

BAŞKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FAZ DİZİLİMLİ RADAR HEDEF İZLEME SİSTEMİNİN
MODELLENMESİ VE ENİYİLENMESİ

KORAY ÖNKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2012

FAZ DİZİLİMLİ RADAR HEDEF İZLEME SİSTEMİNİN MODELLENMESİ VE ENİYİLENMESİ

MODELİNG AND PARAMETER OPTİMİZATION OF A PHASED ARRAY RADAR TRACKİNG SYSTEM

KORAY ÖNKAL

Başkent Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
ELEKTRİK-ELEKTRONİK Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2012

“Faz dizilimli radar hedef izleme sisteminin modellenmesi ve eniyilenmesi” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından **ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Üye (Danışman) : Yrd. Doç. Dr. Mustafa DOĞAN

Üye : Doç. Dr Hamit Erdem

Üye : Doç. Dr Hasan Oğul

ONAY

.../09/2012

Prof. Dr. Emin AKATA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZ

FAZ DİZİLİMLİ RADAR HEDEF İZLEME SİSTEMİNİN MODELLENMESİ VE ENİYİLENMESİ

Koray ÖNKAL

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu tezde, faz diziliimli radarlarda, izleri kontrol altında tutabilmek için gerekli olan minimum radar kaynağı kullanmak üzere ilgili parametrelerin eniyilenmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Radar kaynağı kullanımını doğrudan etkileyen bu parametreler, iz güncelleme aralığı ve her ardışık iz güncellemesinde yapılan radar ışımaları için hesaplanan sinyal kuvvetleri ve sezim eşik değerleri olarak belirlenmiştir.

Yanlış ikazlar ve yoğun ortam girişimlerinin etkileri, hedef sezim modellemesinde ve izleme performansı tanımlamasında hesaba katılmaktadır. Oluşturulan sezim modeli ve izleyici karakteristiğine göre eniyileme problemi ortaya çıkarılmıştır. Eniyileme probleminin bilinen örnekleri sayısal olarak çözülmüştür. Bulunan eniyi çözüm, ilgili parametre kümesinin bağlantısız bir planlamasını vermektedir. Ayrıca gerçek zaman uygulamaları için uygun olacak eniyiye yakın parametre kümesinin seçimi için de önemli bir bakış açısı kazandırmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Faz Diziliimli Radar, Gezgin, PDA Süzgeci, İzleme ve Veri İlişkilendirmesi, Olasılıksal Veri İlişkilendirmesi, Arama Süreci Modellemesi, Ölçüm Modellemesi, Yaklaşık Riccati Denklemi, Kalman Süzgeci, Parametre Eniyilenmesi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa DOĞAN, Doğuş Üniversitesi, Kontrol Mühendisliği Bölümü

ABSTRACT

MODELING AND PARAMETER OPTIMIZATION OF PHASED ARRAY RADAR TRACKING SYSTEM

Koray ÖNKAL

Başkent University Institute of Science

The Department of Electrical and Electronics Engineering

In the work presented here, we address the parameter optimization for agile beam radar tracking to minimize the radar resources that are required to maintain a target under track. The parameters to be optimized include the track-revisit interval as well as the sequence of pairs of target signal strengths and detection thresholds associated with successive illumination attempts in each track-revisit.

The effects of false alarms and clutter interference are taken into account in the modeling of target detection and in the characterization of tracking performance. Based on the detection model and tracker characterization, the parameter optimization problem is formulated. Typical examples of the optimization problem are numerically solved. The optimal solution gives an off-line scheduling of the parameter set. It also provides insight into the selection of a near-optimal parameter set that is appropriate for real-time implementation.

Keywords: Phased Array Radar, Agile, PDA Filter, Tracking and Data Association, Probabilistic Data Association, Search Process Modeling, Measurement Modeling, Approximate Riccati Equation, Kalman Filter, Parameter Optimization

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa DOĞAN, Doğu University, Control Engineering Department

İÇİNDEKİLER LİSTESİ

Sayfa

ÖZ.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER LİSTESİ	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
1 GİRİŞ.....	1
2 KALMAN SÜZGEÇİ.....	3
2.1 Kalman Süzgeci ve Algoritması.....	6
2.2 Bilgi Süzgeci.....	10
3 YOĞUN ORTAMDA HEDEF İZLEME.....	10
3.1 Ölçümlerin Doğrulanması	10
3.2 Tek Hedef İzleme.....	14
3.3 Çok Sayıda Hedef İzleme.....	16
4 YOĞUN ORTAMDA İZLEME SİSTEMİ TASARIMI.....	17
4.1 En Yakın Komşu Standart Süzgeci.....	19
4.2 İz Ayırıcı Süzgeç	20
4.3 Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci.....	23
4.3.1 Durum öngörüsü.....	24
4.3.2 Olasılıksal veri ilişkilendirmesi.....	27
5 SEZİM EŞİĞİ ENİYİLENMESİ.....	32
5.1 Giriş	32
5.2 Olasılıksal Riccati Denklemi	33
5.3 Olasılıksal Riccati Denklemi için Yaklaşıklama.....	34
5.4 İzleyici İşlem Karakteristiği.....	37
6 BİR FAZ DİZİLİMLİ RADARIN HEDEF İZLEME SİSTEMİNİN MODELLENMESİ VE PARAMETRE OPTİMİZASYONU.....	39
6.1 Problemin Tanımlanması.....	39
6.2 Arama Süreci Modellemesi.....	40

6.2.1 Radar ölçüm modellemesi.....	40
6.2.2 Arama süreci modellemesi ve hedef sezimi.....	42
6.3 İzleme Sistemi Performansının Tanımı.....	51
6.3.1 PDA izleme sistemi ve değişinti denklemi.....	51
6.3.2 Yaklaşık değişinti denklemi.....	56
6.4 Sezim ve İzleme Parametrelerinin Eniyilenmesi.....	62
7 SONUÇ	67
KAYNAKLAR LİSTESİ	71
EKLER LİSTESİ.....	73

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Kalman Süzgeci Döngüsü.....	9
Şekil 3.1 Tek Hedefin Doğrulama Bölgesindeki Ölçümleri.....	15
Şekil 3.2 İki Hedefin Ortak Ölçümü.....	16
Şekil 5.1. Geleneksel bir izleme sisteminin öğeleri.....	32
Şekil 6.1 Arama Sürecinde meydana gelebilecek olaylar (M=3).....	43
Şekil 7.1 t_k anında her ışımadaki sinyal gürültü oranları.....	68
Şekil 7.2. Eniyilenmiş Sezim Eşik değerleri.....	69
Şekil 7.3. Eniyilenmiş iz güncelleme aralıkları.....	70
Şekil 7.4. Eniyilenmiş Aaçısal kestirim doğruluk oranı.....	71
Şekil 7.5. Hedefi tekrar yakalamak için başlatılan arama sürecinin birikimli olasılığı.....	72
Şekil 7.6 Başlangıç Durum $x_0\{1,1,01\}$ için doğru ve kestirim yapılan konum.....	73
Şekil 7.7 Başlangıç durum değeri $x_0\{1,1,01\}$ için konum kestirim hata (v(k)) parametresi.....	74
Şekil 7.8 Başlangıç Durum $x_0\{10,22,10\}$ için doğru ve kestirim yapılan konum.....	75
Şekil 7.7 Başlangıç durum değeri $x_0\{1,1,01\}$ için konum kestirim hata (v(k)) parametresi.....	76

ÇİZELGELER LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1. Geçit eşikleri ve geçidin olasılık kütle değerleri.....13

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A_1, A_2	:Anlık reel ve imajiner sinyal genlikleri
B	:Çift taraflı sinyal genlikleri
c_{jk}	:k anındaki iz güncellemesi ve j'ninci ışımanın SNR_0 parametresini ölçekleyen orantısal sabit.
$C, (C_k)$	:Hedefin tekrar yakalanması ve konumlandırılabilmesi için yapılan genişletilmiş aramanın maliyeti
E_R	:Alınan sinyal enerjisi
$f(u,v)$	:Hedef konum tahmini için olasılık fonksiyonu
L_N	:N sayıda iz güncelleme için toplam maliyet.
$\lambda, (\lambda_i)$	:i anındaki ışımada, yoğun ortam ve alıcı gürültüsü kaynaklı yanlış ikaz yoğunluğu
m	:k anında doğrulama geçidinde yapılan ölçüm sayısı
M	:Başlangıç arama sürecinde yapılan maksimum sayıda ardışık ışıma
N_R	:Alıcı gürültü enerjisi
N_1, N_2	:Reel ve imajiner faz kanallarının gürültüleri
$P(A)$	:A olayının olasılığı
P_D	:Hedef sezim olasılığı
P_{DG}	:Hedefin sezimi ve doğrulama geçidinde gözlenme olasılığı
$P_{Di}(u, v)$	:i'inci ışımada hedefin (u, v) konumunda olduğu bilinerek hesaplanan koşullu hedef sezim olasılığı
$P_{ENF}(k)$	:Hedefi tekrar yakalamak için başlatılan sürecin birikimli olasılığı
$P_F, (P_{Fi})$	:i'inci ışımada yanlış ikaz olasılığı
$P_{Gi}(u, v)$	:Hedefin tespit edildiği ve (u, v) pozisyonunda olduğu bilinmesi koşuluyla doğrulama geçidinde tespit edilme olasılığı
P_i, P^M	:i'nci ışımada en az bir ölçümün doğrulama geçidinde gözlenme olayı
Q_i, Q^M	:i'nci ışımada hiçbir ölçümün doğrulama bölgesinde gözlenememesi olayı

R_i, R^M	:i'nci ışımda hedefin doğrulama bölgesinde tespit edilme olayı
ρ	:Yoğun ortam ölçümlerinin uzlamsal yoğunluğu
S_i, S^M	:i'nci ışımda doğrulama bölgesinde yalnızca yanlış ölçümlerin bulunma olayı
σ^2	:Açısal ölçüm hatasının değışintisi
σ_m^2	:Hedef ivmesinin değışintisi
SNR	:Alıcı sinyalin sinyal gürültü oranı
$SNR_0, (SNR_{0i})$	:i'nci ışımda açısal ölçüm hatası olmadığı durumdaki sinyal gürültü oranı
$SNRT$	:Anlık sinyal gürültü oranı
$(SNRT_i)$	:Anlık sinyal gürültü oranı (i'nci ışımda)
$\mathbf{SNRT}, (\mathbf{SNRT}_i)$	:Gerçekleştirilmiş hali anlık sinyal gürültü oranı olan rassal değışken(i'nci ışımda)
$T(k - 1)$	: t_k ve t_{k-1} iz güncelleme anları arasındaki zaman aralığı
t_k	:k anındaki iz güncelleme anı
T_{track}	:Toplam izleme zamanı
τ_m	:Hedef ivmesinin öz ilintisinin zaman sabiti
(u, v)	:hedef konumunun doğrultman kosinüsleri
(u_i, v_i)	:i'nci ışımadaki doğrultman kosinüsleri
(u_0, v_0)	:Öngörölmüş hedef konumunun doğrultman kosinüsleri
V_B	:Merkezi hüzmeye yönlendirme yönünde olan genişliği B olan dairesel bölgenin hacmi
V_C	:Ölçüm sürecinde kapsanan hacim
$V_G, (V_{Gi})$	:i'nci ışımda doğrulama bölgesinin hacmi
$V_{Gi4}, \bar{V}_{Gi(4)}$	:i'nci ışımda 4 sigma doğrulama geçidinin hacmi ve beklenen değeri
V_0	:Açısal kestirimin band genişliği (B) ile ilgili doğruluğu
$Z_G, (Z_{Gi})$	: i'nci ışımda ölçüm uzayındaki doğrulama geçidi.
Z^k	:k anında doğrulanmış ölçümlerin toplam kümesi.

