğrultman vektörüdür.

Regle yüzeyler, açılabilir ve açılabilir olmayan şekilde ikiye ayrılırlar. Açılabilir regle yüzeyler, ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olan regle yüzeylerdir. Diferensiyel geometrideki klasik bir sonuç ise, açılabilir regle yüzeylerin açık ve yoğun altkümelerinin elemanlarını silindir, koni ve tanjant yüzeyi olduğunu ifade eder. Bu durum Öklid ve Minkowski uzayları için de geçerlidir. Lorentz metriği kullanılarak, Öklid uzayında elde edilen genel tanım ve teoremler 3- boyutlu Minkowski uzayında da Turgut ve Hacısalıhoğlu (1997, 1998) tarafından ele alınmıştır. Regle yüzeyler geometrisi, kinematik ve uzaysal mekanik çalışmaları gibi bir çok alanda da kullanılması ile önem kazanmıştır. (Bottema ve Roth, 1979, Dimentberg, 1965, McCarthy ve Roth, 1981).

Genel olarak Minkowski uzayında bir yüzeyin I. Temel formunun nondejenere olması gerekir. Eğer I. Temel form, pozitif tanımlı ise yüzey spacelike yüzey, indefinit ise yüzey timelike yüzeydir. 3-boyutlu $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında bir timelike regle yüzeyin, dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve ana doğruları timelike doğrular ise bu regle yüzeyler timelike regle yüzey, dayanak eğrisi timelike bir eğri ve ana doğruları spacelike doğrular olan regle yüzeyler de spacelike regle yüzeyler olarak adlandırılacaktır.

Bu tez çalışmasında, 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzeyler ve regle yüzeylere ait olan boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi, açılabilir regle yüzeyler gibi kavramlar ve bu kavramlara ait temel teoremler Turgut ve Hacısalihoğlu'nun (1998) makalesinden faydalanarak incelenmiş, 3-boyutlu Minkowski uzayındaki timelike regle yüzeyler tanıtılmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle Öklid uzayı tanıtılmış ardından tezin genelinde kullanacağımız E_1^3 Lorenz-Minkowski uzayı tanıtılarak bazı temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuş ve gerekli görülen kimi teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir.

2.1 Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 Boş olmayan bir A kümesi ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

- (1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$
- (2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2 $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzayı ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanırsa böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir.

Bir reel afin uzayda tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanırlar. Bununla beraber reel afin uzaylar ile Öklid uzayları farklıdır. Çünkü bir V reel vektör uzayı ile birleşen A afin uzaydaki metrik özellikler V de seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar; bu nedenle Öklid uzayındaki özelliklerle diğer afin uzaylardakiler farklı olurlar.

Tanım 2.1.3 $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d: E^3 \times E^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna Öklid uazyında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.4

$$\begin{aligned} d: E^3 \times E^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| \end{aligned} \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^3 de Öklid metriği denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.5 $\forall x, y, z \in E^3$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{yx}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{yx}\| \|\vec{yz}\|} \quad (2.4)$$

den hesaplanan θ reel sayısıdır.

Tanım 2.1.6 E^3 de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine E^3 ün bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 2000).

Sonuç 2.1.1 E^3 de $E_0 = (0,0,0), E_1 = (1,0,0), E_2 = (0,1,0), E_3 = (0,0,1)$ noktaları standart bir dik çatı oluştururlar. $\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$ olduğundan, $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$

sistemi $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir ortonormal bazdır. Burada $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ dir

(Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.7 E^3 deki $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoglu, 2000).

2.2 Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1 V bir reel vektör uzayı olmak üzere. V üzerinde tanımlı dönüşüm

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bilineer (ikili doğrusal), simetrik ve non-dejenere ise g , V üzerinde bir skalar çarpımdır denir, V vektör uzayına ise skalar veya iç çarpım uzayıdır denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2 V ve W sırasıyla skalar çarpım uzayı ve üzerindeki skalar çarpım, negatif tanımlı olmak üzere V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsunlar. Burada g skalar çarpımın indeksi diye V nin boyutuna denir.

g skalar çarpımın indeksi v ise, burada $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. g skalar çarpımının indeksi Skalar çarpımın indeksidir. (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3 Bir skalar çarpım uzayına V diyelim. v , V nin indeksi olsun $v = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına Lorentz uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4 V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

$g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

$g(v, v) < 0$ ise v ye timelike vektör,

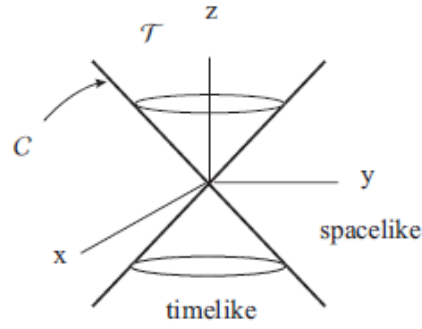
$g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (lightlike) vektör

ve $\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$ reel sayısına v vektör uzayının normu denir.

V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun. $u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma \mid g(v, v) < 0\}$$

u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının timekonisi denir (bkz. Şekil 2.1) (Lopez, 2008).



Şekil 2.1: Minkowski Uzayının Causal Karakteri.

Teorem 2.2.5 V bir Lorentz uzayı ve v, w de bu uzayda timelike vektörler olsun.

Böylece

$$i) \quad g(v, w) \geq \|v\| \cdot \|w\| \quad (2.5)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sağlanır ancak ve ancak v ve w vektörleri lineer bağımlıdır.

$$ii) \quad v, w \text{ timelike vektörleri aynı timekonide ise}$$

$$g(v, w) = -\|v\| \cdot \|w\| \cosh \theta \quad (2.6)$$

olmak üzere bir tek $\theta \geq 0$ sayısı vardır. İşte bu θ sayısı v ve w timelike vektörlerinin arasında olan hiperbolik açıdır.

Bu spacelike vektörler için

$$g(v, w) \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad (2.7)$$

eşitsizliği mevcuttur (Lopez, 2008).

Teorem 2.2.6 V bir Lorentz uzayı, W de V nin bir altuzayı olsun. $\dim W \geq 2$ ise bu halde aşağıdaki önermeler denktirler (Lopez, 2008).

- i) W timelike uzayı ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
- ii) W uzayı iki adet doğrusal bağımsız olan null vektör içerir.
- iii) W uzayı bir adet timelike vektör içerir.

