



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

RUKİYE GENÇ

**MINKOWSKI_n – UZAYINDAKİ HELİKOİDAL YÜZEYLER
ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLARIN
KARAKTERİZASYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

YOZGAT- 2021



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

RUKİYE GENÇ

**MINKOWSKI_n – UZAYINDAKİ HELİKOİDAL YÜZEYLER
ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLARIN
KARAKTERİZASYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

YOZGAT- 2021



TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

RUKİYE GENÇ

24 Haziran 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI	ii
TEZ BEYANI.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
SİMGELER.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. E_1^n DEKİ UZAYSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLAR.....	12
4. E_1^n DEKİ ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLAR.....	21
5. KAYNAKLAR	32
6. ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI n – UZAYINDAKİ HELİKOIDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLARIN KARAKTERİZASYONLARI

Rukiye GENÇ

Danışman: Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

2021– Sayfa: 34 +VII

Jüri: Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Bu tez çalışmasında; Minkowski n – uzayındaki helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların karakterizasyonları çalışılmıştır. Bu çalışmanın birinci bölümünde; loksodromların tarihsel gelişiminden, uygulama alanlarından ve genel tanımından bahsedilmiştir. Ayrıca bu alanda yapılan bazı çalışmaların literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde; Minkowski n – uzayındaki eğri ve yüzeyler ile ilgili bazı temel tanımlar ve formüller verilmiştir. Ayrıca Minkowski n – uzayındaki helikoidal yüzeylerin parametrizasyonları elde edilmiştir. Üçüncü bölümde; uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromların diferansiyel denklemleri ve genel çözümleri oluşturulmuştur. Ayrıca uzaysal dik helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların parametrizasyonları ve yay uzunlukları elde edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde; zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromların diferansiyel denklemleri ve genel çözümleri verilmiştir. Ayrıca zamansal dik helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların parametrizasyonları ve yay uzunlukları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Loksodrom, Helikoidal Yüzey, Dönel Yüzey, Minkowski Uzayı

ABSTRACT

Master Thesis

THE CHARACTERIZATIONS OF SPACELIKE LOXODROMES ON HELICOIDAL SURFACES IN MINKOWSKI n – SPACE

RUKİYE GENÇ

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat BABAARSLAN
Co-Advisor: Assist. Prof. Dr. Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ**

2021 – Page: 34+ VII

**Jury: Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ
Assoc. Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU
Assist. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKİZ**

In this thesis; the characterizations of space-like loxodromes on helicoidal surfaces in Minkowski n – space are studied. In the first part of this study; the historical development, application areas and general definition of loxodromes are mentioned. In addition, a summary of the literature of some studies in this field is given. In the second chapter; some basic definitions and formulas about curves and surfaces in Minkowski n – space are given. In addition, the parameterizations of helicoidal surfaces in Minkowski n – space are obtained. In the third chapter; differential equations and general solutions of space-like loxodromes on the space-like helicoidal surfaces are obtained. Also, the parametrizations and arc-lengths of space-like loxodromes on the space-like right helicoidal surfaces are obtained. In the fourth chapter of the thesis; the differential equations and general solutions of space-like loxodromes on the time-like helicoidal surface are given. Also, the parametrizations and arc-lengths of space-like loxodromes on the time-like right helicoidal surfaces are obtained.

Keywords: Loxodrome, Helicoidal Surface, Rotational Surface, Minkowski Space

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
E_1^n	Minkowski n – uzayı
E^n	Euclid n – uzayı
R	Reel sayılar kümesi
$\langle x, y \rangle$	Skalar çarpım
$\ \cdot \ $	Norm
β_i	Profil eğrisi
P_i	Düzlem
P_i	Hiperdüzlem
M_i	Helikoidal yüzey
g_i	İndirgenmiş metrik tensör
G	İşaret matrisi
E, F, G	Birinci temel form katsayıları
ds^2	Birinci temel form
a_i	Helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrileri
γ_i	Dik helicoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrileri
s	Yay uzunluğu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil

Sayfa

- Şekil 1. Uzaysal dik helikoidal yüzey, uzaysal meridyen eğrisi,
uzaysal loksodromun izdüşümleri31



ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, Minkowski n – uzayındaki uzaysal ve zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromların parametrizasyonları araştırılmıştır.

Yüksek lisans ve tez sürecince bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, her koşulda desteklerini sunan, yardım ve katkılarıyla rehber olan değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Murat BABAARSLAN (Yozgat Bozok Üniversitesi) ve Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ (Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi)’ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca desteklerini benden hiç esirgemeyen, her daim bir çınar ağacı gibi arkamda duran kıymetli babam Adnan GENÇ ve fedakârlığıyla yanımda olan kıymetli annem Hacer GENÇ’e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca tez yazım süresince bilgi ve desteklerini benden esirgemeyen sevgili kardeşim Ayşe GENÇ’e teşekkür ederim.

Bu yolda beni yalnız bırakmayan değerli yol arkadaşım Zehra ÖGE’ye kıymetli desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

RUKİYE GENÇ

24 Haziran 2021

1. GİRİŞ

İlk çağlardan günümüze kadar dünyanın şekliyle ilgili çeşitli varsayımlar ortaya atıldı. Tarihsel süreç içerisinde dünyanın şekli; düzlem, küre, elipsoid ve geoit ile tanımlanmıştır. Bu bilgiler doğrultusunda dünya yüzeyi üzerinde hesaplama yapabilmek için matematiksel olarak tanınmış bir referans yüzey kullanılır. Dünyanın şekline en uygun geometrik yapının dönel elipsoid olduğu düşünülebilir. Fakat elipsoidin geometrisinden kaynaklanan zorluklar nedeniyle, elipsoid yerine küre de kullanılabilir. Dünya tam bir küre olmasa da küre üzerindeki geodezik ve loksodrom eğrileri çok önemlidir. Loksodrom, dünya yüzeyi üzerindeki bütün meridyenleri sabit açıyla kesen özel bir eğridir. İki noktayı birleştiren loksodrom eğrisi, iki nokta arasındaki en kısa uzaklık (geodezik) değildir. Ancak birbirine yakın noktalarda geodezik ve loksodrom uzaklıkları arasındaki fark fazla değildir. Loksodrom üzerinde her noktanın kuzeyle yaptığı açı değişmediği için eğriye “sabit pusula açısı altında gidilen yol” denir. Gemiler yolculuklarını sabit kuzey açısı altında ve loksodrom eğrisi üzerinde yaparlar. Bu yüzden loksodrom eğrileri özellikle deniz trafiğinde ve navigasyonda sıklıkla kullanılır. Matematiksel bakış açısıyla, geometriciler farklı uzaylarda farklı yüzeyler üzerindeki loksodromları çalışmışlardır.

1905 yılında Noble, Euclid 3– uzayındaki dönel yüzeyler üzerinde loksodromların denklemlerini bulmuştur (Noble, 1905). Ayrıca küre üzerindeki loksodromların logaritmik spirallere ve doğrulara karşılık geldiğini göstermiştir. Bunlara ek olarak küre üzerindeki loksodromların yay uzunluklarını Kos, Vranic ve Zec tarafından hesaplanmıştır (Kos ve ark., 1999). Petrovic de elipsoid üzerindeki loksodromların yay uzunluklarını bulmuştur (Petrovic, 2007).

Babaarslan ve Yaylı, Minkowski 3– uzayındaki meridyenleri uzaysal ve zamansal olan dönel yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların denklemlerini bulmuşlardır (Babaarslan ve Yaylı, 2014).

Babaarslan ve Munteanu, Minkowski 3– uzayındaki meridyenleri zamansal olan dönel yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların denklemlerini bulmuşlardır (Babaarslan ve Munteanu, 2015).

Helikoidal yüzeyler bir öteleme ve bir dönmenin bileşkesi olan hareketler altında değişmez olduğundan, dönel yüzeylerin bir genellemesi olarak düşünülebilir. Doğada, bilimde, mühendislikte helikoidal yapılara ve nesnelere sık sık rastlanır (Babaarslan ve Yaylı, 2015). Örneğin, sarmaşık bitkiler, helikoidal merdivenler, helikoidal konveyörler, otopark garaj rampaları, helikoidal demiryolları, yürüyen merdivenler, helikoidal kuleler ve gökdelenler (Capanna ve ark., 2012), jeolojide helikoidal kırıklar (Pollard ve Fletcher, 2005), tropikal kasırgalar (Levina ve Montgomery, 2010).

