

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MINKOWSKI UZAYINDA 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP
REGLE YÜZEYLER**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümit GÜNAY

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

EYLÜL 2020

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MINKOWSKI UZAYINDA 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP
REGLE YÜZEYLER**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ümit GÜNAY
(36173614038)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

EYLÜL 2020

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e ayrıca tezin yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarım sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğün üstesinden gelmem için bana yol gösteren bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim hocalarım Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ ve Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR ile emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve eğitim hayatım boyunca büyük fedâkarlıklarda bulunan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bu zorlu süreçte motivasyon veren ve sabır gösteren çok kıymetli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Minkowski Uzayında 1-Tipli Gauss Dönüşümüne Sahip Regle Yüzeyler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ümit GÜNAY



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler	3
2.1.1 Minkowski Uzayda Eğriler ve Yüzeyler	10
2.1.2 Regle Yüzeyler	17
3. 3- BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP REGLE YÜZEYLER	19
3.0.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında $\Delta N = fN$ Şartını Sağlayan Regle Yüzeyler	20
3.0.2 Regle Yüzeylerin Sınıflandırılmasıyla İlgili Bazı Örnekler	35
4. 3- BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	48
5. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP REGLE YÜZEYLER.....	65
KAYNAKLAR.....	85
ÖZGEÇMİŞ	87

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Reel uzay,
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzay,
E_1^3	: 3-boyutlu Minkowski uzay,
E, F, G	: Birinci temel formun katsayıları,
e, f, g	: İkinci temel formun katsayıları,
K	: Yüzeyin Gauss eğriliği,
H	: Yüzeyin Ortalama eğriliği,
∇	: Gradient operatörü,
Δ	: Laplace operatörü,
S_1^2	: Pseudo küre,
H^2	: Hiperbolik uzay,
N	: Gauss dönüşümü (Birim normal)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MINKOWSKI UZAYINDA 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP REGLE YÜZEYLER

ÜMİT GÜNAY

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

87+vi sayfa

2020

Danışman: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olarak hazırlanmış olup regle yüzeylerin ve bu yüzeylerin Gauss dönüşümü hakkında literatür anlamda bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid ve Lorentz uzaylarında eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Lorentz uzayında 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeyler incelenmiş ve bu tip regle yüzeyler için karakterizasyon teoremleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Minkowski 3-uzayında regle yüzeylerle ilgili bazı sınıflandırılma teoremleri incelenmiştir.

Beşinci bölümünde ise genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeyler ile bu tip regle yüzeylerle ilgili teorem ve sonuçlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regle Yüzeyler, Sonlu Tipli Altmanifoldlar, Gauss Dönüşümü, 1-Tipli Gauss Dönüşümü, Genelleştirilmiş 1-Tipli Gauss Dönüşümü

ABSTRACT

Master Thesis

REGLE SURFACES ADMITTING 1-TYPE GAUSS MAP IN MINKOWSKI SPACE

Ümit GÜNAY

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

87+vi pages

2020

Supervisor: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

This study is consisting of five chapters has been submitted as a master's thesis.

The first chapter is prepared as an introduction and literature information about ruled surfaces and the Gaussian transformation of these surfaces are given.

In the second chapter, some basic concepts about curves and surfaces in 3-dimensional Euclidean and Lorentzian spaces are given.

In the third chapter, ruled surfaces with 1-type Gaussian transform in Lorentz space are investigated and characterization theorems are given for this type of ruled surfaces.

In the fourth chapter, a classification of ruled surfaces in Minkowski 3-space is given.

In the fifth chapter, ruled surfaces with generalized 1-type Gaussian transform are investigated ve theorems and results about this type of ruled surfaces are given.

Keywords: Regle Surfaces, Finite Type Submanifolds, Gauss Map, 1-Type Gauss Map, Generalized 1-Type Gauss Map

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin üzerinde çalışmaya en elverişli alanları eğriler teorisi ve yüzeyler teorisi. Eğriler ve yüzeyler farklı disiplinlerde modelleme olarak kullanılan önemli geometrik araçlardır. Yüzeylerin geometrisinin en elverişli çalıştığı uzay ise 3-boyutlu Öklid uzaydır.

Üç boyutlu Öklid uzayda tanımlanan yüzeyler içerisinde modellemeye en uygun yüzeylerden birisi ise regle yüzeylerdir. Bir regle yüzey I reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık aralık ve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir diferensiyellenebilir eğri olmak üzere

$$x : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$s \in I$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

şeklinde tanımlanır ve M ile gösterilir, burada $\beta(s)$, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca bir vektör alanıdır. $\beta(s)$ vektör alanına $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket eden bir doğru olarak bakılabilir. Bundan dolayı $\beta(s)$ ye doğrultman doğrusu da denir. $\alpha(s)$ eğrisine ise taban eğrisi veya dayanak eğrisi denir. Regle yüzeylerin geometrisi çalışılırken, bütün işlemler ve hesaplamalar dayanak eğrisi ve doğrultman doğrusu ile yapıldığından, Öklid uzayındaki herhangi bir yüzeye göre, regle yüzeyi incelemek daha kolay ve daha elverişlidir. Böylece regle yüzeylerin karakterizasyonları taban eğrisi ile doğrultmana bağlı olur.

Yüzeylerin geometrisinin incelenmesinde iki temel eğrilik vardır. Bu eğrilikler Gauss ve ortalama eğriliklerdir. Gauss eğriliği K ile ortalama eğrilik ise H ile gösterilir. Regle yüzeyde Gauss ve ortalama eğriliğinin hesabında $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ önemli rol oynar. Eğer $K = 0$ ise regle yüzeye açılabilir, $H = 0$ ise regle yüzeye minimaldir denir. Minimal yüzeyler bir çok kısmi diferansiyel denklemin çözüm uzayına karşılık geldiğinden uygulamalı bilimlerde ve fen bilimlerinde oldukça önemlidir. Yüzeylerin incelenmesinde bir başka önemli araç da ikinci Gauss eğriliği K_{II} dir. Minimal yüzeylerde ikinci Gauss eğriliği sıfırdır fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Lorentz uzayda regle yüzeylerin incelenmesi Öklid uzayındaki regle yüzeylerin incelenmesine benzemesine rağmen, Lorentz uzayın yapısından kaynaklanan farklılıklar vardır. Regle yüzeylerin karakterizasyonu dayanak eğrisi ve doğrultmana bağlı olduğundan, Lorentz uzayında bu incelemeyi taban eğrisi ve doğrultmanın causal karakteri direkt olarak etkiler. Dolayısıyla Lorentz uzayda regle yüzeylerin geometrisi, Öklid uzayına göre daha karmaşıktır.

Öklid uzayında minimal altmanifoldların bir sınıflandırması T. Takahashi tarafından 1966 yılında verilmiştir [1]. Öklid uzayın yer vektörü x ve altmanifold üzerindeki Laplasyan operatörü Δ olmak üzere $\Delta x = 0$, $\Delta x = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\Delta x = fx$, f bir fonksiyon, ile ilgili karakterizasyon teoremleri verilmiştir. Bu teoremlerden dolayı bu konuyla ilgili verilen teoremlere Takahashi tipi teoremler denir. Takahashi' nin bu sonuçlarından sonra, bu kavramların bir çok genelleştirilmesi yapılmıştır. B. Y. Chen 1983 yılında “sonlu tipli altmanifoldlar” kavramını tanımlamıştır [2]. 1990 yılında O. J. Garay, A bir reel matris olmak üzere $\Delta x = Ax$ şartını sağlayan hipreyüzey tiplerini çalışmış ve Takahashi' nin sonuçlarının bir genelleştirilmesini elde etmiştir [3].

1990 yılında F. Dillen, J. Pas ve L. Verstraelen, Takahashi teoremlerinin farklı bir genelleştirilmesini tanımlamıştır [4]. Bu çalışmaların yer vektörü yerine dönel yüzeylerin Gauss dönüşümü N yi alarak $\Delta N = AN$ şartını sağlayan dönel yüzeyleri incelemişlerdir [4].

Daha sonraki yıllarda bu kavramların Lorentz uzaydaki karşılıkları önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir [5,6].

B.Y. Chen'in 1983 yılında tanımladığı sonlu tipli altmanifoldlar kavramı, regle yüzeylerin Gauss dönüşümü üzerine uyarlanmış ve bununla ilgili bir çok makale yapılmıştır [7–10].

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada 3-boyutlu Lorentz uzayında sonlu tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeylerin karakteristik özellikleri ilgili orjinallik içermeyen bir derleme yapılmıştır.

Birinci bölüm regle yüzeylerle ilgili literatür bilgilerine ve konunun gelişimine ayrılmıştır. İkinci bölümde, konunun iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için Öklid ve Lorentz uzayda eğri, yüzey ve regle yüzeylerle ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde 1-Tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeyler incelenmiştir. Dördüncü bölümde a, b reel sabitler olmak üzere

$$aK_{II} + bH = \text{sabit}, \quad 2a - b \neq 0$$

$$aH + bK = \text{sabit}, \quad a \neq 0$$

$$aK_{II} + bK = \text{sabit}, \quad a \neq 0$$

şartlarını sağlayan regle yüzeylerin geometrik özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Lorentz uzayında bir regle yüzeyin Gauss dönüşümü N olmak üzere

$$\Delta G = fN + gC$$

şartını sağlayan genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeyler incelenmiştir. Burada f, g diferensiyellenebilir fonksiyon ve C ise sabit vektördür.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm iki alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci alt bölüm 3-boyutlu Öklid uzay E^3 de eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel tanım ve teoremlere, ikinci alt bölümde ise 3-boyutlu Minkowski uzay E_1^3 de eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel bilgilere ayrılmıştır.

2.1 Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1. $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan

$$f : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü varsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir.

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [11].

Tanım 2.1.2. 3-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında x ve y nin Öklid iç çarpımı (skaler çarpımı)

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\langle, \rangle$ iç çarpımı ile $\mathbb{R}^3$ afin uzayına **3-boyutlu Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir [11].

Tanım 2.1.3. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$d : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki **uzaklık** ve d ye de $\mathbb{E}^3$ üzerinde **Öklid metriği** denir. [11].

Tanım 2.1.4. $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^3$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{yx}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{yx}\| \|\vec{yz}\|}$$

ile tanımlanır [11].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}^3$ de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ için ortanormal bir baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine $\mathbb{E}^3$ ün bir **dik çatısı** veya **Öklid çatısı** denir [11].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{E}^n$ uzayında bir M yüzeyi $(n-1)$ boyutlu, kapalı ve regüler olma şartını sağlıyor ise bu yüzeye $\mathbb{E}^n$ nin bir **hiperyüzey** denir [11].

Tanım 2.1.7. N, M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı olsun. M üzerindeki herhangi bir p noktasında

$$S_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$$

$$v_p \longrightarrow S_p(v_p) = -D_{v_p}(N)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme M yüzeyinin p noktasında N birim normal vektöre bağlı **şekil operatörü** denir [11].

Tanım 2.1.8. $\mathbb{E}^3$ de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri verilsin. Buna göre $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin vektörel dış çarpımı

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

veya

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = ((a_2b_3 - a_3b_2), (a_3b_1 - a_1b_3), (a_1b_2 - a_2b_1))$$

ile tanımlanır. Vektörel çarpım $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{E}^3$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

ii) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$

iii) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$

iv) $(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle$

v) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$

vi) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{x} \wedge \vec{y} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle \end{vmatrix} = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$ (Lagrange özdeşliği)

vii) $(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})(\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z}) = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{z} \rangle \end{vmatrix}$

viii) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır [12].

Tanım 2.1.9. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$$

şeklinde tanımlanan sürekli fonksiyona $\mathbb{R}^3$ uzayında bir **eğri** denir [13].

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$ bir eğri olmak üzere $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\alpha'(u) = \frac{d\alpha}{du} \big|_{\alpha(t_0)}$$

vektörüne $\alpha(t_0) \in I$ noktasında α nın **teğet vektörü** denir [13].

Tanım 2.1.11. Her $u \in I$ için $\alpha'(u) \neq 0$ koşulunu sağlayan, türevlenebilir, parametrik bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine **regüler eğri** denir [13].

Tanım 2.1.12. Bir $u \in I$ için, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler parametrik eğrisinin u_0 noktasından u noktasına kadar olan **yay uzunluğu**

$$s(u) = \int_{u_0}^u \|\alpha'(u)\| du$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\|\alpha'(u)\| = \sqrt{(\alpha'_1(u))^2 + (\alpha'_2(u))^2 + (\alpha'_3(u))^2}$$

dır ve $\alpha'(u)$ vektörün boyu olarak tanımlanır. $\alpha'(u) \neq 0$ olduğu için s yay uzunluğu u değişkeninin türevlenebilir bir fonksiyonudur. [13].

Tanım 2.1.13. $\alpha, I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $\mathbb{R}^3$ de bir eğri olsun. $\forall u \in I$ için

$$\|\alpha'(u)\| = 1$$

ise α eğrisine **birim hızlı**, u parametresine de **yay parametresi** denir [11].

Tanım 2.1.14. $\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki kordinat komşuluğu verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad \beta : J \rightarrow \mathbb{E}^3$$

olmak üzere

$$h : \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$$

diferansiyellenebilir fonksiyona M nin bir **parametre değişimi** denir [11].

Tanım 2.1.15.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi verildiğinde $\forall u \in I$ için

$$\alpha(u + T) = \alpha(u)$$

olacak şekilde bir $T \in \mathbb{R}$ pozitif sayısı varsa α eğrisine **periyodiktir** denir ve en küçük T sayısına da eğrinin **periyodu** denir [13].

Tanım 2.1.16. M kümesi $\mathbb{R}^3$ içinde bir alt küme olsun. Her $p \in M$ noktası için $\mathbb{R}^3$ içinde aşağıdaki şartları sağlayan bir V komşuluğu ve bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesinden $V \cap M \subset \mathbb{R}^3$ üzerine örten bir fonksiyon $f : U \rightarrow V \cap M$ dönüşümü varsa, M alt kümesine bir **regüler yüzey** denir. Regüler yüzeylerin üç özelliği vardır:

- i) f dönüşümü diferansiyellenebilir, yani f fonksiyonunun U üzerinde her mertebeden kısmi türevleri vardır.
- ii) f bir homomorfizmdir.
- iii) Her $q \in U$ için $df_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyeli bire-birdir [13].

Tanım 2.1.17. Regüler M yüzeyi üzerinde bir p noktasında $\mathbb{E}^3$ uzayının $T_p(M)$ teğet düzlemine dik bir birim vektör vardır; bunların her birine p noktasındaki **birim normal vektör** denir. p noktasından geçen ve p noktasındaki bir birim normal vektörü içeren doğruya p noktasındaki **normal doğru** denir. $p \in M$ noktasında bir $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ parametrizasyonunu seçerek $q \in f(U)$ noktasında,

$$N(q) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}(q)$$

kuralıyla belirli bir birim normal vektör seçebiliriz. Böylece diferansiyellenebilir bir $N : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünü elde ederiz. Bu dönüşüm her $q \in f(U)$ noktasına, q noktasında bir birim normal vektör karşılık getiriyorsa, N dönüşüm $f(U)$ üzerinde diferansillenebilir bir **birim normal vektör alanıdır** denir [13].

Tanım 2.1.18. Regüler bir M yüzeyini, bir $p \in M$ noktası iki komşuluğun kesişiminde olduğunda koordinat değişikliğinin p noktasındaki jakobiyeni pozitif olacak şekilde bir koordinat komşulukları ailesi ile örtmek mümkünse M yüzeyi **yönlendirilebilir yüzey** olarak adlandırılır. Bu biçimde bir aile seçimi, M yüzeyinin bir yönü olarak adlandırılır ve bu durumda M yüzeyine **yönlendirilmiştir** denir. Eğer böyle bir seçim mümkün değilse M , **yönlendirilemez bir yüzey** olarak adlandırılır [13].

Tanım 2.1.19. $\mathbb{E}^3$ de bir M yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir **yön** denir. $\mathbb{E}^3$ deki her bir M yüzeyi üzerinde tam iki yön vardır. Bir yüzey üzerinde yön seçilmiş ise bu yüzeye **yönlendirilmiş yüzey** denir. Bunun yanında Mobius şeridi gibi birçok yüzey de yönlendirilemezler. Bunlara da **yönlendirilemez yüzeyler** denir [13].

Tanım 2.1.20. M , 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de bir yüzey olsun. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orjin merkezli birim küre olmak üzere M nin her bir noktasını S^2 nin merkezine birim normal vektör karşılık getiren

$$N : M \rightarrow S^2 \subset E^3$$

$$p \rightarrow N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$$

dönüşümüne M yüzeyinin **Gauss Dönüşümü** denir. Gauss dönüşümünün türevlenebilir olduğu kolayca doğrulanabilir. N dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki dN_p diferansiyeli $T_p(M)$ düzleminden $T_{N(p)}(S^2)$ düzlemine bir lineer dönüşümdür. $T_p(M)$ ile $T_{N(p)}(S^2)$ paralel olduğu için, dN_p diferansiyeline $T_p(M)$ düzlemi üzerinde bir lineer dönüşümdür [13].

M bir yüzey N de M nin birim normal vektör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasında

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1, \quad dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

olacak şekilde $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı vardır. Burada k_1 ve k_2 sayıları p noktasında normal eğriliğin ekstremum değerleridir, yani ikinci temel formun maksimum ve minimum değerleridir. Ayrıca $k_1 \geq k_2$ dir. N Gauss dönüşümü için aşağıdaki eşitliği verebiliriz [13].

Tanım 2.1.21. $\mathbb{E}^3$ de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir p noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik değeri M nin bu noktadaki **asli eğrilikleri** olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin p noktasındaki **asli eğrilik doğrultuları** denir.

dN dönüşümünün determinanı, asli eğriliklerin çarpımı $(-k_1) \cdot (-k_2) = k_1 k_2$, izi ise asli eğriliklerin toplamının tersi $-(k_1 + k_2)$ dir. Yüzeyin yönlendirilmesi değiştiğinde dN nin determinanı değişmez, yani dN nin determinanı yönlendirmeden bağımsızdır [13].

Tanım 2.1.22. Bir $p \in M$ noktasında Gauss dönüşümünün diferansiyeli $dN_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ olsun. dN_p dönüşümünün determinanı M yüzeyinin p noktasındaki **Gauss eğriliği** denir ve K ile gösterilir. dN_p dönüşümünün izinin yarısının negatifine, M yüzeyinin p noktasındaki **Ortalama**

eğriliği denir ve H ile gösterilir. Asli eğrilikler cinsinden

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

olarak yazılabilir [13].

Tanım 2.1.23. Bir yüzeyin p noktasına, eğer

$K(p) > 0$ ise eliptik

$K(p) < 0$ ise hiperbolik

$K(p) = 0$ ve $H(p) \neq 0$ ise parabolik

$k_1(p) = k_2(p)$ ise umbilik

$k_1(p) = k_2(p) \neq 0$ ise doğrusal umbilik

$k_1(p) = k_2(p) = 0$ ise seviye

noktası denir [14].

Tanım 2.1.24. $M = \mathbb{E}^3$ de bir yüzeyi olmak üzere $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyonu için,

$$\text{grad} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$f \rightarrow \nabla f = \text{grad}(f) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak tanımlanan grad operatörüne M üzerinde **gradient operatörü** denir. M üzerindeki lokal koordinatlar cinsinden $\text{grad} f$ operatörü, $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ olmak üzere

$$(\text{grad} f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad g^{ij} = \delta_{ij}$$

dir. Eğer $M = \mathbb{R}^3$ ise

$$\text{grad} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$f \rightarrow \nabla f = \text{grad}(f) = \sum_{i=1}^3 g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olur [15]

Tanım 2.1.25. $\mathbb{E}^3$ de bir M yüzeyi için $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$X = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ olmak üzere}$$

$$\text{div} : \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow \operatorname{div}(X) = \langle \nabla, X \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

olarak tanımlanan div operatörüne M üzerinde **divergens operatörü** denir ve $\operatorname{div} X$ e de X vektör alanının **divergensi** denir [15].

Tanım 2.1.26. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi için $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$f \rightarrow \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

olarak tanımlanan Δ operatörüne M üzerinde **Laplace operatörü** denir. M üzerindeki lokal koordinatlar cinsinden f nin Laplace operatörü için koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3) olduğuna göre

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu için $X = (f_1, f_2, f_3) \in \chi(M)$ vektör alanı yerine

$$\nabla f = \operatorname{grad}(f) = \left(g^{1j} \frac{\partial f}{\partial x_j}, g^{2j} \frac{\partial f}{\partial x_j}, g^{3j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

vektör alanı alınırsa $X = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ eşitliğinde f_i yerine $f_i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ alınmalıdır.

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(X) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

veya $g^{ij} \neq g^{ji}$ olduğunda $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} = 0$ olacağından

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

olup tensörel notasyon ile

$$\Delta f = g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

olur [15].

Önerme 2.1.1. Bir M yüzeyinin k_1 ve k_2 asli eğrilikleri,

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

kuadratik denkleminin kökleridir. k_1 ve k_2 değerleri;

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \text{ ve } k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dir [15].

Önerme 2.1.2. Bir M yüzeyinin Gauss ve Ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

olarak verilir. Burada birinci temel formun bileşenleri

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad F = \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

ve ikinci temel formun bileşenleri

$$e = \langle N, f_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, f_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, f_{vv} \rangle$$

olarak verilir [16].

2.1.1 Minkowski Uzayda Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.27. $\langle, \rangle$, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

1. $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq 0$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ olursa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **pozitif tanımlı**,
2. $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq 0$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ olursa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **negatif tanımlı**,
3. $\forall \vec{x} \in V$, için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ olursa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **pozitif yarı tanımlı**,
4. $\forall \vec{x} \in V$, için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \leq 0$ olursa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **negatif yarı tanımlı**,
5. $\forall \vec{y} \in V$, için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ iken $\vec{x} = 0$ olursa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **nondejenere**,
6. $\forall \vec{y} \in V$, için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ iken $\vec{x} \neq 0$ olursa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **dejenere (singüler)**,

denir [15].

Tanım 2.1.28. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise $\langle, \rangle$ ye V üzerinde bir **skaler çarpım**, bu durumda $(V, \langle, \rangle)$ ikilisine de bir **skaler çarpım uzayı** denir [15].

Tanım 2.1.29. V bir skaler çarpım uzayı ve $W \subset V$ altuzay olsun. Eğer W alt uzayı,

$$\langle, \rangle|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bilinear formu negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı ise W nin boyutuna $\langle, \rangle$ **skaler çarpımın indeksi** denir ve q ile gösterilir. Ayrıca q ya V vektör uzayının da **indeksi** denir ve $\text{ind}V = q$ ile gösterilir. Bu ifade $0 \leq q \leq \text{boy}V$ olarak da yazılabilir [15].

Tanım 2.1.30. V bir skaler çarpım uzayı ve q da V nin indeksi olsun. Eğer $q = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V ye bir **Lorentz uzay** denir [15].

Tanım 2.1.31. $\mathbb{R}^n$ n -boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. Ayrıca $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

fonksiyonu bir skaler çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde **Lorentz metriği** denir [15].

Tanım 2.1.32. Özel olarak $n = 3$ için $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

bu uzay **Minkowski 3-uzayı** veya **Lorentz 3-uzay** olarak isimlendirilir ve genellikle $\mathbb{E}_1^3$ veya $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir [15].

Tanım 2.1.33. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında bir $\vec{x}$ vektörüne,

- i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise **timelike** vektör,
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise **spacelike** vektör,
- iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ veya $\vec{x} \neq 0$ ise **lightlike** vektör veya **null** vektör

denir. Ayrıca $\vec{x}$ vektörünün tipi, onun **causal** karakteri olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.1.34. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}_1^3$ için $\langle x, y \rangle = 0$ ise $\vec{x} \neq 0, \vec{y} \neq 0$ vektörleri birbirine **diktir** denir ve $\vec{x} \perp \vec{y}$ ile gösterilir [15].

Tanım 2.1.35. $\mathbb{E}_1^3$ vektör uzayı üzerindeki skaler çarpım $\langle, \rangle$ olsun. $\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörünün **normu** $\|\vec{x}\|$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = |\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır [15].