2.3 Yarı-Riemann Manifolfları

Tanım 2.3.1 Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. Bir metrik tensör diye M üzerinde simetrik, non-dejenere ve $(0,2)$ -tipinden sabit indeksli g tensör alanına denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.2 $\mathbb{R}^n$, n boyutlu reel vektör uzayı üzerinde $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ve $v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^n v_i w_i \quad (2.8)$$

eşitliği ile verilen v indeksli metrik tensörle elde edilen uzaya yarı Öklidyen uzay denir. $\mathbb{R}_v^n$ şeklinde gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olması şartıyla, sırası ile v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerin bileşenidir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.3 $\mathbb{R}_v^n$ yarı Öklidyen uzayı olsun. $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı öklidyen uzayına Minkowski n -uzay denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.4 M ve g sırasıyla diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde indeksi sabit olan metrik tensör olsun. Yarı Riemann manifoldu diye (M, g) ikilisine denir (O'Neill, 1983).

Bundan böyle (M, g) yarı Riemann manifoldu sadece M ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.5 M yarı Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.6 M yarı Riemann manifoldu olmak üzere. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 olmak üzere M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.7 Lorentz manifoldu M olsun ve bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. T, α eğrisinin teğet vektör alanı olsun. Bu durumda

$g(T, T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

$g(T, T) = 0$ ise α eğrisine timelike eğri,

$g(T, T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.8 M ve $\bar{M}$ sırasıyla yarı Riemann manifold ve M nin bir altmanifoldu olmak üzere. $j: \bar{M} \rightarrow M$ inclusion dönüşümü için her $p \in \bar{M}$ için

$$(j(g))(p) = g(j(p))$$

biçiminde tanımlanan $j(g)$ dönüşümü eğer $\bar{M}$ üzerinde bir metrik tensörse $\bar{M}$ ye M nin bir yarı Riemann alt manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.9 M nin bir yarı Riemann altmanifoldu $\bar{M}$ ve ayrıca D de M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, M yarı Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon diye

$$D: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

indirgenmiş fonksiyona denir. Burada $\chi(\bar{M})$ ile $\bar{M}$ nin her bir P noktasına $T_P M$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\xi(\bar{M})$ -modülü gösterilmektedir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.3.10 M nin yarı Riemann altmanifoldu $\bar{M}$, ve D de M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ve $\forall V, W \in \chi(\bar{M})$ olmak üzere

$$\bar{D}_V W = \tan D_V W$$

şekinde tanımlanan $\bar{D}$ fonksiyonu $\bar{M}$ üzerinde bir Levi-Civita koneksiyonudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.11 V, M nin bir yarı Riemann altmanifoldu olsun.

$$\Pi: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

$$(V, W) \rightarrow \Pi(V, W) = \text{nor} D_V W$$

şeklinde tanımlı $\mathfrak{Z}(\bar{M})$ -bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\bar{M}$ nin şekil tensörü (veya ikinci temel form tensörü) denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.12 $(n-1)$ -boyutlu $\bar{M}$ yarı Riemann altmanifolduna, M nin yarı Riemann hiperyüzeyi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.13 M nin yarı Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun ve N de $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı olmak üzere. $\forall V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1) tipinden S tensör alanına $\overline{M}$ nin N den elde edilen şekil operatörü denir (O'Neill, 1983).

2.4 IR_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}_r^n$, n –boyutlu, r –indeksli bir yarı Öklidyen uzayın, boyutu 3 ve indeksi 1 olsun. O halde $\mathbb{R}^3$ üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $r_p, t_p \in T_p \mathbb{R}^3$ için

$$\langle r_p, t_p \rangle = r_1 t_1 + r_2 t_2 - r_3 t_3 \quad (2.9)$$

eşitliğiyle verilen ve indeksi 1 olan (+ + –) metrik tensörü ile elde edilen uzaya 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve IR_1^3 ile gösterilir (Lopez, 2008).

Tanım 2.4.1 IR_1^3 , Minkowski uzayında iki vektör r ve t olsun. $r = (r_1, r_2, r_3)$

ve $t = (t_1, t_2, t_3)$ olmak üzere

$$(r^3 t^2 - r^2 t^3, r^1 t^3 - r^3 t^1, r^1 t^2 - r^2 t^1) \quad (2.10)$$

vektörüne r ve t nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir ve $r \times t$ veya $r \wedge t$ biçiminde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \dots ise \\ 0, i \neq j \dots ise \end{cases} \text{ ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olsun,

$$r \wedge t = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

veya

$$r \wedge t = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = -e_1, e_3 \wedge e_1 = -e_2$ olarak alınmıştır. Ayrıca saat yönünün tersi pozitif yön olarak ele alınmıştır. Bu durumda

$$r \wedge t = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

şeklindedir (Lopez, 2008).

Teorem 2.4.2

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $p = (p_1, p_2, p_3), q = (q_1, q_2, q_3)$ ve $r = (r_1, r_2, r_3)$ olsun. Bu durumda

$$i) \langle p \wedge q, r \rangle = -\det(p, q, r) \quad (2.14)$$

$$ii) (p \wedge q) \wedge r = -\langle p, r \rangle q + \langle q, r \rangle p \quad (2.15)$$

$$iii) \langle p \wedge q, p \rangle = 0 \text{ ve } \langle p \wedge q, q \rangle = 0 \quad (2.16)$$

$$iv) \langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = -\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle + (\langle p, q \rangle)^2 \quad (2.17)$$

dir (O'Neill, 1983, Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 2.4.3 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör p ve q olsun.

i) p ve q spacelike vektör ise $p \wedge q$ vektörü timelikedir,

ii) p spacelike ve q timelike vektör ise $p \wedge q$ vektörü spacelikedir,

iii) p spacelike ve q null vektörler olsunlar, $\langle p, q \rangle = 0$ olmak üzere $p \wedge q$ null vektör, $\langle p, q \rangle \neq 0$ olmak üzere $p \wedge q$ spacelike vektördür.

iv) p ve q null vektör ise $p \wedge q$ spacelike vektördür.

v) p timelike ve q null vektör ise $p \wedge q$ spacelike vektördür.

vi) p ve q timelike vektör ise $p \wedge q$ spacelike vektördür.

(O'Neill, 1983, Duggal ve Bejancu, 1996)

İspat:

i) p ve q spacelike vektör olduğundan $\langle p, p \rangle > 0, \langle q, q \rangle < 0$ ve $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$

$\|q\|^2 = \langle q, q \rangle$ dir. (2.17) den

$$\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \|p\|^2 \|q\|^2 \quad (2.18)$$

dir. (2.14) den $(\langle p, q \rangle)^2 < \|p\|^2 \|q\|^2$ elde edilir ve buradan $(\langle p, q \rangle)^2 < \|p\|^2 \|q\|^2 \leq 0$ bulunur. Burada p ve q vektörleri lineer bağımsızdır. Eğer lineer bağımlı iseler $\langle p, q \rangle = 0$ dir. Bu nedenle $(\langle p, q \rangle)^2 < \|p\|^2 \|q\|^2 \neq 0$ dir. O halde $\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle < 0$ dir. Dolayısıyla, $p \wedge q$ vektörü bir timelike vektördür.

ii) p spacelike ve q timelike vektör olduğundan $\langle p, p \rangle > 0, \langle q, q \rangle < 0$ ve $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle, -\|q\|^2 = \langle q, q \rangle$ dir. (2.17) den

$$\begin{aligned} \langle p \wedge q, p \wedge q \rangle &= (\langle p, q \rangle)^2 - \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle \\ &= (\langle p, q \rangle)^2 + \|p\|^2 \|q\|^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. Buradan $\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle > 0$ dir. O halde $p \wedge q$ vektörü spacelike vektördür.

iii) p spacelike ve q null vektör olduğundan $\langle p, p \rangle > 0$ ve $\langle q, q \rangle = 0$ dir. (2.17) den

$$\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 \quad (2.20)$$

dir.