1. Giriş

Faz diziliimli radarlarda özgüleme çok bilinen bir problemdir. Özgüleme'nin amacı, radar kaynaklarını asgari düzeyde kullanarak hedefi takip etmektir. [9, 10] Faz diziliimli radarların en önemli ayırt edici özelliği radar huzmesinin, gerektiğinde, iz güncellemesi yapmak suretiyle tekrar tekrar konumlandırılabilmesidir. Genellikle özgülemenin ilk hüzmesinde hedef tespiti gerçekleşmez. Bu durumda arama süreci başlar ve iz güncellemesi gerçekleşene dek huzme ardışık bir şekilde hedefin öngörülen konumunun yer aldığı bölgeye gönderilir. Bu ardışık huzme konumlandırması sırasında her huzme aydınlatmasında hedef üzerinde harcanan zaman(TOT) kontrol edilebilir ve aydınlatılmış hedefin sinyal-gürültü oranına(SNR) direk etkisi olmaktadır. İz güncelleme aralığı ve Hedef üzerinde harcanan zaman dizisi, hedef izleme için harcanacak olan enerjiyi belirleyecek iki ana parametredir.

Son dönemde Özgüleme ile ilgili bir denektaşı programı hazırlanmıştır. [7] Bu denektaşı programı daha önceden hazırlananların genişletilmiş bir versiyonudur ve yanlış ikaz , elektronik boğucu unsurlarını da içeren zorlayıcı çevre şartlarına sahip bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Denektaşı programı için çözüm yaklaşımları olarak Çoklu Model Etkileşimi ve Çoklu Önerim İzleme algoritmaları geliştirilmiştir. Radar kaynağı kullanımını en aza indirmek amacıyla Öngörü doğruluğu ve SNR'lerden oluşan parametre dizilerinin eniyilenmesi fikri ilk kez [11]'de incelenmiştir. Yalnız tekrarlanarak yapılan her huzme aydınlatmalarına ait SNR 'lerin eşit olduğu varsayılmıştır. Benzer bir özgüleme problemi de [8]'de incelenmiştir. Burada ise bir optimal planlama problemi formülize edilerek enerji kullanımı asgari seviyeye çekilmeye çalışılmıştır. Fakat bu formül içerisinde parazit girişimi etkisi dahil edilmemektedir ve düşük yanlış ikaz olasılığı ve parazit yoğunluğu koşullarında gerçekleştirildiğinden ötürü gerçek zaman koşullarıyla örtüşmemektedir.

Genel olarak, radar enerji kaynağını asgari seviyede kullanmak suretiyle iz bakımının yapılması için Faz diziliimli radarların sezim ve izleme parametrelerinin eniyilenmesi üzerine çalışılacaktır. Bu çalışmada daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak

yanlış ikaz ve yoğun ortam girişimlerini de hasaba katarak modelleme yapılacaktır. Ayrıca İz güncelleme aralığı, SNR ve sezim eşiği dizileri gibi parametrelerinde eniyilenmesi üzerine çalışılacaktır.

Öncelikle bir arama süreci modellenenecektir. Bu modelde bir önceki huzme aydınlatması sonucu doğrulama geçidi içerisinde bir ölçüm gözlemlenmemiş ise tekrarlanan huzme aydınlatmaları gerçekleştirilecektir. Oluşturulacak Arama süreci modeli, bu süreçte meydana gelebilecek olaylar ve olasılıklara göre karakterize edilecektir. Ayrıca yanlış ikaz ve yoğun ortam sebebiyle oluşabilecek istenmeyen ölçümler de hesaba katılacaktır. Model içerisinde ayrıca hedef sezimi olasılığı için bir yaklaşıklama yapılacaktır.

Yoğun ortamdaki ölçümler ve yanlış ikazlar ölçümlerde bir belirsizliğin doğmasına neden olmaktadır. Bu belirsizlik ise hedef izleme problemini karmaşıktırmaktadır. Yoğun ortamda hedef izleme için Olasılıksal Veri ilişkilendirmesi(PDA) algoritmasını kullanılmıştır. Bu algoritma yoğun ortamda dayanıklı olmasıyla bilinmektedir. Kalman süzgeci algoritmasını temel alan ve bu algoritma üzerine koşullu olasılık hesaplamalarını da ilave ederek kestirimler yapabilmektedir. Dolayısıyla yoğun ortamda daha gerçeğe yakın sonuçlar elde edilebilen bir algoritmadır. Ayrıca performans değerlendirme algoritması da geliştirilmiştir. Uyarlanmış Riccati Denklemi bu amaç için kullanılmıştır. Olasılıksal Veri ilişkilendirmesinde, sezim hata değişintisi güncelleme denklemine, kesin yaklaşımlama yapılarak bulunan “Uyarlanmış Riccati denklemi sistemin izleme performansının değerlendirilmesinde, radarın çalıştığı tüm ortamlarda oldukça kullanışlıdır. Ayrıca Riccati denklemindeki bilgi azaltıcı faktör için de analitik bir yaklaşıklama yapılmıştır. Böylelikle süzgecin değişinti güncelleme denklemi için daha açık bir ifade bulunmuştur.

Son olarak ta hazırlamış olduğumuz arama süreci modeli ve izleyici karakteristiği baz alınarak, belirlenmiş parametrelere göre bir enerji minimizasyon problemi oluşturulacaktır.

Bundan sonraki bölümlerde; Öncelikli olarak PDA algoritmasının bir nevi temeli olan Kalman Süzgecini inceleyeceğiz. Bu bölümde ölçüm, sezim ve değişinti denklemleri gibi temel öğeleri görülecektir. Ayrıca süzgecin algortimasını açıklanacaktır. Bu bölümün ardından yoğun ortamda hedef izleme koşulları ve bununla ilgili olarak oluşturulan matematiksel modeller ve parametreler açıklanacaktır. Ayrıca Kalman ile olan ilinti de incelenecektir. Daha sonra Yoğun ortamda tek bir hedefiz izlenebilmesi için tasarlanan farklı algoritmalar incelenecektir. Bunlardan biri olan Olasılıksal Veri İlişkilendirmesi algoritmasının özellikleri derinlemesine tartışılacaktır ve en önemlisi Kalman ile olan benzerliklerinin yanı sıra farklılıklarının nereden kaynaklandığı ve ek özellikleri gözlemlenecektir. Sonraki bölümde ise İzleyici karakteristiğinin bulunması için kullanıla Uyarlanmış Riccati Denkleminin çıkarılışı açıklanacaktır.

Son bölümde ise problemin tanımlamasının ardından sırasıyla arama süreci modellemesi, izleyici karakteristiği ve bu iki işleme istinaden belirli parametrelerin eniyilenmesi açıklanacak ve sonuç kısmında gözlemlenecektir.

2. KALMAN SÜZGEÇİ

Ayrık zamanlı, doğrusal ve dinamik bir sistem düşünelim. Bu sisteme ait denklemler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x(k+1) = F(k)x(k) + v(k) \quad (2.1)$$

$x(k)$, k anındaki durum, $u(k)$, giriş veya denetim sinyali, $v(k)$ ise sıfır ortalamalı, beyaz, Gauss gürültüsüdür. Değişinti matrisi ise $Q(k)$ 'dir. Ölçüm denklemi de aşağıdaki gibidir.

$$z(k) = H(k)x(k) + w(k) \quad (2.2)$$

$w(k)$, sıfır ortalamalı, beyaz, Gauss gürültüsüdür. Değişinti matrisi $R(k)$ 'dir. Başlangıç durumu $x(0)$, Gauss dağılımlı, ortalaması $x(0|0)$, değişintisi ise $P(0|0)$ 'dir. Bu iki

gürültü dizisi ve başlangıç koşulları(durumları) bağımsız kabul edilir. Eğer iki vektör birleşik olarak Gauss özelliğinde ise birinin diğerine koşullu olasılığının yoğunluğu da Gauss özelliğindedir.

$$\hat{x}(k|k) = E[x(k)|Z^k] \quad (2.3)$$

Yukarıda verilen ifade durumun ölçümler için koşullu ortalamasıdır. Ölçümler aşağıda verilmiştir.

$$Z^k = \{z(j), j=1, \dots, k\} \quad (2.4)$$

Ayrıca, koşullu durum hata değişinti matrisi ise şu şekilde olacaktır.

$$P(k|k) = E\left\{[x(k) - \hat{x}(k|k)][x(k) - \hat{x}(k|k)]' | Z^k\right\} \quad (2.5)$$

Geçmiş değişkenlerin değerleri, koşullanma da kullanılmakta ancak açık olarak belirtilmemektedir. k+1 anındaki durum öngörüsü ve değişintiyi bulan özyineleme yöntemi statik denklemlerden çıkarılabilir. Aşağıda statik öngörü denklemleri yer almaktadır.

$$\hat{x} = E[x|z] = \bar{x} + P_{xz}P_{zz}^{-1}(z - \bar{z}) \quad (2.6)$$

$$P_{xx|z} = E\left[(x - \hat{x})(x - \hat{x})' | z\right] = P_{xx} + P_{xz}P_{zz}^{-1}P_{zx} \quad (2.7)$$

Dinamik denklemler yukarıda verilen statik denklemlerden yola çıkılarak bulunabilmektedir. Aşağıda belirtilmiştir. k+1 anındaki değişkenlerin öngörüsü yapılmaktadır.

$$x \rightarrow x(k+1) \quad (2.8)$$

k+1 anından önceki ortalaması ise şu şekildedir.

$$\bar{x} \rightarrow \hat{x}(k+1|k) = E[x(k+1)|Z^k] \quad (2.9)$$

Ölçüm denklemleride şu şekildedir.

$$z \rightarrow z(k+1) \quad (2.10)$$

k anındaki ortalaması aşağıda verilmiştir.

$$\bar{z} \rightarrow \hat{z}(k+1|k) = E[z(k+1)|Z^k] \quad (2.11)$$

k+1 anındaki öngörü şu şekilde ifade edilir.

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}(k+1|k+1) \quad (2.12)$$

Tahmin edilecek değişkenin önceki (k anındaki) değişinti matrisi aşağıdaki gibidir.

$$P_{xx} \rightarrow P(k+1|k) = \text{cov}[x(k+1)|Z^k] = E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}'(k+1|k)|Z^k] \quad (2.13)$$

Ölçümlerin değişintisi şu şekilde olacaktır.

$$P_{zz} \rightarrow S(k+1) = \text{cov}[z(k+1)|Z^k] = E[\tilde{z}(k+1|k)\tilde{z}'(k+1|k)|Z^k] \quad (2.14)$$

Ölçüm ile tahmini yapılacak değişken arasındaki değişinti ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$P_{xz} \rightarrow \text{cov}[x(k+1), z(k+1) | Z^k] = E[\tilde{x}(k+1|k) \tilde{z}'(k+1|k) | Z^k] \quad (2.15)$$

$$P_{xz} P_{zz}^{-1} \rightarrow W(k+1) \quad (2.16)$$

Yukarıdaki matris, en düşük kare kestiricisi teoreminde kazanç olarak bilinir. Durum değışintisi ise şu şekildedir.

$$\begin{aligned} P_{xx|z} &\rightarrow P(k+1|k+1) = \text{cov}[x(k+1) | Z^{k+1}] \\ &= E[\tilde{x}(k+1|k) \tilde{x}'(k+1|k) | Z^k] \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1 Kalman Süzgeci ve Algoritması

(2.9) 'da tek adım durum öngörüsünü (2.1) 'deki Z^k 'ya koşullu olan sezim ifadesinin yerine koyduğumuzda aşağıdaki denklemi buluruz.

$$\hat{x}(k+1|k) = F(k) \hat{x}(k|k) + G(k) u(k) \quad (2.18)$$

Yukarıdaki ifadeyi (2.1) 'den çıkardığımızda şu sonucu elde ederiz.

$$\tilde{x}(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) = F(k) \tilde{x}(k|k) + v(k) \quad (2.19)$$

Ve (2.13) 'te tek adım sezim değışintisi ise aşağıdaki gibi uyarlanmıştır.

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= E[\tilde{x}(k+1|k) \tilde{x}'(k+1|k) | Z^k] \\ &= F(k) P(k|k) F'(k) + Q(k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.19)'da u'nun sadeleştirilmesinin sezim doğruluğunu etkilememektedir. Öngörülen ölçüm, (2.2) 'deki ifadenin, Z^k koşullanmasıyla, $k+1$ anındaki beklenen değeri alınarak bulunmaktadır. Aşağıda belirtilmiştir.

$$\hat{z}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \quad (2.21)$$

Yukarıdaki ifadeyi, $k+1$ anında, (2.2)'den çıkardığımızda şu ifadeyi buluruz.

$$\tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) + w(k+1) \quad (2.22)$$

Ölçüm öngörüsü değişinti matrisi ise (2.14) baz alınarak aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} S(k+1) &= E[\tilde{z}(k+1|k)\tilde{z}'(k+1|k)|Z^k] \\ &= H(k+1)P(k+1|k)H'(k+1) + R(k+1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Durum ve ölçüm arasındaki değişinti matrisi de (2.22) ile (2.15)'de verilen değişinti ile aşağıdaki şeklini almıştır.