Bour, bir helikoidal yüzey için bu yüzeye izometrik olan bir dönel yüzeyin varlığını bulmuştur. Ayrıca helikoidal yüzey üzerindeki meridyen eğrilerine, dönel yüzey üzerindeki paralel eğrilerin karşılık geldiğini göstermiştir (Bour, 1982).

Do Carmo ve Dajczer sabit ortalama eğrilikli helikoidal yüzeylerin hareketleri boyunca değişmez olduklarını, yüzeyin minimal olması halinde dairesel silindire benzediğini göstermişlerdir (Do Carmo ve Dajczer, 1982).

Ikawa, Minkowski 3- uzayındaki helikoidal yüzeylerin uzaysal ve zamansal olma koşullarını eksen ve profil eğrisine göre sınıflandırmıştır. Ayrıca Minkowski 3- uzayında Bour teoreminin sağlandığını göstermiştir (Ikawa, 2001).

Güler, Minkowski 3- uzayında dönme eksenini ışıkla alarak uzaysal (zamansal) helikoidal yüzey ile uzaysal (zamansal) dönel yüzeyler için Bour teoremini sağladığını göstermiştir (Güler, 2005).

Babaarslan ve Yaylı, Euclid 3- uzayında helikoidal yüzeyler üzerinde loksodromların diferansiyel denklemlerini oluşturmuşlardır (Babaarslan ve Yaylı, 2015).

Babaarslan ve Kayacık, Minkowski 3- uzayında uzaysal ve zamansal meridyenli helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromları araştırmışlardır (Babaarslan ve Kayacık, 2017). Ayrıca, Babaarslan ve Kayacık, Minkowski 3- uzayında uzaysal ve zamansal meridyenli helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromları çalışmışlardır (Babaarslan ve Kayacık, 2020).

Babaarslan, Euclid 4 – uzayında helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemlerini elde etmiştir (Babaarslan, 2019).

Minkowski 4 – uzayında, uzaysal, zamansal ve ışıksal düzlemleri sabit bırakan üç tip dönme metrisi vardır. Dursun ve Bektaş, bu dönme matrisleri kullanarak Minkowski 4 – uzayındaki eliptik, hiperbolik ve parabolik tip uzaysal dönel yüzeyler üzerinde Gauss tasvirlerini çalışmışlardır (Dursun ve Bektaş, 2014). Ayrıca, Dursun ve Bektaş, Minkowski 4 – uzayındaki eliptik, hiperbolik ve parabolik tip zamansal dönel yüzeylerin denklemlerini bulmuşlardır (Bektaş ve Dursun, 2015).

Selvi, Minkowski 4 – uzayında uzaysal dönel yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların denklemleri elde etmiştir (Selvi, 2020). Ayrıca, Babaarslan ve Gümüş, Minkowski 4 – uzayında, zamansal dönel yüzeyler üzerindeki uzaysal ve zamansal loksodromların diferansiyel denklemlerini oluşturmuşlardır (Babaarslan ve Gümüş, 2021).

Minkowski 4 – uzayındaki dönel yüzeylerin bir genellemesi olan helikoidal yüzeyler Sönmez ve Babaarslan tarafından oluşturulmuştur. Ayrıca, Minkowski 4 – uzayında dejenere olmayan helikoidal yüzeyler üzerinde loksodromların parametrizasyonlarını elde edilmiştir (Babaarslan ve Sönmez, 2020).

Babaarslan, Euclid n – uzayındaki helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemlerini elde etmiştir (Babaarslan, 2020).

Bu tez çalışmasında, Minkowski 4 – uzayındaki helikoidal yüzeylerin bir genellemesi olarak, Minkowski n – uzayında dejenere olmayan helikoidal yüzeyler oluşturulmuştur. Minkowski n – uzayındaki uzaysal helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra uzaysal loksodromların parametrizasyonları ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Benzer hesaplamalar zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromlar için yapılmıştır. Özel durum olarak, Minkowski n – uzayında dejenere olmayan dik helikoidal yüzeyler üzerinde uzaysal loksodromlar çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Minkowski n – uzayında eğri ve yüzeyler ile ilgili bazı temel tanımlar ve formüller verilecektir. Ayrıca helikoidal yüzeylerin parametrizasyonları elde edilecektir.

Tanım 2.1. E^n , Euclid n – uzayında $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri için x ve y nin skalar çarpımı

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad (2.1)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Bu skalar çarpım ile birlikte E^n , Euclid uzayına Minkowski n – uzayı denir ve E_1^n şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. E_1^n uzayında bir vektör x olsun. x vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|} \quad (2.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. Ayrıca $\langle x, x \rangle = \pm 1$ ise, x vektörüne birim vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3. E_1^n deki keyfi bir x vektörünün koszul karakteri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

i. $\|x\| > 0$ veya $x = 0$ ise, x vektörüne uzaysal,

ii. $\|x\| < 0$ ise, x vektörüne zamansal,

iii. $\|x\| = 0$ ve $x \neq 0$ ise, x vektörüne ışıksal vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$ veya $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -1$ ise, α eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda, $t \in I$ parametresine, eğrinin yay-parametresi denir.

Tanım 2.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^n$ eğrisinin her noktasında $\alpha'(t) \neq 0$ ise bu eğriye regüler (düzgün) bir eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^n$ düzgün bir eğri olsun. Eğer $\alpha'(t)$ hız vektörü uzaysal (zamansal, ışıksal) ise α ya uzaysal (zamansal, ışıksal) bir eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.7. $x: M \rightarrow E_1^n$, M yarı-Riemann yüzeyinden E_1^n uzayına giden izometrik bir daldırma olmak üzere, $\{u, v\}$ koordinat sistemine göre M nin birinci temel formu,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklinde dir. Buradaki E , F ve G , birinci temel form katsayılarıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, F = \langle x_u, x_v \rangle \text{ ve } G = \langle x_v, x_v \rangle. \quad (2.3)$$

Burada, x_u ve x_v sırasıyla, x yer vektörünün u ve v göre kısmi türevleridir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.8. E_1^n deki M yarı-Riemann yüzeyinin uzaysal (zamansal) olması için gerek ve yeter koşul $EG - F^2 > 0$ ($EG - F^2 < 0$) olmasıdır. $EG - F^2 = 0$ olması durumunda ise M dejenere bir yüzeydir (Lopez, 2014).

Bu tez çalışmasında, dejenere olmayan yarı-Riemann yüzeyleri üzerine çalışılacaktır.

Tanım 2.9. E_1^n deki M yarı-Riemann yüzeyi üzerindeki ışıksal olmayan herhangi bir α eğrisinin, u_0 ve u_1 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2F \frac{dv}{du} + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du \right| \quad (2.4)$$

eşitliğiyle tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.10. E_1^n de M bir yarı-Riemann yüzey, $x = x(u, v)$ parametresi ile verilmiş olsun. M yüzeyi üzerinde $u = u_0$ için $x_{u_0}(v) = x(u_0, v)$ şeklinde tanımlanan eğriye v -parametre eğrisi (paralel) ve $v = v_0$ için $x_{v_0}(u) = x(u, v_0)$ şeklinde tanımlanan eğriye ise u -parametre eğrisi (meridyen) denir. Bu iki eğriye M yarı-Riemann yüzeyine ait parametre eğrileri adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.11. E_1^n de, dejenere olmayan bir helikoidal yüzey üzerindeki meridyenleri (u -parametre eğrilerini) sabit açıyla kesen eğriye loksodrom denir.

$\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, M yarı-Riemann yüzeyi üzerindeki uzaysal bir eğri olsun. $\alpha'(t) = x_u u'(t) + x_v v'(t)$ olmak üzere

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 > 0 \quad (2.5)$$

ve

$$\langle \alpha'(t), x_u \rangle = E \frac{du}{dt} + F \frac{dv}{dt} \quad (2.6)$$

şeklindedir.

Tanım 2.12. x ve y , E_1^n uzayındaki vektörler olsun.

i. Uzaysal bir alt vektör uzayını geren x ve y uzaysal vektörleri için x ile y arasında

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad (2.7)$$

olacak şekilde $\theta \in [0, \pi]$ Lorentz uzaysal açısı vardır.

ii. Zamansal bir alt vektör uzayını geren x ve y uzaysal vektörleri için, x ve y arasında

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cosh \theta \quad (2.8)$$

olacak şekilde $\theta \in \mathbb{R}^+$ Lorentz zamansal açısı vardır.

iii. Uzaysal x vektörü ve zamansal y vektörü için

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \sinh \theta, \quad (2.9)$$

olacak şekilde $\theta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ Lorentz zamansal açısı vardır (Ratcliffe, 2006).