Eğer $\langle p, q \rangle = 0$ ise $\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = 0$ dir. O zaman $p \wedge q$ null vektördür. Eğer $\langle p, q \rangle \neq 0$ ise $\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle > 0$ dir. Buradan $p \wedge q$ spacelike vektördür.

iv) p ve q null vektör olduğundan $\langle p, p \rangle = 0$ ve $\langle q, q \rangle = 0$ dir. (2.17) den

$$\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 \quad (2.21)$$

elde edilir. (O'Neill, 1983) den ortogonal iki null vektör lineer bağımlıdır. Bu durumda $p \wedge q = 0$ dir. O halde $\langle p, q \rangle \neq 0$ dir. Buradan $\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle > 0$ olduğundan $p \wedge q$ spacelike vektördür.

v) p timelike ve q null vektör olduğundan $\langle p, p \rangle < 0$ ve $\langle q, q \rangle = 0$ dir. (2.17) den

$$\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 \quad (2.22)$$

dir. (O'Neill, 1983) den $\langle p, q \rangle \neq 0$ dir. O halde $p \wedge q$ spacelike vektördür.

vi) p ve q timelike vektör olduğundan $\langle p, p \rangle < 0$ ve $\langle q, q \rangle < 0$ $-\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$ $-\|q\|^2 = \langle q, q \rangle$ dir. (2.17) den

$$\langle p \wedge q, p \wedge q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle = (\langle p, q \rangle)^2 - \|p\|^2 \|q\|^2 \quad (2.23)$$

elde edilir. Teorem 2.3.2. nin i şikkından

$$|\langle p, q \rangle| > \|p\| \|q\| \quad (2.24)$$

$$|\langle p, q \rangle| > \|p\|^2 \|q\|^2 \quad (2.25)$$

$$|\langle p, q \rangle| - \|p\| \|q\| > 0 \quad (2.26)$$

bulunur. (O'Neill, 1983) den $\langle p, q \rangle \neq 0$ dir. O halde $p \wedge q$ spacelike vektördür.

2.5. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Yüzeyler

M bir yarı Riemann manifoldu ve $\overline{M}$ yarı Riemann hiperyüzeyi olmak üzere (U, ϕ) parametrizasyonu ile verilen

$$\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) \quad (2.27)$$

$\phi(U)$ yüzeyini göz önüne alalım. $\left\{ \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\}$ lineer bağımsız olmak üzere

yüzeyin vektör alanlarının bir bazı $\left\{ \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\}$ dir. Kısalık için $\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ yu ϕ_u

ile göstereceğiz. Yüzeyin bir normali $N = \phi_u \wedge \phi_v$ dir. Gerçekten (2. 16) dan $\langle N, \phi_u \rangle = 0$ ve $\langle N, \phi_v \rangle = 0$ dır. Yüzeyin birinci temel formunu hesaplamadan önce bazı eşitlikleri verelim.

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle, F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle, G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle \quad (2.28)$$

dir. Buradan $\langle N, N \rangle = \langle \phi_u \wedge \phi_v, \phi_u \wedge \phi_v \rangle$ ve (2.17), (2.28) dan

$$\langle N, N \rangle = \left(\langle \phi_u, \phi_v \rangle \right)^2 - \langle \phi_u, \phi_u \rangle \langle \phi_v, \phi_v \rangle \quad (2.29)$$

$$\langle N, N \rangle = F^2 - EG \quad (2.30)$$

elde edilir. Şimdi yüzeyin I. temel formunu hesaplayalım. ϕ nin tam diferensiyeli

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv \quad (2.31)$$

dir.

$$\begin{aligned} I &= (ds)^2 = \langle d\phi, d\phi \rangle \\ &= \left\langle \frac{d\phi}{du}, \frac{d\phi}{du} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{d\phi}{du}, \frac{d\phi}{dv} \right\rangle du dv + \left\langle \frac{d\phi}{dv}, \frac{d\phi}{dv} \right\rangle (dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G \quad (2.33)$$

ve $\lambda = \frac{du}{dv}, I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$ ise

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G \quad (2.34)$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyinin $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriği pozitif tanımlı mı veya indefinit mi incelemek yerine $I = (dv)^2 I'$ olduğundan, I' yü de inceleyebiliriz (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.1 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. Her $p \in \overline{M}$ ve her

$w_p, v_p \in T_p \overline{M}$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0 \quad (2.35)$$

önermesi sağlanıyor ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ uzayında non-dejenere yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

$\overline{M}$ üzerinde metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. M yüzeyi üzerindeki metriğin non-dejenere ancak ve ancak

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2.36)$$

dır.

Bir başka ifadeyle, $\overline{M}$ yüzeyi non-dejenere yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normal null vektör alanıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.2 $\overline{M}$, $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir yüzey olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.5.3 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında

$$\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

şeklinde (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir yüzeyin spacelike yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normali timelike bir vektör alanıdır. Yani

$$\langle N, N \rangle < 0 \quad (2.37)$$

dır. Burada $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanı N ile gösterilmiştir (O'Neill, 1983).

İspat:

$\overline{M}$ yüzeyi üzerine $I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$ şeklinde indirgenmiş metrikleri verilsin. ikinci dereceden bu denklemin diskriminantı λ ya göre,

$$\Delta = 4(F^2 - EG) = 4\langle N, N \rangle \quad (2.38)$$

dir. $I' > 0$ dır ancak ve ancak $\Delta < 0$ dır. Böylece $\langle N, N \rangle < 0$ dır.

Tanım 2.5.4 $\overline{M}$, IR_1^3 , Minkowski uzayında bir yüzey olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye IR_1^3 de bir timelike yüzey denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.5.5 $\overline{M}$ yüzeyinin IR_1^3 , Minkowski uzayında bir timelike yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normali spacelike bir vektör alanıdır, yani

$$\langle N, N \rangle > 0 \quad (2.39)$$

Olmasıdır (O'Neill, 1983).

İspat:

$I = (dv)^2 I'$ ve $I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$, M yüzeyi üzerine indirgenmiş metriktir. Bu denklemin λ ya göre diskriminantı

$$\Delta = 4(F^2 - EG) = 4\langle N, N \rangle$$

dir. I' nun Lorentz metriğidir ancak ve ancak $\Delta > 0$ dır. Burada bir $\overline{M}$ yüzeyi timelike yüzeydir ancak ve ancak yüzeyin normali spacelike vektör alanıdır.