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{z}'(k+1|k)|Z^k] \\ &= E\left\{\tilde{x}(k+1|k)[H(k+1)\hat{x}(k+1|k) + w(k+1)]' | Z^k\right\} \\ &= P(k+1|k)H'(k+1) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Süzgecin kazancı (2.16), (2.23) ve (2.24)'deki ifadeler kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$W(k+1) = P(k+1|k)H'(k+1)S^{-1}(k+1) \quad (2.25)$$

Son olarak ta sezim(öngörü) denklemi (2.12), (2.6)'ya göre şu şekilde yazılabilir.

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)v(k+1) \quad (2.26)$$

Ayrıca inovasyon veya ölçüm kalanı (artanı) olarak adlandırılabilen (2.22) ile tamamen aynı ifadeye sahip v 'nin denkelmeleri de şu şekilde uyarlanmıştır.

$$\begin{aligned} v(k+1) &= \tilde{z}(k+1|k) = z(k+1) - \hat{z}(k+1|k) \\ &= z(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2.7) 'ye karşılık gelen, (2.17) 'de yer alan değişiminin $k+1$ anındaki hali çıkarılacak olursa aşağıdaki hali alır.

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H'(k+1)S^{-1}(k+1)H(k+1)P(k+1|k) \quad (2.28)$$

$$= P(k+1|k) - W(k+1)S(k+1)W^{-1}(k+1) \quad (2.29)$$

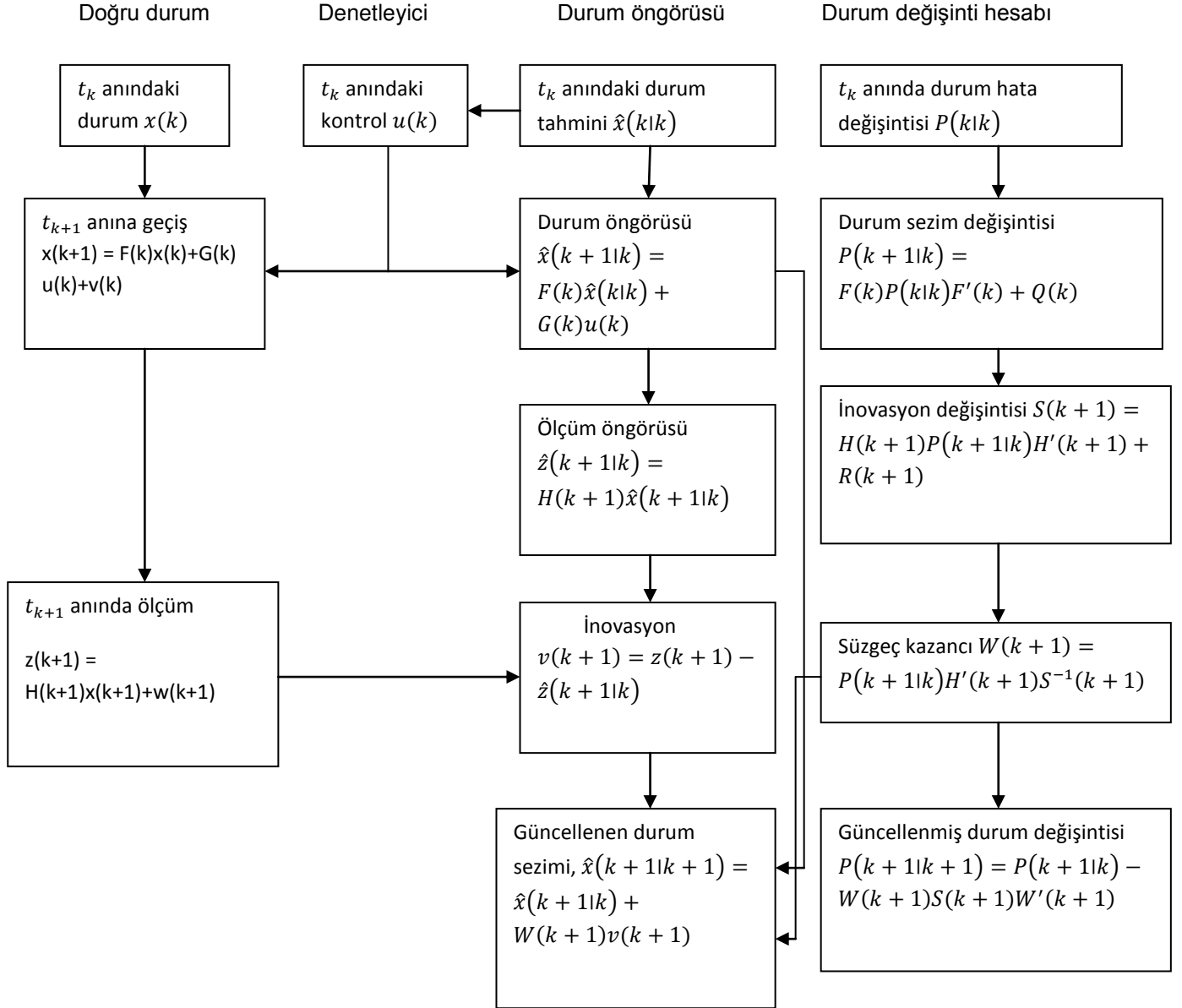
$$= [1 - W(k+1)S(k+1)]P(k+1|k) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} &= [1 - W(k+1)S(k+1)]P(k+1|k)[1 - W(k+1)S(k+1)]' \\ &+ W(k+1)R(k+1)W'(k+1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.26) daki denkleme, “durum güncelleme denklemi de” denilebilir. (2.28) - (2.31) 'de yer alan denklemlere de değişinti güncelleme denklemleri adı verilir. Değişinti denklemlerinin farklı formlardaki versiyonları değişik sayısal özellikleri de barındırmaktadır. Örnek olarak (2.31)'deki formda işlem kalabalığı olmasına rağmen, P 'nin simetrik ve kesin pozitif olduğu garanti edilmektedir. Pratik uygulamalarda değişinti denklemlerinin sayısal anlamda kararlı olması çok önem arz etmektedir.

Şekil 2.1'de akış şeması açıklanan sezim algoritmasına “Kalman Süzgeci” adı verilir. Özellikle her k anında, geçimşin tamamı $\hat{x}(k|k)$ istatistiği ve onun değişintisiyle özetlenmiştir. Süzgecin kazancının (2.25) alternatif bir gösterimi de aşağıda vermiştir.

$$W(k+1) = P(k+1|k+1)H'(k+1)R^{-1}(k+1) \quad (2.32)$$



Şekil 2.1 Kalman Süzgeci Döngüsü

2.2 Bilgi Süzgeci

Ters değişinti için bir özyineleme söz konusudur. Buna ayrıca bilgi matrisi de denilebilir.

$$P^{-1}(k+1|k+1) = P^{-1}(k+1|k) + H'(k+1)R^{-1}(k+1)H(k+1) \quad (2.33)$$

Yukarıdaki ifade cebirsel anlamda değişinti matrisiyle eşittir. Hatta güncelleme ve sezim denklemlerinin tamamı, bilgi süzgeci olarak bilinen, ters değişinti için geliştirilebilir.

(2.18) ve (2.26) denklemleri birleştirilerek durumun tek adım öngörüsü için tek bir özyinelemeli ifade bulunur.

$$\begin{aligned} x(k+1|k) &= F(k)\hat{x}(k|k-1) + F(k)W(k)v(k) + G(k)u(k) \\ &= F(k)[1 - W(k)H(k)]\hat{x}(k|k-1) + F(k)W(k)z(k) + G(k)u(k) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Aynı şekilde (2.20) ve (2.28) birleştirilerek, tek adım öngörü değişintisi için tek bir özyinelemeli ifade oluşturur. Bu ifadenin adınada Ayrık zaman Matris Riccati denklemi denilir.

(2.34)'deki değişinti denklemi, ölçümlerden bağımsızdır ve ölçümlerle işlem yapılmadan iterasyon yapılarak güncellenebilir.

3. YOĞUN ORTAMDA HEDEF İZLEME

3.1. Ölçümlerin doğrulanması

Hemen hemen tüm izleme uygulamalarında gözlenen ölçümler arasında durum kestiricisi ile en yakın olanı seçen bir prosedür bulunmaktadır.

Radar izleme problemlerinde, izlenene hedeften gelen geri dönüş, Radarın izlenen hedefe doğru yaydığı enerjinin hedeften yansımalarının meydana gelme zamanı yani gecikme süresi içerisinde aranır. Yani, “Erim geçidi” kurulur ve bu geçidin içerisinde gözlemlenen her sezim hedefin kendisiyle olarak değerlendirilir.

Genellikle ölçümler, Erim, azimut ve yükselti veya Erim ve Doğrultman kosinüsleri şeklinde adlandırılan bileşenlerden oluşur. Pasif sonar koşullarında azimut , frekans(eğer sinyal dar band ise), sinyal şiddeti band genişliği gibi diğer özellikler ölçülebilir. Sinyalleri 2 ayrı sensörden karşılıklı ilişkilendirdiğimiz takdirde, varış zaman farkı, frekans farkı gözlemlenebilir. Optik sensörler, 2 açıyı veya doğrultman kosinüsleri bir frekans bandı içerisindeki enerjiyi bulmak adına ölçülebilir.

Ölçülebilen çok sayıda farklı değişkenlerin ışığında, Sürekli değerli ölçümler için jenerik periyodik aralama ve doğrulama prosedürleri aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Bir hedefin takip altında olduğunu düşünelim. Bir başka deyişle süzgeci en azından başlangıç durumuna getirilmiş. (sıfırlanmış) Bu durumda aşağıdaki denkleme göre;

$$\hat{z}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \quad (3.1)$$

Ölçüm vektörünün $\hat{z}(k+1|k)$ öngörülen değeri ve ilgili değişinti matrisi $S(k+1)$

Aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$\begin{aligned}
S(k+1) &= E[\tilde{z}(k+1|k)\tilde{z}'(k+1|k)|Z^k] \\
&= H(k+1)P(k+1|k)H'(k+1) + R(k+1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

k+1 anında yapılan doğru ölçümün normal dağılım özelliğinde olduğu kabul edilmektedir.

$$p[z(k+1)|Z^k] = N\left[z(k+1); \hat{z}(k|k+1), S(k+1)\right] \tag{3.3}$$

Ölçüm uzayında, ölçümlerin gözlenme olasılığının yüksek olduğu bir alan tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{k+1}(\gamma) &\square \left\{ z : \left[z - \hat{z}(k+1|k) \right]^T S^{-1}(k+1) \left[z - \hat{z}(k+1|k) \right] \leq \gamma \right\} \\
&= \left\{ z : v'(k+1)S^{-1}(k+1)v(k+1) \leq \gamma \right\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

v , inovasyon, yani gerçek ölçüm ile öngörülen arasındaki farktır. γ yukarıda belirtilmiştir. Yukarıda (1-2) de belirtilen denklemde ifade edilen bölgeye doğrulama bölgesi denilir. Bu bölge olasılık yoğunluğunun elipsi veya Gauss varsayımı altında hesaplanan olasılık yığınının içeren minimum hacim olarak açıklanır. Doğrulama bölgesi içerisine düşen ölçümler geçerli, dışında kalanlar ise geçersiz kabul edilir.

γ parametresi, chi-square dağılımının bulunduğu tablolardan elde edilmektedir. (1-2) 'de belirtilen, Doğrulama bölgesini tanımlayan, Inovasyonun ağırlıklı düzgesi, chi-square dağılımına sahiptir ve serbestlik derecesi, ölçüm boyutuna eşittir. (n_z) Tablo 1.1 'de Olasılık yığını verilmiştir.

$$P_G = P\{z(k+1) \in \tilde{V}_{k+1}(\gamma)\} \tag{3.5}$$

ve boyutların n_z farklı değerleri için doğru ölçümün doğrulama bölgesine düşme olasılığı yukarıdaki belirtilmiştir. γ parametresinin kare kökü olarak tanımlanan $g = \sqrt{\gamma}$ bazı kaynaklarda Doğrulama bölgesinin “sigma sayısı” (standart sapma) olarak geçer. Fakat bu parametre bölgedeki olasılık yığınının, (n_z) bağımlı olması sebebiyle tam olarak tanımlayamaz. Eşik değeri γ , her uygulamada önceden seçilir ve sabit tutulur.