Tanım 2.13. E_1^n uzayında P 2 – düzlem ve G işaret matrisi olmak üzere, P düzlemini sabit bırakan A dönme matrisi aşağıdaki şartları sağlar:

i. $\det A = 1$

ii. $A^t G A = G$

iii. $AP = P$ (Ratcliffe, 2006).

E_1^n uzayında helikoidal yüzey tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.14. $\Pi \subset E_1^n$ hiperdüzleminde düzgün bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Pi \subset E_1^n$ eğrisi, P , Π hiperdüzleminde $(n-2)$ – boyutlu bir düzlem ve l , β eğrisiyle kesişmeyen ve P ye paralel olan bir doğru olsun. E_1^n uzayında bir helikoidal yüzey, β profil eğrisinin P düzlemi etrafında döndürülmesi ve ardından l doğrusu boyunca ötelenmesi sonucu oluşur. Burada dönme hızı ile öteleme hızı orantılıdır.

Böylece, E_1^n uzayının standard ortonormal bazı $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ olmak üzere E_1^n uzayında üç tip helikoidal yüzeyin parametризasyonları aşağıdaki şekilde verilir.

I. Tip Helikoidal Yüzey

E_1^n de Π_I , $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_n\}$ hiperdüzlemi, P_I , $\text{span}\{e_3, e_4, \dots, e_n\}$ $(n-2)$ – boyutlu düzlemi ve l_I , P_I düzlemine paralel $\text{span}\{e_n\}$ doğrusu olsun. Bu durumda P_I zamansal düzlemini sabit bırakan dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & \cdots & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, 0 \leq v < 2\pi$$

şeklindedir.

$\beta_I(u) = (x_1(u), 0, x_3(u), \dots, x_n(u))$ yay uzunluğuna göre parametrelendirilmiş düzgün bir profil eğrisi olsun. Yani $x_1'^2(u) + x_3'^2(u) + \dots + x_n'^2(u) = \varepsilon = \pm 1$ dir. Böylece, β_I profil eğrisinin P_I zamansal düzlem etrafında döndürülmesi ve l_I doğrusu boyunca ötelenmesi sonucunda oluşan M_I helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$x_I(u, v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & \cdots & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(u) \\ 0 \\ x_3(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{bmatrix} + cv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

veya

$$M_I : x_I(u, v) = (x_1(u) \cos v, x_1(u) \sin v, x_3(u), \dots, x_n(u) + cv) \quad (2.10)$$

şeklindedir. Burada $c \in \mathbb{R}^+$ ve $0 \leq v < 2\pi$ dir.

(2.10) denklemi ile verilen $x_I(u, v)$ yer vektörünün u ve v ye göre kısmi türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$(x_I)_u = (x_1'(u) \cos v, x_1'(u) \sin v, x_3'(u), \dots, x_n'(u)), \quad (2.11)$$

$$(x_I)_v = (-x_1(u) \sin v, x_1(u) \cos v, 0, \dots, c). \quad (2.12)$$

Böylece, M_I yüzeyinin birinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$E = \varepsilon, F = -cx_n'(u) \text{ ve } G = x_1^2(u) - c^2. \quad (2.13)$$

M_I dejenere olmayan bir yüzey olduğundan, $EG - F^2 = \varepsilon x_1^2(u) - c^2(\varepsilon + x_n'^2(u)) \neq 0$ dir.

Ayrıca x_n sabit bir fonksiyon ise M_I , I. tip dik helikoidal yüzey olarak adlandırılır.

II. Tip Helikoidal Yüzey

E_1^n de Π_{II} , $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, e_n\}$ hiperdüzlemi, P_{II} , $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}\}$ $(n-2)$ - boyutlu düzlemi ve l_{II} , P_{II} düzlemine paralel $\text{span}\{e_1\}$ doğrusu olsun. Bu durumda P_{II} uzaysal düzlemini sabit bırakan dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \cdots & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix}, v \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

$\beta_{II}(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), 0, x_n(u))$ yay uzunluğuna göre parametrize edilmiş düzgün profil eğrisini ele alalım. Yani $x_1'^2(u) + x_2'^2(u) + \dots + x_n'^2(u) = \varepsilon$ dir. Böylece, β_{II} profil eğrisinin P_{II} uzaysal düzlem etrafında döndürülmesi ve l_{II} doğrusu boyunca ötelenmesi sonucunda oluşan M_{II} helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu:

$$x_{II}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \cdots & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \\ \vdots \\ 0 \\ x_n(u) \end{bmatrix} + cv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

veya

$$M_{II} : x_{II}(u, v) = (x_1(u) + cv, x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v, x_n(u) \cosh v) \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada $c \in \mathbb{R}^+$ ve $v \in \mathbb{R}$ dir.

$x_{II}(u, v)$ nin u ve v göre kısmi türevleri

$$(x_{II})_u = (x_1'(u), x_2'(u), \dots, x_n'(u) \sinh v, x_n'(u) \cosh v), \quad (2.15)$$

$$(x_{II})_v = (c, 0, \dots, 0, x_n(u) \cosh v, x_n(u) \sinh v) \quad (2.16)$$

şeklindedir.

Böylece, M_{II} nin birinci temel form katsayıları

$$E = \varepsilon, \quad F = cx'_1(u) \quad \text{ve} \quad G = x_n^2(u) + c^2 \quad (2.17)$$

olarak bulunur.

M_{II} , non-dejenere olduğundan $\varepsilon x_n^2(u) + c^2(\varepsilon - x_1'^2(u)) \neq 0$ olur. Ayrıca x_1 sabit bir fonksiyon olduğunda M_{II} , II. tip dik bir helikoidal yüzey olarak adlandırılır.

III. Tip Helikoidal Yüzey

E_1^n uzayının $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ standard ortonormal bazını kullanarak, $\xi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_{n-1})$ ve $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_{n-1})$ olmak üzere E_1^n uzayında $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n\}$ yarı-ortonormal bir bazı elde edilir.

Burada, $\langle \xi_{n-1}, \xi_{n-1} \rangle = \langle \xi_n, \xi_n \rangle = 0$ ve $\langle \xi_{n-1}, \xi_n \rangle = -1$ şeklindedir.

Π_{III} , $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n\}$ hiperdüzlemi ve P_{III} , $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_{n-2}, \xi_{n-1}\}$ $(n-2)$ - boyutlu düzlemi olsun. $\beta_{III} : I \rightarrow \Pi_{III} \subset E_1^n$, yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş düzgün bir eğri $\beta_{III}(u) = x_1(u)e_1 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-1}(u)\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n$ olsun, yani $x_1'^2(u) + x_3'^2(u) + \dots - 2x_{n-1}'(u)x_n'(u) = \varepsilon$ şeklindedir.

Böylece, β_{III} profil eğrisinin P_{III} dejenere düzlemi etrafında döndürülmesi ve $\{\xi_{n-1}\}$ tarafından gerilen l_{III} doğrusu boyunca ötelemesi sonucu oluşan M_{III} helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu:

$$x_{III}(u, v) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2}vx_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + (x_{n-1}(u) + v^2x_n(u) + cv)\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n \quad (2.18)$$

şeklindedir.

Burada, T_{III} ortogonal dönüşümü

$$T_3(e_1) = e_1, \quad T_3(e_2) = e_2 + \sqrt{2}v\xi_{n-1}, \quad T_3(e_3) = e_3, \quad \dots, \quad T_3(\xi_n) = \sqrt{2}ve_2 + v^2\xi_{n-1} + \xi_n$$

şeklindedir. Böylece

$$(x_{III})_u = x'_1(u)e_1 + \sqrt{2}vx'_n(u)e_2 + x'_3(u)e_3 + \dots + x'_{n-2}(u)e_{n-2} + (x'_{n-1}(u) + v^2x'_n(u))\xi_{n-1} + x'_n(u)\xi_n \quad (2.19)$$

ve

$$(x_{III})_v = \sqrt{2}x_n(u)e_2 + (2vx_n(u) + c)\xi_{n-1} \quad (2.20)$$

elde edilir. Ayrıca M_{III} ün birinci temel form katsayıları

$$E = \varepsilon, \quad F = -cx'_n(u), \quad \text{ve} \quad G = 2x_n^2(u) \quad (2.21)$$

şeklindedir. M_{III} dejenere olmayan bir helikoidal yüzey olduğundan $2\varepsilon x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) \neq 0$ dır.