Tanım 2.1.36. Bir $\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörünün normu 1 e eşit ise yani

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = |\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|^{\frac{1}{2}} = 1$$

ise $\vec{x}$ vektörüne **birim vektör** denir [15].

Tanım 2.1.37. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir M yüzeyinin her p noktasına

$$I_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_p, v_p) \longrightarrow I_p(u_p, v_p) = \langle u_p, v_p \rangle$$

fonksiyonu karşılık getiren I_p fonksiyonuna **I. temel form** denir.

$$II_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_p, v_p) \longrightarrow II_p(u_p, v_p) = \langle S(u_p), v_p \rangle$$

şeklinde tanımlanan II_p fonksiyonuna **II. temel form** denir [11].

Tanım 2.1.38. $M \subset \mathbb{E}_1^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha'(u)$ da $\alpha(u)$ eğrisinin hız vektörü olmak üzere

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$$

biçiminde tanımlansın.

- i) $\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle < 0$ ise α eğrisine **timelike**,
 - ii) $\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle > 0$ ise α eğrisine **spacelike**,
 - iii) $\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle = 0$ ise α eğrisine **null eğri**,
- denir [15].

Önerme 2.1.3. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörel çarpımı için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ spacelike vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir timelike vektördür,
- ii) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ timelike vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,
- iii) $\vec{x}$ spacelike ve $\vec{y}$ timelike vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,
- iv) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ null vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,
- v) $\vec{x}$ timelike ve $\vec{y}$ null vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,
- vi) $\vec{x}$ spacelike ve $\vec{y}$ null vektör olmak üzere $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür [17].

Teorem 2.1.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i) İki timelike vektör asla ortagonal olamaz,
- ii) Bir timelike vektör, bir null vektöre asla ortagonal olamaz,
- iii) İki null vektör ortagonaldir ancak ve ancak bu vektörler lineer bağımlıdır [18].

Tanım 2.1.39. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^3$ uzayında **skaler çarpım** (iç çarpım)

$$\langle a, b \rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

ve **vektörel çarpım** (dış çarpım)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = ((a_3 b_2 - a_2 b_3), (a_3 b_1 - a_1 b_3), (a_1 b_2 - a_2 b_1))$$

olarak yazılır:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

veya

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_1 \wedge e_3 = e_2$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$ dir . Saat yönünün ters yönü pozitif olarak alınmıştır.

Minkowski uzayındaki vektörel çarpımın özellikleri Öklid uzayındaki vektörel çarpımın özelliklerine benzerdir. $\mathbb{E}_1^3$ de vektörel çarpımın özellikleri aşağıdaki şekildedir: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{E}_1^3$ için

$$\text{i)} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a},$$

$$\text{ii)} \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c}),$$

$$\text{iii)} \quad \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0,$$

$$\text{iv)} \quad (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle,$$

$$\text{v)} \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = -\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a},$$

$$\text{vi)} \quad \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}),$$

$$\text{vii)} \quad \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{x} \wedge \vec{y} \rangle = - \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle \end{vmatrix} = -\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$$

($\mathbb{E}_1^3$ de Lagrange özdeşliği),

$$\text{viii)} \quad \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2,$$

$$\text{ix)} \quad (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})(\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z}) = - \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{z} \rangle \end{vmatrix},$$

x) $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır [12].

Tanım 2.1.40. 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $\alpha'' \neq 0$ olmak üzere C^3 -sınıfından diferansiyellenebilir regüler bir α eğrisine **Frenet eğrisi** denir. Buna ek olarak Frenet çatısındaki vektörler

$$e_1 = \alpha' \quad (\text{Teğet vektör})$$

$$e_2 = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \quad (\text{Asli normal vektör})$$

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 \quad (\text{Binormal vektör})$$

olarak bulunur. $\kappa = \|\alpha''\|$ fonksiyonuna α nın **eğriliği** denir. Bu sayının daima pozitif olduğunu varsayabiliriz. Yukarıdaki denklemlerin türevleri

$$\begin{aligned} e_1' &= \alpha'' = \kappa e_2 \\ e_2' &= \langle e_2', e_1 \rangle e_1 + \langle e_2', e_2 \rangle e_2 + \langle e_2', e_3 \rangle e_3 \\ &= -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e_3' &= \langle e_3', e_1 \rangle e_1 + \langle e_3', e_2 \rangle e_2 + \langle e_3', e_3 \rangle e_3 \\ &= -\langle e_3, e_1' \rangle e_1 - \langle e_3, e_2' \rangle e_2 + 0e_3 \\ &= -\tau e_2 \end{aligned}$$

olur. $\tau = \langle e_2', e_3 \rangle$ fonksiyonuna α nın **burulması** denir. (e_1, e_2) düzlemi eğri boyunca değişimi açıklar. Bu 3 denklemin türevlerine **Frenet denklemleri** denir ve matris biçiminde aşağıdaki şekilde

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

yazılır.

$\mathbb{E}_1^3$ de Frenet çatısını, eğrinin eğriliğini ve burulmasını Öklid uzayına benzer şekilde aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

Vektörler $e_1, e_2 \in \mathbb{E}_1^3$ öyleki $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ ve $e_3 = e_1 \wedge e_2$ olsun. O halde $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal çatı olur. Eğer $\langle e_1, e_1' \rangle = \varepsilon$ ve $\langle e_2, e_2' \rangle = \eta$ ise $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ Lagrange özdeşliğinden $\langle e_3, e_3' \rangle = -\varepsilon\eta$ dir. Her $X \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre

$$X = \varepsilon \langle X, e_1 \rangle e_1 + \eta \langle X, e_2 \rangle e_2 - \varepsilon\eta \langle X, e_3 \rangle e_3$$

şeklinde tek türlü yazılabilir [12].

Teorem 2.1.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında α bir spacelike veya timelike eğri olsun. Kabul edelim ki α eğrisi yay uzunluğu ile parametrelenmiş ve $\langle \alpha'', \alpha'' \rangle \neq 0$ şartlarını sağlasın. Bu durumda bu eğrinin Frenet çatı elemanları

$$e_1 = \alpha', \quad e_2 = \frac{\alpha''}{\sqrt{|\langle \alpha'', \alpha'' \rangle|}}, \quad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

için Frenet denklemi

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\varepsilon & 0 & -\tau\varepsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

dir ve α eğrisinin eğriliği $\kappa = \langle e_1', e_2 \rangle$ ve burulması $\tau = \langle e_2', e_3 \rangle$ ile gösterilir [14].

Tanım 2.1.41. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında

$$S_1^2 = \{X \in E_1^3 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$$

küresine **pseudo-küre**,

$$H^2 = \{X \in E_1^3 \mid \langle X, X \rangle = -1\}$$

küresine de **hiperbolik uzay** denir. Her ikisi birden **de-Sitter uzayı** olarak adlandırılır.

E_1^3 teki spacelike veya timelike $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisinin yay parametresi s olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatı alanını $\{t, n, b\}$ olmak üzere $\alpha(s)$ nın Frenet formülleri;

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

Burada $\langle t, t \rangle = \varepsilon_1$, $\langle n, n \rangle = \varepsilon_2$, $\langle b, b \rangle = \varepsilon_3$ tur. Burada $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sırasıyla $\alpha(s)$ nin eğrilik fonksiyonu ve burulma (torsiyon) fonksiyonudur.

$\beta(s), Q^2(\varepsilon)$ de yay uzunluğu s olan spacelike veya timelike küresel bir eğri olmak üzere bu eğrinin Frenet çatısı $\{\beta(s), t(s) = \beta'(s), g(s) = \beta(s) \wedge \beta'(s)\}$ dir [15].

Tanım 2.1.42. $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyinin Gauss eğriliği K , birinci temel formun bileşenleri E, F ve G olmak üzere

$$K = \frac{1}{|EG - F^2|^2} \left\{ \begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}$$

formülüne 3-boyutlu Minkowski uzayında **Brioschi formülü** denir. Benzer şekilde 3-boyutlu Öklid uzayında bu formül hesaplanabilir [12].

Tanım 2.1.43. $\mathbb{E}_1^3$ de M açılabilir olmayan yüzeyin ikinci Gauss eğriliği K_{II} , ikinci temel formun bileşenleri e, f ve g olmak üzere

$$K_{II} = \frac{1}{|eg - f^2|^2} \left\{ \begin{vmatrix} f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right\}$$

formulüne ikinci Gauss eğriliği için **Brioschi formülü** denir [12].

2.1.2 Regle Yüzeyler

Tanım 2.1.44. $I \subset \mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir diferansillenebilir eğri ve β da α eğrisi boyunca bir vektör alanı olsun. Buna göre

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$f(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

ile tanımlı yüzeye $\mathbb{E}^3$ de bir **Regle yüzey** denir. Burada α eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, β ya da doğrultman vektör alanı veya doğrultmanı denir [19].

Tanım 2.1.45. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilir** denir [11].

Tanım 2.1.46. $f(s, t)$ bir regle yüzey olmak üzere $\forall u \in I$ için

$$f(u + 2\pi, v) = f(u, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalıdır** denir [11].

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrileridir. Yani, bir periyod sonra her ana doğru kendi üzerine gelir [11].

Tanım 2.1.47. Bir $f(s, t)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına **boğaz (merkez veya striksiyon)** noktası adı verilir [11].

Tanım 2.1.48. Bir $f(s, t)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** adı verilir [11].

Tanım 2.1.49. Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (dralli)** denir. Bu regle yüzeyin dağılma parametresinin diferansiyel denklemi

$$Q = \frac{\det(\alpha', X, X')}{\langle X', X' \rangle}$$

ile ifade edilir [11].

Tanım 2.1.50. $\mathbb{E}^3$ de bir regüler M yüzeyinin H ortalama eğriliği her yerde sıfırsa ($H = 0$), bu yüzeye **minimal yüzey** denir [13].

Tanım 2.1.51. $\mathbb{E}^3$ de bir regüler M yüzeyinin K Gauss eğriliği sıfır olan ($K = 0$) olan yüzeylere **flat (düzlemsel) yüzey** denir [13].

Tanım 2.1.52. $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri β_0 da $\mathbb{E}^3$ de sabit bir vektör olmak üzere

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$f(s, t) = \alpha(s) + t\beta_0$$

şeklinde tanımlanan regle yüzeye **silindirik regle yüzey** denir [13].

Tanım 2.1.53. $\alpha(I)$ eğrisinin yay parametresi t olmak üzere $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet çatısı için V_1 teğet vektör, V_2 asli normal vektör ve V_3 binormal vektördür. $\alpha(I)$ eğrisi boyunca V_3 binormal vektörü tarafından üretilen regle yüzeye **B-scroll (Binormal scroll)** denir. $\alpha(I)$ dayanak eğrisi ve $Sp\{V_3\}$ doğrultman uzay olmak üzere özel bir regle yüzey olan B-scoll un denklemi $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ için

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + vV_3(u)$$

dir [15].

Örnek 2.1.1.

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au)$$

olarak verilen bir helisi düşünelim. Helisin her noktasında, o noktadan geçen, xy düzlemine paralel olan z eksenini kesen bir doğru çizelim. Bu doğruların belirlediği yüzeye helikoid denir ve bir parametrizasyonu,

$$f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

$$0 < u < 2\pi$$

$$-\infty < v < \infty$$

ile verilir. f dönüşümü, uv düzleminde genişliği 2π olan bir açık şeridi, helis üzerinde 2π lik bir dönüşüme karşılık gelen helikoid parçasına çevirir [13].

3. 3- BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

parametrik denklemiyle verilen M regle yüzeyinin Gauss dönüşümü incelenecektir. Burada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ bir Lorentzian eğri ve β da α eğrisi boyunca bir vektör alanıdır. M regle yüzeyinin Gauss dönüşümü N olmak üzere

$$\Delta N = fN$$

ise N Gauss dönüşümüne **noktasal 1-tipli Gauss dönüşümü** denir. Yukarıdaki eşitlikte f , M yüzeyi üzerinde bir fonksiyon, Δ da M üzerinde Laplasyen operatörüdür [20].

Bölüm boyunca E_1^3 deki regle yüzeylerinin taban eğrisi α ve doğrultmanı β vektörüne göre sınıflandırmalar yapılacaktır. Buna göre dayanak eğrisi α spacelike ise regle yüzey M_+ ile α timelike ise regle yüzey M_- ile gösterilecektir. Bunların yanısıra M_+ ve M_- regle yüzeylerini de doğrultman vektörü β nın karakterine göre

α spacelike iken M_+ ,

1) β spacelike ve β' non-null ise M_+^1 ,

2) β spacelike ve β' null ise M_+^2 ,

3) β timelike ve β' spacelike ise M_+^3 ,

α timelike iken M_- ,

1) β spacelike ve β' non-null ise M_-^1 ,

2) β spacelike ve β' null ise M_-^2

ile gösterilecektir [20].

M regle yüzeyi silindirik regle yüzey olsun. Eğer α spacelike ise $\beta' = 0$ olduğundan bu regle yüzey M_+^1 sınıfına dahil olur. Eğer α timelike ise yine $\beta' = 0$ olacağından M_-^1 sınıfına dahil olur. Ayrıca silindirik regle yüzeylerinde α spacelike ve β timelike iken $\beta' = 0$ olduğundan bu tip regle yüzeyler M_+^3 sınıfına dahil olur [20].

3.0.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında $\Delta N = fN$ Şartını Sağlayan Regle Yüzeyler

Bu alt bölümde regle yüzeyler birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss dönüşümü yardımıyla sınıflandırılacaktır. M regle yüzeyinin N Gauss dönüşümünün

$$\Delta N = fN \quad (3.0.1)$$

özelliğini sağlaması durumunda geometrisi incelenecek ve karakterizasyon teoremleri verilecektir. Bu eşitlikte ΔN ifadesinin teğet bileşeni sıfırdır, yani

$$\Delta N - \varepsilon \langle \Delta N, N \rangle N = 0, \quad \varepsilon = \langle N, N \rangle$$

olur. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında regle yüzeyler α taban eğrisi β vektör alanının karakterine göre üç belirli tipe ayrılır. Bunlar silindirik regle yüzeyler, silindirik olmayan regle yüzeyler ve null scrollardır.

İlk önce silindirik regle yüzeyleri inceleyelim.

Teorem 3.0.1. *M , 3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike veya timelike taban eğrili silindirik regle yüzey $\Delta N = fN$ eşitliğini sağlıyorsa aşağıdaki yüzeylerin herhangi birinin açık bir parçasıdır.*

- i) Öklidyen düzlem
- ii) Lorentz düzlem
- iii) Hiperbolik silindir
- iv) Lorentz dairesel silindir
- v) 1-indeksli dairesel silindir [20].

İspat: M , E_1^3 de taban eğrisi α s-yay parametresi ile verilmiş spacelike veya timelike diferansiyellenebilir eğri ve $\beta = \beta(s)$ de α boyunca spacelike veya timelike sabit ve birim vektör alanı olsun. Ayrıca α' ile β yı dik olarak almak genelliği bozmayacağından $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$ olsun. M nin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad (3.0.2)$$

olmak üzere

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle \alpha', \beta \rangle = 0, \quad \langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_2 \quad (3.0.3)$$

olur. Burada $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ dir. Bunu iki durumda inceleyebiliriz.

1. M silindirik regle yüzeyi M_+^1 veya M_-^1 sınıfına dahil olsun, yani $\varepsilon_2 = 1$ olsun. Bu durumda β sabit bir spacelike vektördür. β vektör alanını $\beta = (0, 0, 1)$ olarak seçmek genelliği bozmaz, çünkü her spacelike sabit vektörünü $\beta = (0, 0, 1)$ e dönüştüren bir Lorentzian hareket bulunabilir. α yı düzlemsel eğri olarak alalım, yani

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$$

olsun. (3.0.2) den

$$x_s = \alpha'(s), \quad x_t = \beta$$

ve

$$\langle x_s, x_s \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle x_s, x_t \rangle = 0, \quad \langle x_t, x_t \rangle = 1 \quad (3.0.4)$$

elde edilir. Buradan M nin N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \alpha' \wedge \beta = (-\alpha'_2, -\alpha'_1, 0) \quad (3.0.5)$$

olur. N nin ΔN Laplasyanını hesaplayalım. Bunun için öncelikle M üzerine indirgenmiş metrik matrisini elde etmeliyiz. (3.0.4) ten

$$g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon_1$$

$$g_{22} = \langle x_t, x_t \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle x_t, x_s \rangle = 0$$

yani

$$[g] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det[g] = \varepsilon_1 \quad (3.0.6)$$

olarak elde edilir. Bu matrisin tersi

$$[g]^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.0.7)$$

olup, tersi kendisine eşittir. Buna göre

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{|\mathcal{G}|} \left(g^{11} \frac{\partial}{\partial s} + g^{12} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\mathcal{G}|} \left(g^{21} \frac{\partial}{\partial s} + g^{22} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\}$$

olduğundan (3.0.6) ve (3.0.7) deki değerler bu eşitlikte yerine yazıldığında

$$\Delta = - \left\{ \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\}$$

olur. Bu (3.0.5) deki Gauss dönüşümüne uygulanırsa

$$\Delta N = (\varepsilon_1 \alpha_2''', \varepsilon_1 \alpha_1''', 0) \quad (3.0.8)$$

bulunur. $\Delta N = fN$ olduğu gözönüne alınırsa

$$(\varepsilon_1 \alpha_2''', \varepsilon_1 \alpha_1''', 0) = f(s, t) (-\alpha_2', -\alpha_1', 0)$$

dan

$$\varepsilon_1 \alpha_2''' = -f(s, t) \alpha_2', \quad \varepsilon_1 \alpha_1''' = -f(s, t) \alpha_1' \quad (3.0.9)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlere sahip oluruz. Bu eşitliklerden f fonksiyonu sadece s -parametresine bağlıdır. (3.0.9) diferansiyel denklemini çözelim. M regle yüzeyi M_+^1 sınıfına dahil yani $\varepsilon_1 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = -(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 = 1$$

olduğundan

$$\alpha_1' = \sinh \theta, \quad \alpha_2' = \cosh \theta$$

olarak yazılabilir ve burada $\theta = \theta(s)$ dir. Bu eşitlikte α_1''' ve α_2''' ifadeleri hesaplanıp (3.0.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \theta'' \sinh \theta + ((\theta')^2 + f(s, t)) \cosh \theta &= 0 \\ \theta'' \cosh \theta + ((\theta')^2 + f(s, t)) \sinh \theta &= 0 \end{aligned}$$

elde edilirki bu denklemler θ'' ve $f(s, t)$ bilinmeyenler olmak üzere bir homojen lineer denklem sistemidir. Bu denklemler çözülrse

$$\theta'' = 0, \quad f(s, t) = -(\theta')^2$$

elde edilir. $\theta'' = 0$ olduğundan integral alınırsa $\theta' = c$ olarak bulunur ve buradan

$$f(s, t) = -c^2$$

olup, f bir sabittir. Böylece M bir öklidyen düzlemin bir açık parçasıdır ve hiperbolik silindirdir.

Şimdi M regle yüzeyi M_-^1 sınıfına dahil olsun, yani $\varepsilon_1 = -1$ olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = -(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 = -1$$

olduğundan

$$\alpha_1' = \cosh \theta, \quad \alpha_2' = \sinh \theta$$

olarak yazılır ve burada $\theta = \theta(s)$ dir. Üsteki duruma benzer olarak

$$\begin{aligned}\alpha_1'' &= \theta' \sinh \theta, & \alpha_1''' &= \theta'' \sinh \theta + (\theta')^2 \cdot \cosh \theta \\ \alpha_2'' &= \theta' \cosh \theta, & \alpha_2''' &= \theta'' \cosh \theta + (\theta')^2 \cdot \sinh \theta\end{aligned}$$

elde edilir ki bu denklem sisteminin çözümünde

$$\theta'' = 0, \quad f(s, t) = (\theta')^2$$

elde edilir. Böylece f sabittir ve M bir Lorentz düzlemin açık parçası ve Lorentz dairesel silindirdir.

2. M, M_+^3 tipinde silindirik regle yüzey, yani $\varepsilon_1 = 1$ ve $\varepsilon_2 = -1$ olsun. Birinci durumdakine benzer olarak $\beta = (1, 0, 0)$, $\alpha(s) = (0, \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ olarak seçebiliriz. Bu durumda M nin Gauss dönüşümü

$$N = (0, \alpha_3'(s), -\alpha_2'(s))$$

olarak bulunur. Buna Δ Laplasyanı uygulanırsa

$$\Delta N = (0, -\alpha_3'''(s), \alpha_2'''(s))$$

elde edilir. $\Delta N = fN$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\alpha_3'''(s) = -f(s, t) \cdot \alpha_3'(s), \quad \alpha_2'''(s) = -f(s, t) \cdot \alpha_2'(s)$$

olur.

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2 = 1$$

olduğundan

$$\alpha_2' = \cos \theta, \quad \alpha_3' = \sin \theta$$

olarak yazılabilir ve burada $\theta = \theta(s)$ dir. Buradan da birinci duruma benzer olarak f sabit olarak bulunur. Böylece M Lorentz düzleminin bir açık parçası ve bir indeksli dairesel silindirdir.

Şimdi de silindirik olmayan regle yüzeyleri inceleyelim.

Teorem 3.0.2. *M 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike veya spacelike dayanak eğrili silindirik olmayan regle yüzey olsun. Bu durumda M nin Gauss dönüşümü noktasal 1-tiplidir ancak ve ancak M aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır.*

- i) *Spacelike veya timelike birinci çeşit helisoid yüzeydir.*
- ii) *Spacelike veya timelike ikinci çeşit helisoid yüzeydir.*
- iii) *Spacelike veya timelike üçüncü çeşit helisoid yüzeydir.*
- iv) *Spacelike veya timelike 2. çeşit Ennepper yüzeyin eşleniğidir [20].*

İspat: Bunu iki durumda inceleyeceğiz.

1. Durum:

M silindirik olmayan regle yüzeyi, α dayanak eğrisinin ve β doğrultman eğrisinin karakterine göre 3 türünden biri M_+^1 , M_+^3 veya M_-^1 tipinden birisidir. Burada M regle yüzeyi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R} \quad (3.0.10)$$

şeklinde parametrik olarak gösterilsin. Buna göre

$\langle \alpha, \alpha \rangle = \varepsilon_1 (\pm 1)$, $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_2 (\pm 1)$, $\langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_3 (\pm 1)$, $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$ dır ve doğal çatı $\{x_s, x_t\}$, $x_s = \alpha'(s) + t\beta'(s)$ ve $x_t = \beta$ ile verilir. Daha sonra kullanacağımız q , u , ve v diferensiyellenebilir fonksiyonlarını

$$q = \|x_s\|^2 = \varepsilon_4 \langle x_s, x_s \rangle, \quad u = \langle \alpha', \beta' \rangle, \quad v = \langle \alpha', \alpha' \rangle$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\varepsilon_4 = (\pm 1)$ olup x_s vektörünün işaretidir. M deki pseudo-Riemann metriği ile elde edilen $\langle x_s, x_s \rangle = \varepsilon_4 q$, $\langle x_s, x_t \rangle = 0$ ve $\langle x_t, x_t \rangle = \varepsilon_2$ dir.