Çoğu uygulamada izlenen hedefin kestirimi yapılamaması durumu da söz konusu olabilir. Yani bu durumda doğrulama geçidinin ne içerisinde ne de dışarısında bir ölçüm yapılmamış demektir.

Kestirim olasılığı

$$P_D = P\{\text{Doğru ölçüm tespit edilmiştir.}\} \quad (3.6)$$

$\gamma = g^2 :$	1	4	9	16	25	6.6	9,2	11.4
$g :$	1	2	3	4	5	2.57	3.03	3.38
$n_z = 1$	.683	.954	.997	.99994	1.0	.99		
$n_z = 2$	.393	.865	.989	.9997	1.0		.99	
$n_z = 3$	.199	.739	.971	.9989	.99998			.99

Çizelge 1.1. Geçit eşikleri ve geçidin olasılık kütle değerleri

Yukarıda açıklanan doğrulama prosedürleri, bilgi işlemcisinin izlenen hedeften gelen ölçümleri aradığı ölçüm uzayındaki bölgeyi kısıtlamaktadır. Doğrulama bölgesinin dışında kalan ölçümler beklenen lokasyonun çok uzağında yer almaktadır ve dolayısıyla hedefin kendisinden kaynaklanma ihtimali çok düşüktür. Bunun yanı sıra, birden fazla ölçümün doğrulama bölgesinde görülmesi de söz konusu olabilir. Bunun sebepleri ise, yoğun ortam, gürültü, yanlış alarm oranının yüksek olması ve arama alanında mevcut olan benzer nitelikteki hedeflerdir.

k anında doğrulanmış ölçümlerin kümesi aşağıda gösterilmiştir.

$$Z(k) = \{z_i(k)\}_{i=1}^{m_k} \quad (3.7)$$

Eğer $m_k = 0$ ise (doğrulama bölgesinde hiç ölçüm görülmemiştir.) $Z(k)$ kümesi boş küme olacaktır.

k anına kadarki tüm ölçümlerin kümülatif kümesi ise aşağıdaki gibidir.

$$Z^k = \{Z(j)\}_{j=1}^k \quad (3.8)$$

Problemin en önemli noktası, doğrulanmış ölçümleri izlenen hedef ile ilişkilendirmek ya da ölçümün yoğun ortam veya yanlış alarmdan kaynaklandığına karar verip ayırmaktır. Bu yöntemle veri ilişkilendirmesi, ölçüm ilişkilendirmesi ya da veri ilintisi olarak değişik isimler verilmiştir.

3.2. Tek hedef izleme

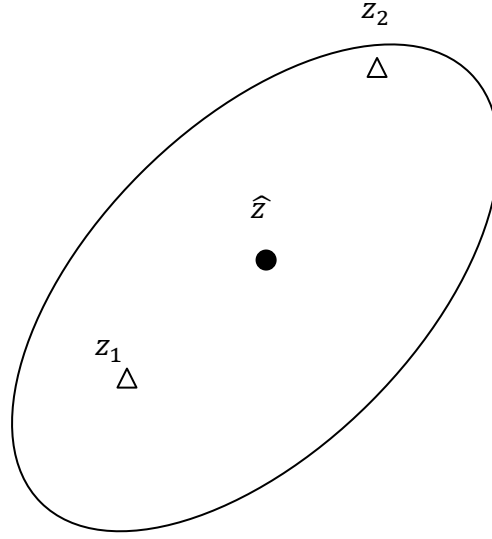
Yoğun ortam terimi, yakın mesafede yer alan objelerden kaynaklanan geri dönüş ve kestirimler için kullanılır. Bunlara örnek olarak hava, elektromanyetik girişim, akustik anormallikler ve yanlış ikazlar gibi sayısal, lokasyon ve yoğunluk özellikleri genellikle rassal olan ölçümleri örnek verebiliriz. Bu durum genellikle doğrulama bölgesinde(geçidinde) izlenen tek hedef için birden fazla ölçüm oluşmasına sebep olmaktadır. Bu doğrulanmış ölçümlerin kümesi aşağıdakilerden meydana gelir.

1. Doğru ölçüm (tespit edilmiş ve doğrulama geçidine düşmüştür.)
2. Yanlış ölçüm (Yanlış ikaz veya yoğun ortamdaki meydana gelmiştir.)

Ölçüm vektörünün bileşenlerinde istenmeyen ölçümleri elemek için gerekli tüm değişkenlerin olduğu varsayılmaktadır. Dolayısıyla uygun olan tüm bilgiler kullanıldığında, Doğrulanmış olan tüm ölçümlerin izlenen hedeften kaynaklandığı

söylenilmektedir. Tek hedef varsayımındaki bu söylemin sebebi, istenmeyen ölçümlerin rassal girişim oluşturmalarıdır. Bu çeşit bir girişim için oluşturulan matematiksel model, ölçüm uzayında birbiçimli dağılıma sahiptir.

Bu durum Şekil 2.1 'de açıklanmıştır. Şekilde görüldüğü üzere iki boyutlu doğrulama bölgesi elips yapısındadır. Elipsin merkezi, öngörülen ölçümdür. $\hat{z}(k+1|k)$. Şekli ve boyu ise $S(k+1)$ (İnovasyon(v) parametresinin değişinti matrisi) tarafından belirlenir. Yalnızca tek ölçümün doğru olduğu varsayımına rağmen doğrulama geçidine düşen ölçümlerin hepsinin hedeften kaynaklanma ihtimali çok düşük değildir.



Şekil 3.1 Hedefin Doğrulama Bölgesindeki Ölçümleri

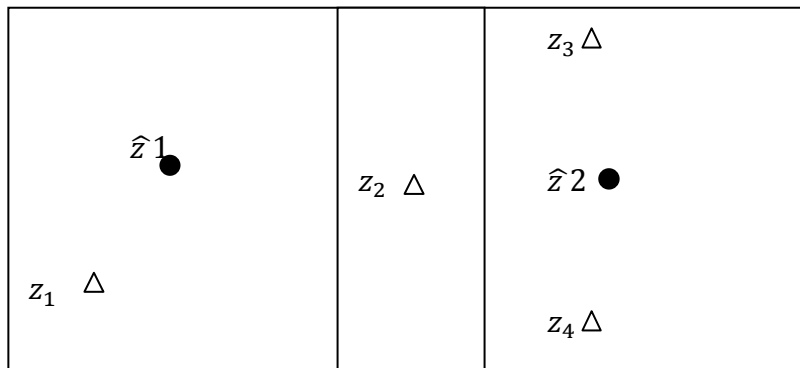
3.3. Çok sayıda hedef izleme

Yoğun ortamda yapılan ölçümlerle ilgili esas varsayım; yanlış ikazların uzayda, zamanda ve yoğunluk anlamında rassal dağılmış olmalarıdır. Bir sonraki bölümde anlatılacak olan yöntemler bu rassallık özelliğine dayanmaktadır. Fakat bu yöntemler inatçı ve zaman ilintili girişimler söz konusu olduğunda başarısız olabilir. İnatçı girişimler için en bilinen kaynak diğer hedeflerin ve harici nesnelerin varlığıdır. Bu girişimin meydana gelebilmesi için söz konusu kaynakların fiziksel olarak izlenen

hedefe yakın olması gerekmez; Örnek olarak pasif sonarda yüz mil civarında uzaklıkta bulunan bir nesne, izlenen hedefin azimut(yatay eksen) geçidinde yanlış ölçüme sebep olabilmektedir. Rassal olmayan başka kaynaklara örnek olarak yankılaşım verilebilir.

Özet olarak, Girişime sebep olan nesneler ile baş edebilmenin en önemli yolu, bu nesneleri izlenmek istenen hedef olsun veya olmasın ayrı olarak takip etmektir. Fakat nesnelerin sayısı izleyicinin kapasitesini aşması(zorlaması) durumunda bu yöntem imkansız hale gelebilir. Son olarak; bazı harici nesnelerden kaynaklanan girişimler, izlenme alanı içerisinde bir yok olup bir ortaya çıkabilmektedirler. Öte yandan rassal yoğun ortam varsayımlarını geçersiz kılacak kadar devamlılığa sahip olup bu sinyallerin izlenebilmesini ise mümkün kılmamaktadır.

Aynı bölge içerisinde birden çok hedefi izlemek, ek olarak, Yoğun ortam ve yanlış ikazları elimine etmeye çalışmak, tek hedef izlemkten daha karmaşık olduğu bir gerçektir. Örnek olarak Şekil 1.2 'de yer alan durumu düşünelim. z_1 ölçümü ya 1.hedefte ya da yoğun ortamdan kaynaklanmış olabilir, z_2 1.veya 2. Hedeftan ya da yoğun ortamdan, z_3 ve z_4 ise ya 2. hedeften ya da yoğun ortamdan kaynaklanmış olabilir. Buna ilaveten, eğer z_2 ölçümü 2. hedeften kaynaklanmışsa z_1 'in büyük olasılıkla 1. Hedeften kaynaklandığını söyleyebiliriz. Bu örnekte rassal yoğun ortam etkisine ek olarak, ısrarlı girişim söz konusu olduğunda ölçümler arası bağımlılığı görebiliyoruz.



Şekil 3.2 İki Hedefin Ortak Ölçümü

Yukarıda durumda, yapılan bir ölçümün 1.hedeften, 2.hedeften veya yoğun ortam etkisinden kaynaklanabileceğini söylemiştik. Fakat her sinyal işleme sisteminin kendi çözünürlük eşiğinin olduğu gerçeğinden hareketle, ek olarak bir olasılık daha düşünülmelidir. z2 ölçümü, iki hedeften kaynaklanan ölçümlerin çakışmasının bir sonucu olabilir. Bu durum 2 ayrı doğrulama bölgesinin kesişimine düşen ölçümler için düşünülmesi gereken 4.durumu oluşturmaktadır.

4. YOĞUN ORTAMDA İZLEME SİSTEMİ TASARIMI

Bu bölümde bir önceki kısımda deyinen problem üstünde durulacaktır. Rassal dağılımlı yoğun ortamda izlenen tek hedef için veri ilişkilendirmesi. İzlenene Hedefin durum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$x(k+1) = F(k)x(k) + v(k) \quad (4.1)$$

Ölçüm denklemi (doğru ölçümler için)

$$z(k) = H(k)x(k) + w(k) \quad (4.2)$$

v ve w , sıfır ortalamalı, karşılıklı bağımsız, beyaz, gauss gürültü dizileridir. Değişinti matrisleri ise sırasıyla $Q(k)$ ve $R(k)$ olarak bilinir.

Doğru ölçümleri yanlış olanlardan ayırmak için gerekli olan tüm değişkenlerin ölçüm vektörlerinde mevcut olduğu varsayılır. Doğrusal model üzerinde çalışılmasına karşın. Açıklanacak olan yöntemler doğrusal olmayan modellerin içinde doğrusallaştırma yapılarak kullanılmasıda mümkündür.

Yoğun ortamda hedef izlenebilmesi için en basit yol öngörülen ölçümlere en yakın olan doğrulanmış ölçümleri seçmek ve doğru ölçüm gibi düşünülerek izleme

süzgecinde kullanmaktır. Bu yöntem “En Yakın Komşu Standart süzgeci” olarak bilinir.

Doğrulama bölgesi, doğru ölçümlerin yüksek olasılıkla yer aldığı bölgedir. Bu bilgi ışığında; eğer izlenen tek hedef için doğrulama bölgesinde birden fazla ölçüm mevcut ise bu ölçümlerden herhangi biri doğru ölçüm demektir. Yani en azından ölçümlerin tümü bir şekilde kullanılmalıdır.

Bunların dışında hedeften gelen çok sayıda ölçümü aynı anda işlemek gibi bir problem ortaya çıkmaktadır. Çözüm olarak birden fazla ölçümün doğrulandığı her durumda izleri çok sayıda önermeye ayırılabilir. Yanlış ikaz sayısını azaltmak için olasılık fonksiyonu kullanılarak uygulanan budama (pruning) adı verilen yöntem kullanılabilir fakat kalabalık (yoğun) ortamlarda iz sayısı oldukça fazla olmaktadır.