Eğer x_n sabit bir fonksiyon ise M_{III} ün III. tip dik bir helikoidal yüzey olarak adlandırılır.

Açıklama 2.1. (2.10), (2.14), (2.18) denklemlerinde $c=0$ alınırsa, E_1^n deki dönel yüzeylerin parametrizasyonları elde edilir.

3. E_1^n DEKİ UZAYSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLAR

Bu bölümde, E_1^n uzayında sırasıyla (2.10), (2.14) ve (2.18) denklemleri ile verilen I. tip, II. tip ve III. tip uzaysal helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların parametrisasyonları elde edilecektir.

M_I , (2.10) denklemi ile verilen I. tip uzaysal meridyenli uzaysal helikoidal yüzey olsun. Yani $\varepsilon = 1$ dir. Böylece (2.13) eşitlikleri ile verilen birinci temel form katsayıları kullanılarak M_I helikoidal yüzeyine indirgenmiş g_I metriği

$$g_I = du^2 - 2cx'_n(u)dudv + (x_1^2(u) - c^2)dv^2 \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilir.

M_I uzaysal bir helikoidal yüzey olduğundan, $x_1^2(u) - c^2(1 + x_n'^2(u)) > 0$ dir.

$\alpha_I(t) = x_I(u(t), v(t))$, M_I üzerinde uzaysal loksodrom olsun. (2.5) ve (2.6) denklemleri kullanılarak sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2cx'_n(u)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + (x_1^2(u) - c^2)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0 \quad (3.2)$$

ve

$$\langle \alpha'_I(t), (x_I)_u \rangle = \frac{du}{dt} - cx'_n(u)\frac{dv}{dt}. \quad (3.3)$$

$\alpha_I(t)$ loksodrom eğrisinin M_I in uzaysal meridyenini sabit bir θ_0 Lorentz uzaysal açıyla kestiği $p \in M_I$ noktasında, (2.7), (3.2) ve (3.3) denklemlerini kullanarak

$$\cos \theta_0 = \frac{\langle \alpha'_I(t), (x_I)_u \rangle}{\|\alpha'_I(t)\| \|(x_I)_u\|} = \frac{du - cx'_n(u)dv}{\sqrt{du^2 - 2cx'_n(u)dudv + (x_1^2(u) - c^2)dv^2}} \quad (3.4)$$

eşitliği elde edilir.

(3.4) denklemi düzenlenirse

$$(\cos^2 \theta_0 (x_1^2(u) - c^2) - c^2 x_n'^2(u)) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2c \sin^2 \theta_0 x_n'(u) \frac{dv}{du} = \sin^2 \theta_0 \quad (3.5)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (3.5) denklemin genel çözümleri aşağıdaki gibidir:

i. $\cos^2 \theta_0 (x_1^2(u) - c^2) - c^2 x_n'^2(u) \neq 0$ ise (3.5) denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2c \sin^2 \theta_0 x_n'(\xi) \pm \sqrt{(x_1^2(\xi) - c^2(1 + x_n'^2(\xi))) \sin^2 2\theta_0}}{2 \cos^2 \theta_0 (x_1^2(\xi) - c^2) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi. \quad (3.6)$$

ii. $\cos^2 \theta_0 (x_1^2(u) - c^2) - c^2 x_n'^2(u) = 0$ olduğunda (3.5) denklemi $\frac{dv}{du} = \frac{1}{2cx_n'(u)}$ şeklinde

elde edilir. Bu eşitlikte $x_n'(u) = \pm \frac{\cos \theta_0 \sqrt{x_1^2(u) - c^2}}{c}$ değeri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki $v = v(u)$ fonksiyonu

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \cos \theta_0} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}} \quad (3.7)$$

şeklindedir. Burada $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ bir sabittir.

Böylece, E_1^n deki M_I uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki $\alpha_I(u) = x_I(u, v(u))$ uzaysal loksodromun parametrizasyonu Teorem 3.1 in (i) deki gibi elde edilir.

E_1^n de, M_{II} , II. tip uzaysal helikoidal yüzey olsun. Böylece (2.17) denklemi kullanılarak M_{II} üzerine indirgenmiş metrik g_{II}

$$g_{II} = du^2 + 2cx_1'(u)dudv + (x_n^2(u) + c^2)dv^2 \quad (3.8)$$

şeklindedir. Burada, M_{II} uzaysal olduğu için $x_n^2(u) + c^2(1 - x_1'^2(u)) > 0$ dir.

M_{II} üzerinde $\alpha_{II}(t) = x_{II}(u(t), v(t))$ uzaysal loksodromu göz önüne alınırsa, (2.5) ve (2.6) denklemlerinden

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2cx'_n(u)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + (x_n^2(u) + c^2)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0 \quad (3.9)$$

ve

$$\langle \alpha'_{II}(t), (x_{II})_u \rangle = \frac{du}{dt} + cx'_n(u)\frac{dv}{dt} \quad (3.10)$$

elde edilir.

$\alpha_{II}(t)$ uzaysal loksodrom eğrisinin M_{II} nin uzaysal meridyenini sabit bir θ_0 Lorentz uzaysal açısıyla kestiği $p \in M_{II}$ noktasında (2.7), (3.9) ve (3.10) denklemlerini kullanarak

$$\cos \theta_0 = \frac{du + cx'_1(u)dv}{\sqrt{du^2 + 2cx'_1(u)dudv + (x_n^2(u) + c^2)dv^2}} \quad (3.11)$$

eşitliğini elde edilir. (3.11) eşitliğinden

$$(\cos^2 \theta_0 (x_n^2(u) + c^2) - c^2 x_1'^2(u)) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2c \sin^2 \theta_0 x_1'(u) \left(\frac{dv}{du}\right) = \sin^2 \theta_0. \quad (3.12)$$

diferansiyel denklem bulunur.

(3.12) denkleminin aşağıdaki gibi iki farklı genel çözümü vardır:

i. $\cos^2 \theta_0 (x_n^2(u) + c^2) - c^2 x_1'^2(u) \neq 0$ ise (3.12) denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_1'^2(\xi) \sin^2 \theta_0 \pm \sqrt{\sin^2 2\theta_0 (x_n^2(\xi) + c^2 (1 - x_1'^2(\xi)))}}{2 \cos^2 \theta_0 (c^2 + x_n^2(\xi)) - 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi. \quad (3.13)$$

ii. $\cos^2 \theta_0 (x_n^2(u) + c^2) - c^2 x_1'^2(u) = 0$ olduğunda (3.12) denklemi $\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2cx_1'(u)}$

şeklindedir. Bu eşitlikte $x_1'(u) = \pm \frac{\cos \theta_0 \sqrt{x_n^2(u) + c^2}}{c}$ değeri yerine yazılıp gerekli

işlemler yapılırsa aşağıdaki $v = v(u)$ fonksiyonu bulunur:

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \cos \theta_0} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}}. \quad (3.14)$$

Burada $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ bir sabittir.

Dolayısıyla E_1^n deki M_{II} uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki $\alpha_{II}(u) = x_{II}(u, v(u))$ uzaysal loksodromun parametrizasyonu Teorem 3.1 in (ii) deki gibi elde edilmiş olur.

E_1^n de, M_{III} , III. tip uzaysal helikoidal yüzey olduğundan $2\varepsilon x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) > 0$ eşitsizliğinde $\varepsilon = 1$ olmalıdır. Böylece (2.21) denklemi kullanılarak M_{III} üzerine indirgenmiş metrik g_{III} :

$$g_{III} = du^2 - 2cx_n'(u)dudv + 2x_n^2(u)dv^2 \quad (3.15)$$

şeklindedir. Burada, M_{III} uzaysal olduğu için $2x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) > 0$ dir.

M_{III} üzerinde $\alpha_{III}(t) = x_{III}(u(t), v(t))$ uzaysal loksodrom göz önüne alınırsa, (2.5) denklemi

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2cx_n'(u)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + 2x_n^2(u)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0 \quad (3.16)$$

şeklindedir.