$\{x_s, x_t\}$ bazlarına göre (g_{ij}) matrisi

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_4 q & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre

$$g_{ss} = \varepsilon_4 q, \quad g_{st} = g_{ts} = 0, \quad g_{tt} = \varepsilon_2$$

(g_{ij}) matrisinin tersi

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_4 q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$(g^{ss}) = \frac{1}{\varepsilon_4 q}, \quad (g^{st}) = (g^{ts}) = 0, \quad (g^{tt}) = \frac{1}{\varepsilon_2}$$

ve

$$|\mathcal{G}| = \det(g_{ij}) = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4}{q}$$

dir. Buna göre M üzerindeki Laplacian

$$\begin{aligned} \Delta = -\frac{1}{\sqrt{|q\varepsilon_2\varepsilon_4|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{|q\varepsilon_2\varepsilon_4|} g^{ss} \frac{\partial}{\partial x_s} + \sqrt{|q\varepsilon_2\varepsilon_4|} g^{st} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\sqrt{|q\varepsilon_2\varepsilon_4|} g^{ts} \frac{\partial}{\partial x_s} + \sqrt{|q\varepsilon_2\varepsilon_4|} g^{tt} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.0.11)$$

elde edilir. Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikler (3.0.11) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \sqrt{q} \left(\frac{\varepsilon_4}{q} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{q} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{q}} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_2 \sqrt{q} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\varepsilon_4 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + q^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right) \\ &= -\varepsilon_4 \left[\frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] - \varepsilon_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\Delta = -\varepsilon_4 \left[\frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] - \varepsilon_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

şeklindedir. Şimdi M nin N Gauss dönüşümünü elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} x_s \wedge x_t &= (\alpha'(s) + t\beta'(s)) \wedge \beta(s) \\ &= \alpha'(s) \wedge \beta(s) + t\beta'(s) \wedge \beta(s) \end{aligned}$$

Burada $A = \alpha' \wedge \beta$ ve $B = \beta' \wedge \beta$ denildiğinde

$$x_s \wedge x_t = A + tB$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|x_s \wedge x_t\|^2 &= |\langle A + tB, A + tB \rangle| \\ &= |\langle A, A \rangle + 2t \langle A, B \rangle + t^2 \langle B, B \rangle| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle &= \langle \alpha'(s) \wedge \beta(s), \alpha'(s) \wedge \beta(s) \rangle \\ &= \langle \alpha'(s) \wedge \beta(s), \alpha'(s) \wedge \beta(s) \rangle - \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \langle \beta(s), \beta(s) \rangle \\ &= -v\varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle A, B \rangle &= \langle \alpha'(s) \wedge \beta(s), \beta'(s) \wedge \beta(s) \rangle \\
&= \langle \alpha'(s) \wedge \beta(s) \rangle \langle \beta(s), \beta'(s) \rangle - \langle \alpha'(s), \beta'(s) \rangle \langle \beta(s), \beta(s) \rangle \\
&= -u\varepsilon_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle B, B \rangle &= \langle \beta'(s) \wedge \beta(s), \beta'(s) \wedge \beta(s) \rangle \\
&= \langle \beta'(s) \wedge \beta(s) \rangle \langle \beta(s), \beta'(s) \rangle - \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle \langle \beta(s), \beta(s) \rangle \\
&= -\varepsilon_2\varepsilon_3
\end{aligned}$$

dır. Buna göre

$$\|x_s \wedge x_t\|^2 = -(\varepsilon_2 v + 2\varepsilon_2 u t + \varepsilon_2 \varepsilon_3 t^2)$$

dır. $\varepsilon_4 = -\varepsilon_2$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
q &= \varepsilon_4 \langle x_s, x_s \rangle \\
&= \varepsilon_4 \langle \alpha' + t\beta', \alpha' + t\beta' \rangle \\
&= \varepsilon_4 (\langle \alpha', \alpha' \rangle + 2t \langle \alpha', \beta' \rangle + t^2 \langle \beta', \beta' \rangle) \\
&= \varepsilon_4 (v + 2ut + \varepsilon_3 t^2)
\end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$q = \varepsilon_4 (\varepsilon_3 t^2 + 2ut + v)$$

olur. Bu durumda N Gauss dönüşümünü

$$N = \left(\frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} \right) = q^{-\frac{1}{2}} (A + tB)$$

şeklinde elde etmiş oluruz. Buna göre N Gauss dönüşümünün $\triangle N$ Laplasyanı

$$\triangle N = -\varepsilon_4 \left[\frac{1}{q} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial N}{\partial s} \right] - \varepsilon_2 \left[\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial N}{\partial t} \right]$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi bu eşitlikteki gerekli türev hesaplamalarını yapalım.

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \varepsilon_4 (2u't + v')$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \varepsilon_4 (2u''t + v'')$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon_4 (2\varepsilon_3 t + 2u) = 2\varepsilon_4 (\varepsilon_3 t + u)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{2} q^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial q}{\partial t} (A + tB) + q^{-\frac{1}{2}} B$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -\frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial q}{\partial s}(A+tB) + q^{-\frac{1}{2}}(A'+tB')$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} &= \left(\frac{3}{4}q^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right)^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \right) (A+tB) - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial q}{\partial s} (A'+tB') \\ &\quad + q^{-\frac{1}{2}}(A''+tB'') - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial q}{\partial s} (A'+tB')\end{aligned}$$

veya

$$\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} = \left(\frac{3}{4}q^{-\frac{5}{2}} (2u't + v')^2 - \frac{1}{2}q^{-\frac{3}{2}} \varepsilon_4 (2u''t + v'') \right) (A+tB) + q^{-\frac{1}{2}}(A''+tB'') - q^{-\frac{3}{2}} \varepsilon_4 (2u't + v')(A'+tB')$$

bulunur. Bulunan bu değerler ΔN de yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\Delta N &= \left\{ -\varepsilon_4 q^{-3} (2u't + v')^2 + \frac{1}{2}q^{-2} (2u''t + v'') - 2\varepsilon_2 q^{-2} (\varepsilon_3 t + u)^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 q^{-1} \right\} N \\ &\quad + \frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}} \left\{ -2\varepsilon_4 q (A'' + tB'') + 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 q (-\varepsilon_3 A + uB) + 3(2u't + v')(A' + tB') \right\}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değerler

$$\Delta N - \varepsilon < \Delta N, N > N = 0$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\left\{ -\varepsilon_4 q^{-3} (2u't + v')^2 + \frac{1}{2}q^{-2} (2u''t + v'') - 2\varepsilon_2 q^{-2} (\varepsilon_3 t + u)^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 q^{-1} \right\} N \\ &+ \frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}} \left\{ -2\varepsilon_4 q (A'' + tB'') + 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 q (-\varepsilon_3 A + uB) + 3(2u't + v')(A' + tB') \right\} \\ &- \varepsilon \left\langle \left\{ -\varepsilon_4 q^{-3} (2u't + v')^2 + \frac{1}{2}q^{-2} (2u''t + v'') - 2\varepsilon_2 q^{-2} (\varepsilon_3 t + u)^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 q^{-1} \right\} N \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}q^{-\frac{5}{2}} \left\{ -2\varepsilon_4 q (A'' + tB'') + 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 q (-\varepsilon_3 A + uB) + 3(2u't + v')(A' + tB') \right\}, q^{-1} (A + tB) \right\rangle N \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $q^{-\frac{5}{2}}$ fonksiyonunun katsayısı 0 olması gerekir. Bu kısım t nin polinomu olarak yazılıp katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemlere sahip oluruz.

$$B'' - \varepsilon \varepsilon_4 \varepsilon_3 < B'', B > B = 0 \quad (3.0.12)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}&A'' + (\varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon \varepsilon_4 \varepsilon_3 < B'', B >) A + 4\varepsilon \varepsilon_3 B'' - 3\varepsilon \varepsilon_3 u' B' - \\ &(\varepsilon_2 u + \varepsilon \varepsilon_3 \varepsilon_4 < A'', B > + \varepsilon \varepsilon_3 \varepsilon_4 < A, B'' > + 2\varepsilon \varepsilon_4 u < B, B'' >) B = 0\end{aligned}$$

olur. Ortak paranteze alırsak

$$\begin{aligned}
& 8\varepsilon\varepsilon_4\varepsilon_3A'' - 6\varepsilon\varepsilon_4\varepsilon_3u'A' + (8\varepsilon_4\varepsilon_2u - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A'', B \rangle - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A, B'' \rangle - 4\varepsilon u\langle B, B'' \rangle)A \\
& + (4\varepsilon_4\varepsilon_3v + 8\varepsilon_4u^2)B'' - \varepsilon(12\varepsilon_4uu'' + 3\varepsilon_4\varepsilon_3v')B' \\
& - (8\varepsilon_2\varepsilon_3u^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3u^2 - 2\varepsilon v + 6\varepsilon\varepsilon_2(u')^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A, A'' \rangle + 4\varepsilon u\langle A'', B \rangle \\
& + 4\varepsilon u\langle A, B'' \rangle + 2\varepsilon v\langle B'', B \rangle)B = 0
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_4(4\varepsilon_3v + 8u^2)A'' - \varepsilon\varepsilon_4(12u.u'' + 3\varepsilon_3v')A' + (4\varepsilon_2\varepsilon_4v + 8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4u^2 + 2\varepsilon v - 2\varepsilon\varepsilon_3u^2 \\
& - 6\varepsilon\varepsilon_2(u')^2 - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A, A'' \rangle - 4\varepsilon u\langle A'', B \rangle - 4\varepsilon u\langle A, B'' \rangle \\
& - 2\varepsilon v\langle B'', B \rangle)A + 8\varepsilon_4uvB'' - \varepsilon\varepsilon_4(6u'v + 6uv')B' - (4\varepsilon_4\varepsilon_3\varepsilon_2uv + 8\varepsilon_4\varepsilon_2u^3 - 4\varepsilon\varepsilon_3uv + 4\varepsilon u^3 \\
& + 6\varepsilon\varepsilon_2u'v' + 4\varepsilon u\langle A, A'' \rangle + 2\varepsilon v\langle A, B'' \rangle)B = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 16\varepsilon_4uvA'' - \varepsilon\varepsilon_4(12u'v + 12uv')A' + (16\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4uv + 8\varepsilon\varepsilon_3uv \\
& - 8\varepsilon u^3 - 12\varepsilon\varepsilon_2u'v' - 8uv\langle A, A'' \rangle - 4\varepsilon v\langle A, B'' \rangle)A \\
& + 4\varepsilon_4v^2B'' - 6\varepsilon\varepsilon_4vv''B' - (16\varepsilon_2\varepsilon_4u^2v - 4\varepsilon\varepsilon_3v^2 + 4\varepsilon u^2v \\
& + 3\varepsilon\varepsilon_2(v')^2 + 4\varepsilon v\langle A, A'' \rangle) = 0
\end{aligned}$$

olur. Burada düzenlemeler yapılırsa

$$4\varepsilon_4v^2A'' - 6\varepsilon\varepsilon_4vv''A' + (4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4v^2 + 4\varepsilon\varepsilon_3v^2 - 4\varepsilon u^2v - 3\varepsilon\varepsilon_2(v')^2 - 4\varepsilon v\langle A, A'' \rangle)A - 4\varepsilon_2\varepsilon_4uv^2B = 0$$

bulunur. (3.0.12) den

$$\langle B'', B' \rangle = 0$$

dır. Bu eşitlikten c bir sabit olmak üzere

$$\langle B', B' \rangle = c \quad (3.0.13)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $\langle B', B \rangle = 0$ olduğundan s ye göre türevi alınırsa

$$\langle B'', B \rangle + \langle B', B' \rangle = 0$$

$$\langle B'', B \rangle = -\langle B', B' \rangle$$

$$\langle B'', B \rangle = -c \quad (3.0.14)$$

olur. (3.0.12) den

$$B'' = -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4cB \quad (3.0.15)$$

yazılabilir.

$$\langle A, B'' \rangle = \varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4cu \quad (3.0.16)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak (3.0.13), (3.0.14), (3.0.15) ve (3.0.16) dan

$$((v')^2 - 4\varepsilon_4(u')^2v)A + (8u(u')^2v - 4\varepsilon_3u'vv')B = 0 \quad (3.0.17)$$

$$(4u'vv' - 2u(v')^2)A + (v(v')^2 - 4\varepsilon_3(u')^2v^2)B = 0 \quad (3.0.18)$$

eşitlikleri elde edilir. İlk olarak A ve B nin bazı $s \in I$ için lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Buna göre $\alpha' - k_1\beta' = k_2\beta$ olacak şekilde k_1, k_2 sabitleri vardır. α ve β nin özelliklerini kullanarak $u = \varepsilon_3k_1$ ve $v = \varepsilon_3k_1^2$ elde ederiz. Bu $q \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle A ve B bütün s ler için lineer bağımsızdırlar. (3.0.17) ve (3.0.18) den

$$(v')^2 - 4\varepsilon_3(u')^2v = 0 \quad (3.0.19)$$

$$u'v(2uu' - \varepsilon_3v') = 0 \quad (3.0.20)$$

$$2u'vv' - u(v')^2 = 0 \quad (3.0.21)$$

$$v(v')^2 - 4\varepsilon_3(u')^2v^2 = 0 \quad (3.0.22)$$

olduğunu biliyoruz. Farz edelimki $U = \{p \in M \mid u'(p) \neq 0\}$ açık alt kümesi boş olmasın. Yani en az bir $p \in M$ için $u'(p) \neq 0$ olsun. (3.0.20) eşitliğinden $v' = 2\varepsilon_3uu'$ olduğunu görürüz ve bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa $u^2 = \varepsilon_3v$ olur. Bu da bir çelişkidir. Bu durumda $U = \emptyset$ dir. Diğer bir ifadeyle $u' = 0$ dır. Buna ilave olarak (3.0.20) den biz $v' = 0$ olduğunu biliyoruz. (3.0.15) denkleminin β ile iç çarpımı alınırsa $\langle \beta'' \wedge \beta', \beta \rangle = 0$ elde edilir. Bu da $\beta = k_1\beta' + k_2\beta''$ olacak şekilde k_1 ve k_2 fonksiyonlarının olması demektir. Bu β ve β'' nün paralel olduğunu gösterir. Ayrıca $u' = 0$ ve $v' = 0$ dan

$$\langle \alpha'', \beta' \rangle = 0, \quad \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0 \quad (3.0.23)$$

elde edilir. α', β, β' ve α'' vektör alanları için

$$\alpha'' = k_1\alpha' + k_2\beta + k_3\beta'$$

olacak şekilde k_1, k_2 ve k_3 fonksiyonları vardır. Buradan (3.0.23) kullanılarak α'' ve β ların paralel olduğunu görebiliriz. Diğer yandan M yüzeyinin H ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_4 q^{-\frac{3}{2}} < (\alpha' + t\beta') \wedge \beta, \alpha'' + t\beta'' >$$

dir ve β'' , α'' ve β birbirine paralel olduklarından H nin yok edildiği yani sıfır olduğu kolaylıkla ispat edilir. Buna göre M , $\mathbb{E}_1^3$ de minimal yüzeydir.

Sonuç olarak $\mathbb{E}_1^3$ deki minimal regle yüzeyi sınıflandırma teoremi M_+^1 tipindeki yüzeyler birinci çeşit helisoidin, M_-^1 tipindeki yüzeyler ikinci çeşit helisoidin ve M_+^3 tipindeki yüzeyler üçüncü çeşit helisoidlerin açık parçalarıdır. Bunun terside doğrudur.

2. Durum:

M silindirik olmayan regle yüzeyi, α dayanak eğrisinin ve β doğrultman vektörünün causal karakterine göre ya M_+^2 veya M_-^2 tipindedir. Burada M regle yüzeyi aşağıdaki gibi parametrelendirilir.

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R}$$

şeklinde parametrelendirilsin öyleki $< \beta, \beta > = 1$, $< \alpha', \beta > = 0$, $< \alpha', \alpha' > = \varepsilon_1(\pm 1)$ ve β' null dır. M yüzeyinin N Gauss dönüşümünü

$$N = \frac{1}{\|(\alpha' + t\beta') \wedge \beta\|} (\alpha' + t\beta') \wedge \beta$$

şeklinde elde edebiliriz. q ve u fonksiyonlarını yerlerine yazarsak

$$q = \|x_s\|^2 = \varepsilon_4 < x_s, x_s > = \varepsilon_4(2ut + \varepsilon_1), \quad u = < \alpha', \beta' >, \quad N = q^{-\frac{1}{2}}(A + tB) \quad (3.0.24)$$

bulunur. $A = \alpha' \wedge \beta$, $B = \beta' \wedge \beta$ ve $q > 0$ alırsak. M nin Laplasyanı

$$\Delta = -\varepsilon_4 \left[\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \right] - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (3.0.25)$$

olmak üzere (3.0.24) ve (3.0.25) kullanılarak direkt toplam yardımıyla N Gauss dönüşümünün Laplasyanı

$$\Delta N = (-2u^2 q^{-2} + u'' t q^{-2} - 4\varepsilon_4 (u')^2 t^2 q^{-3}) N + q^{-\frac{5}{2}} \{ \varepsilon_4 u \cdot B q + 3u' t (A' + tB') - \varepsilon_4 (A'' + tB'') q \} \quad (3.0.26)$$

elde ederiz. Farz edelim ki M regle yüzeyi noktasal 1-tipindeki Gauss dönüşümüne sahip yani $\Delta N = \lambda N$ olsun. Daha önce

$$\Delta N - \varepsilon < \Delta N, N > N = 0$$

eşitliğini kullanarak elde ettiğimiz ifade de $q^{-\frac{5}{2}}$ fonksiyonunun katsayısının sıfıra eşit olması gerektiğini görmüştük. Bu ifedeyi t nin polinomu olarak yazdıktan sonra katsayıları sıfıra eşitlenmesi durumunda aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\varepsilon u < B, B'' > B = 0 \quad (3.0.27)$$

olur. Burada verilenleri yerlerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} 2\varepsilon u < B, B'' > A - 4\varepsilon_4 u^2 B'' + 6\varepsilon_4 u u' B' + \\ \varepsilon (3(u')^2 + 2u < A'', B > + 2u < A, B'' > + \varepsilon_1 < B, B'' >) B = 0 \end{aligned} \quad (3.0.28)$$

elde edilir. Skaler çarpımın özelliklerinden

$$\begin{aligned} 4\varepsilon_4 u^2 A'' - 6\varepsilon_4 u u' A' - \varepsilon (3(u')^2 + 2u < A'', B > + 2u < A, B'' > + \varepsilon_1 < B, B'' > A) + \\ 4\varepsilon_1 \varepsilon_4 u B'' - (4\varepsilon_4 u^3 + 2\varepsilon u < A, A'' > + \varepsilon \varepsilon_1 < A'', B > + \varepsilon \varepsilon_1 < A, B'' >) B = 0 \end{aligned} \quad (3.0.29)$$

veya

$$\begin{aligned} 4\varepsilon_1 \varepsilon_4 A'' - 3\varepsilon_1 \varepsilon_4 u' A' - \varepsilon (2u^3 + 2u < A, A'' > + \varepsilon_1 < A'', B > + \varepsilon_1 < A, B'' >) A \\ + \varepsilon_4 B'' - (4\varepsilon_1 \varepsilon_4 u^2 + \varepsilon \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon \varepsilon_1 < A, A'' >) B = 0 \end{aligned} \quad (3.0.30)$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$A'' - \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_4 (u^2 + < A, A'' >) A - u B = 0 \quad (3.0.31)$$

elde edilir. B nin her yerde sıfırdan farklı olduğunu gösterelim. Eğer B bazı s noktasında sıfırsa $B = \beta \wedge \beta'$ olduğundan β ile β' paralel olur. Bu da β ve β' nün tanımıyla çelişir. Bir alt küme $U = \{p \in M \mid < B, B'' > (p) \neq 0\}$ göz önüne alalım. Eğer U kümesi boş değil ise, (3.0.27) den U üzerinde $u = 0$ elde ederiz. (3.0.28) den U üzerinde $\langle B, B'' \rangle B = 0$ olur. Bu bir çelişkidir o halde U boş kümedir. Buradan

$$\langle B, B'' \rangle = 0 \quad (3.0.32)$$

olur. Sonuç olarak (3.0.27), (3.0.28), (3.0.29), (3.0.30), (3.0.31) ve (3.0.32) eşitliklerinden

$$2\varepsilon_1 u (u')^2 A - (u')^2 B = 0$$

ifadesini elde edebiliriz. Şimdi farz edelimki A ve B en az bir $s \in I$ için lineer bağımlı olsun. Bu durumda $\alpha' = k_1 \beta' + k_2 \beta$ olacak şekilde k_1 ve k_2 sabitleri vardır. α ve β nin özelliklerini kullanarak $\alpha' = k_1 \beta'$ çelişkisini elde ederiz. Böylece A ve B ler her $s \in I$ için lineer

bağımsızdır. $\langle B, B'' \rangle = 0$ ve $\langle B, B' \rangle = 0$ olduğundan $\langle B, B'' \rangle = \langle B'', B'' \rangle = 0$ olur. Buradan B'' lightlike veya sıfır vektörüdür. Eğer B'' lightlike vektör ise B' da lightlike olduğundan $B'' = kB'$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. O zaman $\beta = F(s)C$ olacak şekilde M üzerinde $F(s)$ pozitif diferansiyellenebilir fonksiyonu ve E_1^3 de bir $C = (c_1, c_2, c_3)$ sabit lightlike vektörü vardır. Fakat bu durumda $\langle \beta, \beta \rangle = 1$ şartını sağlayan β vektörü yoktur. Buradan B'' sıfır olmak zorundadır. Önceki durumda, eğer α', α'', β ve β' lerin arasındaki ilişkileri incelersek α'' ve β nin paralel olduklarını görürüz. Birinci durumdakine benzer olarak α ve β ların karakterleri H ortalama eğrilik vektörünü her yerde yok ediyor yani $H = 0$ oluyor. Buradan M_+^2 (M_-^2) tipindeki regle yüzeyler spacelike (timelike) durumunda 2. çeşit enneper yüzeyinin eşleniğidir. Birinci duruma benzer olarak bu ifadenin terside sağlanır.

Teorem 3.0.3. *M , 3-boyutlu Minkowski uzayında noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip bir null scroll olsun. Bu durumda M aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır.*

- i) M bir Lorentz düzlemdir.
- ii) B' bir null vektör olmak üzere M bir flat B-Scroll dur.
- iii) B' bir non-null olmak üzere M bir flat olmayan B-Scroll dur [20].

İspat: E_1^3 Minkowski uzayında α taban eğrisi null bir eğri ve $B = B(s)$, α boyunca null bir vektör alanı olsun.

$$x(s, t) = \alpha(s) + tB(s)$$

parametrik denklemi ile verilen M null scrollu için

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0, \quad \langle B, B \rangle = 0 \quad \langle \alpha', B \rangle = 1$$

şeklindedir. Yüzeyin

$$x_s = \alpha' + tB', \quad x_t = B$$

koordinat vektörleri yüzey üzerinde bir baz alanı belirler. Yani $\{x_s, x_t\}$ M yüzeyi üzerinde bir doğal çatı belirtir. Yüzey üzerinde q, u ve v diferansiyellenebilir fonksiyonlarını

$$q = \|x_s\|^2 = \langle x_s, x_s \rangle, \quad u = \langle \alpha', B' \rangle, \quad v = \langle B', B' \rangle$$

şeklinde tanımlayalım. Doğrudan hesaplamayla $q = t^2v + 2tu$ olduğu görülür. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri

$$g_{ss} = t^2v + 2tu, \quad g_{st} = g_{ts} = 1, \quad g_{tt} = 0$$

eşitlikleri kullanılarak

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2v+2tu} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$g^{ss} = 0, g_{st} = g_{ts} = 1, g^{tt} = -(t^2v + 2tu)$$

ve

$$|\mathcal{G}| = \det(g_{ij}) = -1$$

elde edilir. Yüzeyin x_s ve x_t vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} x_s \wedge x_t &= (\alpha'(s) + tB'(s)) \wedge B(s) \\ &= \alpha'(s) \wedge B(s) + t(B'(s) \wedge B(s)) \end{aligned}$$

olur. Burada $C = \alpha' \wedge B$ ve $D = B' \wedge B$ denildiğinde

$$x_s \wedge x_t = C + tD$$

olarak yazılır. Yüzey üzerinde

$$\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle = \langle x_s, x_t \rangle^2 - \langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

olduğundan yüzeyin normali uzaysaldır. Dolayısıyla, M yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{(\alpha' + tB') \wedge B}{\sqrt{\langle \alpha' + tB', B \rangle}} = \frac{(\alpha' \wedge B) + t(B' \wedge B)}{\sqrt{\langle \alpha', B \rangle}} \\ &= \frac{C + tD}{1} = C + tD \end{aligned} \quad (3.0.33)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca M yüzeyinin Laplasyanı

$$\Delta = -2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.0.34)$$

şeklinde elde edilir. N dönüşümünün Laplasyan operatörü altındaki görüntüsü

$$\Delta N = -2D' + 2(vt + u)D \quad (3.0.35)$$

olarak bulunur. M yüzeyinin noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu kabul edelim.