Tanım 2.5.6 (Gauss Eğriliği): $\overline{M}$, IR_1^3 , Minkowski uzayında bir yüzey ve S de $\overline{M}$ nin şekil operatörü matrisi olmak üzere. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p \quad (2.40)$$

değerine $\overline{M}$ yüzeyinin bir P noktasındaki Gauss Eğriliği, $K: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da $\overline{M}$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ dir. N , $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır.

$\overline{M}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = -1$ dir. O zaman

$$K = -\det S \quad (2.41)$$

ve $\overline{M}$ yüzeyi timelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = +1$ dir. O halde

$$K = +\det S \quad (2.42)$$

olur (O'Neill, 1983).



3. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA TIMELIKE REGLE YÜZEYLER

$\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, dx + dy^2 - dz^2)$, Minkowski 3-uzayında bir yüzey, üzerindeki indirgenmiş metrik bir Lorentz metriği ise timelike yüzey olarak adlandırılır (Beem ve Ehrlich, 1981). $\mathbb{R}_1^3$ te verilen eğrinin her noktadaki teğet vektörü spacelike (timelike) vektör ise eğri spacelike (timelike) eğridir. (O'Neill, 1983).

Bir regle yüzey ℓ doğrusunun α eğrisinin boyunca hareket etmesiyle oluşan yüzeydir. ℓ doğrusuna yüzeyin üretici adı verilir. Böyle bir yüzey aşağıdaki parametrisasyon ile verilir.

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vZ(t) \quad (3.1)$$

Burda α dayanak eğrisi, Z de ℓ doğrusunun doğrultman vektörüdür. Eger, bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri sabit ise regle yüzeye açılabilir denir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1997). Diğer bütün regle yüzeyler skew (açılabilir olmayan) yüzeyler olarak adlandırılır. Açılabilir olmayan bir regle yüzeyin komşu iki anda doğrusunun ortak dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir. açılabilir olmayan regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz (striksiyon) çizgisi denir ayrıca regle yüzeyin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1997).

3.1 Timelike Regle Yüzeyler

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow \mathbb{R}_1^3, \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \end{aligned}$$

Minkowski 3- uzayda yay parametresi ile parametrelendirilmiş diferensiyellenebilir bir timelike eğri olsun. Burada $\{0\} \subset I$ dir.

$$\begin{aligned}\ell: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ v &\rightarrow \ell(v) = (\alpha_1(t) + v a_1(t), \alpha_2(t) + v a_2(t), \alpha_3(t) + v a_3(t))\end{aligned}$$

Spacelike bir eğri ve $a_i(t) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, skalerleri $\alpha(t)$ noktasında doğrultman vektörün bileşenleri olarak seçilebilirler böylece ℓ nin doğrultman vektörü ve α nın teğet vektörü, α eğrisinin her noktasında lineer bağımsızlardır.

ℓ nin α boyunca hareket etmesiyle $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzey oluşur. Burada

$$\begin{aligned}\varphi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + v a_1(t), \alpha_2(t) + v a_2(t), \alpha_3(t) + v a_3(t))\end{aligned}$$

Minkowski 3- uzayında elde edilir. Bu regle yüzeyi M ile gösterelim. $X(M)$ nin bir ortonormal tabanı (T, M) dir M , nin teğet vektör alanlarının uzayı elde edilebilir, dahası N , M nin birim normal vektör alanı olmak üzere $N = T \wedge X$ dir. Böylece $\mathbb{R}_1^3$ te $\{X, N, T\}$ α boyunca bir ortonormal çatı alanıdır. D , $\mathbb{R}_1^3$ te bir Levi- Civita konneksiyonu olsun. $\mathbb{R}_1^3$ te α boyunca varyasyon formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}D_T X &= cN + aT \\ D_T N &= -cX + bT \\ D_T T &= aX + bN\end{aligned} \tag{3.2}$$

Burada $\alpha = -\langle T, D_T X \rangle = -T[\langle T, X \rangle] + \langle D_T T, X \rangle = \langle D_T T, X \rangle$ dir.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Matrisi bir skew- adjoint matristir, $B^T = -\epsilon B \epsilon$ olduğundan

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

dir.

$\varphi(t, v) = \alpha(t) + v X(t)$ Parametrizasyonunu göz önüne alırsak,

$$E = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = -(1 + \alpha v)^2 + c^2 v^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = 0, \quad G = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = 1 \tag{3.5}$$

elde edilir.

Regle yüzey üzerindeki indirgenmiş metrik bir Lorentz metriğidir, bu durumda E negatiftir.

$$\min \left\{ -\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c} \right\} \quad ve \quad \max \left\{ -\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c} \right\} \quad (3.6)$$

E nin kökleridir ve burada $c^2 - \alpha^2 = \langle D_T X, D_T X \rangle$ dir.

Not:

1) Eğer $D_T X$ bir timelike vektör ise;

$$-\infty < v < \min \left\{ -\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c} \right\} \quad ya \quad da \quad \max \left\{ -\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c} \right\} < v < \infty \quad (3.7)$$

2) Eğer $D_T X$ bir spacelike vektör alanı ise;

$$\min \left\{ -\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c} \right\} < v < \max \left\{ -\frac{1}{a-c}, -\frac{1}{a+c} \right\} \quad (3.8)$$

3) $D_T X$, $\mathbb{R}_1^3$ üzerinde null bir vektör alanı olsun

Eğer $a > 0$ ise $v < -\frac{1}{2a}$, $a < 0$ ise $v > -\frac{1}{2a}$ dir.

Bu nedenle yukarıdaki üç durumda da v parametresinin tanım kümesi, $\mathbb{R}$ nin tamamı değildir fakat yukarıdaki aralıklardan biridir. v nin tanım kümesini J ile gösterelim.