Bu yöntemlere ek olarak İki farklı bayesian yaklaşımı da mevcuttur. Birincisi sadece en son doğrulanmış ölçümlerin kümesi ile ilgilenir. O anki zamanda doğrulanmış her ölçüm ün doğru olma olasılığını hesaplar. Bu yöntem “Olasılıksal Veri İlişkilendirmesi” denilir. İzlenmekte olan hedefin tüm komşu noktalarını, olasılıksal olarak hedef ile ilişkilendirir. Ardından bu olasılık bilgisi uygun bir şekilde uyarlanmış bir izleme süzgecinde kullanılır. Bu süzgece Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci denilir.

Olasılıksal Veri İlişkilendirmesi yalnızca son(o anlık) ölçümleri ilişkilendirirken, ikinci Bayesian yaklaşımı olarak tanımlanan “Optimal Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci” ise tüm ölçümleri iz ayırıcı süzgeçten geçirip her bir ayrılmış iz için ayrı olasılık hesabı yapar.

Optimal yaklaşım, kalabalık ortamlarda aşırı fazla işlem gerektirebilir. Diğer yöntemde ise zaman ekseninde N basamak geriye gidilerek en son doğrulanmış ölçümler için olasılıksal ilişkilendirme yapılır.

4.1. En yakın komşu standart süzgeci

Bu yöntemde, Öğörülen ölçüme en yakın olan doğrulanmış ölçüm, hedefin durumunu güncellemek için kullanılır. Minimize edilecek uzaklık ölçüsü, 3.3 'de belirtilen inovasyonun ağırlıklı düzgesidir.(weighted norm)

$$\begin{aligned} d^2(z) &= [z - \hat{z}(k+1|k)]' S^{-1}(k+1) [z - \hat{z}(k+1|k)] \\ &= v'(k+1) S^{-1}(k+1) v(k+1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

S, inovasyonun(v) değışinti matrisidir.

Bazı olası durumlarda, en yakın ölçümü seçmek her zaman doğru ölçümü seçmek anlamına gelmez. Bu da demek oluyor ki bu yöntemin bazen yanlış ölçümleri de doğru kabul edebilme riski bulunmaktadır. Bunun nedeni Süzgeç tarafından hesaplanmış hata değışinti matrisine göre seçilen ölçüm doğru ölçümün garantisi olmamasıdır. Ortamın yoğunluk seviyesine göre Bu yöntemin performansının ne kadar düştüğünü ilerleyen kısımlarda göreceğiz.

4.2. İz ayırıcı süzgeç

Bu yöntemde, k = 1 anında iz, ayrı varsayım izlerine ayrılır. Doğrulama bölgesinin içinde olan ve merkezinin $\hat{z}(1|0)$ etrafında yer alan tüm izler ayrılır. Böylelikle tüm izler için ayrı bir güncellenmiş Durum ve değışinti, Kalman süzgeci aracılığıyla hesaplanır. Daha sonrasında k = 2 anındaki yeni doğrulama bölgesini oluşturmak üzere tekrar yürütölür. Her yeni doğrulama bölgesi için yöntem tekrarlanır.

k anına kadar alınan l'ninci ölçüm dizisi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$Z^{k,l} = \{z_{i,l}(1), \dots, z_{i,l}(k)\} \quad (4.4)$$

$z_i(j)$, j anında i'inci ölçümdür. Dizinin bir iz olma olasılığının fonksiyonu. Bir başka deyişle, aynı hedeften kaynaklanan öğelere sahip bir olay;

$$\theta^{k,l} \in \{Z^{k,l} \text{ doğru iz}\} \quad (4.5)$$

Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\Lambda(\theta^{k,l}) = p[Z^{k,l} | \theta^{k,l}] = p[z_{i_{k,l}}(1), \dots, z_{i_{k,l}}(k) | \theta^{k,l}] \quad (4.6)$$

Z^k , k zamanına kadar ki tüm ölçümlerin birleşik kümesi ve (3.6)'da birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonudur. (2-243) 'da belirtilmiştir.

$$\Lambda(\theta^{k,l}) = \prod_{j=1}^k p[z_{i_{j,l}}(j) | Z^{j-1}, \theta^{k,l}] \quad (4.7)$$

Doğrusal Gauss varsayımına göre,

$$p[z(j) | Z^{j-1}, \theta^{k,l}] = N[z(j); \hat{z}(j | j-1), S(j)] = N[v(j); 0, S(j)] \quad (4.8)$$

v ve S'yi karmaşıkleştirmamak adına z'nin alt simgeleri belirtilmemiştir. 3.7 ve 3.8 denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\Lambda(\theta^{k,l}) = c_k \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k v'(j) S^{-1}(j) v(j) \right] \quad (4.9)$$

c_k , (2-245)'te tanımlanmış bir sabittir. Ayrıca bu olasılık fonksiyonunda Hedef sezim olasılığı (2.4) "1" olarak kabul edilmiştir.

(2.5)'teki denkleme karşılık gelen, uyarlanmış logaritmik olasılık fonksiyonu (2.246)

$$\lambda(k) = 2 \log \left[\frac{\Lambda(\theta^{k,l})}{c_k} \right] = \sum_{j=1}^k v'(j) S^{-1}(j) v(j) \quad (4.10)$$

Özyineli olarak hesaplandığında aşağıdaki formu alır.

$$\lambda(k) = \lambda(k-1) + v'(k) S^{-1}(k) v(k) \quad (4.11)$$

Yukarıdaki denklemde son ifade chi-square dağılımına sahip ve serberstlik derecesi n_z 'dir. İnovasyonlar bağımsız olduğundan, k anındaki logaritmik olasılık fonksiyonunun serbestlik derecesi de kn_z 'dir. Ayrıca (3.11) 'deki ifade ölçümlerin uyum kalitesini için bir ölçüttür.

Bir izi kabul edebilmek için istatistiksel olarak tanımlanan eşik, Logaritmik olasılık fonksiyonunun aşağıdaki ifadeyi sağlaması olarak açıklanır.

$$\lambda(k) \leq a \quad (4.12)$$

Eşik değeri olarak belirtilen a , chi-square dağılım tablosunda kn_z serbestlik derecesine karşılık gelen değerdir.

$$P\{x_{kn_z}^2 > a\} = \alpha \quad (4.13)$$

α , doğru izin kaybedilme olasılığıdır.

Sezim olasılığının “1” olması varsayımının karşılığı yalnızca tam ölçüm dizilerinin dikkate alınmasıdır. Eğer $P_D < 1$ ise eksik ölçümleri olan diziler de(kümeler) hesaba katılacak anlamı taşır.

Bu algoritma özyinelidir olup hedef sayısının bilinmediği çevre koşullarında kullanılabilir. Yeni izler, farklı durumlarda ilklendirilebilir. Bu koşulda birbirine yakın olan ardışık ve işlenmemiş ölçümler görüldüğünde yeni iz olarak varsaymak en kolay yöntemdir. Dolayısıyla algoritma Kalman disiplinine benzemektedir. Hedefle uyuma olasılığı az olan diziler budanmaktadır. (pruning)

Algoritma, ölçüm dizilerinin doğru olup olmadığı ile ilgili bir sonuç içermez. Bu durum Bayesian olmayan tüm yaklaşımlarda ortaktır. (4.12)'de belirtilen test uzun zamanlı izler için uygun değildir. Zira olasılık fonksiyonu eski ölçümlerin işlenmesi sebebiyle yoğun olduğundan yeni ölçümler için yeterli seviyede hızlı yanıt veremez. Bu durum için en bilinen çözüm (4.11) deki uyum kalitesine kayan pencere uygulanması veya yokolan bellek versiyonu (2-248) ile değiştirilir.

İzlerin yalnızca olasılık fonksiyonları incelendiği için, muhtemel izlerin hepsi ayrıca hesaba katılabilmektedir.

İz ayırma yaklaşımında yaşanan asıl problem, İşlem yükü ve bellek gereksiniminin zamanla artmasıdır. Hatta işlem yükü daha fazla olan sistemlerde doyuma ulaşılmaktadır.

4.3. Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci

Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci, (Probabilistic Data Association Filter) ikincil optimal olarak tanımlayabileceğimiz Bayesian yaklaşımlı, (4.1)'de belirtildiği üzere yalnızca tek hedef izlendiği varsayımı ile kurgulanmış bir algoritmadır. Her örnekleme anında yeni bir doğrulama bölgesi oluşur. Doğrulanmış olan münferit ölçümler arasında bir tanesi, Eğer tespit edilmişse, (4.2) 'ye göre hedeften kaynaklanmaktadır. Kalan ölçümler ise yanlış ikaz ya da yoğunluk olarak kabul edilir ve bağımsız özdeş dağılımlı rassal değişkenler olarak modellenmiştir.

Doğrulanmış ölçümlerin k anındaki kümesi aşağıda belirtilmiştir.

$$Z(k) = \{z_i(k)\}_{i=1}^{m_k} \quad (4.14)$$

m_k , doğrulama bölgesine düşen ölçüm sayısını belirtir ve rassal bir değişkendir. k anına kadar, doğrulanmış, birikimli ölçüm kümeleri aşağıda belirtilmiştir.

$$Z^k = \{Z(j)\}_{j=1}^k \quad (4.15)$$

Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci, öngörülerini ayırıştırarak en son doğrulanmış ölçüm kümesi ile ilişkilendirmektedir. (4.1)'de belirtildiği üzere Optimal Bayesian yaklaşımında ise tüm ölçüm dizileri için ilişkilendirme yapılmaktadır. Eğer yalnızca en son doğrulanmış ölçüm kümesini dikkate alınmak isteniyorsa, geçmiş bilginin aşağıdaki kabullenme yapılarak özetlenmesi gerekir.

$$p[x(k) | Z^{k-1}] = N[x(k); \hat{x}(k | k-1), P(k | k-1)] \quad (4.16)$$

En son yapılan ölçümlere ve değişinti matrisine göre, durum Gauss dağılımına sahiptir. Bu noktadan başlayarak, tahmin algoritmasının bir döngüsü açıklanacaktır.

4.3.1. Durum öngörüsü

Bir önceki denklemde (4.16), $Z(k)$, eliptik şekilde olan doğrulama bölgesine düşen ölçümleri içermektedir. Olası olaylar aşağıda tanımlanmıştır.

$$\theta_i(k) = \{z_i(k), \text{ hedeften kaynaklanan ölçüm } \} \quad (4.17)$$

$$\theta_0(k) = \{k \text{ anındaki ölçümlerin hiçbirisi hedeften kaynaklanmamaktadır.} \} \quad (4.18)$$

Bu olayların Z^k koşullu olasılıkları ;

$$\beta_i(k) = P\{\theta_i(k) | Z^k\}, \quad i = 0, 1, \dots, m_k \quad (4.19)$$

Yukarıdaki varsayımların ışığında bu olaylar karşılıklı dışarlanan ve tümünü kapsayan özelliktedir.

$$\sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) = 1 \quad (4.20)$$

Bu olasılıkları veren prosedüre, Olasılıksal Veri İlişkilendirmesi adını veriyoruz.

Yukarıdaki olaylara göre toplam olasılık formülünü kullanarak (Ek 1) k anında durumun koşullu ortalamasını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k | k) &= E[x(k) | Z^k] = \sum_{i=0}^{m_k} E[x(k) | \theta_i(k), Z^k] P\{\theta_i(k) | Z^k\} \\ &= \sum_{i=0}^{m_k} \hat{x}_i(k | k) \beta_i(k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$\hat{x}_i(k | k)$, durumu, $\theta_i(k)$, olayı üzerine koşullu olarak güncellenmiştir. (2.26) 'dan yola çıkarak,

$$\hat{x}_i(k | k) = \hat{x}_i(k | k-1) + W(k) v_i(k) \quad i = 0, 1, \dots, m_k \quad (4.22)$$

Güncellenmiş durum denklemdir.

$$v_i(k) = z_i(k) + z(k | k-1) \quad (4.23)$$

Karşılık gelen inovasyon denklemdir. Kazanç $W(k)$ ise (2.25)'da belirtildiği gibidir. Zira ölçümlerden kaynaklanan bir belirsizlik söz konusu değildir. $i = 0$ için, yani hiçbir ölçümün doğru olmadığı durumda, Öngörü aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{x}_0(k|k) = \hat{x}(k|k-1) \quad (4.24)$$

(3.22), (3.24) ve (3.21) denklemlerini birleştirdiğimizde, Olasılıksal veri ilişkilendirme süzgecinin (PDAF) durum güncelleme denklemi ortaya çıkmaktadır.