Ayrıca (2.6) denklemini kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\langle \alpha_{III}'(t), (x_{III})_u \rangle = \frac{du}{dt} - cx_n'(u)\frac{dv}{dt}. \quad (3.17)$$

α_{III} loksodrom eğrisinin M_{III} ün uzaysal meridyenini sabit bir θ_0 Lorentz uzaysal açıyla kestiği $p \in M_{III}$ noktasında (2.7), (3.16) ve (3.17) denklemlerini kullanarak

$$\cos \theta_0 = \frac{du - cx'_n(u)dv}{\sqrt{du^2 - 2cx'_n(u)dudv + 2x_n^2(u)dv^2}} \quad (3.18)$$

eşitliğini elde edilir.

(3.18) eşitliğinden uzaysal loksodromun diferansiyel denklemi

$$(2 \cos^2 \theta_0 x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u)) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2c \sin^2 \theta_0 x'_n(u) \frac{dv}{du} = \sin^2 \theta_0 \quad (3.19)$$

şeklidedir. (3.19) diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi iki farklı genel çözümü vardır:

i. $2 \cos^2 \theta_0 x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) \neq 0$ ise (3.19) denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx'_n(\xi) \sin^2 \theta_0 \pm \sqrt{\sin^2 2\theta_0 (2x_n^2(\xi) - c^2 x_n'^2(\xi))}}{4 \cos^2 \theta_0 x_n^2(\xi) - c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi. \quad (3.20)$$

ii. $2 \cos^2 \theta_0 x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) = 0$ olduğunda (3.19) denklemi $\frac{dv}{du} = \frac{1}{2cx'_n(u)}$ şeklinde elde

edilir. Bu eşitlikte $x'_n(u) = \pm \frac{\sqrt{2} \cos \theta_0 x_n(u)}{c}$ değeri yerine yazılıp gerekli işlemler

yapılırsa aşağıdaki $v = v(u)$ fonksiyonu bulunur:

$$v(u) = \pm \frac{c}{4 \cos^2 \theta_0} e^{\pm \frac{\sqrt{2} \cos \theta_0}{c} (u - u_0)}. \quad (3.21)$$

Burada $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ bir sabittir.

Böylece, E_1^n de uzaysal helikoidal yüzey M_{III} üzerindeki $\alpha_{III}(u) = x_{III}(u, v(u))$ uzaysal loksodromun parametrizasyonu Teorem 3.1 in (iii) maddesindeki gibidir.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1. M , E_1^n de (2.10), (2.14) ve (2.18) denklemleri ile verilen uzaysal helikoidal yüzey olsun. Bu durumda, M uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromun parametrizasyonu aşağıdaki şekildedir.

i. I. tip helikoidal yüzey için,

$$\alpha_I(u) = (x_1(u) \cos v(u), x_1(u) \sin v(u), x_3(u), \dots, x_n(u) + cv(u)). \quad (3.22)$$

Burada, $\cos^2 \theta_0 (x_1^2(\xi) - c^2) - c^2 x_n'^2(\xi) \neq 0$ olmak üzere

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2c \sin^2 \theta_0 x_n'(\xi) \pm \sqrt{\sin^2 2\theta_0 (x_1^2(\xi) - c^2 (1 + x_n'^2(\xi)))}}{2 \cos^2 \theta_0 (x_1^2(\xi) - c^2) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi \quad (3.23)$$

veya

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \cos \theta_0} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}} \quad (3.24)$$

şeklindedir.

ii. II. tip helikoidal yüzey için,

$$\alpha_{II}(u) = (x_1(u) + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u)). \quad (3.25)$$

Burada $\cos^2 \theta_0 (c^2 + x_n^2(\xi)) - c^2 x_1'^2(\xi) \neq 0$ olmak üzere

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_1'^2(\xi) \sin^2 \theta_0 \pm \sqrt{\sin^2 2\theta_0 (x_n^2(\xi) + c^2 (1 - x_1'^2(\xi)))}}{2 \cos^2 \theta_0 (c^2 + x_n^2(\xi)) - 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi \quad (3.26)$$

veya

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \cos \theta_0} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}} \quad (3.27)$$

şeklindedir.

iii. III. tip helikoidal yüzey için,

$$\alpha_{III}(u) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2}v(u)x_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + (x_{n-1}(u) + v^2(u)x_n(u) + cv(u))\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n. \quad (3.28)$$

Burada $2\cos^2\theta_0 x_n^2(\xi) - c^2 x_n'^2(\xi) \neq 0$ olmak üzere

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_n'(\xi)\sin^2\theta_0 \pm \sqrt{\sin^2 2\theta_0 (2x_n^2(\xi) - c^2 x_n'^2(\xi))}}{4\cos^2\theta_0 x_n^2(\xi) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi. \quad (3.29)$$

veya

$$v(u) = \pm \frac{c}{4\cos^2\theta_0} e^{\pm \frac{\sqrt{2}\cos\theta_0}{c}(u-u_0)}. \quad (3.30)$$

şeklindedir. Burada $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ ve $c > 0$ dır.

Teorem 3.1 kullanılarak, uzaysal dik helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromların parametризasyonları aşağıdaki sonuç ile verilir.

Sonuç 3.2. M , E_1^n de (2.10), (2.14) ve (2.18) denklemleri ile verilen uzaysal dik helikoidal yüzey olsun. Böylece, M üzerindeki uzaysal loksodromun parametризasyonu aşağıdaki gibidir:

i. I. tip dik helikoidal yüzey için

$$\gamma_I(u) = (x_1(u)\cos v, x_1(u)\sin v, x_3(u), \dots, x_n + cv(u)). \quad (3.31)$$

Burada, x_n bir sabit olmak üzere

$$v(u) = \pm \tan\theta_0 \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}} \quad (3.32)$$

şeklindedir.

ii. II. tip dik helikoidal yüzey için

$$\gamma_{II}(u) = (x_1 + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u)). \quad (3.33)$$

Burada, x_1 bir sabit olmak üzere

$$v(u) = \pm \tan \theta_0 \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}} \quad (3.34)$$

şeklindedir.

iii. III. tip dik helikoidal yüzey için

$$\gamma_{III}(u) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2}v(u)x_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + (x_{n-1}(u) + v^2(u)x_n + cv(u))\xi_{n-1} + x_n\xi_n. \quad (3.35)$$

Burada, $x_n \neq 0$ bir sabit olmak üzere

$$v(u) = \pm \frac{\tan \theta_0}{\sqrt{2}x_n} (u - u_0) \quad (3.36)$$

şeklindedir. Burada $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ ve $c > 0$ sabittir.

İspat: (3.23) eşitliği ile verilen denklemde x_n sabit bir fonksiyon olmak üzere $x_n'(u) = 0$ olur. Ayrıca M_I uzaysal bir helikoidal yüzey olduğundan $x_1^2(\xi) - c^2 > 0$ olur. Böylece, $v(u)$ fonksiyonu

$$v(u) = \pm \int_{u_0}^u \frac{\sin 2\theta_0 \sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}}{2 \cos^2 \theta_0 (x_1^2(\xi) - c^2)} d\xi = \pm \tan \theta_0 \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}}$$

şeklinde elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. II. tip ve III. tip dik helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromlar içinde benzer işlemler yapılarak sonuca kolayca ulaşılabilir.

(2.4) denklemi ve sonuç 3.1 kullanılarak, E_1^n uzayındaki uzaysal dik helikoidal yüzey üzerinde uzaysal loksodromlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3. M , (2.10), (2.14) ve (2.19) ile tanımlanan E_1^n uzayındaki uzaysal dik helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromun u_0 ve u_1 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \left| \frac{u_1 - u_0}{\cos \theta_0} \right| \quad (3.37)$$

şeklindedir. Burada $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ sabittir.

İspat: (2.21) denklemindeki E , F ve G katsayıları, (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + 2x_n^2(u) \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du \right|$$

elde edilir. Böylece (3.36) denkleminde

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + 2x_n^2(u) \frac{\sin^2 \theta_0}{2 \cos^2 \theta_0 x_n^2(u)}} du \right| = \left| \frac{u_1 - u_0}{\cos \theta_0} \right|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. I. tip ve II. tip dik helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromlar içinde benzer işlemler yapılarak sonuca ulaşılır.