Eğer biz J de v parametresini sabitlersek, M üzerinde

$$\begin{aligned} \varphi_v: I \times \{v\} &\rightarrow M \\ (t, v) &\rightarrow \varphi_v(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

Elde edilebilir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 + \alpha v)T + cvN \quad (3.9)$$

dir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

3.2 Açılabilir Timelike Regle Yüzeyler

Tanım 3.2.1 M bir timelike regle yüzey olsun. M nin herhangi bir anadoğrusu boyunca M nin teğet düzlemleri aynıysa (çakışıyorsa) M ye açılabilir bir yüzey denir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.2.1. M bir timelike regle yüzey olsun. M nin herhangi bir anadoğru boyunca teğet düzlemleri çakışır, ancak ve ancak $c = 0$ dir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

$$\bar{u} = -\frac{\langle T, D_T X \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} = \frac{a}{c^2 - a^2} \quad (3.11)$$

Bulunur. Böylece striksiyon eğrisi

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{\langle T, D_T X \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} X(t) \quad (3.12)$$

Burada $\langle D_T X, D_T X \rangle \neq 0$ dır. $\langle \frac{d\bar{\alpha}}{dt}, X \rangle = 0$ olduğundan $\bar{u} = \frac{a}{c^2 - a^2}$ sabittir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.3.1 Açılabilir olmayan timelike yüzeylerde $\bar{\alpha}$ striksiyon eğrisi, α dayanak eğrisinin seçimine bağlı değildir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat β , açılabilir olmayan timelike yüzeyin diğer bir dayanak eğrisi olsun. Yani $\forall(t, v)$ ve bazı $s = s(v)$ fonksiyonları için

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) = \beta(t) + sX(t) \quad (3.13)$$

dir. (3.11) den ve $\langle X, D_T X \rangle = 0$ olduğundan

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{\beta}(t) = \alpha(t) - \beta(t) - \frac{\langle T - \frac{d\beta}{dt}, D_T X \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} X(t) = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Bu da istenilendir.

Teorem 3.3.2 M açılabilir olmayan bir timelike yüzey olsun. $\alpha(t)$ noktası boyunca anadoğru üzerindeki $\varphi(t, v_0)$ noktası merkez noktadır ancak ve ancak $D_T X$, $\varphi(t, v_0)$ noktasında teğet düzlemin bir normal vektörüdür (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat $D_T X$, $\alpha(t)$ noktası boyunca anadoğru üzerindeki $\varphi(t, v_0)$ noktasında teğet düzlemin bir normal vektörü olsun. Yani $\langle D_T X, A \rangle = 0$ dır. Dolayısıyla $v_0 = \frac{a}{c^2 - a^2}$ elde edilir. Böylece, $\varphi(t, v_0)$, M nin merkez noktasıdır.

Tersine, $\varphi(t, v_0)$, $\alpha(t)$ noktası boyunca anadoğru üzerindeki merkez noktası olsun. Buradan, $\langle D_T X, A \rangle = -\alpha + (\alpha^2 + c^2) = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan, $\langle D_T X, X \rangle = 0$ dır. Böylece $D_T X$, $\varphi(t, v_0)$ noktasında teğet düzlemin normal vektörüdür.

$D_T X$, merkez noktasında teğet düzlemin normal vektörü olduğundan spacelike bir vektördür. Yani $\langle D_T X, D_T X \rangle = -a^2 + c^2 > 0$ dir.

Teorem 3.3.3 Açılabilir olmayan timelike yüzeyin sitriksiyon egrisi

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{a}{a^2 - c^2} X(t) \quad (3.15)$$

bir timelike eğridir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.3.4 M , $\mathbb{R}_1^3$ te bir timelike yüzey olsun. M nin her noktasında tek bir ortogonal yörüngesi vardır (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat

$$\begin{aligned} \ell: I \times J &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vZ(t) \end{aligned}$$

M nin bir parametrizasyonu olsun. M nin bir ortogonal yörüngesi şu şekilde verilir.

$$\begin{aligned} \beta: \tilde{I} &\rightarrow M \\ s &\rightarrow \beta(s) = \alpha(s) + f(s)Z(s) \end{aligned}$$

Burada $\langle Z(s), Z(s) \rangle = 1$ dir. $\tilde{I} \subset I$ olduğunu varsayalım

$$\left\langle \frac{d\beta(s)}{ds}, Z(s) \right\rangle = 0 \quad (3.16)$$

olduğundan

$$f(s) = - \int \left\langle \frac{d\alpha(s)}{ds}, Z(s) \right\rangle ds + h \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada h bir reel sabit. Böylece $h = f(s_0) - F(s_0)$ dir. Burada

$$F(s) = - \int \left\langle \frac{d\alpha(s)}{ds}, Z(s) \right\rangle ds \quad (3.18)$$

dir. Böylece M nin P_0 boyunca ortogonal yörüngesi tektir. Dahası M nin ortogonal yörüngesi, M nin her bir anadoğrusu ile kesiştiğinden $\tilde{I} = I$ dir.

Teorem 3.3.5 M bir açılmaayan timelike yüzey olsun. İki anadoğru arasındaki en uzun mesafe sadece, ortogonal yörüngelerden biri olan striksiyon eğrisi üzerindeki mesafedir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat İki anadoğruyu sabitleyerek, $t_1 < t_2$ için Bu iki anadoğru arasındaki bir ortogonal yörüngenin $j(v)$ uzunluğunu

$$j(v) = \int_{t_1}^{t^2} \|A\| dt = \int_{t_1}^{t^2} \sqrt{|\langle A, A \rangle|} dt = \int_{t_1}^{t^2} [(\alpha^2 - c^2)v^2 + 2av + 1]^{1/2} dt \quad (3.19)$$

ile hesaplarız. $j(v)$ yi en büyük yapan s değerini bulmak için $\frac{\partial j(v)}{\partial v} = 0$ olmasını kullanırız, ki bu da bize $v = \frac{a}{c^2 - a^2}$ yi verir ve böylece ispat tamamlanır.

3.4 Timelike Regle Yüzeyin Dağılma Parametresi

Tanım 3.4.1 Sitriksiyon eğrisi timelike regle yüzeyin dayanak eğrisi olsun. $\bar{u} = 0$ dir yani $\frac{a}{c^2 - a^2} = 0$ dir. Yani $a = 0$ dir. Böylece $D_T X$ ve N lineer bağımsızdır. Yani $\lambda D_T X = N$ dir. Burada $D_T X = \alpha T + cN$ ve $N = T \wedge X = \frac{\bar{d}\alpha}{dt} \wedge X$ dir. Böylece

$$\lambda = \frac{\langle T \wedge X, D_T X \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} = - \frac{\det \langle T, X, D_T X \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} \quad (3.20)$$

elde edilir. λ timelike regle yüzeyin dağılma parametresi olarak adlandırılır ve λ veya P_X ile gösterilir. Ayrıca $D_T X$ bir timelike vektör alanı olduğundan $\langle D_T X, D_T X \rangle \neq 0$ dır (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.4.1 Bir timelike regle yüzey açılabilir ve ancak ve ancak dağılma parametresi sıfırdır (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.4.2 $M, \mathbb{R}_1^3$ te bir timelike yüzey olsun. M nin her bir anadoğrusundan biri asimptotik çizgidir ve M de bir geodeziktir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat $\mathbb{R}_1^3$ te her bir anadoğru bir doğru olduğundan her bir anadoğru bir geodeziktir. Yani $D_T X = 0$ dır. Gauss eğriliği