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + W(k)v(k) \quad (4.25)$$

Birleşik İnovasyon denklemi de aşağıda verilmiştir.

$$v(k) = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) \quad (4.26)$$

(4.25) 'de durum güncelleme denklemi, doğrusal gibi görünmesine karşın, $\beta_i(k)$ olasılık ifadeleri inovasyonlara bağlı değiştiği için yüksek derecede doğrusal olmayan bir denklemdir.

Güncellenmiş durum öngörüsüne karşılık gelen hata değişinti matrisi aşağıda verilmiştir. (Ek 4)

$$P(k|k) = \beta_0(k)P(k|k-1) + [1 - \beta_0(k)]P^c(k|k) + \tilde{P}(k) \quad (4.27)$$

,

$$\tilde{P}(k) = W(k) \left[\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) v_i'(k) - v(k) v'(k) \right] W'(k) \quad (4.28)$$

,

$$P^c(k|k) = [1 - W(k)H(k)]P(k|k-1) \quad (4.29)$$

(4.29) 'daki ifade, doğru ölçümle güncellenmiş durumum değişinti matrisidir.

$\beta_0(k)$, olasılığında ölçümlerin hiçbirisinin doğru olmayacağından ötürü, $P(k|k-1)$, Öngörü değişinti matrisi güncellenmiş ifadede yer almayacaktır. $1 - \beta_0(k)$, durumunda ise doğru ölçüm söz konusu olduğundan bu kez diğer ifade $P(k|k)$ 'da yer alacaktır. Yalnız m_k , sayıda doğrulanmış ölçümden hangilerinin doğru olduğunun bilinmemektedir. Bu durumda (4.27)'deki positif yarı belirli (Ek 4) ifade güncellenmiş durumun değişintisini arttırmaktadır.

Standart Kalman Süzgecinden farklı olarak, Değişinti denklemi ölçümlerden bağımsız değildir. Aksine (4.27)'deki Öngörü doğruluğu direk olarak ölçülen verilere bağlıdır. Bu durum doğrusal olmayan süzgeçlerde tipik bir özelliktir.

$k+1$, anındaki ölçüm ve durumların öngörüsü, standart Kalman Süzgecinde (2.18) ve (2.21) denklemlerinde olduğu gibi bulunur. Öngörölmüş durumun değişinti denklemi olarak (2.20) deki denklem aynen kullanılır.

$$P(k|k-1) = F(k)P(k|k)F'(k) + Q(k) \quad (4.30)$$

Güncellenmiş değişinti denklemi $P(k|k)$, (4.27)'de verilmiştir. İnovasyon değişintisi ise yine standart Kalman süzgecindeki versiyonudur. (2.23)

4.3.2. Olasılıksal veri ilişkilendirmesi

İlişkilendirme olasılıklarının değerlendirmesi şu şekilde yapılmaktadır. Öncelikle koşullanma; önceki veriler Z^{k-1} ve en son ölçülen m_k sayıda veri $(z_1(k), \dots, z_{m_k}(k))$ olmak üzere iki kısma ayrılır. Doğrulama bölgesinde yapılan ölçümlerin sayısında, yanlış ikaz ve yoğunluk derecesi sonucu oluşabilen olasılıksal girişimler sebebiyle farklılıklar çıkabilmektedir. Bu durumda aşağıdaki gibi detaylıca ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}\beta_i(k) &= P\{\theta_i(k) | Z^k\} \\ &= P\{\theta_i(k) | Z(k), m_k, Z^k\},\end{aligned}\quad i = 0, 1, \dots, m_k \quad (4.31)$$

Bayes kuralını yukarıdaki denklem uyguladığımız taktirde ise ifade şu halini alır.

$$\begin{aligned}\beta_i(k) &= \frac{1}{c} P[Z(k) | \theta_i(k), m_k, Z^{k-1}] P\{\theta_i(k) | m_k, Z^{k-1}\}, \\ i &= 0, 1, \dots, m_k\end{aligned}\quad (4.32)$$

c , normalizasyon sabitidir.

Doğrulanmış ölçümlerin, $\theta_i(k)$ koşullu ve i sıfırdan farklıdır, Birleşik olasılık yoğunlukları, doğru ölçümlerin varsayılan yoğunluğu ile doğru olmayan ölçümlerin birbiçimli yoğunluklarının çarpımı olarak tanımlanır. İkinci olarak belirtilen yoğunluk, doğrulama bölgesine birbiçimli ve bağımsız bir şekilde dağılmıştır.

Doğru ölçümler için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}p[z_i(k) | \theta_i(k), m_k, Z^k] &= P_G^{-1} N[z_i(k); \hat{z}(k | k-1), S(k)] \\ &= P_G^{-1} N[v_i(k); 0, S(k)] \\ &= P_G^{-1} |2\pi S(k)|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} v_i'(k) S^{-1}(k) v_i(k)\right]\end{aligned}\quad (4.33)$$

P_G , geçit olasılığı olarak tanımlanır. Bir başka deyişle doğru ölçümün doğrulama bölgesine düşme olasılığı. Bu durumda (4.32)'de yer alan olasılık yoğunluk fonksiyonu şu hali alır.

$$\begin{aligned}p[Z(k) | \theta_i(k), m_k, Z^{k-1}] \\ &= V_k^{-m_k+1} P_G^{-1} N[v_i(k); 0, S(k)], \quad i = 0, 1, \dots, m_k \\ &V_k^{-m_k}, \quad i = 0\end{aligned}\quad (4.34)$$

V_k , doğrulama bölgesinin hacmidir. (Ek 4)'de verildiği gibi, yalnızca doğrulanmış ölçümler tarafından koşullanmış θ_i olayının önceki olasılıkları şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \gamma_i(m_k) &= P[\theta_i(k) | m_k, Z^{k-1}] = P[\theta_i(k) | m_k] \\ \frac{1}{m_k} P_D P_G \left[P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right]^{-1}, & \quad i = 0, 1, \dots, m_k \\ (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \left[P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right]^{-1}, & \quad i = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$\mu_F(m_k)$, yanlış ikaz sayısının olasılık kütle fonksiyonudur. P_D ise hedef tespit olasılığıdır. Bu fonksiyon için iki farklı model oluşturulabilir.

- Parametrik Model: Poission dağılımı (λV_k parametresi)

$$\begin{aligned} \mu_F(m_k) &= P\{m_k^F = m_k\} \\ &= e^{-\lambda V_k} \frac{(\lambda V_k)^{m_k}}{m_k!}, i = 0, 1, \dots, m_k \end{aligned} \quad (4.36)$$

λ , yanlış ikaz ölçümlerinin uzlamsal yoğunluğudur. Bir başka deyişle birim hacime düşen ortalama yanlış ikaz yoğunluğu olarak açıklanabilir. V_k ise doğrulama bölgesinin hacmidir. Dolayısıyla λV_k , doğrulama bölgesi içerisinde beklenen yanlış ikaz sayısıdır.

- Parametrik olmayan model:

$$\mu_F(m_k) = \frac{1}{N} \quad i = 0, 1, \dots, m_k \quad (4.37)$$

(4.35)'te görüldüğü üzere $1/N$ ifadelerinin sadeleşmesinden ötürü, N , gerektiği kadar büyük olabilmektedir.

Parametrik (poisson) modelini kullanacak olursak, yani (4.36)'yı (4.35)'te kullanırsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz,

$$\gamma_i(m_k) = \frac{P_D P_G}{P_D P_G m_k + (1 - P_D P_G) \lambda V_k}, \quad i = 0, 1, \dots, m_k$$

$$\frac{(1 - P_D P_G) \lambda V_k}{P_D P_G m_k + (1 - P_D P_G) \lambda V_k}, \quad i = 0$$
(4.38)

Parametrik olmayan modeli kullandığımız taktirde bu kez şu sonucu alırız,

$$\frac{P_D P_G}{m_k}, \quad i = 0, 1, \dots, m_k$$

$$\gamma_i(m_k) = \frac{(1 - P_D P_G)}{(1 - P_D P_G)}, \quad i = 0$$
(4.39)

Bu arada yukarıda ifade edilen parametrik olmayan model (4.39), (4.38)'deki parametrik modelde aşağıdaki yer değiştirme yapılarak ayrıca elde edilebilmektedir.

$$\lambda = \frac{m_k}{V_k}$$
(4.40)

Yukarıda ifade bir başka deyişle, poisson parametresinin, uzlamsal yoğunluğun ölçümler cinsinden ifadesiyle yer değiştirilmesi ile açıklanabilir.

Eliptik şekle sahip doğrulama alanının hacmi aşağıda verildiği gibidir.

$$V_k = c_{n_z} |\gamma S(k)|^{1/2} = c_{n_z} \gamma^{n_z/2} |S(k)|^{1/2}$$
(4.41)

n_z , z ölçümünün boyutudur. c_{n_z} , ise boyutu n_z olan birim hiperkürenin hacmini temsil eder.

(4.41), (4.34) ve (4.32) ifadeleri birleştirildiğinde, bazı sadeleştirmelerden sonra. “Parametrik Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgecinin”, Poisson yoğun ortam model varsayımlı denklemleri aşağıdaki son halini alır.

$$\beta_i(k) = \frac{e_i}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j}, \quad i = 0, 1, \dots, m_k \quad (4.42)$$

$$\beta_0(k) = \frac{b}{b + \sum_{j=1}^{m_k} e_j} \quad (4.43)$$

Aynı zamanda,

$$e_i \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} v_i'(k) S^{-1}(k) v_i(k) \right\} \quad (4.44)$$

$$b \propto \lambda \left| 2\pi S(k) \right|^{1/2} (1 - P_D P_G) / P_D \quad (4.45)$$

$$= \left| 2\pi / \gamma \right|^{n_z/2} \lambda V_k c_{n_z} (1 - P_D P_G) / P_D \quad (4.46)$$

Parametrik olmayan versiyonu ise λV_k 'nin yerine m_k 'yı koyarak elde edilebilir.

5. SEZİM EŞİĞİ ENİYİLENMESİ

5.1. Giriş

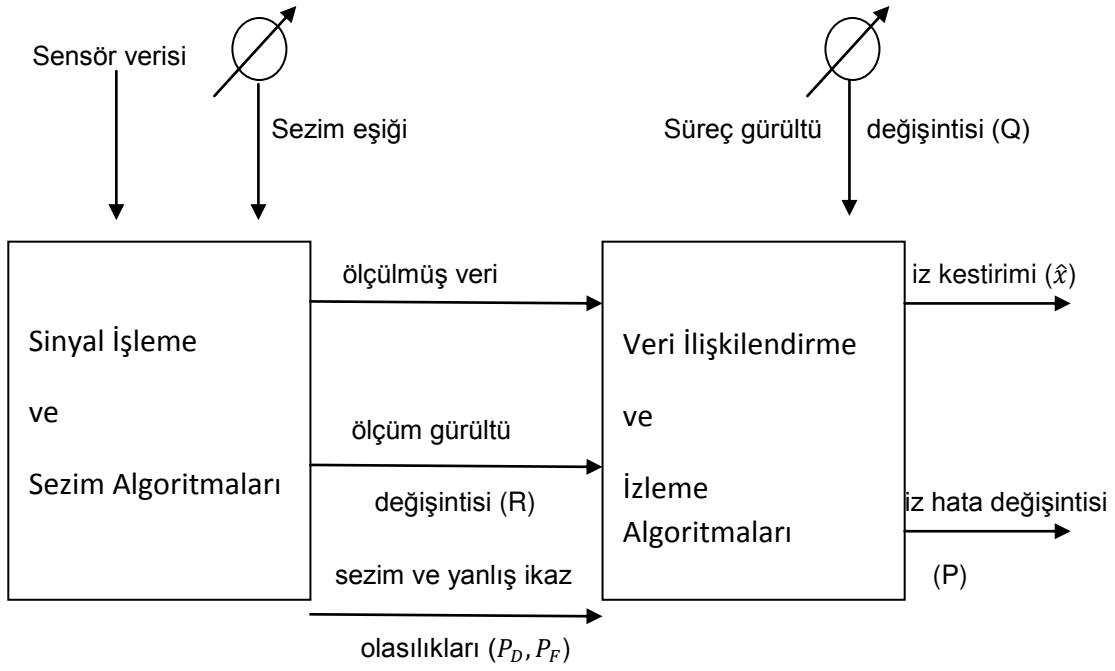
Riccati denkleminin bir sonucu olarak Standar Kalman süzgecinin performansı, durum sezim değışintisi tarafından ölçölür. Bu performans, Süreç gürültüsüne, ölçüm gürültü değışintisine bağıldır. Bu parametreler hem durum hemde ölçüm denklemlerindeki bozan etken değerlerini belirler.