O halde (3.0.33) eşitliği kullanılarak

$$\Delta N = fN = f(C + tD) = fC + tfD$$

ve (3.0.35) göz önüne alınırsa

$$2D' + (ft - 2u - 2vt)D + fC = 0$$

olur ve bu ifadenin sırasıyla C' ve D' ile iç çarpımı alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$v' + fvt - 2v^2t = 0 \quad (3.0.36)$$

$$2v^2 - fv = 0 \quad (3.0.37)$$

denklemleri elde edilir. Şimdi $U = \{p \in M \mid v(p) \neq 0\}$ açık kümesini göz önüne alalım ve bu kümenin boş kümeden farklı olduğunu kabul edelim. O halde (3.0.37) ifadesi kullanılarak U kümesinin bir $V \subset U$ üzerinde $f = 2v$ bulunur ve (3.0.36) ifadesi kullanılarak v nin sabit olduğu görülür. Bu da $v' = 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, süreklilik göz önüne alınırsa U , M uzayının tümünden ibaret olmalıdır yani $U = M$ olmalıdır. Bu durumda E_1^3 uzayında

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0, \quad \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle \alpha', B \rangle = 1, \quad \langle \alpha', C \rangle = \langle B, C \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1$$

$$\alpha'' = -uB + \langle \alpha'', \alpha' \wedge B \rangle C$$

$$B' = u\alpha' + \langle \alpha' \wedge B, B' \rangle C$$

$$C' = -\langle \alpha' \wedge B, B' \rangle \alpha' - \langle \alpha'', \alpha' \wedge B \rangle B$$

olacak şekilde $\{\alpha', B, C\}$ null çatısı vardır. Eğer v ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} v &= \langle B', B' \rangle = u \langle B, B' \rangle + \langle \alpha' \wedge B, B' \rangle \langle C, B' \rangle \\ &= \langle \alpha' \wedge B, B' \rangle^2 \end{aligned}$$

bulunur ve v nin sabit olmasından dolayı $\langle \alpha' \wedge B, B' \rangle$ sabittir. Ayrıca $u = 0$ olacak şekilde α' ifadesinin bir değişken dönüşümü vardır. Böylece M bir B-scroll dur.

$v = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde, B' sıfır ya da null bir vektördür. B' vektörünün sıfır vektör olduğunu kabul edelim yani B sabit bir vektör olsun. Dolayısıyla $D = B' \wedge B$ ve (3.0.35) den $\Delta N = 0$ olur. Sonuç olarak M bir Lorentz düzlemidir.

B' vektörünün null vektör olduğunu kabul edelim. O halde B' ve B vektörleri lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $D = B' \wedge B = 0$ olur. (3.0.35) eşitliğinden $\Delta G = 0$ olur.

M yüzeyinin H ortalama eğriliğini ve K Gauss eğriliğini hesaplamak için önce yüzeyin şekil operatörlerini hesaplayalım. Yüzeyin $\{x_s, x_t\}$ teğet bazına göre

$$k(s)B = a_{11}x_s + a_{21}x_t$$

yazılır ve

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = k(s)$$

bulunur, burada $k(s) = \langle \alpha'', \alpha' \wedge B \rangle$ dir. Benzer şekilde

$$a_{12}x_s + a_{22}x_t = 0$$

yazılır ve

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0$$

bulunur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan da $H = 0$ ve $K = 0$ olur. O halde, M bir flat B-scroll dur. Şimdi $v \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde, B' null bir vektör değildir. Yüzeyin $\{x_s, x_t\}$ teğet bazına göre

$$\sqrt{v}\alpha' + k(s)B + t\nu C = a_{11}x_s + a_{21}x_t$$

yazılır ve

$$a_{11} = \sqrt{v}, \quad a_{21} = k(s)$$

bulunur, burada $k(s) = \langle \alpha'', \alpha' \wedge B \rangle$ dir. Benzer şekilde

$$-D = a_{12}x_s + a_{22}x_t$$

yazılır ve

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = \sqrt{v}$$

bulunur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ k(s) & \sqrt{v} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan da $H = \sqrt{v}$ ve $K = v \neq 0$ olur. O halde, M bir flat olmayan B-scroll dur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

3.0.2 1-Tipli Gauss Dönüşümüne Sahip Regle Yüzey Örnekleri

Örnek 3.0.1. $|a| > |b|$ olmak üzere a ve b sabitleri için $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyini

$$x(s, t) = (-bs, (t+a)\cos s, (t+a)\sin s) \quad (3.0.38)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $t < \min(-a-b, -a+b)$ ve $t > \max(-a-b, -a+b)$ dir. Bu regle yüzeyi $\mathbb{E}_1^3$ de M_+^1 tipinde silindirik olmayan bir regle yüzeydir. Bu yüzeye **1. çeşit helisoid** denir ve bu yüzey spacelikedir. Bu yüzeyin Gauss dönüşümünü ve Laplasiyanını hesaplayalım.

(3.0.38) den

$$x_s = (-b, -(t+a) \sin s, (t+a) \cos s)$$

$$x_t = (0, \cos s, \sin s)$$

ve vektörel çarpım hesaplanırsa

$$\begin{aligned} x_s \wedge x_t &= (-b, -(t+a) \sin s, (t+a) \cos s) \times (0, \cos s, \sin s) \\ &= ((t+a), b \sin s, -b \cos s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\ &= \sqrt{|-(t+a)^2 + b^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s|} \\ &= \sqrt{|-(t+a)^2 + b^2|} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $t > \max(-a-b, -a+b)$ veya $t > -a+b$, $(t+a) > b$ olduğundan $(t+a)^2 > b^2$ dır. Böylece N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}} ((t+a), b \sin s, -b \cos s)$$

olarak elde edilir. $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathcal{G}|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{i1} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{i2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle = -b^2 + (t+a)^2$$

$$g_{12} = \langle x_s, x_t \rangle = 0$$

$$g_{21} = \langle x_t, x_s \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

dır ve

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+a)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin determinanı

$$|\mathcal{G}| = \begin{vmatrix} (t+a)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = (t+a)^2 - b^2$$

dır. Buna göre (g_{ij}) matrisinin tersi

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(t+a)^2 - b^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $g^{11} = \frac{1}{(t+a)^2 - b^2}$, $g^{22} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ olarak bulunur. O halde M üzerindeki Laplasyon

$$\Delta = -\frac{1}{(t+a)^2 - b^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + (t+a) \frac{\partial}{\partial t} + ((t+a)^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial t^2} \right]$$

olarak ifade edilir. Böylece

$$\Delta N = -\frac{1}{(t+a)^2 - b^2} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} + (t+a) \frac{\partial N}{\partial t} + ((t+a)^2 - b^2) \frac{\partial N}{\partial t^2} \right]$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}} (0, b \cos s, b \sin s) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} &= \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}} (0, -b \sin s, b \cos s) \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{1}{((t+a)^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} (-b^2, -b(t+a) \sin s, b(t+a) \cos s) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= \frac{1}{((t+a)^2 - b^2)^{\frac{5}{2}}} (-3(t+a)b^2, -2b(t+a)^2 \sin s + b^3 \sin s, -2b(t+a)^2 \cos s - b^3 \cos s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{-2b^2}{((t+a)^2 - b^2)^{\frac{5}{2}}} (t+a, b \sin s, -b \cos s) \\ &= \frac{-2b^2}{((t+a)^2 - b^2)^2} N \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tipinden olması demektir [20].

Örnek 3.0.2. $|b| > |a|$ olmak üzere a ve b sabitleri için $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyini

$$x(s, t) = ((t+a) \sin hs, (t+a) \cos hs, -bs) \quad (3.0.39)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ dir. Bu yüzey M_+^1 tipinden dir ve 2. çeşit helisoid dir.

(3.0.39) dan

$$\begin{aligned}x_s &= ((t+a) \cos hs, (t+a) \sin hs, -b) \\x_t &= (\sin hs, \cos hs, 0)\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}x_s \wedge x_t &= ((t+a) \cos hs, (t+a) \sin hs, -b) \wedge (\sin hs, \cos hs, 0) \\&= (-b \cos hs, -b \sin hs, (t+a))\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\&= \sqrt{|(t+a)^2 + b^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s|} \\&= \sqrt{|(t+a)^2 - b^2|}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ olduğundan $b^2 > (t+a)^2$ bulunur. Böylece N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}} (-b \cos hs, -b \sin hs, (t+a))$$

olarak elde edilir. Önceki örnekte yapılanlara benzer işlemlerle bu yüzey için

$$\triangle N = \frac{-2b^2}{(b^2 - (t+a)^2)^2} N$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tip den olması demektir [20].

Örnek 3.0.3. $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyi

$$x(s, t) = \left(\frac{1}{6}s^3 + ts, -\frac{1}{6}s^3 - ts + s, \frac{1}{2}s^2 + t \right) \quad (3.0.40)$$

olarak tanımlansın. Bu M_+^2 tipinde bir yüzey olup 2. çeşit Enneper yüzeyin eşleniğidir.

(3.0.40) dan

$$\begin{aligned}x_s &= \left(\frac{1}{2}s^2 + t, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s \right) \\x_t &= (s, -s, 1)\end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} x_s \wedge x_t &= \left(\frac{1}{2}s^2 + t, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s \right) \wedge (s, -s, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}s^2 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, -s \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\ &= \sqrt{|2t - 1|} \end{aligned}$$

bulunur. $t < \frac{1}{2}$ olduğundan N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \left(-\frac{1}{2}s^2 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, -s \right)$$

olarak elde edilir. $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathcal{G}|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{i1} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{i2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

dır. Ayrıca (3.0.40) dan

$$g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle = 1 - 2t$$

$$g_{12} = \langle x_s, x_t \rangle = 0$$

$$g_{21} = \langle x_t, x_s \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

olur. Buna göre metriğin matrisi

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır ve determinantı ise

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}| &= \begin{vmatrix} 1-2t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1-2t \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (g_{ij}) matrisinin tersi

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $g^{11} = \frac{1}{1-2t}$, $g^{22} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ olur buna göre bu yüzey üzerindeki Laplasyon

$$\begin{aligned}\Delta &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{1-2t} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial t} + (1-2t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

dır. Δ , N ye uygulanırsa

$$\Delta N = -\frac{1}{1-2t} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{\partial N}{\partial t} + (1-2t) \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right)$$

olur. ΔN yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}(-s, s, -1) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}(-1, 1, 0) \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -(1-2t)^{-\frac{3}{2}} \left(t + \frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s \right) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= -(1-2t)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}s^2 + t + 1, -\frac{3}{2}s^2 - t + 2, 3s \right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta N &= -\frac{1}{(1-2t)^{\frac{5}{2}}} \left((2t-1)(-1, 1, 0) - \left(t + \frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s \right) + \left(\frac{3}{2}s^2 + t + 1, -\frac{3}{2}s^2 - t + 2, 3s \right) \right) \\ &= -\frac{2}{(1-2t)^{\frac{5}{2}}} \left(-\frac{1}{2}s^2 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, -s \right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\Delta N = \frac{-2}{(-2t+1)^2} N, \quad t < \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tip den olması demektir [20].

Örnek 3.0.4. $|a| < |b|$ olmak üzere a ve b sabitleri için $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyini

$$x(s, t) = (-bs, (t+a) \cos s, (t+a) \sin s) \quad (3.0.41)$$

olarak tanımlansın. Burada $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ dir . Bu yüzey M_-^1 tipinde silindirik olmayan regle yüzey olup 1. çeşit helisoid dir.

(3.0.41) den

$$\begin{aligned}x_s &= (-b, -(t+a) \sin s, (t+a) \cos s) \\ x_t &= (0, \cos s, \sin s)\end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} x_s \times x_t &= (-b, -(t+a) \sin s, (t+a) \cos s) \times (0, \cos s, \sin s) \\ &= ((t+a), b \sin s, -b \cos s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\ &= \sqrt{|-(t+a)^2 + b^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s|} \\ &= \sqrt{|-(t+a)^2 + b^2|} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ olduğundan $(t+a)^2 < b^2$ bulunur. Böylece N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}} ((t+a), b \sin s, -b \cos s)$$

olarak elde edilir. $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathcal{G}|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{i1} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{i2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

dır. Ayrıca (3.0.41) den

$$g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle = (t+a)^2 - b^2$$

$$g_{12} = \langle x_s, x_t \rangle = 0$$

$$g_{21} = \langle x_t, x_s \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

olur. Buna göre metriğin matrisi

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+a)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır ve determinantı ise

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}| &= \begin{vmatrix} (t+a)^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (t+a)^2 - b^2 \end{aligned}$$

şekinde bulunur. (g_{ij}) matrisinin tersi

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(t+a)^2 - b^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $g^{11} = \frac{1}{(t+a)^2 - b^2}$, $g^{22} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ olur. Buna göre bu yüzey üzerindeki Laplasyon

$$\Delta = -\frac{1}{b^2 - (t+a)^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - (t+a) \frac{\partial}{\partial t} + (b^2 - (t+a)^2) \frac{\partial}{\partial t^2} \right]$$

dır. Δ , N ye uygulanırsa

$$\Delta N = -\frac{1}{b^2 - (t+a)^2} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - (t+a) \frac{\partial N}{\partial t} + (b^2 - (t+a)^2) \frac{\partial N}{\partial t^2} \right]$$

olur. ΔN yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}} (0, b \cos s, b \sin s) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}} (0, -b \sin s, b \cos s) \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{1}{(b^2 - (t+a)^2)^{\frac{3}{2}}} (-b^2, -b(t+a) \sin s, b(t+a) \cos s) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= \frac{1}{(b^2 - (t+a)^2)^{\frac{5}{2}}} (-3(t+a)b^2, -2b(t+a)^2 \sin s + b^3 \sin s, -2b(t+a)^2 \cos s - b^3 \cos s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{-2b^2}{(b^2 - (t+a)^2)^{\frac{5}{2}}} (t+a, b \sin s, -b \cos s) \\ &= \frac{-2b^2}{(b^2 - (t+a)^2)^2} N \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tip den olması demektir [20].

Örnek 3.0.5. $0 < |b| < |a|$ olmak üzere a ve b sabitleri için $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyini

$$x(s, t) = ((t+a) \sin hs, (t+a) \cos hs, -bs) \quad (3.0.42)$$

olarak tanımlansın. Burada $t < \min(-a-b, -a+b)$ ya da $t > \max(-a-b, -a+b)$ dir. Bu yüzey M_-^1 tipinde silindirik olmayan regle yüzey olup 2. çeşit helisoid dir.

(3.0.42) den

$$\begin{aligned} x_s &= ((t+a) \cos hs, (t+a) \sin hs, -b) \\ x_t &= (\sin hs, \cos hs, 0) \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} x_s \wedge x_t &= ((t+a) \cos hs, (t+a) \sin hs, -b) \times (\sin hs, \cos hs, 0) \\ &= (-b \cos hs, -b \sin hs, (t+a)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\ &= \sqrt{|(t+a)^2 + b^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s|} \\ &= \sqrt{|(t+a)^2 - b^2|} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $t < \min(-a-b, -a+b)$ ya da $t > \max(-a-b, -a+b)$ olduğundan $(t+a)^2 > b^2$ bulunur. Böylece N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}} (-b \cos hs, -b \sin hs, (t+a))$$

olarak elde edilir. Önceki örnekte yapılanlara benzer işlemlerle bu yüzey için

$$\Delta N = \frac{-2b^2}{\left((t+a)^2 - b^2\right)^2} N$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tip den olması demektir [20].

Örnek 3.0.6. $|a| < |b|$ olmak üzere a ve b sabitleri için $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyini

$$x(s, t) = ((t+a) \cos hs, bs, (t+a) \sin hs) \quad (3.0.43)$$

olarak tanımlansın. Burada $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ dir. Bu M_+^3 tipinde silindirik olmayan regle yüzey olup 3. çeşit zamansal helicoid dir.

(3.0.43) den

$$x_s = ((t+a) \sin hs, b, (t+a) \cos hs)$$

$$x_t = (\cos hs, 0, \sin hs)$$

dir ve

$$\begin{aligned} x_s \wedge x_t &= ((t+a) \sin hs, b, (t+a) \cos hs) \times (\cos hs, 0, \sin hs) \\ &= (-b \sin hs, (t+a), -b \cos hs) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\ &= \sqrt{|(t+a)^2 + b^2 \sin^2 h s - b^2 \cos^2 h s|} \\ &= \sqrt{|(t+a)^2 - b^2|}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ olduğundan $b^2 > (t+a)^2$ bulunur. Böylece N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}} (-b \sin h s, (t+a), -b \cos h s)$$

olarak elde edilir. Önceki örnekte yapılanlara benzer işlemlerle bu yüzey için

$$\Delta N = \frac{2b^2}{(b^2 - (t+a)^2)^2} N$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tip den olması demektir [20].

Örnek 3.0.7. $\mathbb{E}_1^3$ de M yüzeyini

$$x(s, t) = \left(\frac{1}{6}s^3 + ts + s, -\frac{1}{6}s^3 - ts, \frac{1}{2}s^2 + t \right) \quad (3.0.44)$$

olarak tanımlansın. Bu M_+^2 tipinde silindirik olmayan regle yüzey olup 2. çeşit zamansal Enneper yüzeyin eşleniğidir.

(3.0.44) den

$$\begin{aligned}x_s &= \left(\frac{1}{2}s^2 + t + 1, -\frac{1}{2}s^2 - t, s \right) \\ x_t &= (s, -s, 1)\end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned}x_s \wedge x_t &= \left(\frac{1}{2}s^2 + t + 1, -\frac{1}{2}s^2 - t, s \right) \times (s, -s, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}s^2 + t, \frac{1}{2}s^2 - t - 1, -s \right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\|x_s \wedge x_t\| &= \sqrt{|\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle|} \\ &= \sqrt{|2t + 1|}\end{aligned}$$

bulunur. $t > -\frac{1}{2}$ olduğundan N Gauss dönüşümü

$$N = \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \left(-\frac{1}{2}s^2 + t, \frac{1}{2}s^2 - t - 1, -s \right)$$

olarak elde edilir. $k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathcal{G}|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{i1} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{i2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

dır. Ayrıca (3.0.44) den

$$g_{11} = \langle x_s, x_s \rangle = -1 - 2t$$

$$g_{12} = \langle x_s, x_t \rangle = 0$$

$$g_{21} = \langle x_t, x_s \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

olur. Buna göre metriğin matrisi

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır ve determinantı ise

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}| &= \begin{vmatrix} -1-2t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 2t \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (g_{ij}) matrisinin tersi

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $g^{11} = -\frac{1}{1+2t}$, $g^{22} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$ olur. Buna göre bu yüzey üzerindeki Laplasyan

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(k^{\frac{1}{2}} g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1} + k^{\frac{1}{2}} g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{1+2t} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+2t}} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{1+2t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \\ &= -\frac{1}{1+2t} \left(-\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial t} + (1+2t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

dır. Δ , N uygulanırsa

$$\Delta N = -\frac{1}{1+2t} \left(-\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} + \frac{\partial N}{\partial t} + (1+2t) \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right)$$

olur. ΔN yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{1+2t}}(-s, s, -1) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} &= \frac{1}{\sqrt{1+2t}}(-1, 1, 0) \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= (1+2t)^{-\frac{3}{2}} \left(t + \frac{1}{2}s^2 + 1, -\frac{1}{2}s^2 - t, s \right) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= (1+2t)^{-\frac{5}{2}} \left(-\frac{3}{2}s^2 - t - 2, \frac{3}{2}s^2 + t - 1, -3s \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta N &= -\frac{1}{(1+2t)^{\frac{5}{2}}} \left((2t+1)(1, -1, 0) + \left(t + \frac{1}{2}s^2 + 1, -\frac{1}{2}s^2 - t, s \right) + \left(-\frac{3}{2}s^2 - t - 2, \frac{3}{2}s^2 + t - 1, -3s \right) \right) \\ &= \frac{2}{(1+2t)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{1}{2}s^2 - t, -\frac{1}{2}s^2 + t + 1, s \right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\Delta N = \frac{-2}{(2t+1)^2} N, \quad t > -\frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tip den olması demektir [20].

Örnek 3.0.8. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\gamma = \gamma(s)$ ışınal(null) bir eğri olsun. Bu eğri boyunca tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $A(s), B(s), C(s)$ vektör alanlarına $\gamma(s)$ üzerinde **Cartan çatısı** denir.

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle &= \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle A, B \rangle = 1, \quad \langle A, C \rangle = \langle B, C \rangle = 0 \\ \langle C, C \rangle &= 1, \quad C = A \times B, \quad \gamma' = A, \quad C' = -aA - k(s)B \end{aligned}$$

burada a bir sabit ve $k(s)$ sıfırdan farklı bir fonksiyondur. Bu A, B, C vektörleri için $A'(s) = k(s)C$ ve $B'(s) = aC$ ifadeleri de sağlanır.

O halde, $x = x(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$ yüzeyi $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında zamansal bir yüzeydir ve **B-scroll** olarak adlandırılır.

$$x = x(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$$

denkleminde

$$x_s = \gamma'(s) + tB'(s), \quad x_t = B(s)$$

dir ve

$$x_s \wedge x_t = (A + atC) \times B = C - atB$$

elde edilir. Yüzey zamansal olduğundan yüzeyin normal vektörü uzaysaldır, yani

$$\|x_s \wedge x_t\| = \langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle = 1$$

dir. Dolayısıyla yüzeyin Gauss dönüşümü

$$N = -atB(s) + C(s)$$

şeklinde bulunur. Gauss dönüşümünün N_s ve N_t türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} N_s &= -atB' + C' \\ &= -at(aC) - aA - k(s)B \\ &= -a(A + atC) - k(s)B \\ &= -ax_s - k(s)x_t \end{aligned}$$

ve

$$N_t = -aB = -ax_t$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü A_N ile gösterilirse

$$A_N(x_s) = -N_s = ax_s + k(s)x_t, \quad A_N(x_t) = -N_t = ax_t$$

bulunur. Böylece A_N şekil operatörü

$$A_N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ k(s) & a \end{pmatrix}$$

olarak yazılır ve buadan $H = a$ ve $K = a^2$ olup, yüzeyin ortalama eğriliğinin ve Gauss eğriliğinin sabit olduğu görülür. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = a^2t^2, g_{12} = g_{21} = 1, g_{22} = 0$ olarak bulunur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = -1$ ve metrik tensörünün tersinin bileşenleri $g^{11} = \frac{1}{a^2t^2}, g^{22} = 0, g^{12} = g^{21} = 1$ olur. Bu yüzeyin Laplasianı hesaplandığında

$$\Delta = -2\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + 2a^2t\frac{\partial}{\partial t} + a^2t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

elde edilir ve bu operatöre Gauss dönüşümü uygulandığında

$$\Delta N = 2a^2C - 2a^3tB = 2a^2(C - atB) = 2a^2N$$

bulunur ki bu da, N Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tipinden olması demektir [20].

4. 3- BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzay E_1^3 de regle yüzeyleri Gauss, ortalama ve ikinci Gauss eğriliklerinin durumuna göre sınıflandıracağız. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere sırasıyla

$$aK_{II} + bH = \text{sabit} \quad 2a - b \neq 0 \quad (4.0.1)$$

$$aH + bK = \text{sabit} \quad a \neq 0 \quad (4.0.2)$$

$$aK_{II} + bK = \text{sabit} \quad a \neq 0 \quad (4.0.3)$$

şartlarını sağlayan, açılabilir olmayan regle yüzeylerle ilgili karakterizasyon teoremleri incelenecektir.

Teorem 4.0.1. *M, 3-boyutlu Minkowski uzayda non-null dayanak eğrili silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda yüzeyin Gauss dönüşümünün noktasal 1-tipli olması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçası olmasıdır:*

- i) *Spacelike veya timelike birinci çeşit helisoid yüzey,*
- ii) *Spacelike veya timelike ikinci çeşit helisoid yüzey,*
- iii) *Spacelike veya timelike üçüncü çeşit helisoid yüzey,*
- iv) *Spacelike veya timelike 2. çeşit Enepper yüzeyinin eşleniğidir [20].*

Teorem 4.0.2. *M 3-boyutlu Minkowski uzay E_1^3 de, non-null dayanak eğrili açılabilir olmayan ve $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $2a - b \neq 0$ olmak üzere $aK_{II} + bH = \text{sabit}$ şartını sağlayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda M aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır.*

- i) *Spacelike veya timelike birinci çeşit helisoid yüzey,*
- ii) *Spacelike veya timelike ikinci çeşit helisoid yüzey,*
- iii) *Spacelike veya timelike üçüncü çeşit helisoid yüzey,*
- iv) *Spacelike veya timelike 2. çeşit Enepper yüzeyinin eşleniğidir [21].*

İspat: Bu ispatı iki farklı durumda inceleyeceğiz.