Açıklama 3.4. M , (2.10), (2.14) ve (2.18) ile tanımlanan E_1^n uzayında uzaysal dik helikoidal yüzey olsun.

i. uzaysal loksodrom ile uzaysal meridyen arasındaki açı $\theta_0 = 0$ ise loksodrom ile meridyen çakışır.

ii. uzaysal loksodrom ile uzaysal meridyen arasındaki açı $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ise loksodrom ile paralel çakışır.

4. E_1^n DEKİ ZAMANSAL HELİKOIDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ UZAYSAL LOKSODROMLAR

Bu bölümde, E_1^n uzayında sırasıyla (2.10), (2.14) ve (2.18) denklemleri ile verilen I. tip, II. tip ve III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların parametrisasyonları elde edilecektir.

Kolaylık olması için Θ sabitini şu şekilde tanımlayalım:

$$\Theta = \begin{cases} \cosh \theta_0, & \varepsilon = 1, \\ \sinh \theta_0, & \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (4.1)$$

M_I , (2.10) denklemi ile verilen I. tip zamansal helikoidal yüzey olsun. Burada $\varepsilon x_1^2(u) - c^2(\varepsilon + x_n'^2(u)) < 0$ dır. Bu durumda meridyen eğrisinin kozsul karakterine göre iki tane durum meydana gelir. Yani, $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ dir. Böylece (2.13) eşitlikleri ile verilen birinci temel form katsayılarını denklemde yerine yazarak M_I helikoidal yüzeyine indirgenmiş g_I metriği

$$g_I = \varepsilon du^2 - 2cx_n'(u)dudv + (x_1^2(u) - c^2)dv^2$$

şeklinde elde edilir.

M_I zamansal bir helikoidal yüzey olduğundan, $EG - F^2 = \varepsilon x_1^2(u) - c^2(\varepsilon + x_n'^2(u)) < 0$ dir.

$\alpha_I(t) = x_I(u(t), v(t))$, M_I üzerinde uzaysal loksodrom olsun. (2.5) ve (2.6) denklemleri kullanılarak sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\varepsilon \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2cx_n'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (x_1^2(u) - c^2) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 > 0 \quad (4.2)$$

ve

$$\langle \alpha'_I(t), (x_I)_u \rangle = \varepsilon \frac{du}{dt} - cx'_n(u) \frac{dv}{dt}. \quad (4.3)$$

$\alpha_I(t)$ loksodrom eğrisinin M_I in zamansal meridyenini sabit bir Lorentz zamansal açıyla kestiği $p \in M_I$ noktasında, (2.8), (2.9), (4.2) ve (4.3) denklemlerini kullanarak

$$\Theta = \frac{\langle \alpha'_I(t), (x_I)_u \rangle}{\|\alpha'_I(t)\| \|(x_I)_u\|} = \frac{\varepsilon du - cx'_n(u) dv}{\sqrt{\varepsilon du^2 - 2cx'_n(u) dudv + (x_1^2(u) - c^2) dv^2}} \quad (4.4)$$

eşitliği elde edilir.

(4.4) denklemi düzenlenirse

$$(\Theta^2(x_1^2(u) - c^2) - c^2 x_n'^2(u)) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2cx'_n(u)(\varepsilon - \Theta^2) \frac{dv}{du} = 1 - \varepsilon \Theta^2 \quad (4.5)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

(4.5) denklemin genel çözümüyle ilgili aşağıda verilen iki durum oluşur:

i. $\Theta^2(x_1^2(u) - c^2) - c^2 x_n'^2(u) \neq 0$ ise (4.5) denklemi ile verilen zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromun genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v(u) = \int_{u_0}^{u_1} \frac{2cx'_n(\xi)(\Theta^2 - \varepsilon) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta_0(c^2(\varepsilon + x_n'^2(\xi) - \varepsilon x_1^2(\xi)))}}{2\Theta^2(x_1^2(\xi) - c^2) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi. \quad (4.6)$$

ii. $\Theta^2(x_1^2(u) - c^2) - c^2 x_n'^2(u) = 0$ olduğunda (4.5) denklemi $\frac{dv}{du} = \frac{\varepsilon}{2cx'_n(u)}$ şeklinde elde

edilir. Burada, $x_n'(u) = \pm \frac{\Theta \sqrt{x_1^2(u) - c^2}}{c}$ değeri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

aşağıdaki $v = v(u)$ fonksiyonu bulunur:

$$v(u) = \frac{\varepsilon}{2\Theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}}. \quad (4.7)$$

Böylece, E_1^n deki M_I zamansal helikoidal yüzey üzerindeki $\alpha_I(u) = x_I(u, v(u))$ uzaysal loksodromun parametrizasyonu Teorem 4.1 in (i) maddesindeki gibi elde edilir.

Benzer şekilde, E_1^n de, M_{II} II. tip zamansal helikoidal yüzey için $\varepsilon x_n^2(u) + c^2(\varepsilon - x_1'^2(u)) < 0$ dır. Böylece meridyen eğrisinin koszul karakterine göre iki durum vardır. Yani $\varepsilon=1$ veya $\varepsilon=-1$ dır. Böylece (2.17) denklemi kullanılarak M_{II} üzerine indirgenmiş metrik g_{II}

$$g_{II} = \varepsilon du^2 + 2cx_1'(u)dudv + (x_n^2(u) + c^2)dv^2$$

şeklindedir.

$\alpha_{II}(t) = x_{II}(u(t), v(t))$ nin M_{II} üzerinde uzaysal bir loksodrom olduğunu varsayalım.

Böylece sırasıyla (2.5) ve (2.6) denklemlerinden

$$\varepsilon \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2cx_1'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (x_n^2(u) + c^2) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 > 0 \quad (4.8)$$

ve

$$\langle \alpha_{II}'(t), (x_{II})_u \rangle = \varepsilon \frac{du}{dt} + cx_1'(u) \frac{dv}{dt} \quad (4.9)$$

elde edilir.

$\alpha_{II}(t)$ uzaysal loksodrom eğrisinin M_{II} nin meridyenini sabit bir Lorentz zamansal açıyla kestiği $p \in M_{II}$ noktasında (2.7), (4.8) ve (4.9) denklemlerini kullanarak,

$$\Theta = \frac{\varepsilon du + cx_1'(u)dv}{\sqrt{\varepsilon du^2 + 2cx_1'(u)dudv + (x_n^2(u) + c^2)dv^2}} \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir.

(4.10) denkleminde aşağıdaki diferansiyel denklem bulunur:

$$(\Theta^2(x_n^2(u) + c^2) - c^2 x_1'^2(u)) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2cx_1'(u)(\Theta^2 - \varepsilon) \frac{dv}{du} = 1 - \varepsilon \Theta^2. \quad (4.11)$$

(4.11) diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi iki farklı genel çözümü vardır.

i. $\Theta^2(x_n^2(u) + c^2) - c^2 x_1'^2(u) \neq 0$ ise (4.11) ile verilen zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodrom denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_1'(\xi)(\Theta^2 - \varepsilon^2) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta_0 (c^2(x_1'^2(\xi) - \varepsilon) - \varepsilon x_n^2(\xi))}}{2\Theta^2(c^2 + x_n^2(\xi)) - 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi. \quad (4.12)$$

ii. $\Theta^2(x_n^2(u) + c^2) - c^2 x_1'^2(u) = 0$ olduğunda (4.11) denklemi $\frac{dv}{du} = -\frac{\varepsilon}{2cx_1'(u)}$ şeklinde elde edilir. Burada, $x_1'(u) = \pm \frac{\Theta \sqrt{x_n^2(u) + c^2}}{c}$ değeri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki $v = v(u)$ fonksiyonu bulunur:

$$v(u) = \frac{\varepsilon}{2\Theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}}. \quad (4.13)$$

Dolayısıyla E_1^n deki M_{II} zamansal helikoidal yüzey üzerindeki $\alpha_{II}(u) = x_{II}(u, v(u))$ uzaysal loksodromun parametrizasyonu Teorem 4.1 in (ii) deki gibi elde edilmiş olur.