Fakat ölçüm değerlerinde, ayrıca bir belirsizlik söz konusu olursa, izleme performansı iki ilave parametreye bağılı olmaktadır. Hedef sezim olasılığı P_D ve yanlış ikaz olasılığı P_F . Bu iki olasılık, izleme sisteminin alt sistemi olan sinyal işleme kısmı tarafından yapılan sezim eşik değeri seçiminin belirlediğı değlerdir. Şekil 5.1'de gösterilmektedir. Bilinen sinyal-gürültü oranına(SNR) göre sezim eşiğı, İşlem noktasına, almaç işlem karakteristiğine karar vermektedir. Eşik değerini arttırmak her iki olasılığı da azaltmakta veya tam tersi olmaktadır.

Bilinen yöntem eşik değerini belli bir değere getirmektir. Bir tasarım parametresi olan bu değer, tasarımcının kafasındaki yanlış ikaz ve kayıp sezimler arasındaki ölçüp-biçme(trade-off) durumuna göre belirlenmektedir.

Sezim eşiğı seçiminin izleme performansı üzerindeki olumsuz etkilerinin daha sistematik ve nicelikli açıklamalarına bu kısımda değineceğiz.

Burada ilgilenilecek konu Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgeci ile ilintilidir. Zira bu süzgecin sezim doğruluğı stokastik(olasılıksal) matris riccati denklemi ile sağlanmaktadır. Sonraki kısımda olasılıksal riccati denklemini özetlemektedir. Daha sonraki kısımda ise Daha sonraki kısımda ise bu denklem için yaklaşıklama yapılarak bir çözüm bulunmuştur. Son kısımda ise izleyici işleme karakteristiğı geliştirilmiş ve Sinyal gürültü oranına göre seçilen sezim eşiğine göre izleyici performansının nasıl eniyilendiğı açıklanmıştır.



Şekil 5.1. Geleneksel bir izleme sisteminin öğeleri

5.2 Olasılıksal Riccati Denklemi

Bölüm 3.3'ü özetleyecek olursak; Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgecinin değişinti denklemleri aşağıdaki gibidir. Tek adım öngörü değişintisi (2.20)'de verilmektedir. Standart süzgeçte ise şu şekildedir.

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F'(k-1) + Q(k-1) \quad (5.1)$$

Değişinti güncelleme denklemi ise (4.27)'den (4.29)'a kadar açıklanmıştır.

$$P(k|k) = \beta_0(k)P(k|k-1) + [1 - \beta_0(k)]P^c(k|k) + \tilde{P}(k) \quad (5.2)$$

ve,

$$\tilde{P}(k) = W(k) \left[\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) v_i'(k) - v(k) v'(k) \right] W'(k) \quad (5.3)$$

Son olarak da,

$$P^c(k|k) = [1 - W(k)H(k)]P(k|k-1) \quad (5.4)$$

Bu denklemler doğru ölçümlerle güncellenmiş durumun değişintisidir. (2.29)-(2.30) Bir başka deyişle ölçüm kaynaklı belirsizliklerin yokluğunda geçerlidir. $\beta_i(k)$, i'ninci doğrulanmış ölçümün doğru olma olasılığıdır. v_i , ona karşılık gelen inovasyon (ölçüm kalanı), v ise birleşik inovasyonu temsil eder. Standart süzgeçteki kazanç denklemi ise şu şekildedir.

$$W(k) = P(k|k-1)H'(k)S^{-1}(k) \quad (5.5)$$

$S(k)$, inovasyon değişintisidir. (2.23)

(5.2)'de yer alan değişinti güncelleme denklemindeki $\beta_0(k)$ ve $\tilde{P}(k)$ sembolleri olasılıksaldır. (stokastik) Eğer bu iki ifade sıfır olursa (5.2)'deki denklem (2.30)'daki ifadeye eşit olacaktır. Ardından (5.1) ile birleşerek (2.35)'te yer alan standart Kalman süzgecinin matris Riccati denklemine eşit olmaktadır. Bu iki terimin sıfır olmadığı durumda ise, rassal olmalarında ötürü, elimizde Olasılıksal Veri İlişkilendirme Süzgecinin izleme performansını karakterize eden olasılıksal matris Riccati denklemi oluşmuş olacaktır.

Durum sezim değişintisi, rassal bir süreçtir. Buradaki amacımız; Belirli sistem parametrelerine göre sistemin izleme performansını değerlendirebilmek ve bu parametrelere göre performansı eniyilemektir.

Riccati denklemin doğrusal olmayışı ve çözülmesi gereken bir matris olmasından ötürü, bu rassal süreci karakterize etmek oldukça zor olacaktır. Bunun için ilk moment yaklaşımına yapılacaktır.

5.3 Olasılıksal Riccati Denklemi için Yaklaşıklaşma

(5.2)'deki değişinti güncelleme denkleminde güvenilir bir yaklaşım yapmak adına olasılıksal terimleri beklenen değerleri ile değiştirebiliriz.

$$P(k) = \bar{P}(k) = E[\bar{P}(k) | Z^{k-1}] \quad (5.6)$$

$$\beta_0(k) = \bar{\beta}_0(k) = E[\bar{\beta}_0(k) | Z^{k-1}] = E[\bar{\beta}_0(k)] = 1 - P_D P_G \quad (5.7)$$

Bu yer değiştirmeler sonucunda (5.2)'de ifade belirli(deterministik) hale gelir ve (5.1)'deki aynı şekilde belirli olan denklem ile birlikte zaman ekseninde tekrarlanır. (5.2)'nin doğrusal olmaması durumundan hareketle; Bu yaklaşım yöntemi $E[P(k|k)]$ 'yi bulamaz. Bununla beraber yanlış ikazlar ve belirsiz sezimlerin varlığında gelecek durum hata değişimleri için yaklaşık değerler bulur. Oluşacak olan bu belirsizlikler P_D ve P_G parametreleri ve Q ve R olarak ifade edilen gürültü değişimleri çevresel parametrelere bağlıdır.

(5.6) ifadesi aşağıdaki gibi toplam olasılık teoremi kullanılarak tekrar yazılabilir. (Ek 1)

$$\begin{aligned} \bar{P}(k) &= E[\bar{P}(k) | Z^{k-1}] = E\{E[\tilde{P}(k) | m, Z^{k-1}] | Z^{k-1}\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E[\tilde{P}(k) | m, Z^{k-1}] p\{m | Z^{k-1}\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

m, sayısı k anında doğrulanan tüm ölçümlerin sayısıdır. (zaman endeksi karmaşıklık olmaması için kaldırılmıştır.) yukarıda görülen m 'nin olasılık kütle fonksiyonu şu şekildedir.

$$\tilde{P}(k) | m, Z^{k-1} = P_D P_G \mu_F(m-1) + (1 - P_D P_G) \mu_F(m) \quad (5.9)$$

$\mu_F(.)$, yanlış ikaz sayısının olasılıksal kütle fonksiyonudur.

(5.3) ifadesini (5.6) içerisine yerleştirdiğimizde aşağıdaki denklemleri buluruz.

$$\begin{aligned}\bar{P}(k) &= E \left\{ E \left\{ W(k) \left[\sum_{i=1}^m \beta_i(k) v_i(k) v'_i(k) - v(k) v'(k) \right] W'(k) \mid m, Z^{k-1} \right\} \mid Z^{k-1} \right\} \\ &= E \left\{ W(k) [U_1(m) - U_2(m)] W'(k) Z^{k-1} \right\}\end{aligned}\quad (5.10)$$

ve,

$$U_1(m) = E \left[\sum_{i=1}^m \beta_i(k) v_i(k) v'_i(k) \mid m, Z^{k-1} \right] \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}U_2(m) &= E \left[v(k) v'(k) \mid m, Z^{k-1} \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^m \beta_i(k) v_i(k) \sum_{j=1}^m \beta_j(k) v'_j(k) \mid m, Z^{k-1} \right]\end{aligned}\quad (5.12)$$

$$U_1(m) = u_1(m) S(k) \quad (5.13)$$

$$U_2(m) = u_2(m) S(k) \quad (5.14)$$

u_1 ve u_2 , m 'nin skalar bir fonksiyonudur. $S(k)$, doğru inovasyonun değişintisidir.(4.33) (5.13) ve (5.14) denklemlerini kullanarak ve (5.10)'daki beklenen değer(ortalama) işlemini yaptıktan sonra aşağıdaki ifade bulunur.

$$\tilde{P}(k) = (q_1 - q_2) W(k) S(k) W'(k) \quad (5.15)$$

q_1 ve q_2 değerleri, u_1 ve u_2 'nin beklenen değerleridir. q_1 ve q_2 fonksiyonları hedef sezim olasılığına, yanlış ölçüm parametrelerine ve doğrulama bölgesinin hacmine bağlıdır.

Geniş bir geçit söz konusu olduğunda, örnek olarak $\gamma = 16$, ($P_G = 1$ olduğunda), ve yanlış ölçümler için bir Poisson modeli kullanıldığında aşağıdaki eşitlikler söz konusu olur.

$$q_1 = P_D \quad (5.16)$$

$$q_2 = q_2(\lambda V_k, P_D) \quad (5.17)$$

λ , yanlış ikazların uzlamsal yoğunluğudur. V_k ise doğrulama bölgesinin k anındaki hacmidir.

(5.4) kullanılarak, (5.2) şu şekilde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} P(k|k) &= \beta_0(k) P(k|k-1) \\ &\quad - [1 - \beta_0(k)] [1 - W(k)H(k)] P^c(k|k-1) + \tilde{P}(k) \\ &\quad P(k|k-1) - [1 - \beta_0(k)] W(k)S(k)W'(k) + \tilde{P}(k) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Yukarıdaki ifadede (5.6), (5.7) ve (5.15)'i değiştirdiğimizde yaklaşık belirli (deterministik) denklemi aşağıdaki gibi bulmuş oluruz.

$$P(k|k) = P(k|k-1) - [P_D P_G - q_1 + q_2] W(k)S(k)W'(k) \quad (5.19)$$

(5.16)'yı yerine koyduğumuzda ve $P_G = 1$ olduğunda aşağıdaki son halini alır.

$$P(k|k) = P(k|k-1) - q_2 [S(k), P_D, P_F] W(k)S(k)W'(k) \quad (5.20)$$

Yukarıdaki denklemle, standart değişinti güncelleme denklemi (5.4) arasındaki farka dikkat ettiğimizde tek farkın q_2 olduğunu görüyoruz. Bu terim gözlemlerden meydana gelen bilgiyi ciddi oranda azaltmaktadır. Bu durumda q_2 terimini “bilgi azaltıcı faktör” olarak adlandırabiliriz.

Yoğun ortamda izleme performansını ölçmek ve değerlendirmek için tekrarlanarak uygulanan denklemleri (5.20) ve (5.1) uyarlanmış Riccati denklemi olarak tek bir denklem olarak adlandırılmaktadır.

q_2 terimi, hedef sezim olasılığına P_D ve doğrulanmış ölçümlerin beklenen sayısına bağlıdır. Beklenen doğrulanmış ölçüm sayısı ise yanlış ikaz olasılığına P_F ve V_k 'ya (doğrulama bölgesi hacmine) bağlıdır. Bölgenin hacmini ise inovasyon değişinti matrisi $S(k)$ belirler.

5.4 İzleyici İşlem Karakteristiği

P_D ve P_F 'nin belirlenen her değerine göre uyarlanmış Riccati denklemi tekrarlanarak hesaplanır.

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1)F'(k-1) + Q(k-1) \quad (5.21)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - q_2 [S(k), P_D, P_F] W(k) S(k) W'(k) \quad (5.22)$$

Ayrıca,

$$S(k) \square H(k)P(k|k-1)H'(k) + R(k) \quad (5.23)$$

$$W(k) \square P(k|k-1)H'(k)S^{-1}(k) \quad (5.24)$$

Kararlı duruma gelene kadar veya değişinti sapmaya başlayana kadar tekrarlanmaya devam eder.