1. Durum:

Silindirik olmayan M regle yüzeyi, α dayanak eğrisinin ve β doğrultman eğrisinin karakterine göre M_+^1 , M_+^3 veya M_-^1 sınıflandırından birine ait olsun. Böylece M yüzeyinin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R} \quad (4.0.4)$$

şeklinde verilir, öyle ki $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1)$, $\langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1)$, $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$ dır. Bu durumda α , x yüzeyinin bir sitriksiyon eğrisidir ve β bir (pseudo) küresel eğridir. $x_s = \alpha'(s) + t\beta'(s)$ ve $x_t = \beta$ şeklinde verilen $\{x_s, x_t\}$ çatısını göz önüne alalım. Yüzeyin birinci temel formu

$$E = \langle x_s, x_s \rangle = \langle \alpha', \alpha' \rangle + \varepsilon_2 t^2 \quad (4.0.5)$$

$$F = \langle x_s, x_t \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle \quad (4.0.6)$$

$$G = \langle x_t, x_t \rangle = \varepsilon_1 \quad (4.0.7)$$

olarak elde edilir ve birinci temel formun bileşenleri

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklindedir. Daha sonra kullanmak üzere D, Q ve J diferansiyellenebilir fonksiyonlarını

$$Q = \langle \alpha', \beta \wedge \beta' \rangle \neq 0 \quad (4.0.8)$$

$$J = \langle \beta'', \beta' \wedge \beta \rangle \quad (4.0.9)$$

$$D = \sqrt{|EG - F^2|} \quad (4.0.10)$$

şeklinde tanımlayalım. $\{\beta, \beta', \beta \wedge \beta'\}$ ortonormal çatısına göre

$$\alpha' = \varepsilon_1 F \beta - \varepsilon_1 \varepsilon_2 Q \beta \wedge \beta' \quad (4.0.11)$$

$$\beta'' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-\beta + J \beta \wedge \beta') \quad (4.0.12)$$

$$\alpha' \wedge \beta = \varepsilon_2 Q \beta' \quad (4.0.13)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi bu eşitliklerin nasıl elde edildiklerini inceleyelim.

$\alpha' = a_1 \beta + a_2 \beta' + a_3 \beta \wedge \beta'$ olmak üzere a_1, a_2, a_3 katsayıları, $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$ olduğu ve (4.0.6) ile (4.0.8) kullanılırsa

$$a_1 = \varepsilon_1 F, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q$$

olur ve (4.0.11) eşitliği elde edilir. (4.0.12) eşitliğini de aynı şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha' \wedge \beta &= (\varepsilon_1 F \beta - \varepsilon_1 \varepsilon_2 Q \beta \wedge \beta') \wedge \beta \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q (\langle \beta \wedge \beta \rangle \beta' - \langle \beta' \wedge \beta \rangle \beta) \\ &= \varepsilon_2 Q \beta' \end{aligned}$$

olduğundan (4.0.13) eşitliği de elde edilmiş olur. Şimdi $EG - F^2$ ifadesini hesaplayalım. (4.0.5), (4.0.6) ve (4.0.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \varepsilon_1 \langle \alpha', \alpha' \rangle + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 - (\langle \alpha', \beta \rangle)^2 \\ &= \langle \beta, \beta \rangle \langle \alpha', \alpha' \rangle - (\langle \alpha', \beta \rangle)^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 \\ &= \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha' \wedge \beta \rangle + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 \\ &= \langle \varepsilon_2 Q \beta', \varepsilon_2 Q \beta' \rangle + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 \\ &= \varepsilon_2^2 Q^2 \langle \beta', \beta' \rangle + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 \\ &= -\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 \end{aligned}$$

veya

$$EG - F^2 = -\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2 \quad (4.0.14)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Yüzeyin Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} \\ &= \frac{(\alpha' + t\beta') \wedge \beta}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\alpha' \wedge \beta + t(\beta' \wedge \beta)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\alpha' \wedge \beta - t(\beta \wedge \beta')}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{(\varepsilon_2 Q \beta' - t\beta \wedge \beta')}{D} \end{aligned}$$

veya

$$N = \frac{1}{D} (\varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta') \quad (4.0.15)$$

olur. İkinci temel formun e , f ve g bileşenleri

$$e = \frac{1}{D} (\varepsilon_1 Q (F - QJ) - Q't + Jt^2), \quad f = \frac{Q}{D} \neq 0, \quad g = 0 \quad (4.0.16)$$

olarak elde edilir. Böylece ikinci Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik sırasıyla

$$K_{II} = \frac{1}{2Q^2 D^3} (Jt^4 + \varepsilon_1 Q (F - 2QJ)^2 + 2\varepsilon_1 Q^2 Q't + Q^3 (F + QJ)) \quad (4.0.17)$$

$$H = \frac{1}{2D^3} (\varepsilon_1 Jt^2 - \varepsilon_1 Q't - Q(F + QJ)) \quad (4.0.18)$$

olur. Şimdi bu eşitliklerin nasıl elde edildiklerini inceleyelim. $x_s = \alpha' + t\beta'$, $x_{ss} = \alpha'' + t\beta''$,

$x_t = \beta$, $x_{ts} = x_{st} = \beta'$, $x_{tt} = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} e &= \langle N, x_{ss} \rangle = \left\langle \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|}, x_{ss} \right\rangle = \frac{\langle x_s \wedge x_t, x_{ss} \rangle}{D} \\ &= \frac{\langle \varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta', \alpha'' + t\beta'' \rangle}{D} \\ &= \frac{\varepsilon_2 Q \langle \alpha'', \beta' \rangle - t \langle \alpha'', \beta \wedge \beta' \rangle + t \varepsilon_2 Q \langle \beta'', \beta' \rangle - t^2 \langle \beta'', \beta \wedge \beta' \rangle}{D} \\ &= \frac{\varepsilon_2 Q \langle \varepsilon_1 F \beta' - \varepsilon_1 \varepsilon_2 Q \beta \wedge \beta'', \beta' \rangle - Q't + t \varepsilon_2 Q \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 (-\beta + J\beta \wedge \beta'), \beta' \rangle + Jt^2}{D} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 F Q \langle \beta', \beta' \rangle - \varepsilon_1 Q^2 \langle \beta \wedge \beta'', \beta' \rangle - Q't - t \varepsilon_1 Q \langle \beta, \beta' \rangle + t \varepsilon_1 Q J \langle \beta \wedge \beta', \beta' \rangle + Jt^2}{D} \\ &= \frac{\varepsilon_1 F Q - \varepsilon_1 Q^2 J - Q't + Jt^2}{D} \\ &= \frac{1}{D} (\varepsilon_1 Q (F - QJ) - Q't + Jt^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_s &= [\det(\alpha', \beta, \beta')]_s \\ &= \det(\alpha'', \beta, \beta') + \det(\alpha', \beta', \beta') + \det(\alpha', \beta, \beta'') \\ &= \det(\alpha'', \beta, \beta') + \det(\alpha', \beta, \beta'') \\ &= Q', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{\langle x_s \wedge x_t, x_{st} \rangle}{D} \\ &= \frac{\langle \varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta', \beta' \rangle}{D} \\ &= \frac{\varepsilon_2 Q \langle \beta', \beta' \rangle - t \langle \beta', \beta \wedge \beta' \rangle}{D} \\ &= \frac{Q}{D}, \end{aligned}$$

$$g = \frac{\langle x_s \wedge x_t, x_{tt} \rangle}{D}$$

$$= \frac{\langle x_s \wedge x_t, 0 \rangle}{D} = 0,$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{|EG - F^2|}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E0 - 2FQ + \varepsilon_1(\varepsilon_1 Q(F - QJ) - Q't + Jt^2)}{D^3}$$

$$= \frac{1}{2D^3} (-2FQ + QF - Q^2J - \varepsilon_1 Q't + \varepsilon_1 Jt^2)$$

$$= \frac{1}{2D^3} (\varepsilon_1 Jt^2 - \varepsilon_1 Q't - Q(F + QJ))$$

M regle yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği ise

$$K_{II} = \frac{1}{|eg - f^2|^2} \left\{ \begin{vmatrix} f_{st} - \frac{1}{2}e_{tt} - \frac{1}{2}g_{ss} & \frac{1}{2}e_s & f_s - \frac{1}{2}e_t \\ f_t - \frac{1}{2}g_s & e & f \\ \frac{1}{2}g_t & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_t & \frac{1}{2}g_t \\ \frac{1}{2}e_t & e & f \\ \frac{1}{2}g_s & f & g \end{vmatrix} \right\}$$

olmak üzere $g = 0$ olduğundan $g_s = g_t = 0$ olur. Bu durumda yukarıdaki determinanti düzenlediğimizde

$$K_{II} = \frac{1}{f^4} \left\{ f f_t \left(f_s - \frac{1}{2}e_t \right) - f^2 \left(-\frac{1}{2}e_{tt} + f_{st} \right) \right\} \quad (4.0.19)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi bu eşitliğin bileşenlerini hesaplayalım. (4.0.16) eşitliğinden yola çıkarak

$$e_t = \frac{1}{D^2} [(\varepsilon_1 Q(F - QJ) - Q't + Jt^2)_t D - (\varepsilon_1 Q(F - QJ) - Q't + Jt^2) D_t]$$

$$= \frac{1}{D^3} [(-Q' + 2Jt)(-\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t(\varepsilon_1 QF - \varepsilon_1 Q^2 J - Q't + Jt^2)]$$

$$= \frac{1}{D^3} (-\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q't^2 + \varepsilon_2 Q^2 Q' + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3 - 2\varepsilon_2 JQ^2 t - \varepsilon_2 QFt + \varepsilon_2 JQ^2 t + \varepsilon_1 \varepsilon_2 Q't^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3)$$

$$= \frac{1}{D^3} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3 - (\varepsilon_2 JQ^2 + \varepsilon_2 QF)t + \varepsilon_2 Q^2 Q'),$$

$$e_{tt} = \frac{1}{D^6} [(\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3 - (\varepsilon_2 JQ^2 + \varepsilon_2 QF)t + \varepsilon_2 Q^2 Q')_t D^3 -$$

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3 - (\varepsilon_2 JQ^2 + \varepsilon_2 QF)t + \varepsilon_2 Q^2 Q') 3D^2 D_t]$$

$$= \frac{1}{D^6} \left[(3\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^2 - \varepsilon_2 JQ^2 - \varepsilon_2 QF) D^3 - (\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3 - \varepsilon_2 JQ^2 t - \varepsilon_2 QFt + \varepsilon_2 Q^2 Q') 3D^2 \frac{1}{2D} 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 t \right]$$

$$= \frac{1}{D^5} [(3\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^2 - \varepsilon_2 JQ^2 - \varepsilon_2 QF)(-\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2) -$$

$$3\varepsilon_1 \varepsilon_2 t(\varepsilon_1 \varepsilon_2 Jt^3 - \varepsilon_2 JQ^2 t - \varepsilon_2 QFt + \varepsilon_2 Q^2 Q')]$$

$$= \frac{1}{D^5} ((2\varepsilon_1 QF - \varepsilon_1 JQ^2)t^2 - 3\varepsilon_1 Q^2 Q't + JQ^4 + Q^3 F),$$

$$\begin{aligned}
f_s &= \frac{Q_s D - Q D_s}{D^2} \\
&= \frac{Q' D^2 - Q D D_s}{D^3} \\
&= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q' t^2 - \varepsilon_2 Q^2 Q' - Q D (-\frac{1}{2D} \varepsilon_2 2 Q Q')}{D^3} \\
&= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q' t^2 - \varepsilon_2 Q^2 Q' + \varepsilon_2 Q^2 Q'}{D^3} \\
&= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q' t^2}{D^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_t &= \frac{Q_t D - Q D_t}{D^2} \\
&= \frac{0 - Q D D_t}{D^3} \\
&= \frac{-Q D \frac{1}{2D} \varepsilon_1 \varepsilon_2 2t}{D^3} \\
&= -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q t}{D^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{st} &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q'}{D^6} (2t D^3 - t^2 3 D^2 D_t) \\
&= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q'}{D^6} \left(2t D^3 - t^2 3 D^2 \frac{1}{2D} \varepsilon_1 \varepsilon_2 2t \right) \\
&= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q'}{D^5} (2t D^2 - 3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^3) \\
&= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q'}{D^5} (2t (-\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2) - 3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^3) \\
&= -\frac{1}{D^5} (Q' t^3 + 2 \varepsilon_1 Q^2 Q' t)
\end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz bu değerleri (4.0.19) de yerine yazdığımızda (4.0.17) olarak elde edilir.

İlk önce $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ olduğunu kabul edelim. K_{II} ve H nin t ye göre türevleri

$$(K_{II})_t = \frac{1}{2Q^2 D^5} \left(-\varepsilon_1 J t^5 + Q(F + 2QJ)t^3 + 4Q^2 Q' t^2 + \varepsilon_1 Q^3 (5F - QJ)t + 2\varepsilon_1 Q^4 Q' \right) \quad (4.0.20)$$

ve

$$H_t = \frac{1}{2D^5} (J t^3 - 2Q' t^2 - \varepsilon_1 Q(3F + QJ)t - \varepsilon_1 Q^2 Q') \quad (4.0.21)$$

bulunur.

$aK_{II} + bH = \text{sabit}$, $2a - b \neq 0$ kabulünden ve yukarıdaki eşitliklerden t parametresine göre türev alınıp düzenlenirse

$$\varepsilon_1 aJ = 0 \quad (4.0.22)$$

$$aQF + 2aQ^2J + bJQ^2 = 0$$

$$Q^2Q'(2a - b) = 0$$

$$5\varepsilon_1 aQ^3F - \varepsilon_1 aQ^4J - 3\varepsilon_1 bQ^3F - \varepsilon_1 bQ^4J = 0$$

$$Q^4Q'(2a - b) = 0$$

denklem sistemlerini elde ederiz. Buna göre $J = F = 0$ ve $(2a - b)Q' = 0$ dır. $2a - b \neq 0$ olduğundan buradan $Q' = 0$ olur. Buda $H = 0$ olması demektir. Bu durumda yüzey minimal olur. Çünkü $EG - F^2 = -\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2$ ve $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ dır. Bundan dolayı $\varepsilon_2 = -1$ veya $\varepsilon_2 = 1$ olduğundan yüzey spacelike veya timelike olur. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1)$ olması karakterinden dolayı imkansızdır. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)$ alalım. Yüzey M_+^3 tipinde olur. Bu yüzden 3. çeşit helisoidtir. Eğer $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, \pm 1)$ ise M yüzeyi M_+^1 veya M_-^1 tipindedir. Bu yüzden yüzey teorem (4.0.1) den 1. veya 2. çeşit helisoidtir.

Şimdi $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ olduğunu kabul edelim. K_{II} ve H nin t ye göre türevleri

$$(K_{II})_t = \frac{1}{2Q^2D^5} \left(\varepsilon_1 Jt^5 - Q(F + 2QJ)t^3 - 4Q^2Q't^2 + \varepsilon_1 Q^3(5F - QJ)t - 2\varepsilon_1 Q^4Q' \right) \quad (4.0.23)$$

ve

$$H_t = \frac{1}{2D^5} \left(-Jt^3 + 2Q't^2 - \varepsilon_1 Q(3F + QJ)t + \varepsilon_1 Q^2Q' \right) \quad (4.0.24)$$

bulunur. Burada $2a - b \neq 0$ olduğundan yukarıda da değinildiği gibi $J = F = 0$ ve $Q' = 0$ eşitliklerini elde ederiz. Bu durumda yüzey minimal olur. Çünkü $EG - F^2 = -\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2$ ve $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ dır. Bundan dolayı $\varepsilon_2 = -1$ veya $\varepsilon_2 = 1$ olduğundan M yüzeyi spacelike veya timelike olur. Bu durumda $\varepsilon_1 = 1$ dir. M yüzeyi $\varepsilon_2 = \pm 1$ durumuna bağlı olarak M_+^1 veya M_-^1 tipindedir. Bu yüzden yüzey teorem (4.0.1) den 1. veya 2. çeşit helisoidtir.

2. Durum: M silindirik olmayan regle yüzeyi, M_+^2 veya M_-^2 tipinde olsun. Bu durumda M regle yüzeyi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R}$$

olmak üzere $\langle \beta, \beta \rangle = 1$, $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$, $\langle \beta', \beta' \rangle = 0$, $\langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon_1(\pm 1)$ dır. S ve q fonksiyonlarını

$$S = \langle \alpha', \beta' \rangle$$

$$\begin{aligned}
q &= \|x_s\|^2 \\
&= \varepsilon \langle x_s, x_s \rangle \\
&= \varepsilon (\varepsilon_1 + 2St)
\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Burada ε , x_s nin işaretidir. β spacelike vektörü ile β' null vektörünün vektörel çarpımı $\beta \wedge \beta'$ hem β ya hemde β' ne diktir. Ayrıca $\beta \wedge \beta'$ bir null vektör olduğundan $\beta \wedge \beta'$ ile β' lineer bağımlı olmak zorundadır. Dolayısıyla not edelim ki $\beta \wedge \beta' = \beta'$ olarak alınabilir. M üzerinde indirgenen pseudo-Riemann metriğinin bileşenleri

$$E = \varepsilon q, F = 0, G = 1$$

olarak elde edilir. Böylece E_1^3 ün $\{\alpha', \beta, \alpha' \wedge \beta\}$ çatısına göre

$$\beta' = \varepsilon_1 S(\alpha' - \alpha' \wedge \beta) \quad (4.0.25)$$

$$\alpha'' = -S\beta - \varepsilon_1 R\alpha' \wedge \beta \quad (4.0.26)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$R = \langle \alpha'', \alpha' \wedge \beta \rangle$$

dır. Ayrıca (4.0.25) ve (4.0.26) kullanılarak

$$\langle \beta'', \alpha' \wedge \beta \rangle = S' + \varepsilon_1 SR \quad (4.0.27)$$

$$\langle \alpha', \beta'' \rangle = S' + \varepsilon_1 SR \quad (4.0.28)$$

olur. Gauss dönüşümü ise

$$N = \frac{1}{\sqrt{q}} (\alpha' \wedge \beta - t\beta') \quad (4.0.29)$$

şeklinde bulunur. Buna göre ikinci temel formun katsayıları

$$e = \frac{1}{\sqrt{q}} (R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t), f = \frac{S}{\sqrt{q}}, g = 0 \quad (4.0.30)$$

şeklindedir. Ayrıca ortalama eğrilik H ve ikinci Gauss eğriliği K_{II}

$$H = \frac{1}{2q^{\frac{3}{2}}} (R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t) \quad (4.0.31)$$

$$K_{II} = \frac{\varepsilon_1 S'}{2Sq^{\frac{3}{2}}} \quad (4.0.32)$$

olur. K_{II} ve H nin t ye göre türevi alınırsa

$$(K_{II})_t = -\frac{3}{2q^{\frac{5}{2}}} \varepsilon \varepsilon_1 S' \quad (4.0.33)$$

$$H_t = \frac{1}{2q^{\frac{5}{2}}} (\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR - \varepsilon S (S' + 2\varepsilon_1 SR) t) \quad (4.0.34)$$

bulunur. Şimdi bu eşitliklerin nasıl elde edildiklerini inceleyelim

$$\begin{aligned} \langle \beta'', \alpha' \wedge \beta \rangle &= \langle \varepsilon_1 S' (\alpha' - \alpha' \wedge \beta) + \varepsilon_1 S (\alpha'' - \alpha'' \wedge \beta - \alpha' \wedge \beta'), \alpha' \wedge \beta \rangle \\ &= \varepsilon_1 \langle S' \alpha' - S' (\alpha' \wedge \beta) + S \alpha'' - S (\alpha'' \wedge \beta) - S (\alpha' \wedge \beta'), \alpha' \wedge \beta \rangle \\ &= \varepsilon_1 (S' \langle \alpha', \alpha' \wedge \beta \rangle - S' \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha' \wedge \beta \rangle + S \langle \alpha'', \alpha' \wedge \beta \rangle - \\ &\quad S \langle \alpha'' \wedge \beta, \alpha' \wedge \beta \rangle - S \langle \alpha' \wedge \beta', \alpha' \wedge \beta \rangle) \\ &= \varepsilon_1 (S' \langle \alpha', \alpha' \rangle \langle \beta, \beta \rangle + SR) \\ &= S' + \varepsilon_1 SR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \beta'', \alpha' \rangle &= \langle \varepsilon_1 S' (\alpha' - \alpha' \wedge \beta) + \varepsilon_1 S (\alpha'' - \alpha'' \wedge \beta - \alpha' \wedge \beta'), \alpha' \rangle \\ &= \varepsilon_1 \langle S' \alpha' - S' (\alpha' \wedge \beta) + S \alpha'' - S (\alpha'' \wedge \beta) - S (\alpha' \wedge \beta'), \alpha' \rangle \\ &= \varepsilon_1 (S' \langle \alpha', \alpha' \rangle - S' \langle \alpha' \wedge \beta, \alpha' \rangle + S \langle \alpha'', \alpha' \rangle - S \langle \alpha'' \wedge \beta, \alpha' \rangle - S \langle \alpha' \wedge \beta', \alpha' \rangle) \\ &= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 S' + SR) \\ &= S' + \varepsilon_1 SR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} \\ &= \frac{(\alpha' + t\beta') \wedge \beta}{\sqrt{\langle x_s \wedge x_t, x_s \wedge x_t \rangle}} \\ &= \frac{\alpha' \wedge \beta + t(\beta' \wedge \beta)}{\sqrt{\langle x_s, x_t \rangle^2 - \langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle}} \\ &= \frac{\alpha' \wedge \beta - t\beta'}{\sqrt{q}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e = \langle N, x_{ss} \rangle &= \left\langle \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|}, x_{ss} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \alpha' \wedge \beta - t\beta', \alpha'' + t\beta'' \rangle}{\sqrt{q}} \\ &= \frac{\langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + t \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle - t \langle \beta', \alpha'' \rangle - t^2 \langle \beta', \beta'' \rangle}{\sqrt{q}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} (R + t (S' + 2\varepsilon_1 SR)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, x_{st} \rangle = \left\langle \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|}, x_{st} \right\rangle \\
&= \frac{\langle \alpha' \wedge \beta - t\beta', \beta' \rangle}{\sqrt{q}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{q}} (\langle \alpha' \wedge \beta, \beta' \rangle - t \langle \beta', \beta' \rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{q}} \langle \alpha', \beta \wedge \beta' \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{q}} \langle \alpha', \beta' \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{q}} S,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle N, x_{tt} \rangle = \left\langle \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|}, x_{tt} \right\rangle \\
&= \frac{\langle \alpha' \wedge \beta - t\beta', 0 \rangle}{\sqrt{q}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{|EG - F^2|} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{q}} (R + t(S' + 2\varepsilon_1 SR))}{q} \\
&= \frac{1}{2q^{\frac{3}{2}}} (R + t(S' + 2\varepsilon_1 SR)),
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$K_{\Pi} = \frac{1}{|eg - f^2|^2} \left\{ \begin{vmatrix} f_{st} - \frac{1}{2}e_{tt} - \frac{1}{2}g_{ss} & \frac{1}{2}e_s & f_s - \frac{1}{2}e_t \\ f_t - \frac{1}{2}g_s & e & f \\ \frac{1}{2}g_t & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_t & \frac{1}{2}g_t \\ \frac{1}{2}e_t & e & f \\ \frac{1}{2}g_s & f & g \end{vmatrix} \right\}$$

olmak üzere $g = 0$ olduğundan $g_s = g_t = 0$ olur. Bu durumda yukarıdaki determinanı düzenlediğimizde

$$K_{\Pi} = \frac{1}{f^4} \left\{ f f_t \left(f_s - \frac{1}{2}e_t \right) - f^2 \left(-\frac{1}{2}e_{tt} + f_{st} \right) \right\} \quad (4.0.35)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi bu eşitliğin bileşenlerini hesaplayalım. (4.0.30) den yola çıkarak

$$\begin{aligned}
e_t &= \frac{(S' + 2\varepsilon_1 SR)}{q^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon S(R + t(S' + 2\varepsilon_1 SR))}{q^{\frac{3}{2}}}, \\
e_{tt} &= \frac{-2\varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)}{q^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(RS^2 + tS^2(S' + 2\varepsilon_1 SR))}{q^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_t &= -\frac{\varepsilon S^2}{q^{\frac{3}{2}}}, \\
f_s &= \frac{S'}{q^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon S t}{q^{\frac{5}{2}}}, \\
f_{st} &= -\frac{\varepsilon S S'}{q^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varepsilon S}{q^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 S^2 t}{q^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bunları (4.0.35) de yerine yazdığımızda ise (4.0.32) eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(K_{II})_t &= -\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_1 S'}{2S} \frac{2\varepsilon S}{q^{\frac{5}{2}}} \\
&= -\frac{3}{2q^{\frac{5}{2}}} \varepsilon \varepsilon_1 S',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{(S' + 2\varepsilon_1 SR)}{q^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\varepsilon S(R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t)}{q^{\frac{5}{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{2q^{\frac{5}{2}}} ((S' + 2\varepsilon_1 SR)q - 3\varepsilon S(R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t)) \\
&= \frac{1}{2q^{\frac{5}{2}}} ((S' + 2\varepsilon_1 SR)\varepsilon(\varepsilon_1 + 2St) - 3\varepsilon S(R + (S' + 2\varepsilon_1 SR)t)) \\
&= \frac{1}{2q^{\frac{5}{2}}} (\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR - \varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)t),
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $2a - b \neq 0$, $aK_{II} + bH = \text{sabit}$ şartından $a(K_{II})_t + bH_t = 0$ elde edilir. (4.0.33) ve (4.0.34) dan t ye göre bir polinom elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned}
a \left(-\frac{3}{2q^{\frac{5}{2}}} \varepsilon \varepsilon_1 S' \right) + b \frac{1}{2q^{\frac{5}{2}}} (\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR - \varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)t) &= 0 \\
a(-3\varepsilon \varepsilon_1 S') + b(\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR - \varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)t) &= 0 \\
3a\varepsilon \varepsilon_1 S' - b(\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR) + b\varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)t &= 0
\end{aligned}$$

denklemlerine sahip oluruz. Bu denklemlerden

$$3a\varepsilon \varepsilon_1 S' - b(\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR) = 0, \quad \varepsilon S(S' + 2\varepsilon_1 SR)t = 0 \quad (4.0.36)$$

elde edilir. (4.0.36) de $S' = -2\varepsilon_1 SR$ eşitliği elde edilir ve bu eşitliği $3a\varepsilon \varepsilon_1 S' - b(\varepsilon \varepsilon_1 S' - \varepsilon SR) = 0$ da yerine yazdığımızda $(2a - b)R = 0$ eşitliğini elde edilir. $2a - b \neq 0$ olduğundan $S' = 0$ ve $R = 0$ dır. Burada $H = 0$ olduğundan M minimaldir. Teorem (4.0.1) e göre spacelike veya timelike yüzeyler gibi 2. çeşit Enneper yüzeyinin eşleniğidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.0.3. M 3-boyutlu Minkowski uzay E_1^3 de, non-null dayanak eğrili açılabilir olmayan ve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $aH + bK = \text{sabit}$, şartını sağlayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda M aşağıdaki yüzeylerin açık bir parçasıdır.