E_1^n de, M_{III} , III. tip zamansal helikoidal yüzey olsun. Böylece $2\varepsilon x_n^2(u) - c^2 x_1'^2(u) < 0$ dır. Yani $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ dır. Böylece (2.21) denklemi kullanılarak M_{III} üzerine indirgenmiş metrik g_{III}

$$g_{III} = \varepsilon du^2 - 2cx_n'(u) du dv + 2x_n^2(u) dv^2 \quad (4.14)$$

şeklinde dir. M_{III} üzerinde $\alpha_{III}(t) = x_{III}(u(t), v(t))$ uzaysal loksodromu göz önüne alınırsa

$$\varepsilon \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2cx_n'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 2x_n^2(u) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 > 0 \quad (4.15)$$

ve

$$\langle \alpha'_{III}(t), (x_{III})_u \rangle = \varepsilon \frac{du}{dt} - cx'_n(u) \frac{dv}{dt} \quad (4.16)$$

elde edilir.

α_{III} uzaysal loksodromun M_{III} zamansal helikoidal yüzeyinin meridyenini sabit bir θ_0 Lorentz zamansal açısıyla kestiği $p \in M_{III}$ noktasında

$$\Theta = \frac{\varepsilon du - cx'_n(u) dv}{\sqrt{\varepsilon du^2 - 2cx'_n(u) dudv + 2x_n^2(u) dv^2}} \quad (4.17)$$

eşitliği ve uzaysal loksodromun diferansiyel denklemi

$$(2\Theta^2 x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u)) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + 2cx'_n(u)(\varepsilon - \Theta^2) \frac{dv}{du} = 1 - \varepsilon \Theta^2 \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir. (4.18) diferansiyel denklemin aşağıdaki gibi iki farklı genel çözümü vardır:

i. $2\Theta^2 x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) \neq 0$ ise (4.18) denklemin genel çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx'_n(\xi)(\Theta^2 - \varepsilon) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta_0 (c^2 x_n'^2(\xi) - 2\varepsilon x_n^2(\xi))}}{4\Theta^2 x_n^2(\xi) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi. \quad (4.19)$$

ii. $2\Theta^2 x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) = 0$ olduğunda (4.18) denklemi $\frac{dv}{du} = \frac{\varepsilon}{2cx'_n(u)}$ şeklinde elde

edilir. Burada, $x_n'(u) = \pm \frac{\sqrt{2\Theta x_n(u)}}{c}$ değeri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

aşağıdaki $v = v(u)$ fonksiyonu bulunur:

$$v(u) = \pm \frac{\varepsilon c}{4\Theta^2} e^{\pm \frac{\sqrt{2\Theta}}{c}(u-u_0)}. \quad (4.20)$$

Böylece, E_1^n de zamansal helikoidal yüzey M_{III} üzerindeki $\alpha_{III}(u) = x_{III}(u, v(u))$ uzaysal loksodromun parametrizasyonu Teorem 4.1 in (iii) maddesindeki gibidir.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. M , (2.10), (2.14) ve (2.18) denklemleri ile verilen zamansal helikoidal yüzey olsun. Bu durumda, M zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromun parametrizasyonu aşağıdaki şekildedir.

i. I. tip helikoidal yüzey için,

$$\alpha_I(u) = (x_1(u) \cos v(u), x_1(u) \sin v(u), x_3(u), \dots, x_n(u) + cv(u)). \quad (4.21)$$

Burada, $\Theta^2(x_1^2(\xi) - c^2) - c^2 x_n'^2(\xi) \neq 0$ olmak üzere loksodrom eğrisinin genel çözümü

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi)(\Theta^2 - \varepsilon) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta_0(c^2(\varepsilon + x_n'^2(\xi)) - \varepsilon x_1^2(\xi))}}{2\Theta^2(x_1^2(\xi) - c^2) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi \quad (4.22)$$

veya

$$v(u) = \frac{\varepsilon}{2\Theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_1^2(\xi) - c^2}} \quad (4.23)$$

şeklindedir.

ii. II. tip helikoidal yüzey için,

$$\alpha_{II}(u) = (x_1(u) + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u)). \quad (4.24)$$

Burada, $\Theta^2(c^2 + x_n^2(\xi)) - c^2 x_1'^2(\xi) \neq 0$ olmak üzere

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_1'(\xi)(\Theta^2 - \varepsilon^2) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta_0(c^2(x_1'^2(\xi) - \varepsilon) - \varepsilon x_n^2(\xi))}}{2\Theta^2(c^2 + x_n^2(\xi)) - 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi. \quad (4.25)$$

veya

$$v(u) = \frac{\varepsilon}{2\Theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}} \quad (4.26)$$

şeklindedir.

iii. III. tip helikoidal yüzey için,

$$\alpha_{III}(u) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2}v(u)x_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + (x_{n-1}(u) + v^2(u)x_n(u) + cv(u))\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n. \quad (4.27)$$

Burada, $2\Theta^2 x_n'^2(\xi) - c^2 x_n'^2(\xi) \neq 0$ olmak üzere :

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi)(\Theta^2 - \varepsilon) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta_0 (c^2 x_n'^2(\xi) - 2\varepsilon x_n^2(\xi))}}{4\Theta^2 x_n^2(\xi) - 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi. \quad (4.28)$$

veya

$$v(u) = \pm \frac{\varepsilon c}{4\Theta^2} e^{\pm \frac{\sqrt{2}\Theta}{c}(u-u_0)} \quad (4.29)$$

şeklindedir. Burada, $c > 0$ ve Θ , (4.1) ile tanımlanan sabitlerdir.

Teorem 4.1 kullanılarak zamansal dik helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromların parametrizasyonları aşağıdaki sonuç ile verilir.

Sonuç 4.2. M , E_1^n de (2.10) ve (2.14) denklemleri ile verilen zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Böylece, M üzerindeki uzaysal loksodromun parametrizasyonu aşağıdaki gibidir:

i. Meridyeni uzaysal olan I. tip zamansal dik helikoidal yüzey için,

$$\gamma_I(u) = (x_1(u)\cos v, x_1(u)\sin v, x_3(u), \dots, x_n + cv(u)). \quad (4.30)$$

Burada, x_n bir sabit olmak üzere

$$v(u) = \pm \tanh \theta_0 \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}} \quad (4.31)$$

şeklindedir.

ii. Meridyeni zamansal olan II. tip zamansal dik helikoidal yüzey için,

$$\gamma_{II}(u) = (x_1(u) + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u)). \quad (4.32)$$

Burada, x_1 bir sabit olmak üzere

$$v(u) = \pm \coth \theta_0 \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 + x_n^2(\xi)}} \quad (4.33)$$

şeklindedir. Burada θ_0 bir sabit ve $c > 0$ dır.

Sonuç 4.2 ve (2.4) denklemi kullanarak, E_1^n uzayında zamansal dik helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal loksodromlar için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3. M , E_1^n uzayında zamansal dik helikoidal yüzey olsun. M üzerinde u_0 ve u_1 noktaları arasındaki uzaysal loksodrom eğrisinin yay uzunluğu:

i. Meridyeni uzaysal olan I. tip zamansal dik helikoidal yüzey için, $s = \left| \frac{u_1 - u_0}{\cosh \theta_0} \right|$,

ii. Meridyeni zamansal olan II. tip zamansal dik helikoidal yüzey için, $s = \left| \frac{u_1 - u_0}{\sinh \theta_0} \right|$.

Burada, θ_0 keyfi bir sabittir.

İspat: i. (2.4) denkleminde (2.13) denklemindeki E, F ve G katsayıları yerine yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\varepsilon + (x_1^2(u) - c^2) \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du \right|$$

elde edilir. Burada, x_n sabit olduğundan $F = -cx'_n(u) = 0$ olur.

$(\Theta^2(x_1^2(u) - c^2))\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 1 - \varepsilon\Theta^2$ uzaysal loksodromun diferansiyel denklemi olmak

üzere $\left(\frac{dv}{du}\right)^2$ için elde edilen sonuç yerine yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\varepsilon + (x_1^2(u) - c^2) \frac{1 - \varepsilon\Theta^2}{\Theta^2(x_1^2(u) - c^2)}} du \right| = \left| \frac{u_1 - u_0}{\Theta} \right|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

ii. (2.4) denkleminde (2.17) denklemindeki E, F ve G katsayıları yerine yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{-1 + (x_n^2(u) + c^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2} du \right|$$

elde edilir. Burada, x_1 sabit olduğundan $F = -cx'_1(u) = 0$ olur.