$$D_X X = \bar{D}_T X + \langle S(X), X \rangle N \quad (3.21)$$

dir. Burada $\bar{D}$, M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur ve S , M de N nin türevlenmesi ile elde edilmiş şekil operatörüdür. Ayrıca $(\bar{D}_X X) \in \chi(M)$ ve $(\langle S(X), X \rangle N) \in \chi^\perp(M)$ (O'Neill, 1983). M bir timelike yüzey olduğundan; M non dejenere metriğe sahiptir ve

$$\chi(\mathbb{R}_1^3) = \chi(M) \oplus \chi^\perp(M) \text{ ve } \chi(M) \cap \chi^\perp(M) = \{0\} \quad (3.22)$$

yazabiliriz. $\bar{D}_T X = 0$ ve $\langle S(X), X \rangle = 0$ elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.3 $M \mathbb{R}_1^3$ te bir timelike regle yüzey olsun. Gauss eğrilik fonksiyonu $K(p)$, her $P \in M$ noktasında

$$K(p) \geq 0 \quad (3.23)$$

şartını sağlar (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.4.4 $X, P \in M$ noktası boyunca anadoğruların spacelike vektör alanı olsun. $\chi(M)$ nin bir ortonormal tabanı $\{X, Y\}$ elde edilebilir, burada Y timelike vektör alanıdır. M nin şekil operatörü

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(X), X \rangle & -\langle S(X), Y \rangle \\ \langle S(Y), X \rangle & -\langle S(Y), Y \rangle \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Böylece Gauss eğriliği S self adjoint olduğundan teorem 3.4.2 den aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$K = \det S = (\langle S(X), Y \rangle)^2 \quad (3.25)$$

Böylece $K(P)$ her $P \in M$ noktasında pozitif tanımlıdır (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

Yardımcı teorem 3.4.5 M bir timelike regle yüzey olsun. Dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı, anadoğrunun birim teğet vektör alanı (doğrultmanı) ve M nin birim normal vektör alanı sırasıyla T, X, N olsun.

$$\begin{aligned} T \wedge X &= N \\ T \wedge N &= -X \\ X \wedge N &= -T \end{aligned} \quad (3.26)$$

Teorem 3.4.6 M , açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. yüzeyin her bir anadoğrusu üzerindeki merkez noktasında Gauss eğrilik fonksiyonu en küçük değere sahip olur (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat $\{A_0, X\}$, $\chi(M)$ nin ortonormal tabanı, burada

$$A_0 = \frac{A}{\|A\|} = \frac{(1 + av)T + cvN}{[(a^2 - c^2)v^2 + 2av + 1]^{1/2}} \quad (3.27)$$

M nin $\varphi(t, v)$ deki normal vektörünü $\tilde{N} = N_{\varphi(t, v)}$ şeklinde ifade edelim. Böylece

$$\tilde{N} = A_0 \wedge X = \frac{1}{\|A\|} \{cvT + (1 + av)N\} \quad (3.28)$$

dir. Yardımcı teorem 3.4.5 ve $\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = 1$ den, Gauss eğriliği

$$K = (\langle S(A_0), X \rangle)^2 \quad (3.29)$$

dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} S(A_0) = -D_{A_0} \tilde{N} = & -\frac{1}{\|A\|} \left\{ \left[\left(\frac{1}{\|A\|} \right)' (cv) + \frac{cv}{\|A\|} + \frac{b(1+\alpha v)}{\|A\|} \right] T \right. \\ & \left. - \frac{c}{\|A\|} X + \left[\left(\frac{1}{\|A\|} \right)' (1+\alpha v) + \frac{\dot{\alpha}v}{\|A\|} + \frac{bcv}{\|A\|} \right] N \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

burada $(\cdot)$, parametreye bağlı türevi göstermektedir. Buradan

$$K(t, v) = \frac{c^2}{[(c^2 - a^2)v^2 - 2av - 1]^2} \quad (3.31)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial K(t, v)}{\partial v} = -\frac{4c^2 [(c^2 - a^2)v - a]}{[\langle A, A \rangle]^3} \quad (3.32)$$

bulunur. Yani,

$$\frac{\partial^2 K(t, v)}{\partial^2 v} \Big|_{v=\frac{a}{c^2-a^2}} > 0 \quad (3.33)$$

olduğundan $v = \frac{a}{c^2-a^2}$, $K(t, v)$ nin en küçük değerini verir.

Merkez noktası $v = \frac{a}{c^2-a^2}$ değeri ile ilişkili olduğu için, Gauss eğriliği, her bir anadoğrunun merkez noktasında olduğundan en küçük değerini alır.

Teorem 3.4.7 $M, \mathbb{R}_1^3$ te bir timelike regle yüzey olsun. M açılabilir ancak ve ancak M nin Gauss eğriliği sıfırdır (Turgut ve Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 3.4.8 Bir timelike regle yüzeyin dağılma parametrisi yalnızca anadoğrulara bağlıdır (Turgut ve Hacısalıhoğlu, 1998).

İspat Eğer (3.31) de $v = \frac{a}{c^2-a^2}$ yazarsak $K_{min} = \frac{(c^2-a^2)^2}{c^2}$ elde ederiz. Yani, (3.20) den merkez noktasında $a = 0$ olduğundan

$$K_{min} = c^2 = \left(\frac{1}{P_X} \right)^2 \quad (3.34)$$

dir. Böylece

$$Px \frac{1}{\sqrt{K_{min}}} \quad (3.35)$$

elde edilir. K_{min} değeri anadoğru boyunca tektir. Dolayısıyla, bir anadoğru boyunca dağılma parametresinin değeri de tektir. Yani, dağılma parametresi sadece anadoğruya bağlıdır.

Şimdi $\mathbb{R}_1^3$ te açılabilir olmayan herhangi bir regle yüzeyin merkez noktası ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 3.4.9 M bir açılabilir olmayan timelike yüzey ve θ da anadoğrunun merkez noktasındaki normal vektör ve bir anadoğrunun bir noktasındaki normal vektörü arasındaki açı olsun. $\tan\theta$ bu iki nokta arasındaki uzaklığın oranı ve bu orantının katsayıları dağılma parametresinin tersidir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat Eğer $v = 0$ ise bu, belirli bir anadoğru üzerindeki merkez noktasını verir, yani, bu merkez noktası boyunca ortogonal α eğrisini alırsak $v = 0$ da $D_T X$ normal vektördür. Böylece $a = 0$ dır. Dağılma parametresi $P_X = \frac{1}{c}$ ve anadoğru boyunca normal vektörü N_v

$$N(v) = \frac{N + cvT}{\sqrt{1 - c^2v^2}} \quad (3.36)$$

İle verilir. Diğer yandan N ve N_v birim spacelike vektörlerdir. Buradan

$$\langle N, N_v \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2v^2}} \quad (3.37)$$

elde edilir böylece

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{P_X}\right)^2}} \quad (3.38)$$

elde edilir. Buradan $\tan\theta = \frac{v}{P_X}$ bulunur.