- i) Spacelike veya timelike birinci çeşit helisoid yüzeydir.
- ii) Spacelike veya timelike ikinci çeşit helisoid yüzeydir.
- iii) Spacelike veya timelike üçüncü çeşit helisoid yüzeydir.
- iv) Spacelike veya timelike 2. çeşit Ennepper yüzeyin eşleniğidir [21].

İspat: Bunu iki farklı durumda inceleyeceğiz.

1. Durum:

Bir önceki teoreme benzer olarak açılabilir olmayan M regle yüzeyi M_+^1 , M_+^3 veya M_-^1 tiplerinden birisine eşit olsun. Böylece M yüzeyinin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R}$$

olarak parametrize edilir öyleki

$\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1)$, $\langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1)$, $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$ dir. Buna göre $x_s = \alpha'(s) + t\beta'(s)$ ve $x_t = \beta$ şeklinde verilen $\{x_s, x_t\}$ doğal çatısına sahibiz. Yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \langle N, N \rangle \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \langle \frac{1}{D} (\varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta'), \frac{1}{D} (\varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta') \rangle \frac{0 - \frac{Q^2}{D^2}}{-\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2} \\ &= \frac{1}{D^2} \langle \varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta', \varepsilon_2 Q \beta' - t \beta \wedge \beta' \rangle \frac{\frac{Q^2}{D^2}}{\varepsilon_2 Q^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2} \\ &= \frac{1}{D^2} (Q^2 \langle \beta', \beta' \rangle - 2\varepsilon_2 Q t \langle \beta', \beta \wedge \beta' \rangle + t^2 \langle \beta \wedge \beta', \beta \wedge \beta' \rangle) \frac{\frac{Q^2}{D^2}}{\varepsilon_2 Q^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2} \\ &= \frac{1}{D^2} (\varepsilon_2 Q^2 + t^2 (\langle \beta, \beta' \rangle - \langle \beta, \beta \rangle \langle \beta', \beta' \rangle)) \frac{\frac{Q^2}{D^2}}{\varepsilon_2 Q^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2} \\ &= \frac{1}{D^2} (\varepsilon_2 Q^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2) \frac{\frac{Q^2}{D^2}}{\varepsilon_2 Q^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2} \\ &= \frac{Q^2}{D^4} \end{aligned}$$

$$K = \frac{Q^2}{D^4} \tag{4.0.37}$$

ve K Gauss eğriliğinin t ye göre türevi

$$\begin{aligned}
K_t &= \left(\frac{Q^2}{D^4} \right)_t \\
&= \left(\frac{Q^2}{(EG - F^2)^2} \right)_t \\
&= \left(\frac{Q^2}{(-\varepsilon_2 Q^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t^2)^2} \right)_t \\
&= \frac{-4\varepsilon_1 \varepsilon_2 Q^2 t}{D^6} \\
&= \frac{4\varepsilon_1 Q^2 t}{D^6}
\end{aligned} \tag{4.0.38}$$

elde edilir. M yüzeyinin $aH + bK = \text{sabit}$ şartını sağladığını kabul edelim. Öncelikle $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ olduğu durumu inceleyelim. (4.0.21) ve (4.0.38) den t^8, t^6, t^4, t^2 ve t^0 kuvvetlerine göre polinomun katsayıları

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 a^2 J^2 &= 0 \\
2a^2 QJ(3F + QJ) - 4\varepsilon_1 a^2 (Q')^2 + a^2 Q^2 J^2 &= 0 \\
3\varepsilon_1 a^2 Q^2 (3F + QJ)(F + QJ) &= 0 \\
3\varepsilon_1 a^2 Q^4 (Q')^2 + a^2 Q^4 (3F + QJ)^2 - 64b^2 Q^4 &= 0 \\
a^2 Q^6 (Q')^2 &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Böylece $J = F = Q' = 0$ ve $b = 0$ elde ederiz. Çünkü t nin kuvvetlerinin katsayıları J, F, Q ve Q' den oluşmaktadır. (4.0.18) eşitliği gereğince $H = 0$ dır. Şimdi ise $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda (4.0.24) ve (4.0.38) eşitlikleri kullanılırsa M nin ortalama eğriliği $H = 0$ olur ve M minimaldir. Teorem (4.0.2) den M yüzeyinin spacelike veya timelike birinci, ikinci ve üçüncü çeşit helisoid yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır.

2. Durum: M yüzeyi M_+^2 veya M_-^2 türünden silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda α eğrisi spacelike veya timelike ve β spacelike fakat β' lightlike dır. (4.0.2) deki notasyonları kullandığımızda K Gauss eğriliği

$$K = \frac{S^2}{q^2} \tag{4.0.39}$$

şeklinde olur. K Gauss eğriliğinin t ye göre türevini alırsak

$$K_t = -\frac{4\varepsilon S^3}{q^3} \tag{4.0.40}$$

bulunur. M nin $aH + bK = \text{sabit}$, $a \neq 0$ şartlarını sağladığını kabul edelim.(4.0.34) ve (4.0.40) dan

$$\begin{aligned} 2\epsilon a^2 S (SS' + 2\epsilon_1 S^2 R)^2 &= 0 \\ a^2 \epsilon (SS' + 2\epsilon S^2 R) (\epsilon_1 (SS' + 2\epsilon_1 S^2 R) - 4S (\epsilon_1 S' - SR)) &= 0 \\ 2a^2 \epsilon (\epsilon_1 S' - SR) (S (\epsilon_1 S' - SR) - \epsilon_1 (SS' + 2\epsilon_1 S^2 R)) &= 0 \\ a^2 \epsilon \epsilon_1 (\epsilon_1 S' - SR)^2 - 64b^2 S^6 &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $S' = 0$, $R = 0$ ve $b = 0$ bulunur. Bundan dolayı (4.0.31) dan M yüzeyi minimaldir. Bununla birlikte, M teorem (4.0.2) ye göre spacelike veya timelike yüzeylerde olduğu gibi 2. çeşit Enneper yüzeyinin eşleniğidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem (4.0.1), (4.0.2) ve (4.0.3) ifadelerinden aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 4.0.4. *M , 3-boyutlu Minkowski uzayında non-null dayanak eğrili açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

- i) M , noktasal 1. tip den Gauss dönüşümüne sahiptir.
- ii) M , $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $2a - b \neq 0$, $aK_{II} + bH = \text{sabit}$, eşitliğini sağlar.
- iii) M , $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $aK_{II} + bH = \text{sabit}$ eşitliğini sağlar. [21].

Teorem 4.0.5. *M , 3-boyutlu Minkowski uzayında non-null dayanak eğrili açılabilir olmayan ve $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$, $aK_{II} + bK = \text{sabit}$ şartını sağlayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda aşağıdakilere sahip oluruz.*

1) β' eğrisinin null olmaması durumunda silindirik olmayan regle yüzey, aşağıdaki yüzeylerin açık bir parçalarıdır.

- i) Spacelike veya timelike birinci çeşit helisoid yüzeydir.
- ii) Spacelike veya timelike ikinci çeşit helisoid yüzeydir.
- iii) Spacelike veya timelike üçüncü çeşit helisoid yüzeydir.

2) β' eğrisi null olması durumunda silindirik olmayan regle yüzeyin ikinci Gauss eğriliği sıfırdır [21].

İspat: Bunu iki farklı durumda inceleyeceğiz.

1. Durum:

Teorem (4.0.2) de olduğu gibi M regle yüzeyi, α dayanak eğrisinin ve β doğrultman vektörünün karakterine göre M_+^1 , M_+^3 veya M_-^1 tipinden birisine aittir. Burada M regle yüzeyi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad s \in I, t \in J \subseteq \mathbb{R}$$

şeklinde parametrelendirilmiş olsun, öyleki $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1(\pm 1)$, $\langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_2(\pm 1)$, $\langle \alpha', \beta' \rangle = 0$ dır. Teorem (4.0.2) de olduğu gibi K_{II} ile K değerleri sırasıyla (4.0.17) ve (4.0.37) de olduğu gibidir. M yüzeyi (4.0.3) deki durumu sağlasın. İlk önce $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 > 0$ olduğunu kabul edelim. (4.0.20) ve (4.0.38) den t^{12} , t^8 , t^2 ve t^0 ın katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 a^2 J^2 &= 0 \\ 2\varepsilon_1 a^2 J Q^3 (5F - QJ) - \varepsilon_1 a^2 Q^2 (F + 2QJ) (4JQ + F) &= 0 \\ 12\varepsilon_1 a^2 Q^8 (Q')^2 + a^2 Q^8 (5F - QJ)^2 - 64b^2 Q^8 &= 0 \\ 4a^2 Q^{10} (Q')^2 &= 0 \end{aligned}$$

elde edriz. Buradan $J = F = Q' = 0$ ve $b = 0$ elde edilir. Çünkü t nin kuvvetlerinin katsayıları; J, F, Q ve Q' dür. İkinci Gauss eğriliği K_{II} ve ortalama eğrilik H (4.0.17) ve (4.0.18) yardımıyla sıfır olduğu bulunur. Bu durum M nın minimal olduğunu gösterir. Şimdi ise $Q^2 - \varepsilon_1 t^2 < 0$ olduğunu kabul edelim. (4.0.23) ve (4.0.38) kullanılarak M nın minimal olduğu sonucuna ulaşılır. Teorem (4.0.2) den M yüzeyinin spacelike veya timelike birinci, ikinci ve üçüncü çeşit helisoid yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır.

2. Durum:

M yüzeyi M_+^2 veya M_-^2 türünden silindirik olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda α eğrisi spacelike veya timelike, β spacelike bir eğri ve kabulden β' null dır. M yüzeyi (4.0.3) deki durumu sağlasın. (4.0.33) ve (4.0.40) dan aşağıdaki şu eşitlikleri elde edirik.

$$\begin{aligned} 18\varepsilon a^2 S (S')^2 &= 0, \\ 9\varepsilon \varepsilon_1 a^2 (S')^2 - 64b^2 S^6 &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bundan dolayı $S' = 0$ ve $b = 0$ dır. Sonuç olarak (4.0.32) den ikinci Gauss eğriliği yani K_{II} sıfırdır.

Teorem 4.0.6. M , 3-boyutlu Minkowski uzayında null scroll olsun. Bu durumda $K = H^2$, $K_{II} = H^{-1}$ 'dir [21].

İspat: $\alpha = \alpha(s)$, E_1^3 te bir null eğri ve $\beta = \beta(s)$, α üzerinde bir null vektör olsun. M null scroll yüzeyi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

şeklinde parametrelendirilirse $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$, $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', \beta \rangle = 1$ dir. Üstelik genelliği bozmaksızın α M nin null geodeziği olarak seçilebilir. Lorentz metriğine göre, $E = \langle \beta', \beta' \rangle t^2$, $F = 1$, $G = 0$ dir. Gauss dönüşümü N ise

$$N = \alpha' \wedge \beta + t(\beta' \wedge \beta)$$

şeklinde elde edilir. Bundan dolayı ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \langle x_{ss}, N \rangle \\ &= \langle \alpha'' + t\beta'', N \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle x_{st}, N \rangle \\ &= \langle \beta', N \rangle \\ &= \langle \beta', \alpha' \wedge \beta + t(\beta' \wedge \beta) \rangle \\ &= \langle \beta', \alpha' \wedge \beta \rangle + t \langle \beta', \beta' \wedge \beta \rangle \\ &= \langle \beta', \alpha' \wedge \beta \rangle \\ &= Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, x_{tt} \rangle \\ &= \langle N, 0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitliklerden H ve K da yerine yazılırsa $H = Q$ ve $K = Q^2$ olarak elde edilir.

Eğer $\langle \beta', \beta' \rangle = 0$ ise β' sıfır vektör ya da null vektördür. Eğer β' sıfır vektörü ise $F = Q = 0$ olacağından dolayı M flat olur. Bu yüzeyin null scroll olması ile çelişir.

α null eğri olduğundan β' vektörü timelike olamaz. Dolayısıyla β' spacelikedır yani, $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$ dir. $\{\alpha', \beta, \beta'\}$, E_1^3 de bir null çatı olsun. Bu durumda β'' vektörü bu çatıya göre

$$\beta'' = -\alpha' + \langle \alpha', \beta'' \rangle \beta$$

dır ve

$$e_{tt} = 2 \langle \beta'', N_t \rangle = 2 \langle \beta'', \beta' \wedge \beta \rangle = 2Q$$

dur. Böylece ikinci Gauss eğriliği

$$K_{\text{II}} = \frac{1}{2Q^2} e_{tt} = \frac{1}{Q}$$

olarak bulunur. Bundan kolayca görülebilirki

$$K_{\text{II}} = \frac{1}{H}$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.



5. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ 1-TİPLİ GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip yüzeylerin sınıflandırılması yapılacaktır. İlk olarak 3-boyutlu Minkowski uzayda silindiriksel yüzeyler genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip oldukları gösterilecektir. İkinci olarak genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip konikal yüzeylerin bir sınıflandırılması verilecektir. Daha sonra düzlemsel olmayan teğetsel açılabilir yüzeylerin genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip ise bunların Öklidyen düzlemin veya Lorantzian düzlemin bir açık parçası olduğu gösterilecektir. Son olarakda 3-boyutlu Minkowski uzayında null scroollar genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip ise bunların Lorentz düzlemin veya B-scrooll un açık bir parçası olduğu gösterilecektir.

Tanım 5.0.1. *Öklidyen uzay veya pseudo-Öklidyen uzayda bir M yüzeyinin N Gauss dönüşümü*

$$\Delta N = f N + g C \quad (5.0.1)$$

şartını sağlıyor ise M yüzeyene genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir denir. Burada f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve C de sabit vektördür [22].

Lemma 5.0.1. *Pseudo küresel bir β eğrisi için Frenet formülleri aşağıdaki gibidir:*

(1) *Eğer β , S_1^2 de bir pseudo küresel eğri ise;*

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \beta(s) \\ t(s) \\ g(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_1 \kappa_g(s) \\ 0 & -\varepsilon_1 \kappa_g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(s) \\ t(s) \\ g(s) \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\langle t, t \rangle = \varepsilon_1 = \pm 1$ dir.

(2) *Eğer β , hiperbolik uzay H^2 de bir pseudo küresel eğri ise;*

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \beta(s) \\ t(s) \\ g(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g(s) \\ 0 & -\kappa_g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(s) \\ t(s) \\ g(s) \end{bmatrix}$$

dir, burada $\kappa_g(s)$ fonksiyonu β nın pseudo küresel eğrisinin jeodezik eğriliğidir ve

$$\kappa_g(s) = \langle \beta(s), t(s) \wedge t'(s) \rangle$$

dir [22].

Lemma 5.0.2. M , $(n+2)$ -boyutlu Lorentz uzayında bir hiperyüzey olsun. Bu durumda M nin N Gauss dönüşümünün Laplaseni

$$\Delta N = \varepsilon_N \|A_N\|^2 N + (n+1)\nabla H \quad (5.0.2)$$

ile verilir. Burada ΔN , N nin Laplasianı, ∇H , H ortalama eğriliğinin gradienti, A_N , M nin şekil operatörüdür, $\|A_N\|^2 = \text{iz}(A_N^2)$ ve $\langle N, N \rangle = \varepsilon_N$ dir [22].

Teorem 5.0.1. 3- boyutlu Minkowski uzayında tüm silindirik regle yüzeyler genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir [22].

İspat: E_1^3 te M_-^1 , M_+^1 veya M_+^3 sınıfından M silindirik regle yüzeyin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad (5.0.3)$$

ile verilsin. Burada $\alpha(s)$ dayanak eğrisi s yay parametresi ile verilmiş bir non-null eğri, β spacelike veya timelike düzlemde doğrultman vektörü olsun. Yani $\langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_1(\pm 1)$ ve $\langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon_2(\pm 1)$ dir. Şimdi E_1^3 te ortonormal çatıyı

$$\{e_1, e_2, N = e_1 \wedge e_2\}$$

olarak alalım. Burada $e_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $e_2 = \frac{\partial}{\partial s}$, M ye teğet olan vektörler $N = e_1 \wedge e_2$ de M nin birim normalidir. Buna göre

$$\frac{\partial}{\partial t} = \beta, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \alpha', \quad N = \beta \wedge \alpha'$$

dir ve

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \frac{\partial}{\partial t} (\beta) = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha') = 0 \quad (5.0.4)$$

dir. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 N \quad (5.0.5)$$

olacak şekilde c_1, c_2, c_3 skalerleri vardır. Şimdi bu değerleri hesaplayalım (5.0.5) eşitliğinin her iki tarafı e_1, e_2 ve N ile skaler çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} c_1 &= \varepsilon_1 \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_1 \rangle = -\varepsilon_1 \langle e_2, \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 \rangle = -\varepsilon_1 \langle e_2, 0 \rangle \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \varepsilon_2 \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_2 \rangle = 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$c_N = \varepsilon_N \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, N \rangle = \varepsilon_N \langle \alpha'', N \rangle, \quad \varepsilon_N = \langle N, N \rangle$$

dir. Frenet çatısından $\alpha'' = \varepsilon_N \kappa(s) N$ olur ve böylece

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \varepsilon_N \kappa(s) N \quad (5.0.6)$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} N &= \frac{\partial}{\partial t} (N) = \frac{\partial}{\partial t} (e_1 \wedge e_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (e_1) \wedge e_2 + e_1 \wedge \frac{\partial}{\partial t} (e_2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.0.7)$$

olur.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_2} N &= \frac{\partial}{\partial s} (e_1 \wedge e_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (e_1) \wedge e_2 + e_1 \wedge \frac{\partial}{\partial s} (e_2) \\ &= e_1 \wedge \alpha'' \\ &= e_1 \wedge \varepsilon_2 \kappa(s) N \\ &= -\varepsilon_2 \kappa(s) e_2 \end{aligned} \quad (5.0.8)$$

elde edilir. Bu denklemlerden H ortalama eğrilik ve şekil operatörünün karesinin izi $\text{iz} \|A_N\|^2$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \langle S(x_i), x_i \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \langle -D_{e_1} N, e_1 \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \langle -D_{e_2} N, e_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_2 \langle \kappa(s) e_2, e_2 \rangle = \frac{\varepsilon_2 \kappa(s)}{2} \\ \kappa &= \varepsilon \det S = \varepsilon \|S\| = \|A_N\| \end{aligned}$$

$$H = \frac{\varepsilon_2 \kappa(s)}{2} \quad (5.0.9)$$

$$\|A_N\|^2 = \kappa^2(s) (\neq 0)$$

olarak bulunur.

Şimdi M nin genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu kabul edelim. (5.0.1), (5.0.2) ve (5.0.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} fN + gC &= \varepsilon_N \|A_N\|^2 N + (n+1) \nabla H \\ fN + gC &= \varepsilon_N \kappa^2(s) N + 2 \nabla \frac{\varepsilon_2 \kappa(s)}{2} \end{aligned}$$

$$fN + gC = \varepsilon_N \kappa^2(s)N + \varepsilon_2 \kappa'(s) \quad (5.0.10)$$

$\nabla H = \varepsilon_1 \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s}$ dir ve C vektörünü

$$C = \varepsilon_1 C_1 e_1 + \varepsilon_2 C_2 e_2 + \varepsilon_N C_N N \quad (5.0.11)$$

olarak yazabiliriz. Buradan $C_1 = \langle C, e_1 \rangle$, $C_2 = \langle C, e_2 \rangle$ ve $C_N = \langle C, N \rangle$ dir. Bu değerler (5.0.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} fN + g(\varepsilon_1 C_1 e_1 + \varepsilon_2 C_2 e_2 + \varepsilon_N C_N N) &= \varepsilon_N \kappa^2(s)N + \varepsilon_2 \kappa'(s) \\ (f + g\varepsilon_N C_N)N + g\varepsilon_1 C_1 e_1 + g\varepsilon_2 C_2 e_2 &= \varepsilon_N \kappa^2(s)N + \varepsilon_2 \kappa'(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem bileşenlerine göre ayrıştırılırsa

$$f + \varepsilon_N g C_N = \varepsilon_N \|A_N\|^2 \quad (5.0.12)$$

$$gC_1 = 0$$

$$gC_2 = \varepsilon_2 \kappa'(s)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerden $C_1 = 0$, C_2 ve C_N nin sadece s ye bağlı fonksiyonlar olarak elde edilir. C sabit olduğundan ve C sadece s ye bağlı olduğundan (5.0.11) in s ye göre türevi alınır

$$\varepsilon_2 C_2' e_2 + \varepsilon_2 C_2 \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 + \varepsilon_N C_N' N + \varepsilon_N C_N \tilde{\nabla}_{e_2} N = 0$$

olur. $\tilde{\nabla}_{e_2} e_2$ ve $\tilde{\nabla}_{e_2} N$ in (5.0.6) ve (5.0.8) deki değerleri yerine yazılırsa

$$(\varepsilon_2 C_2' - \varepsilon_2 \varepsilon_N \kappa(s)) e_2 + (\varepsilon_2 \varepsilon_N C_2 \kappa(s) + \varepsilon_N C_N') N = 0$$

elde edilir ve buradan

$$C_2' = \varepsilon_G \kappa(s) C_N \quad (5.0.13)$$

$$C_N' = -\varepsilon_2 \kappa(s) C_2 \quad (5.0.14)$$

dir. (5.0.11) den $\|C\|^2 = \langle C, C \rangle$ hesaplanırsa

$$\varepsilon_2 C_2^2 + \varepsilon_N C_N^2 = \varepsilon_C d^2 \quad (5.0.15)$$

elde edilir. Bu durumda d , sıfırdan farklı bir sabittir ve ε_C de C nin işaretidir.