$(\sinh \theta_0^2(x_n^2(u) + c^2))\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 1 + \sinh \theta_0^2$ uzaysal loksodromun diferansiyel denklemi

olmak üzere $\left(\frac{dv}{du}\right)^2$ için elde edilen sonuç yerine yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{-1 + (x_n^2(u) + c^2) \frac{1 + \sinh \theta_0^2}{\sinh \theta_0^2(x_n^2(u) + c^2)}} du \right| = \left| \frac{u_1 - u_0}{\sinh \theta_0} \right|$$

elde edilir.

Açıklama 4.4.

1. M , (2.10) ile tanımlanan E_1^n uzayında meridyeni uzaysal olan zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Uzaysal loksodrom ile uzaysal meridyen arasındaki açı $\theta_0 = 0$ ise loksodrom ile meridyen çakışır.

2. M , (2.14) ile tanımlanan E_1^n uzayında meridyeni zamansal olan zamansal dik helikoidal yüzey olsun. $\theta_0 = 0$ için uzaysal loksodrom ile zamansal meridyen birbirine Lorentz anlamında diktir.

Örnek: E_1^4 uzayında $\beta_I(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u, 0, u, 1)$ birim hızlı uzaysal profil eğrisi olsun. Eğer $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alınırsa M_I dik helikoidal yüzeyin parametrizasyonu

$$x_I(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u \cos v, u \sin v, u, 1 + v).$$

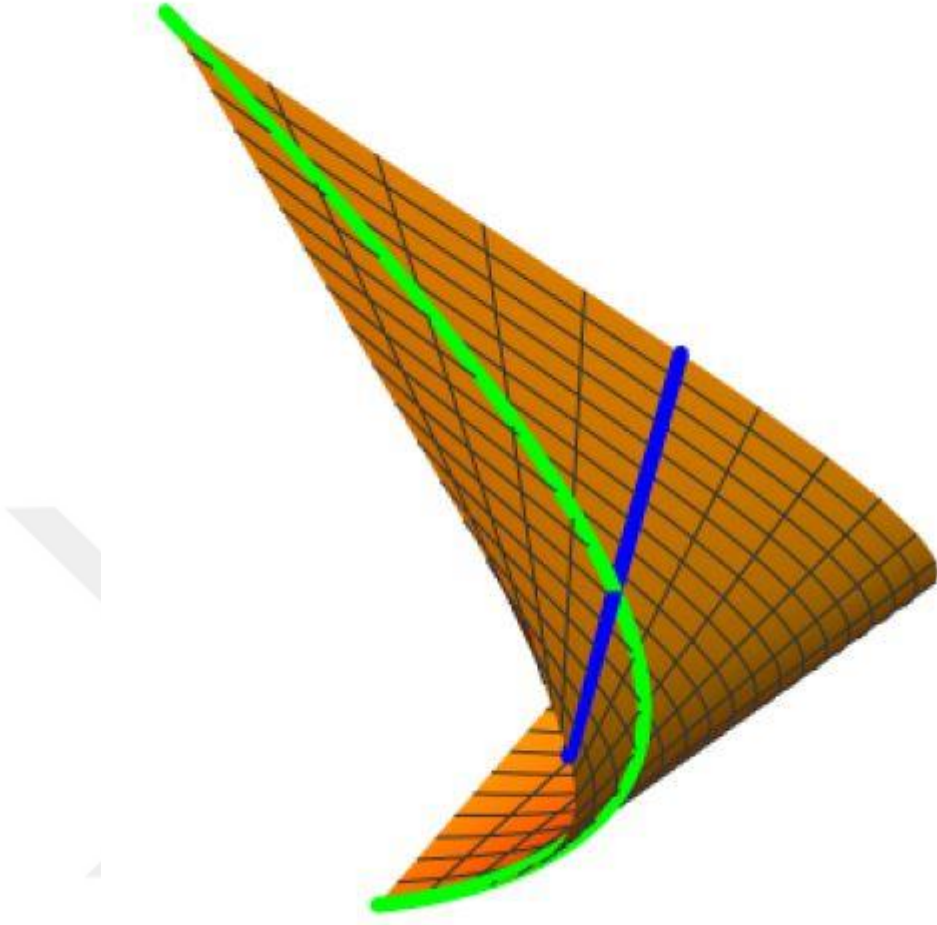
Eğer $u \in (1, 4)$ alınırsa M_I uzaysal dik helikoidal yüzey olur. $u_0 = 1$ ve $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

alındığında $v(u) = \sqrt{2} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$ dır. Böylece $v \in (0, 2.91814)$ olup uzaysal loksodromun parametrizasyonu

$$\alpha_I(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u \cos v(u), u \sin v(u), u, 1 + v(u)).$$

Ayrıca uzaysal loksodromun yay uzunluğu $3\sqrt{2}$ dir.

M_I uzaysal dik helikoidal yüzeyin, uzaysal meridyenin ($v = 2$) ve uzaysal loksodromun E_1^3 uzayına izdüşümleri Mathematica programında; $ParametricPlot3D[\{x_I(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), x_4(u, v)\}, \{u, a, b\}, \{v, c, d\}]$ komutuyla aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 1. Uzaysal dik helikoidal yüzey, uzaysal meridyen eğrisi (mavi), uzaysal loksodrom (yeşil) izdüşümleri

5. KAYNAKLAR

- Babaarslan, M., Yaylı, Y. (2014). Spacelike loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 409, 288-298.
- Babaarslan, M., Munteanu, M. I. (2015). Timelike loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics* 61, 471-484.
- Babaarslan, M., Kayacık, M. (2017). Timelike loxodromes on helicoidal surfaces in Minkowski 3-space. *Filomat* 31, 4405-4414.
- Babaarslan, M. (2019). Loxodromes on helicoidal surfaces and tubes with variable radius in E^4 . *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* 68, 1950-1958.
- Babaarslan, M., Kayacık, M. (2020). Differential equations of the space-like loxodromes on the helicoidal surfaces in Minkowski 3-space. *Differential Equations and Dynamical Systems* 28, 495-512.
- Babaarslan, M. (2020). A note on loxodromes on helicoidal surfaces in Euclidean n-space. *Applied Mathematics E-Notes* 20, 458-461.
- Babaarslan, M., Gümüş, M. (2021). On the parametrizations of loxodromes on time-like rotational surfaces in Minkowski space-time. *Asian-European Journal of Mathematics* 14, 2150080.
- Babaarslan, M., Sönmez, N. (2021). Loxodromes on non-degenerate helicoidal Surfaces in Minkowski space-time. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, <https://doi.org/10.1007/s13226-021-00030-x>.
- Bektaş B., Dursun U. (2015). Timelike Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space E_1^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Filomat* 29, 381-392.
- Bour, E. (1862). Memoire sur le deformation de surfaces. *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX Cahier 1-148.
- Capanna, A., Francaviglia, M., and Lorenzi, M. G. (2012), *Architecture, Form, Expression. The Helicoidal Skyscrapers'Geometry*. Proceedings of the 2012 Bridges Towson: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. Towson University, Maryland, USA.
- Do Carmo, M. P., Dajczer, M. (1982). Helicoidal surfaces with constant mean curvature, *Tohoku Mathematical Journal*, 34, 425-435.

- Dursun U., Bektaş B. (2014). Spacelike Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space E_1^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map, Mathematical Physics Analysis and Geometry, 17, 247-263.
- Güler, E. (2005). 3-boyutlu Minkowski uzayında helisoidal yüzeyler, Yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi, 103 s., Ankara.
- Kos, S., Vranic, D., Zec, D. (1999). Diferential equation of a loxodrome on a sphere. Journal of Navigation 52, 418-420.
- Levina, G. V., Montgomery, M. T. (2010). A First Examination of the Helical Nature of Tropical Cyclogenesis. Doklady Earth Sciences, 434, 1285–1289.
- Noble, C. A. (1905). Note on loxodromes. Bulletin of the American Mathematical Society 12, 116-119.
- Selvi M., (2020). Minkowski 4-Uzayında Spacelike Dönel Yüzeyler Üzerindeki Spacelike Loksodromlar, Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yozgat.
- Petrovic, M. (2007). Differential equation of a loxodrome on the sphereoid. Nase More 54, 87-89.
- Pollard, D. D., Fletcher, R. C. (2005). Fundamentals of Structural Geology. Cambridge University Press, United Kingdom.
- Ratcliffe, J. G. (2006). Foundations of hyperbolic manifolds. Springer Graduate Texts in Mathematics, 149, Third Edition.