Sonuç 3.4.10 Teğet düzlem, bir anadoğru boyunca eşit miktarda 180° döner. $-\frac{1}{c} < v < \frac{1}{c}$ için (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

İspat ℓ_p , p merkez noktası boyunca bir anadoğru olsun. N_p ve N_q sırasıyla p ve q noktalarında normal vektörler olsunlar. N_p ve N_q arasındaki açı θ ve p ve q arasındaki uzaklık v ise, teorem 3.4.9 dan $\tan\theta = \frac{v}{P_X}$ dir. D_TX , merkez noktasındaki bir spacelike vector olduğundan

$$\min\left\{-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right\} < v < \max\left\{-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right\} \quad (3.39)$$

dır. Eğer $v = 0$ ise p ve q arasındaki uzaklık sıfırdır. Böylece $p = q$ dur. O halde $\theta = 0$ olur. Eğer $0 < v < \max\left\{-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right\}$ ise $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ elde ederiz. $\min\left\{-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right\} < v < 0$ ise $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ olur.

Örnek 3.4.1 (ikinci tür helikoid) Bu, aşağıdaki gibi parametrelendirilmiş bir timelike regle yüzeydir.

$$\varphi(t, v) = \left(-\left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} + v\right) ch\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}t, \frac{\tau t}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}, -\left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} + v\right) sh\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}t \right) \quad (3.40)$$

(Woestijne, 1990), burada sırasıyla κ ve τ α nin eğrilik ve burulmasıdır ve $|\kappa| > |\tau|$ dur. dayanak eğrisi $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, I bir açık aralık, öyle ki; $\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = -1$ olduğundan

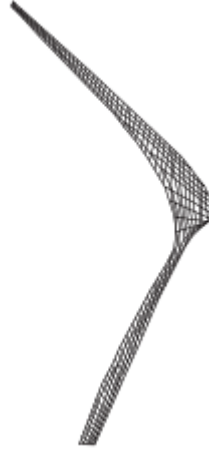
$$\alpha(t) = \left(-\left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2}\right) ch\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}t, \frac{\tau t}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}, -\left(\frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2}\right) sh\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}t \right) \quad \forall t \in I \quad (3.41)$$

dir ve anadoğruların her biri spacelike doğrulardır.

D_TX bir timelike vektör alanı olduğundan

$$v < \min\left\{-\frac{1}{\kappa - \tau}, \frac{1}{\kappa - \tau}\right\} \quad \text{veya} \quad v > \max\left\{-\frac{1}{\kappa - \tau}, -\frac{1}{\kappa - \tau}\right\} \quad (3.42)$$

Ayrıca $\det(T, X, D_TX) = -\tau$ dur. İkinci tür helikoid açılabilir ancak ve ancak $\tau = 0$ dır (bkz. Şekil 3.2).



Şekil 3.2: İkinci Tür Helikoid.

Örnek 3.4.2 (Birinci tür helikoid) Bu, aşağıdaki gibi parametrelendirilmiş bir timelike regle yüzeydir.

$$\varphi(t, v) = \left(\left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} - v \right) \cos \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} t, \left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} - v \right) \sin \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} t, \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} \right) \quad (3.43)$$

(Woestijne, 1990) burada $|\tau| > |\kappa|$ dayanak eğrisi $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dir. I bir açık aralık. Öyle ki;

$$\alpha(t) = \left(\left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} \right) \cos \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} t, \left(\frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} \right) \sin \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} t, \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} \right) \quad \forall t \in I \quad (3.44)$$

Eğrisi bir timelike eğridir ve her bir anadoğru bir spacelike doğrudur.

$D_T X$ bir spacelike vektör alanı olduğundan

$$\min \left\{ \frac{-1}{\kappa - \tau}, \frac{-1}{\kappa + \tau} \right\} < v < \max \left\{ \frac{-1}{\kappa - \tau}, \frac{-1}{\kappa + \tau} \right\} \quad (3.45)$$

Sitriksiyon egrisi

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} X(t) \quad (3.46)$$

Şeklinde verilir ve $\bar{\alpha}(t)$ bir timelike eğridir. Ayrıca, $\det(T, X, D_T X) = \tau$ Birinci tür helikoid açılabilir ancak ve ancak $\tau = 0$. Yani birinci tür helikoidin dağılma parametresi $P_X = -\frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2}$ dir (bkz. Şekil 3.3).



Şekil 3.3: Birinci Tür Helikoid.

Örnek 3.4.3.(İkinci tür Enneper yüzeyine conjugate olan yüzeyler) Bu, aşağıdaki gibi parametrelendirilmiş bir timelike regle yüzeydir.

$$\varphi(t, v) = \left(\frac{\kappa t^2}{2} + v, \frac{-\kappa \tau t^3}{6} - \tau t v, \frac{\kappa^2 t^3}{6} + t + \kappa v t \right), \quad \forall t \in I \quad (3.47)$$

(Woestijne, 1990), burada $|\kappa| = |\tau| \neq 0$ dayanak eğrisi $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dir. I bir açık aralık öyle ki;

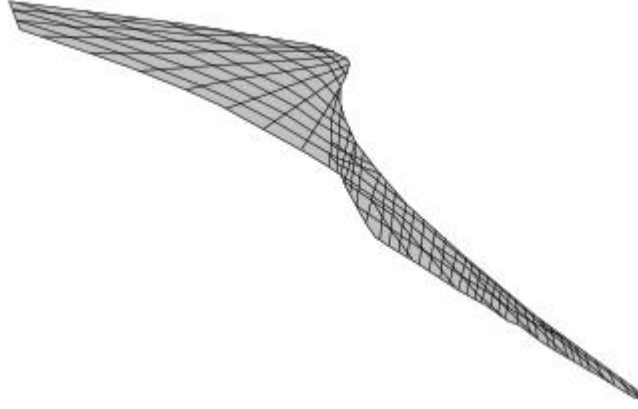
$$\alpha(t) = \left(\frac{\kappa t^2}{2}, \frac{-\kappa \tau t^3}{6}, \frac{\kappa^2 t^3}{6} + t \right) \quad \forall t \in I \quad (3.48)$$

Eğrisi bir timelike eğridir ve anadoğruların her biri spacelike doğrulardır.

$D_T X$ bir null vektör alanı olduğundan

$$v > -\frac{1}{2\kappa} \text{ eger } \kappa > 0, \quad v < -\frac{1}{2\kappa} \text{ eger } \kappa < 0$$

Ayrıca $\det(T, X, D_T X) = -\tau$ dur. İkinci tür Enneper konjugate yüzeyleri açılabilir ancak ve ancak $\tau = 0$ dır (bkz. Şekil 3.4).



Şekil 3.4: İkinci Tür Enneper Yüzeyine Conjugate Olan Yüzeyler.

Örnek 3.4.4 Bu, aşağıdaki gibi parametrelendirilmiş bir timelike regle yüzeydir.