1. Durum :

Kabul edelim ki M regle yüzeyi M_+^3 sınıfından olsun. O halde $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_N = \varepsilon_C = 1$ dir. (5.0.13), (5.0.14) ve (5.0.15) eşitliklerinden

$$C_2^2 + C_N^2 = d^2 \text{ olduğundan } C_2 = d \sin \theta, C_N = d \cos \theta \text{ olarak yazılır.}$$

Burada s ye göre türev alınırsa

$$C_2' = d \cos \theta(s) \theta'(s) \text{ ve } C_2' = \varepsilon_N \kappa(s) d \cos \theta(s), \quad d \cos \theta(s) \theta'(s) = \varepsilon_N \kappa(s) d \cos \theta(s)$$

$$\theta'(s) = \varepsilon_N \kappa(s), \quad \theta(s) = \int \kappa(s) ds + \kappa_0$$

şeklinde bulunur ve

$$C(s) = d \sin \theta(s) e_2 + d \cos \theta(s) N \quad (5.0.16)$$

olarak elde edilir. κ_0 integral sabiti olmak üzere $C_2(s) = d \sin \theta(s)$, $C_N(s) = d \cos \theta(s)$ ve $\theta(s) = \int \kappa(s) ds + \kappa_0$ dır. Bu değerleri (5.0.12) da yerine yazdığımızda $g.d \sin \theta(s) = \kappa'(s)$, $g = \frac{\kappa'(s)}{d \sin \theta(s)}$ ve $f + \varepsilon_N g C_N = \varepsilon_N \|A_N\|^2$ için $f = \kappa^2 - \kappa' \cot \theta(s)$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\kappa'(s)}{d \sin \theta(s)} \\ f &= \kappa^2 - \kappa' \cot \theta(s) \end{aligned} \quad (5.0.17)$$

şeklinde bulunur. O halde $\Delta N = f N + g C$ eşitliğini sağlayan f ve g fonksiyonları vardır.

Örnek 5.0.1. Lorentz uzayda

$$x(s, t) = \left(t, \frac{s}{2} \cos(\ln s) + \frac{s}{2} \sin(\ln s), -\frac{s}{2} \cos(\ln s) + \frac{s}{2} \sin(\ln s) \right)$$

ile verilen silindirik yüzeyi göz önüne alalım. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} x_s &= \left(0, \frac{1}{2} (\cos(\ln s) + \sin(\ln s)) + \frac{s}{2} \frac{1}{s} (-\sin(\ln s) + \cos(\ln s)), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (-\cos(\ln s) + \sin(\ln s)) + \frac{s}{2} \frac{1}{s} (\sin(\ln s) + \cos(\ln s)) \right) \\ x_s &= (0, \cos(\ln s), \sin(\ln s)) \\ x_t &= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Yüzeyin Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} \\ &= (0, -\sin(\ln s), \cos(\ln s)) \end{aligned}$$

$$N = (0, -\sin(\ln s), \cos(\ln s))$$

olarak bulunur. Şimdi (g_{ij}) matrisini ve yüzeyin Gauss dönüşümünün Laplasyanını hesaplayalım.

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre

$$g_{ss} = g_{tt} = 1, \quad g_{st} = g_{ts} = 0$$

eşitlikleri kullanılarak

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$g^{ss} = g^{tt} = 1, \quad g^{st} = g^{ts} = 0$$

ve

$$|\mathcal{G}| = \det(g_{ij}) = 1$$

elde edilir. Buna göre yüzeyin Laplasyanı

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_s} |\mathcal{G}| \left(g^{ss} \frac{\partial}{\partial x_s} + g^{st} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_t} |\mathcal{G}| \left(g^{ts} \frac{\partial}{\partial x_s} + g^{tt} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right\} \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \Delta N &= \left(0, -\frac{1}{s^2} (\cos(\ln s) + \sin(\ln s)), -\frac{1}{s^2} (-\cos(\ln s) + \sin(\ln s)) \right) \\ &= \frac{1}{s^2} (1 + \cot(\ln s)) N - \frac{1}{s^2} \csc(\ln s) (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\Delta N = fN + gC$$

olarak bulunur. Bu yüzey 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeydir.

2. Durum :

Kabul edelim ki M regle yüzeyi M_+^1 sınıfından olsun. Bu durumda $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_N = -1$ dir. (5.0.15) denklemi ile belirlenen C vektörü spacelike, timelike veya null vektördür. C nin non-null olma durumunu gözönüne alalım. $C_1 = 0$ olduğundan C vektörünün normu hesaplanırsa

$$C_2^2 - C_N^2 = \varepsilon_C d^2$$

olarak elde edilir.

$$C_2(s) = d \cosh \theta(s), \quad C_N(s) = d \sinh \theta(s) \quad \text{için} \quad \varepsilon_C = 1 \quad (5.0.18)$$

$$C_2(s) = d \sinh \theta(s), \quad C_N(s) = d \cosh \theta(s) \quad \text{için} \quad \varepsilon_C = -1$$

olarak yazılır. (5.0.15) denkleminde

$$\theta(s) = \kappa_0 - \int \kappa(s) ds$$

olacak şekilde κ_0 sabiti vardır.

Buna göre (5.0.12) ve (5.0.18) denklemlerinden f ve g fonksiyonları

$$f(s) = -\kappa^2 + \kappa' \tanh \theta(s), \quad g(s) = \frac{\kappa'}{d \cosh \theta(s)} \quad \text{için} \quad \varepsilon_C = 1 \quad (5.0.19)$$

$$f(s) = -\kappa^2 + \kappa' \coth \theta(s), \quad g(s) = \frac{\kappa'}{d \sinh \theta(s)} \quad \text{için} \quad \varepsilon_C = -1$$

şeklinde bulunur. Şimdi, C nin null olma durumunu gözönüne alalım, yani $\varepsilon_C = 0$ olsun. Bu durumda (5.0.15) deki eşitlikte $\varepsilon_C = 0$ olmasından dolayı elde edilen $C_2^2 - C_N^2 = 0$ eşitliğinden $C_2(s) = de^{-\theta(s)}$ ile $C_N(s) = \pm de^{-\theta(s)}$ olarak bulunur. Burada C_2 ifadesinin türevini aldığımızda $C_2' = \kappa(s)de^{-\theta(s)} = -\theta' de^{-\theta(s)}$, $\theta'(s) = -\kappa(s)$ eşitliği ve sonrasında κ_0 integral sabiti olmak üzere $\theta(s) = \kappa_0 - \int \kappa(s) ds$ elde edilir. Buna göre C vektörü ve f, g fonksiyonları

$$C = \left(0, de^{-\theta(s)}, de^{-\theta(s)}\right), \quad f(s) = -\kappa^2 + \kappa', \quad g(s) = \frac{\kappa' e^{\theta(s)}}{d} \quad (5.0.20)$$

$$C = \left(0, de^{\theta(s)}, -de^{\theta(s)}\right), \quad f(s) = -\kappa^2 - \kappa', \quad g(s) = \frac{\kappa'}{de^{\theta(s)}}$$

olarak bulunur. Bu nedenle, C nin non-null veya null olduğu durumlar için, silindirik yüzey 1 tipli Gauss dönüşümüne sahiptir. Yani

$$\Delta N = fN + gC$$

eşitliğini sağlayacak şekilde diferansillenebilir f ve g fonksiyonları ile C sabit vektörü vardır.

Örnek 5.0.2. M_+^1 tipindeki regle yüzey

$$x(s, t) = \left(\frac{1}{2} \ln s - \frac{1}{4} s^2, \frac{1}{2} \ln s + \frac{1}{4} s^2, t\right)$$

ile verilsin. Böylece

$$x_s = \left(\frac{1}{2s} - \frac{s}{2}, \frac{1}{2s} + \frac{s}{2}, 0\right)$$

$$x_t = (0, 0, 1)$$

dir. Yüzeyin Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_s \wedge x_t}{\|x_s \wedge x_t\|} \\ &= \left(\frac{1}{2s} + \frac{s}{2}, \frac{1}{2s} - \frac{s}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi (g_{ij}) matrisini ve yüzeyin Laplasyon operatörünü hesaplayalım. Buna göre

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \langle x_s, x_s \rangle & \langle x_s, x_t \rangle \\ \langle x_t, x_s \rangle & \langle x_t, x_t \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+s^4}{2s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. O halde

$$g_{ss} = \frac{1+s^4}{2s^2}, \quad g_{st} = g_{ts} = 0, \quad g_{tt} = 1$$

dir ve buradan

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2}{1+s^4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada

$$g^{ss} = \frac{2s^2}{1+s^4}, \quad g^{st} = g^{ts} = 0, \quad g^{tt} = 1$$

dir.

$$|\mathcal{G}| = \det(g_{ij}) = \frac{1+s^4}{2s^2}$$

elde edilir. Buna göre yüzeyin Laplasyonu

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_s} |\mathcal{G}| \left(g^{ss} \frac{\partial}{\partial x_s} + g^{st} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_t} |\mathcal{G}| \left(g^{ts} \frac{\partial}{\partial x_s} + g^{tt} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^4}{2s^2}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{\frac{1+s^4}{2s^2}} \frac{2s^2}{1+s^4} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) + \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\sqrt{\frac{1+s^4}{2s^2}} \frac{\partial}{\partial x_t} \right) \right\} \\ &= -\left\{ \frac{1}{2} \frac{4s(1-s^4)}{(1+s^4)^2} \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{2s^2}{1+s^4} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \Delta N &= -\left\{ \frac{1-s^4}{(1+s^4)^2} \left(\frac{s^2-1}{s}, -\frac{s^2+1}{s}, 0 \right) + \frac{2}{1+s^4} \left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, 0 \right) \right\} \\ &= -\frac{2}{s^2(1-s^2)} N - \frac{2}{s(1-s^2)} (-1, 0, 0) \end{aligned}$$

dir ve C vektörü ve f, g fonksiyonları

$$f = -\frac{2}{s^2(1-s^2)}, \quad g = -\frac{2}{s(1-s^2)}, \quad C = (-1, 0, 0)$$

dir ve

$$\Delta N = fN + gC$$

olarak yazılır. Bu yüzey 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip regle yüzeydir.

3. Durum :

Kabul edelim ki M regle yüzeyi M_-^1 sınıfından olsun. Ardından $\varepsilon_1 = \varepsilon_N = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ dir. (5.0.15) denkleminde C eğrisi spacelike, timelike veya null vektör olabilir. C nin non-null olması durumunu düşünelim. Bu değerleri (5.0.15) deki son eşitlikte $C = \varepsilon_1 C_1 e_1 + \varepsilon_2 C_2 e_2 + \varepsilon_N C_N N$ olduğu gözönüne alınırsa

$$C_N^2 - C_2^2 = \varepsilon_C d^2$$

eşitliğinden $\varepsilon_C = 1$ için

$$C_2(s) = d \sinh \theta(s), \quad C_N(s) = d \cosh \theta(s)$$

ve $\varepsilon_C = -1$ için

$$C_2(s) = d \cosh \theta(s), \quad C_N(s) = d \sinh \theta(s)$$

dir. $C'_2 = \varepsilon_N \kappa(s) C_N$ eşitliği ile $C_2(s) = d \sinh \theta(s)$ eşitliğinin türevi olan $C'_2(s) = \theta'(s) d \cosh \theta(s)$ eşitliğinden bir κ_0 sabiti için $\theta(s) = \kappa_0 - \int \kappa(s) ds$ şeklinde bulunur. Yukarıda elde ettiğimiz C_2 ve C_N değerlerini (5.0.12) da yerine yazdığımızda f ve g fonksiyonların $\varepsilon_C = 1$ için

$$f(s) = \kappa^2 - \kappa' \coth \theta(s), \quad g(s) = -\frac{\kappa'}{d \sinh \theta(s)}, \quad C(s) = (0, d \sinh \theta(s), d \cosh \theta(s))$$

ve $\varepsilon_C = -1$ için

$$f(s) = \kappa^2 + \kappa' \tanh \theta(s), \quad g(s) = -\frac{\kappa'}{d \cosh \theta(s)}, \quad C(s) = (0, d \cosh \theta(s), d \sinh \theta(s))$$

olur. Şimdi, C nin Null olduğunu düşünelim. Yani $\varepsilon_C = 0$ olsun. Bu durumda (5.0.15) deki eşitlikten ve $\varepsilon_C = 0$ olmasından dolayı elde edilen $C_2(s) = d e^{\pm \theta(s)}$ ile $C_N(s) = d e^{\pm \theta(s)}$ eşitliklerinin ortak çözümünden, κ_0 sabit bir sayı olmak üzere $\theta(s) = \kappa_0 - \int \kappa(s) ds$ ile $\varepsilon_C = 0$ için

$$f(s) = -\kappa^2 \pm \kappa', \quad g(s) = \frac{\kappa' e^{\pm \theta(s)}}{d}, \quad C(s) = \left(0, d e^{\pm \theta(s)}, \pm d e^{\pm \theta(s)}(s)\right)$$

olarak elde edilir. Böylece, C nin null olmayan veya null olduğu durumlar için, silindirik yüzey 1 tipli Gauss dönüşümüne sahiptir. Yani

$$\Delta N = fN + gC$$

eşitliğini sağlayacak şekilde diferansiyellenebilir f ve g fonksiyonları ile C sabit vektörü vardır.

Önerme 5.0.1. Pseudo küre S_1^2 veya hiperbolik uzay H^2 de bir küresel eğri $\beta(s)$ olsun. Bu durumda $\beta(s)$ küresel eğrisinin sırasıyla geodezik eğriliği $\kappa_g(s)$ ile eğriliği $\kappa(s)$ ve torsiyon $\tau(s)$ olmak üzere aşağıdaki ifadelere sahip oluruz.

i) Eğer $\beta(s)$ bir spacelike eğri ise,

$$\kappa_g^2 = 1 - \kappa^2 \quad \text{ve} \quad \tau(s) = \pm \frac{\kappa_g'}{1 - \kappa_g^2}$$

dir.

ii) Eğer $\beta(s)$ bir timelike eğri ise;

$$\kappa_g^2 = \kappa^2 - 1 \quad \text{ve} \quad \tau(s) = \pm \frac{\kappa_g'}{1 + \kappa_g^2}$$

dir [22].

İspat: $\beta(s)$ spacelike bir eğri olsun. β nın Frenet formüllerinden

$$\langle t, t \rangle = 1, \quad \langle n, n \rangle = -\langle b, b \rangle = \varepsilon = \langle \beta, \beta \rangle = -\langle g, g \rangle$$

olur. Lemma (5.0.1) den

$$\kappa n = t' = -\varepsilon \beta - \varepsilon \kappa_g g \quad (5.0.21)$$

ifadesine sahip oluruz. Bu ifade kendisiyle skaler çarpılır ise

$$\begin{aligned} \langle \kappa n, \kappa n \rangle &= \varepsilon^2 \langle \beta, \beta \rangle + \varepsilon^2 \kappa_g^2 \langle g, g \rangle \\ &= \varepsilon^2 \langle \beta, \beta \rangle - \varepsilon^2 \kappa_g^2 \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \varepsilon^2 \langle \beta, \beta \rangle (1 - \kappa_g^2) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\kappa^2 = 1 - \kappa_g^2 \quad (5.0.22)$$

elde edilir. Bu eşitliğin s ye göre türevi alınırsa

$$\kappa \kappa' = -\kappa_g \kappa_g' \quad (5.0.23)$$

elde edilir. (5.0.21) deki eşitliğin türevini aldığımızda

$$\kappa' n + \kappa n' = -\varepsilon \beta' - \varepsilon \kappa_g' g - \varepsilon \kappa_g g'$$

elde edilir. Bu eşitlikte lemma (5.0.1) deki $\beta' = t$, $n' = -\varepsilon\kappa t + \tau b$ ve $g' = -\varepsilon\kappa_g t$ değerlerini yukardaki eşitlikte yerine yazdığımızda

$$\kappa'n + \kappa(-\varepsilon\kappa t + \tau b) = -\varepsilon t - \varepsilon\kappa'_g g + \varepsilon\kappa_g^2 t$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitlikte $\kappa'n + -\varepsilon\kappa^2 t + \kappa\tau b = -\varepsilon t - \varepsilon\kappa'_g g + \varepsilon\kappa_g^2 t$ elde edilir ve $\kappa^2 = 1 - \kappa_g^2$ olduğundan bu değer yerine yazıldığında $\kappa'n + -\varepsilon(1 - \kappa_g^2)t + \kappa\tau b = -\varepsilon t - \varepsilon\kappa'_g g + \varepsilon\kappa_g^2 t$ eşitliği bulunur ve buradan $\kappa'n + \kappa\tau b = -\varepsilon\kappa'_g g$ dir. Bu ifade kendisiyle skaler çarpılır ise

$$\begin{aligned} \langle \kappa'n + \kappa\tau b, \kappa'n + \kappa\tau b \rangle &= \varepsilon^2 \langle \kappa'_g g, \kappa'_g g \rangle \\ (\kappa')^2 \langle n, n \rangle + \kappa^2 \tau^2 \langle b, b \rangle &= (\kappa'_g)^2 \langle g, g \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece β spacelike olduğundan $\varepsilon = 1$ dir ve buradan

$$(\kappa')^2 - \kappa^2 \tau^2 = -(\kappa'_g)^2$$

veya

$$\frac{\kappa_g^2 (\kappa'_g)^2}{\kappa^2} - \kappa^2 \tau^2 = -(\kappa'_g)^2$$

ya da

$$\kappa_g^2 (\kappa'_g)^2 - \kappa^4 \tau^2 = -(\kappa'_g)^2 \kappa^2$$

dir. Bu eşitliğin düzenlenmesi durumunda

$$\kappa^4 \tau^2 = (\kappa'_g)^2 (\kappa_g^2 + \kappa^2)$$

veya $\kappa^2 = 1 - \kappa_g^2$ yani $\kappa^2 + \kappa_g^2 = 1$ olduğundan

$$\tau = \pm \frac{\kappa'_g}{\kappa^2} = \pm \frac{\kappa'_g}{1 - \kappa_g^2}$$

olarak bulunur. $\beta(s)$ nin timelike bir eğri olması durumunda da $\varepsilon = -1$ olup ispatı aynı şekilde yapabiliriz.

Lemma 5.0.3. S_1^2 veya H^2 de $\beta(s)$ pseudo küresel eğrisinin sıfırdan farklı jeodezik eğriliği $\kappa_g(s)$ olsun. Bu durumda:

1- S_1^2 de β pseudo küresel eğrisi için ;

a) β spacelike iken M eliptik ya da hiperbolik koniksel yüzeydir.

b) β timelike iken M bir hiperbolik koniksel yüzeydir.

2- H^2 de β pseudo küresel eğrisi için ;

a) β' ve β''' paralelleri aynı yöne sahiplerse M hiperbolik koniksel yüzeydir

b) β' ve β''' paralelleri zıt yöne sahiplerse M eliptik koniksel yüzeydir [22].

Teorem 5.0.2. M, E_1^3 te bir koniksel yüzey olsun. Bu durumda M genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir ancak ve ancak M aşağıdaki yüzeylerin bir açık parçasıdır.

i) Bir Öklid düzlem

ii) Bir Minkowski düzlem

iii) Birinci çeşit bir hiperbolik koniksel yüzey

iv) İkinci çeşit hiperbolik koniksel bir yüzey

v) Eliptik bir koniksel yüzey

vi) α_0 bir sabit vektör ve $\beta(s)$ birim hızlı küresel eğri olmak üzere M regle yüzeyi

$$x(s, t) = \alpha_0 + t\beta(s)$$

şeklinde. Burada $\beta(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{F^{-1}(\pm s + a_3)}$$

şeklinde ve F bir fonksiyon ise a_3 reel sabittir. [22].

İspat: M, E_1^3 te bir koniksel yüzey olsun. Yüzeyin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha_0 + t\beta(s), \quad s \in I, \quad t > 0$$

olsun, öyleki $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle = \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \pm 1$ ve α_0 sabit bir vektördür. $e_1 = \frac{1}{t} \frac{d}{ds}$ ve $e_2 = \frac{d}{dt}$ olmak üzere $\{e_1, e_2\}$ M üzerinde ortanormal bir çatıdır. M nin N Gauss dönüşümü $N = \frac{e_1 \wedge e_2}{\|e_1 \wedge e_2\|} = e_1 \wedge e_2$, $e_i = \langle e_i, e_i \rangle$, $i = 1, 2$ ve $\varepsilon_N = \langle N, N \rangle = -\varepsilon_1 \varepsilon_2$ dir. Doğrudan bir hesaplama ile aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \frac{\varepsilon_N}{t} e_2 - \frac{\varepsilon_N \kappa_g(s)}{t} N, \quad \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = \frac{1}{t} e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_1} N = \frac{\varepsilon_1 \kappa_g}{t} e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} N = 0 \quad (5.0.24)$$

Burada β , S_1^2 veya H^2 de bir küresel eğri olmak üzere bu eğrinin jeodezik eğriliği $\kappa_g(s) = \langle \beta(s), \beta'(s) \wedge \beta''(s) \rangle$ dir. (5.0.24) deki eşitliklerden H ortalama eğriliğini

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \langle -D_{e_1} N, e_1 \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \langle -D_{e_2} N, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left\langle -\frac{\kappa_g}{t} e_1, e_1 \right\rangle = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\kappa_g}{t} \langle e_1, e_1 \rangle = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\kappa_g}{t}$$

ve şekil operatörünün karesi $\|A_N\|^2$ yı

$$\|A_N\|^2 = \|-D_e N\|^2 = \frac{\kappa_g^2(s)}{t^2}$$

olarak elde ederiz. Yani

$$H = -\frac{\varepsilon_1 \kappa_g(s)}{2t}, \quad \|A_N\|^2 = \frac{\kappa_g^2(s)}{t^2} \quad (5.0.25)$$

dir. Eğer $\kappa_g = 0$ ise, $\beta(s)$ nin yz (veya xz) düzleminde doğrusal olduğu için M bir Öklid veya Minkowski düzlemin açık bir parçasıdır.