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) = (0, 0, t) + v(t, 0, 0) \quad (3.49)$$

(Woestijne, 1990), dayanak eğrisi timelike bir eğridir ve anadoğruların her biri spacelike doğrulardır. Bu regle yüzey açılabilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında “Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space-II” (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998) isimli çalışma incelenmiş ve bu incelemenin ışığında regle yüzeyler konusunda açık problemlere de kapı aralayacak bir derleme hazırlanmıştır.

Regle yüzeyler, birçok açık problemi beraberinde getiren ve de günümüzde oldukça sık incelenen bir yüzey çeşididir. Regle yüzeler Öklid ve Minkowski uzaylarında beraberinde getirdikleri açık ve bilinen örnekler sayesinde de ilgi odağı olmaya devam etmektedirler. Öklid uzayındaki en temel regle yüzey örnekleri silindir ve konidir.

Regle yüzeyler için Öklidyen uzayda verilen birçok tanım ve teorem Lorentz metriği kullanılarak 3- boyutlu Minkowski uzayına da uyarlanmıştır. Turgut ve Hacısalihoğlu tarafından spacelike ve timelike regle yüzeyler için dağılma parametresi ve boğaz noktası incelenmiştir.

Bu tezde ele aldığımız yüzey çeşidi timelike regle yüzeydir. Bir regle yüzeye timelike yüzey diyebilmemiz için ise yüzeyin anadoğruları timelike, dayanak eğrisi ise spacelike olmalıdır. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, Minkowski 3- uzayda yay parametresi ile parametrelendirilmiş diferensiyellenebilir bir timelike eğri ve $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Spacelike bir eğri olsun böylece ℓ nin doğrultman vektörü ve α nın teğet vektörü, α eğrisinin her noktasında lineer bağımsızlardır.

ℓ nin α boyunca hareket etmesiyle $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzey oluşur ve Minkowski 3- uzayında

$$\begin{aligned} \varphi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

Regle yüzey elde edilir.

Bu çalışma boyunca regle yüzeyler ile ilgili ortaya konulan bazı önemli özellikler ise şöyledir;

v nin tanım kümesini $J \subset \mathbb{R}$ ile gösterelim. Eğer J de v parametresini sabitlersek, M üzerinde

$$\begin{aligned}\varphi_v: I \times \{v\} &\rightarrow M \\ (t, v) &\rightarrow \varphi_v(t, v) = \alpha(t) + vX(t)\end{aligned}$$

elde edilebilir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 + \alpha v)T + cvN \quad (4.1)$$

dir. Buradan M timelike regle yüzeyi için $c = -\det(T, X, D_T X)$ olması ve M timelike yüzeyi açılabilir olması için gerek ve yeter şartın $c = 0$ olması, yüzeyin açılabilirliğinin incelenmesinde elde edilen güçlü bir sonuçtur. Bunun anlamı Eger, bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri sabit ise regle yüzey açılabiliridir.

Açılabilir olmayan bir regle yüzeyin komşu iki anda doğrusunun ortak dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir ve

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{\langle T, D_T X \rangle}{\langle D_T X, D_T X \rangle} X(t) \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle D_T X, D_T X \rangle \neq 0$ dır. Ayrıca açılabilir olmayan regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine de boğaz (striksiyon) çizgisi denir.

Bu çalışmada açılabilir olmayan timelike yüzeylerde $\bar{\alpha}$ striksiyon eğrisi, α dayanak eğrisinin seçiminden bağımsız olması sonucu, ispatı ile birlikte verilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada bir timelike regle yüzeyin dağılma parametresi tanımı verilmiş ve dağılma parametresinin yalnız anadoğrulara bağlı olması teoremi de ispatı ile ele alınmıştır.

Çalışma üç adet örnek ile desteklenmiş ve bu örneklerde yüzeyin açılabilirliği, yüzeyin dağılma parametresi, striksiyon eğrisi hesaplamaları ele alınmıştır.

Regle yüzeyler, Minkowski uzayında spacelike ve timelike yüzeylerden farklı olarak ana doğrusu null eğri olan yüzeyler de geçtiğimiz yıllarda üzerinde çalışılmış yüzeyler arasındadır. Ayrıca Öklid ve Minkowski uzaylarında Frenet çatısı dışında Darboux çatısı kullanılarak da bu yüzeyler incelenmiştir. Bu gözle bakacak olursak Regle yüzeylerin uygulama alanlarının ne kadar geniş olduğu görülebilir. Gelecek çalışmalar için regle yüzeylerin Bishop ve tip-2 Bishop çatıları üzerinde ve var olan diğer geometrik yapılar üzerinde de incelemeler yapılabilir olması veya farklı tür yüzeylerin regle yüzey olma özelliği taşıyıp taşımadığı da araştırılabilecek diğer açık problemler arasında yer almaktadır.

KAYNAKLAR

- Beem, J.K. ve Ehrlich, P.E.: 1981. Global Lorentzian geometry, Marcel Dekker Inc., New York, USA.
- Bottema, O. ve Roth, B., 1979. Theoretical kinematics, North-Holland Press, New York, USA.
- Dimentberg, E.M., 1965. The screw calculus and its application in mechanics, Izdatel'stvo Nauka, Moskow, USSR, Clearinghouse for Federal Technical and Scientific Information.
- Duggal, K. L. ve Bejancu, A., 1996. Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic, Dordrecht and Boston, Mass.
- Guggenheimer, H.W., 1963. Differential geometry, McGraw-Hill, New York, USA.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
- Hoschek, J., 1971. Liniengeometrie, Bibliographisches Institute, Zürich, Switzerland.
- Lopez, R., 2008. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini-Course Taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil.
- McCarthy, J.M. ve Roth, B., 1981. The curvature theory of line trajectories in spatial kinematics, ASME Journal of Mechanical Design 103, 718-724.
- Monge, G., 1850. Applications de l'analyse a' la geometrie, 5th ed., Paris, France.
- O'Neill, B., 1966. Elementary differential geometry, Academic Press, New York, USA.
- O'Neill, B., 1983. Semi Riemannian geometry with applications to relativity, A. Press, New York, USA.
- Turgut, A. ve Hacısalıhoğlu H. H. 1997. On the distribution parameter of timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space. Far East Journal of Mathematical Sciences, 5, 321-328.
- Turgut, A. ve Hacısalıhoğlu, H. H. 1998. Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space-II. Turkish Journal of Mathematics, 22, 1, 33-46.
- Woestijne, V.D.I.: 1990. Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space, Word Scientific Publishing, Singapore 344-369.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Mohammed Balo ABDULJABAR
Doğum Tarihi/Yeri :Dohuk \ IRAK 13\02\1985
E-posta adresi :mohammed.math85@gmail.com
Lisans :University of Dohuk Matematik bölümü 2009\2010