Kabul edelimki $\beta(s)$ nin geodezik eğriliği $\kappa_g \neq 0$ ve M de genelleştirilmiş 1 tipli Gauss dönüşümüne sahip olsun. (5.0.1), (5.0.2) ve (5.0.25) deki eşitliklerinden

$$C_1'(s) - \varepsilon_N C_2(s) + \varepsilon \kappa_g(s) C_N(s) = 0, \quad C_2'(s) = C_1(s), \quad C_N'(s) = \varepsilon_1 \kappa_g(s) C_1(s), \quad (5.0.26)$$

$$-\frac{\varepsilon_1 \kappa_g'(s)}{t^2} = g C_1, \quad \frac{\varepsilon_1 \kappa_g(s)}{t^2} = g C_2, \quad \varepsilon_N \frac{\kappa_g^2(s)}{t^2} = f + \varepsilon_N g C_N$$

elde edilir. Burada $C = \varepsilon_1 C_1 e_1 + \varepsilon_2 C_2 e_2 + \varepsilon_N C_N N$ olmak üzere $C_1 = \langle C, e_1 \rangle$, $C_2 = \langle C, e_2 \rangle$ ve $C_N = \langle C, N \rangle$ dir. (5.0.26) nın yardımıyla $g \neq 0$ olmak üzere

$$g \cdot (\kappa_g(s) C_2)' = 0 \implies C_2 = \frac{c}{\kappa_g(s)} \quad (5.0.27)$$

eşitliği yazabiliriz. Burada c bir integral sabitidir. Bu nedenle $C_2 = \frac{c}{\kappa_g(s)}$ değerini $\frac{\varepsilon_1 \kappa_g(s)}{t^2} = g C_2$ eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$g = \frac{\varepsilon_1 \kappa_g^2}{c t^2} \quad (5.0.28)$$

eşitliği elde edilir. $C_2'(s) = C_1(s)$ ve $C_2 = \frac{c}{\kappa_g(s)}$ eşitliklerinden

$$C_1 = -\frac{c \kappa_g'}{\kappa_g^2} \quad (5.0.29)$$

eşitliği, $C_1' = \frac{2c \kappa_g (\kappa_g')^2 - c \kappa_g^2 \kappa_g''}{\kappa_g^4}$ ve $C_1'(s) - \varepsilon_G C_2(s) + \varepsilon \kappa_g(s) C_N(s) = 0$ eşitliklerinden

$$C_N = \frac{c \varepsilon_N (\kappa_g'' \kappa_g - 2(\kappa_g')^2 + \varepsilon_G \kappa_g^2)}{\kappa_g^4} \quad (5.0.30)$$

eşitliği elde edilir. f fonksiyonunun (5.0.26), (5.0.28) ve (5.0.30) tarafından belirlenmektedir. Şimdi $\varphi = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ değerini (5.0.27) ve (5.0.29) de yerine yazdığımızda

$$C_2 = c\varphi, \quad C_1 = c\varphi' \quad (5.0.31)$$

eşitlikleri elde edilir. (5.0.26) deki $C_1'(s) - \varepsilon_G C_2(s) + \varepsilon \kappa_g(s) C_N(s) = 0$ eşitliğinde (5.0.31) deki $C_1' = c\varphi''$, $C_2 = c\varphi$ ve $\varphi = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ değerleri yerine yazdığımızda (5.0.32) deki birinci eşitlik, (5.0.26) de $C_N'(s) = \varepsilon_1 \kappa_g(s) C_1(s)$ eşitliğinde $C_1 = c\varphi'$ ile $\varphi = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ eşitliklerini yerine yazdığımızda (5.0.32) deki ikinci eşitlik elde edilir. (5.0.26) ve (5.0.30) dan

$$C_N = c(\varphi^2 - \varepsilon_N \varphi \varphi''), \quad C_N' = \frac{\varepsilon_1 c \varphi'}{\varphi} \quad (5.0.32)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden

$$\varphi^2 \varphi''' + \varphi \varphi' \varphi'' - 2\varepsilon_N \varphi^2 \varphi' - \varepsilon_2 \varphi' = 0 \quad (5.0.33)$$

elde edilir. (5.0.33) denkleminde $p = \frac{d\varphi}{ds}$ alınır

$$\varphi p \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\varphi p \frac{dp}{d\varphi} \right) - 2\varepsilon_N \varphi - \frac{\varepsilon_2}{\varphi} \right) = 0 \quad (5.0.34)$$

elde edilir. $\varphi > 0$ olması durumunda iki durum karşımıza çıkar.

İspat:

1. Durum :

$p = \frac{d\varphi}{ds} = 0$ olsun. κ_g jeodezik eğriliği sıfırdan farklı bir sabit olur. Gerçektende $\varphi = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ için $\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\kappa_g'(s)}{\kappa_g^2(s)} = 0$, $\kappa_g'(s) = 0$ ise $\kappa_g(s) = c$ dir. Bu nedenle Lemma (5.0.3) den dolayı M yüzeyi bir eliptik konik yüzey veya hiperbolik koniksel yüzeydir. Ayrıca, eliptik bir koniksel yüzey birinci çeşit ve ikinci çeşit hiperbolik bir koniksel yüzeydir.

2. Durum :

$p = \frac{d\varphi}{ds} \neq 0$ olsun. O halde

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\varphi p \frac{dp}{d\varphi} \right) - 2\varepsilon_N \varphi - \frac{\varepsilon_2}{\varphi} = 0 \quad (5.0.35)$$

dir. Bu ifadenin integralini aldığımızda bazı a_1 integral sabiti olmak üzere

$$\varphi p \frac{dp}{d\varphi} - \varepsilon_N \varphi^2 - \varepsilon_2 \ln \varphi = \frac{a_1}{2} \quad (5.0.36)$$

eşitliği elde edilir. (5.0.36) daki eşitliğin tekrardan integralini aldığımızda

$$p^2 = a_1 \ln \varphi + a_2 + \varepsilon_N \varphi^2 + \varepsilon_2 (\ln \varphi)^2 \quad (5.0.37)$$

eşitliği elde edilir. (5.0.37) eşitliğinde tekrar $p = \frac{d\varphi}{ds}$ değerini yerine yazdığımızda

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm (a_1 \ln \varphi + a_2 + \varepsilon_N \varphi^2 + \varepsilon_2 (\ln \varphi)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.0.38)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten

$$\frac{d\varphi}{(a_1 \ln \varphi + a_2 + \varepsilon_N \varphi^2 + \varepsilon_2 (\ln \varphi)^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm ds \quad (5.0.39)$$

yazılabilir. (5.0.39) deki $\psi(\varphi) = (a_1 \ln \varphi + a_2 + \varepsilon_N \varphi^2 + \varepsilon_2 (\ln \varphi)^2)^{-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun belirsiz bir integral $F(\varphi)$ için,

$$F(\varphi) = \pm s + a_3 \quad (5.0.40)$$

dir. Burada a_3 bir integral sabitidir. Burada işaret φ nin türevinin işaretine göre belirlenir. Buradan

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{\varphi(s)} = \frac{1}{F^{-1}(\pm s + a_3)} \quad (5.0.41)$$

eşitliğini de yazabiliriz. Ayrıca, (5.0.31) ve (5.0.32) den sabit C vektörü

$$C = c (\varepsilon_1 \varphi' e_1 + \varepsilon_2 \varphi e_2 + (\varphi^2 - \varepsilon_N \varphi \varphi'') N) \quad (5.0.42)$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\varphi(s) = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ değerini (5.0.42) da yerine yazdığımızda eşdeğeri olan

$$C = c \left(-\frac{\kappa_g'}{\kappa_g^2} e_1 + \frac{1}{\kappa_g} e_2 + \frac{\varepsilon_G \kappa_g(s) \kappa_g''(s) - 2\varepsilon_G \kappa_g'(s)^2 + \kappa_g^2(s)}{\kappa_g^4(s)} cN \right) \quad (5.0.43)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Tersine a ve b sabitler olmak üzere $\psi(t)$ fonksiyonu $J \subset (0, \infty)$ aralığında

$$\psi(t) = (a \ln t + b + \varepsilon_N t^2 + \varepsilon_2 (\ln t)^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.0.44)$$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$$F(t) = \int_0^t \psi(t) dt$$

diyelim. Eğer F fonksiyonunun görüntü kümesi I ile gösterilirse

$$F : J \rightarrow I$$

$F'(t) = \psi(t)$ yi sağlayan artan bir fonksiyondur. Şimdi

$$\varphi_{\pm}(s) = F^{-1}(\pm s + a_3)$$

olmak üzere $\varphi_+(s) : I \rightarrow J$, $\varphi_-(s) : -I \rightarrow J$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada $-I$ dan kastedilen $-I = \{-s \mid s \in I\}$ dir. Bu durumda $\varphi = \varphi_{\pm}$ fonksiyonu $I \pm$ üzerinde bir pozitif fonksiyondur ve $F(\varphi) = \pm s + a_3$ dir.

E^3 teki M koniksel yüzeyinin β birim hızlı pseudo küresel eğrisinin jeodezik eğriliği $\kappa_g(s) = \frac{1}{\varphi(s)}$ ve α_0 sabit vektör olmak üzere yüzeyin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha_0 + t\beta(s), \quad s \in I, \quad t > 0 \quad (5.0.45)$$

şeklinededir. Sıfırdan farklı bir c değişkeni göz önüne alındığında, (5.0.26) deki $\varepsilon_N \frac{\kappa_g'(s)}{t^2} = f + \varepsilon_N g C_N$ eşitliğinde (5.0.28) deki $g = \frac{\varepsilon_1 \kappa_g^2}{ct^2}$ eşitliği, (5.0.32) deki $C_N = c(\varphi^2 - \varepsilon_N \varphi \varphi'')$ ve $\varphi = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ eşitlikleri yerine yazıldığında f fonksiyonunu, (5.0.28) deki $g = \frac{\varepsilon_1 \kappa_g^2}{ct^2}$ eşitliğinde $\varphi = \frac{1}{\kappa_g(s)}$ ifadesini yerine yazdığımızda g fonksiyonunu

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \frac{1}{t^2 \varphi^2(s)} (\varepsilon_1 \varphi(s) \varphi''(s) + \varepsilon_2 \varphi^2(s) + \varepsilon_N t^2) \\ g(s, t) &= \frac{\varepsilon_1}{ct^2 \varphi^2(s)} \end{aligned} \quad (5.0.46)$$

olarak elde ederiz. M üzerinde ortonormal tanjant bir çatı $\{e_1, e_2\}$ olmak üzere $e_1 = \frac{1}{t} \frac{d}{ds}$ ve $e_2 = \frac{d}{dt}$ dir. M nin N Gauss dönüşümü $N = e_1 \wedge e_2$ olmak üzere C vektör alanını

$$C = c(\varepsilon_1 \varphi' e_1 + \varepsilon_2 \varphi e_2 + (\varepsilon_N \varphi^2 - \varepsilon_N \varphi \varphi'') N) \quad (5.0.47)$$

olarak elde ederiz. (5.0.33) ve (5.0.24) eşitliklerini kullanarak

$$\tilde{\nabla}_{e_1} C = \tilde{\nabla}_{e_2} C = 0 \quad (5.0.48)$$

eşitliği elde edilir. Bu C nin sabit bir vektör olduğu anlamına gelir. Ayrıca M koniksel yüzeyinin N Gauss dönüşümü için

$$\Delta N = fN + gC$$

eşitliği sağlanmış olup f , g ve C sırasıyla (5.0.46) ve (5.0.47) de verilmiştir. Bu M koniksel yüzeyinin genelleştirilmiş 1 tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu gösterir. Bu nedenle konik yüzeyler için iddiamız ispatlanmış olur.

Teorem 5.0.3. E_1^3 te genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip teğet açılabilir yüzey, Öklid veya bir Minkowski düzlemin açık bir parçasıdır [22].

İspat: M, E_1^3 te teğet açılabilir bir yüzey olsun. Bu durumda, M yüzeyinin parametrik denklemi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\alpha'(s), \quad s \in I, \quad t \neq 0$$

olmak üzere E_1^3 te sıfırdan farklı birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliği $\kappa(s)$ olsun. $\alpha(s)$ nin teğet vektörü, birim normal vektörü ve binormal vektörü t, n ve b olmak üzere $\{t, n, b\}$ Frenet çatısı için $\varepsilon_t = \langle t, t \rangle$, $\varepsilon_n = \langle n, n \rangle$, $\varepsilon_b = \langle b, b \rangle$ olarak alalım. x in $\{x_s, x_t\}$ doğal çatısı için

$$x_s = t + \varepsilon_n t \kappa(s) n, \quad x_t = \alpha'(s) = t$$

x parametresi $t \kappa(s) \neq 0$ olduğundan düzenlidir. M nin $\{e_1, e_2\}$ ortonormal çatısı için $\varepsilon_1 = \langle e_1, e_1 \rangle$ ve $\varepsilon_2 = \langle e_2, e_2 \rangle$ dir.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial t} = t \\ e_2 &= \frac{\varepsilon_n}{t \kappa(s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \right) = n \end{aligned} \quad (5.0.49)$$

Bu durumda, M nin N Gauss dönüşümü için $N = e_1 \wedge e_2 = t \wedge n = b$ ve $\varepsilon_N = \langle N, N \rangle$ dir. Doğrudan bir hesaplama yaparak,

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \frac{1}{t} e_2, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{\varepsilon_N}{t} e_1 - \frac{\varepsilon_1 \tau(s)}{t \kappa(s)} N \quad (5.0.50)$$

elde edilir. Bu denklemlerden aşağıdaki eşitlikler elde edilir. Yukarıdaki bu denklemlerden

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tau(s)}{2t \kappa(s)} \\ \|A_N\|^2 &= \left(\frac{\tau(s)}{t \kappa(s)} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.0.51)$$

olarak bulunur. Şimdi, teğet açılabilir yüzey olan M nin genelleştirilmiş 1 tip Gauss dönüşümüne sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda s ye bağlı C_1, C_2 ve C_N bileşenleri için sabit vektör $C = \varepsilon_1 C_1 e_1 + \varepsilon_2 C_2 e_2 + \varepsilon_N C_N N$ dir. C nin türevi alınır ve (5.0.50) denklemleri kullanılırsa

$$C'_1 - \varepsilon_2 \kappa(s) C_2 = 0 \quad (5.0.52)$$

$$C'_2 + \varepsilon_1 \kappa(s) C_1 - \varepsilon_N \tau(s) C_N = 0 \quad (5.0.53)$$

$$C'_N + \varepsilon_2 \tau(s) C_2 = 0 \quad (5.0.54)$$

(5.0.51) denklemlerinden

$$-\frac{\tau(s)}{t^2 \kappa(s)} = g C_1 \quad (5.0.55)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{t^2 \kappa(s)} \left(\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' + \frac{\tau(s)}{t \kappa(s)} \right) = g C_2 \quad (5.0.56)$$

$$\frac{\varepsilon_G \tau^2(s)}{t^2 \kappa^2(s)} = f + \varepsilon_N g C_N \quad (5.0.57)$$

ifadelerine sahip oluruz. (5.0.55) ve (5.0.56) denklemleri birlikte gözönüne alınırsa

$$\tau(s) C_2 + \varepsilon_2 \left(\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' + \frac{\tau(s)}{t \kappa(s)} \right) C_1 = 0 \quad (5.0.58)$$

denklemleri veya buna denk olan

$$\left(\varepsilon_2 \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' C_1 + \tau(s) C_2 \right) t \kappa(s) + \varepsilon_2 \tau(s) C_1 = 0 \quad (5.0.59)$$

denklemlerini buluruz. $t \neq 0$ olduğundan, (5.0.59) 'dan itibaren aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' C_1 + \tau(s) C_2 &= 0 \\ \varepsilon_2 \tau(s) C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.0.60)$$

Son olarak, $\alpha(s)$ eğrisinin $\tau(s)$ torsiyonunun sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu durumda $J = \{s \in I \mid \tau(s) \neq 0\}$ kümesi için, (5.0.60) den $C_1 = 0$ ve $C_2 = 0$ dir. (5.0.53) 'den $C_N = 0$ dir. Böylece $C = 0$ olur. (5.0.2) ve (5.0.51) den ortalama eğriliği $H = \frac{\tau(s)}{2t \kappa(s)}$ sabit olduğunu gösterir ve bu da τ torsiyonun sıfıra eşit olduğu anlamına gelir. Yani, $J = \{s \in I \mid \tau(s) \neq 0\}$ kümesini boş küme olduğunu gösterir ki bu da çelişkiye neden olur. Bu, $\alpha(s)$ eğrisinin bir düzlemsel olduğu ve dolayısıyla M yüzeyinin Öklid veya Minkowski düzlemin açık bir parçası olduğu sonucunu verir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.0.4. *Minkowski 3-uzayı E_1^3 te bir null scrool genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir ancak ve ancak Minkowski düzlemin bir parçası veya B – scroll bir parçasıdır [22].*

İspat: M, E_1^3 te $\alpha(s)$ null eğri tarafından üretilen null scroll yüzey ve $\beta(s)$, α boyunca null vektör alanı olsun. M nin parametrik ifadesi

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) \quad (5.0.61)$$

olarak verilsin. Burada $\langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', \beta \rangle = -1$ dir. Genelliği bozmaksızın kabul edelimki α eğrisinin, parametresinin uygun bir şekilde değiştirilmesiyle bu eğrinin M null scroll yüzeyinin bir jeodezik eğrisi olsun. Yani tüm s ler için $\langle \alpha'(s), \beta'(s) \rangle = 0$ olsun. Bu

durumda $\alpha(s)$ boyunca pseudo-ortonormal çatı $\{\alpha'(s), \beta(s), \gamma(s) = \alpha'(s) \wedge \beta(s)\}$ dir. $u(s)$ ve $v(s)$ diferansillenebilir fonksiyonlarını

$$u(s) = \langle \alpha''(s), \gamma(s) \rangle, \quad v(s) = \langle \beta(s), \gamma'(s) \rangle$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u(s) \\ 0 & 0 & -v(s) \\ -v(s) & u(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} \quad (5.0.62)$$

diferansiyel denklem sistemine sahip oluruz. Doğrudan bir hesaplama yaparak, N Gauss dönüşümü

$$N = v(s)t\alpha'(s) + \gamma(s) \quad (5.0.63)$$

şeklinde elde edilir. N Gauss dönüşümünün Laplasyanı

$$\Delta N = 2(v'(s) + tv^3(s))\alpha'(s) + 2u(s)v(s)\gamma(s) \quad (5.0.64)$$

şeklinde elde edilir. M nin genelleştirilmiş 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$2v' + 2tv^3 = fvt + gC_1, \quad gC_2 = 0, \quad 2u(s)v(s) = f + gC_N \quad (5.0.65)$$

elde edilir. Burada $C = C_1\alpha' + C_2\beta + C_N\gamma$ ile $C_1 = -\langle C, \beta \rangle$, $C_2 = -\langle C, \alpha' \rangle$ ve $C_N = \langle C, \gamma \rangle$ dir.

Diyelim ki (5.0.65) deki ikinci denklemden $g = 0$ olsun. (5.0.65) deki birinci ve üçüncü denklemlerden aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$v' + t(v^3 - v^2u) = 0$$

bu eşitlikten $v' = 0$ ve $v^2(v - u) = 0$ anlamını çıkarırız. Bu nedenle $v \neq 0$ sabiti için $v = u = u_0 (\neq 0)$ dir. Sonuç olarak $f = 2u_0^2$ yazabiliriz. Bu durumda N Gauss dönüşümünün Laplasyanı $\Delta N = 2u_0^2N$ şeklindedir, bu da M nin B-scroll olduğu anlamına gelir.

Şimdi, $\mathcal{O}$ açık kümesini düşünelim. $\mathcal{O} = \{q \in M \mid g(q) \neq 0\}$

$\mathcal{O}$ nun boş küme olmadığını varsayalım. Bu durumda (5.0.65) in ikinci denklemden $\mathcal{O}$ nun bir $\mathcal{O}_0$ bileşeni için $C_2 = 0$ olur. $C_2 = -\langle C, \alpha' \rangle$ ve $C_N = \langle C, \gamma \rangle$, s ye göre türevi alınırsa

$$-uC_N = 0, \quad C'_N = -uC_1 \quad (5.0.66)$$

elde edilirki, bu C_N ün $\mathcal{O}_0$ üzerinde sabit olduğu anlamına gelir.

1. Durum:

$\mathcal{O}_0$ üzerinde $C_N = 0$ olsun.

Bu durumda $C_1, C'_1 = vC_N$ için sabittir. $C_1 \neq 0$ ise, (5.0.66) dan $u = 0$ dır. (5.0.65) in üçüncü denkleminde, $f = 0$ olmalıdır. Böylece null scroll karakterize edilmiş olur. Gerçekten de $\alpha'' = 0$ olduğundan α' sabittir. Genellik bozulmaksızın $\alpha'(s) = (1, 1, 0)$ olarak düşünelim. $\beta(s) = (A(s), B(s), C(s))$ null vektör olsun. Burada $A(s), B(s)$ ve $C(s)$, s ye bağlı fonksiyonlardır. Bu durumda $A^2 = B^2 + C^2$ ye sahip oluruz. $\langle \alpha', \beta \rangle = -1$ için $B = A - 1$ elde ederiz ve buradan $B' = A'$ olur. (5.0.1) ve (5.0.64) dan $u = 0$ ve $f = 0$ olması $v = 0$ olduğunu gösterir. $v(s) = \langle \beta(s), \gamma'(s) \rangle = A(s)C'(s) - B(s)C'(s) = C'(s)$, $C'(s) = 0$ olduğundan C sabittir. $C = -1$ olduğunu düşünelim. $\gamma(s) = \alpha'(s) \wedge \beta(s)$ olduğundan $\gamma(s) = (1, 1, -1)$ olduğunu söyleyebiliriz. $A^2 = B^2 + C^2$ ve $B = A - 1$ olması $\beta(s) = (1, 0, -1)$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, $\alpha(0) = 0$ için $x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s) = (s + t, s, -t)$ olacağından yüzey bir Minkowski düzlemdir. Böylece M yüzeyi birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir.

2. Durum:

$\mathcal{O}_0$ üzerinde $C_N \neq 0$ olsun.

Bu durumda $u = 0$ dır. O zaman (5.0.65) nin üçüncü denkleminde $f = -gC_N$ olduğunu söyleriz. Böylece $\Delta N = -gC_N \left(N - \frac{1}{C_N} C \right)$ dir. Yani M yüzeyi noktasal 1 tipli Gauss dönüşümüne sahiptir ve ayrıca bir Minkowski düzlemdir.

KAYNAKLAR

- [1] **Takahashi, T.** (1966). J. Math. Soc. Japon 18, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, (4), 380–385.
- [2] **Chen, B.Y.** (1983). On submanifolds of finite type, *Soochow Journal of Mathematics*, 9, 16–33.
- [3] **Garay, O.J.** (1990). Geom dedicata, *An extension of Takahashi's theorem*, 34, 105–112.
- [4] **Dillen F., Pas, J. ve Verstraelen, L.** (1990). Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, *On the Gauss map of surfaces of revolution*, 18, 239–246.
- [5] **Ferrandez, A. ve Lucas, P.** (2000). Czechoslovak Mathematical Journal, *On the Gauss map of B-scrolls in 3-dimensional Lorentzian space forms*, 50, 699–704.
- [6] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2005). Rocky Mountain J. Math., *On the Gauss Map of Ruled Surfaces in Minkowski Space*, 35(5), 1555–1581.
- [7] **L. J. Alias, A. Ferrandez, P.L.M.A.M.** (1998). Tsukuba J. Math., *On the Gauss map of B-scrolls*, 22, 371–377.
- [8] **Baikoussis, C., C.B.Y. ve Verstraelen, L.** (1993). Tokyo J. Math., *Ruled surfaces and tubes with finite type Gauss map*, 16, 341–349.
- [9] **Choi, S.M.** (1995). Tsukuba J. Math, *On the Gauss map of ruled surfaces in a 3-dimensional minkowski space*, 19, 285–304.
- [10] **Choi, M., Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2011). Taiwanese J. Math, *Classification of Ruled Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map in Minkowski 3-Space*, 15, 1141–1161.
- [11] **Hacısalıhoğlu, H.H.** (2000). *Diferensiyel Geometri*, ciltI,II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.
- [12] **Sodsiri, W.** (2005). *Ruled surfaces of weingarten type in minkowski 3-space* (Doktora Tezi). Katholieke University Leuven Belgium.
- [13] **Do Carmo, M.P.** (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., translated from the Portuguese.
- [14] **Kühnel, W.** (2006). *Differential geometry: curves - surfaces - manifolds*, American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [15] **Neill, B.** (2006). *Elementary differential geometry*, Elsevier Academic Press, Amsterdam Boston.
- [16] **Pressley, A.N.** (2010). *Elementary Differential Geometry*, Springer London, https://www.ebook.de/de/product/8787121/a_n_pressley_elementary_differential_geometry.html.
- [17] **Ryan, P.J.** (1986). *Euclidean and non-Euclidean geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, an analytical approach.

- [18] **Greub, W.H.** (1981). *Linear Algebra*, New York Heidelberg Berlin.
- [19] **Sabuncuoğlu, A.** (2014). *Diferensiyel geometri*, Nobel, Kızılay, Ankara.
- [20] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2000). Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map, *Journal of Geometry and Physics*, 34(3-4), 191–205.
- [21] **Kim, Y.H. ve Yoon, D.W.** (2004). Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces, *Journal of Geometry and Physics*, 49(1), 89–100.
- [22] **Yoon, D.W., Kim, D.S., Kim, Y.H. ve Lee, J.W.** (2018). Classifications of flat surfaces with generalized 1-type Gauss map in L^3 , *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15(3), Paper No. 78, 16.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ümit GÜNAY

Doğum Tarihi ve Yeri : 13.12.1984, Malatya

E-Posta : umit.gunay38888@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2008, AKÜ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