Yoğun ortam sıklığı λ , bilindiği üzere ölçüm uzayında birim hacime düşen beklenen yanlış ikaz sayısıdır. Bu terim yanlış ikaz olasılığıyla ilintilidir ve sinyal işleyicinin her çözünürlük hücresi için tanımlanmıştır.

$$\lambda = P_F / V_c \quad (5.25)$$

V_c , çözünürlük hücrelerinin hacmidir. Eşik değerine ($\gamma = g^2$) karşılık gelen doğrulama bölgesi hacmi ise (4.41)'de verildiği gibi aşağıda belirtilmiştir.

$$V_k = c_{n_z} |\gamma S(k)|^{1/2} = c_{n_z} \gamma^{n_z/2} |S(k)|^{1/2} \quad (5.26)$$

n_z , ölçüm boyutu ve c_{n_z} ise ölçüm boyutunun birim hiperküresi hacmidir. ($c_1 = 2$, $c_2 = \Pi$, $c_3 = 4\Pi/3$).

Poisson dağılımına sahip yoğun ortam modelinde Bilgi Azaltıcı Faktör q_2 'nin fonksiyon olarak gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$q_2 = q_2(\lambda V_k, P_D) \quad (5.26)$$

λ , (5.25)'te görüldüğü gibi P_F 'ye bağlıdır. V_k ise $S(k)$ 'ya bağlıdır. (5.26). İnovasyon değişintisi $S(k)$ ise $P(k|k-1)$ 'e bağlıdır. Parametrelerin birbirine olan bağımlılığı, Uyarlanmış Riccati Denkleminin kararlı hale gelene kadar tekrarlanması için gerekli hesaplamaları göstermektedir.

Bu bölümün amacı, iki parametre (P_F, P_D) cinsinden sistemin izleme performansının karakterize edilmesidir. Riccati'yi oluşturan (5.21) ve (5.22) denklemlerini, sezim ve yanlış ikaz olasılıklarının farklı değerleri için denklem kararlı hale gelene kadar tekrar tekrar hesaplayarak bu amaca ulaşılabilir. P_F ve P_D 'nin fonksiyonu olarak karaklı durum hatasının grafiğini incelediğimiz taktirde “izleyici işlem karakteristiğini” görmüş oluruz. Benzer şekilde yine bu iki olasılık değerinin fonksiyonu olarak sinyal-gürültü oranının farklı değerler durumundaki davranışı ise “alıcı işlem karakteristiği” olarak adlandırılır.

6. BİR FAZ DİZİLİMLİ RADAR HEDEF İZLEME SİSTEMİNİN MODELLENMESİ VE PARAMETRE OPTİMİZASYONU

6.1. Problemin Tanımlanması

Amacımız; Faz diziliimli Radarın, sezim ve izleme parametrelerinin, enerji kullanımını minimum seviyeye çekecek şekilde eniyilenecek, Hedefin kontrol altında tutulabilmesidir. Eniyilenecek parametreler arasında iz güncelleme aralığı, her ışımanın ardından hesaplanan sinyal gürültü oranı ve yine her ışımadan sonra seçilen sezim eşik değerleri olarak açıklanabilir. Öncelikle bir hedef sezim modellemesi yapılacaktır. Ardından hazırlanan modele göre bir izleyici karakteristiği oluşturulacaktır. Son olarak, hazırlanan model ve izleyici karakteristiğine göre bir eniyileme problemi formülize edilecektir. Özellikle radar özgülleme problemi ile ilgili olarak daha önce bir takım çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda enerji minimizasyonu için parametre eniyilenmesi ve optimal planlama problemleri irdelenmiştir. Fakat söz konusu çalışmalarda yoğun ortam girişimi ve yanlış ikaz olasılıkları düşük seviyede tutularak ideale yakın çevre şartlarında modelleme yapılmıştır. Hazırlayacağımız bu model içerisinde yanlış ikaz ve yoğun ortam girişimeri de hesaba katılacaktır. Dolayısıyla gerçek zamana yakın ve uygulanabilir bir model ortaya çıkarılacaktır.

Daha önce yapılan çalışmalardan biri aynı problemi çözmeye çalışmıştır [6]. Bu araştırmaya başlarken bu çalışmadan esinlenilmiştir.

6.2 Arama Süreci Modellemesi

6.2.1 Radar ölçüm modellemesi

Bu bölümde ölçüm modeli kısaca açıklanacaktır. Bilindiği üzere yayılan(gönderilen) enerji ile geri alınan enerji birbiriyle orantılıdır. Fakat geri alınan enerji huzme yönlendirme hatasından kaynaklanan kayıplar sebebiyle azalmaktadır. Alınan enerjinin sinyal gürültü oranına bu nedenle (SNR) aşağıda belirtilmiştir.

$$SNR = SNR_0 \exp\left(-2 \frac{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}{B^2}\right) \quad (6.1)$$

SNR_0 , açısal bir hata olmadığı durumda SNR 'nin değerine eşit olmaktadır. (u, v) doğru ölçüm için doğrultu kosinüsleri, (u_0, v_0) ise huzmenin yönlendirildiği noktanın doğrultu kosinüsleridir. B , çift taraflı radar huzme genişliğini temsil eder. Alınan sinyaller gürültü ile bozulmuştur. Bu sinyaller gürültü ile modellenerek iki ayrı ortagonel sinyali oluşturmuşlardır. $(A_1 + N_1, A_2 + N_2)$.

A_1 ve A_2 , sırasıyla reel ve karmaşık bileşenlerin genliklerini temsil eder. Sinyal enerjisi ise $E[A_i^2] = E_R/2$, $i=1,2$. olarak belirtilir. A_1 ve A_2 sinyal genlikleri Gauss özellikte ve birbirleriyle ilintili değildir. Bu varsayıma göre izlenen hedefi de Rayleigh dağılımına göre [1] salınım yaparak değişen bir model olarak düşüneceğiz. Bir başka deyişle hedef modeli olarak bu dağılıma sahip swerling 1 modelini varsayacağız.

N_1 ve N_2 alıcı gürültüsünü temsil etmektedir ve enerjisi $E[N_i^2] = N_R/2$, $i=1,2$, şeklinde ifade edilir. SNR , E_R/N_R olarak belirtilir. Aşağıdaki eşitsizlik sağlandığı takdirde ölçüm sezimi yapılmış anlamına gelir.

$$(A_1 + N_1)^2 + (A_2 + N_2)^2 > N_R \ln P_F \quad (6.2)$$

A_i ve N_i parametrelerinin gauss birbirinden bağımsız olmaları sebebiyle, toplamları da ayrıca gauss özelliğindedir. Bu durum, Sezim olasılığı (P_D), yanlış ikaz olasılığı ve Sinyal-Gürültü oranı arasındaki ilintiyi bulmamızı sağlamaktadır.

$$P_D = P_F^{1/(1+SNR)} \quad (6.3)$$

Swerling 1 modeli, τ zaman aralığıyla yapılan iki radar ışımasındaki sinyal genlik bileşenlerinin zaman ilintisini açıklamamaktadır.

Fazdizilimli radarlarda τ , zaman aralığı geleneksel radarlara göre daha kısa olmaktadır. Eğer radar, her ışımadaki sinyallerin ilintilerini kesmek amacıyla frekans kaydırıcı kullanmaz ise, analizlerde karşımıza çıkacak olan ilinti problemiyle karşılaşmak durumunda kalınacaktır. En basit yöntem her sinyal bileşenini zaman ekseninde ayrı bir bağımsız Markov süreci olarak kabul etmektir. Bu durumda sinyal-ilinti zamanı (V) adıyla bir parametre daha ortaya çıkmaktadır.

$$E[A_i(t)A_j(t+\tau)] = \delta_{ij}.E_R.e^{-\tau/V} \quad (6.3)$$

Anlık SNR ise aşağıdaki gibidir.

$$SNRT = \frac{1}{2N_R}(A_1^2 + A_2^2) \quad (6.4)$$

Bu parametre hem sezim sürecine hem de sezim sonrasındaki ölçüm parametrelerinin (u, v) doğruluğu üzerinde etkisi olmaktadır. Radar pozisyon ölçümündeki gürültünün toplanabilir ölçüm parametrelerinden (u, v) bağımsız ve gauss özelliğinde olduğunu varsayıyoruz. Bu gürültünün değışintisi ise aşağıda verildiği gibi varsayılmıştır.

$$\sigma^2 = B^2/SNRT \quad (6.5)$$

Sezim sisteminin $m(m=1)$ adet çözünürlük hücresinin olduğu ve eğer hedef sezimi olduysa hedefin yalnızca tek hücrede bulunduğu varsayılır. Hedef sezim olasılığı, yanlış ikaz olasılığına bağlıdır. Hedef ilgili hücrede değil ise yanlış ikaz olasılığı, alıcı gürültüsü sebebiyle yanlış ölçüm yapılması olasılığıdır. Fakat sezim eşik seviyesi bulunduktan sonra hedef sezimi olasılığı, gürültü ve yoğun ortamlardan kaynaklanan yanlış ikaz olasılığından bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Radar ölçümleri bir doğrulama geçidinden Z_G geçirilerek doğrulanmaktadır. Doğrulama geçidinin hacmi

V_G 'dir. Yanlış ikazlar üzerine birkaç varsayım yapılacaktır. Doğrulama geçidindeki yoğunluk girişimlerinin sayısını poisson dağılımına sahiptir ve ρV_G ($\rho V_G = m$), şeklinde ifade edilir. ρ , birim hacimde beklenen yoğunluk girişim sayısıdır. Doğrulama geçidindeki yanlış ikazların sayısı da Poisson dağılımına sahip bir parametre ile ifade edilir. $m P_F V_G / V_C$ ($P_F V_G / V_C = 1$), bu ifade içerisinde yer alan V_C , ölçüm işleminin yapıldığı açısal hacimi temsil eder ayrıca yanlış ikazlar bağımsız ve doğrulama geçidinde düzgün dağılmıştır.

Bu varsayımlardan hareketle, doğrulama geçidi alanındaki yanlış ikazları Poisson dağılımına sahip λV_G , ile yaklaşık olarak modelleyebiliriz. $\lambda = (m P_F / V_C + \rho)$ ifadesi birim hacimdeki yanlış ikaz yoğunluğudur(beklenen değeridir). ρ değeri (yoğun ortam sıklığı), uzlamsal yoğun ortam sıklığı, yoğun ortam sinyal şiddeti ve sezim eşiği gibi faktörlere göre değişmektedir.

6.2.2 Arama Süreci Modellemesi ve Hedef Sezimi

Arama sürecimiz şu şekilde kurgulanmıştır; yapılacak olan her radar ışıması öncesinde bir önceki ışıma sonucunda doğrulama geçidi içerisinde bir gözlem yapılamamışsa öngörülen hedef pozisyonuna ve yakın bölgesine tekrar ışıma yapılır. Gözlem yapılamadıkça bu işlem sürer. Her ışıma sonrasındaki hedef sinyalleri frekans kaydırması yapılmak suretiyle birbirinden bağımsız hale getirildiği varsayılmıştır. Hazırlayacağımız modelde, arama sürecinde meydana gelebilecek olayları belirleyeceğiz. Ardından bu olayların olasılıklarını, eniyileyeceğimiz parametrelerin bir fonksiyonu olarak yazacağız.

Başlangıç arama modelinde maksimum sayıdaki ardışık ışıma sayısı olarak M parametresini modelleyelim. M sayıda ışımadan sonra halen bir gözlem yapılamamışsa hedef konumlandırması için daha genişletilmiş bir aramanın yapılması gerekecektir. Öncelikle ilk M ışımayı inceleyelim. (u_i, v_i) , $i = 1, \dots, M$, parametrelerinin i 'nci ışımanın yapıldığı yönü belirttiklerini varsayalım. Ayrıca SNR_{0i} ,

P_{Fi} parametreleri, i'nci huzme ışıması için, sırasıyla SNR_0 (6.1) ve yanlış ikaz olasılığına P_F (6.2) karşılık gelmektedir. Başlangıç arama sürecinde olabilecek olası olaylar aşağıda açıklanmıştır.

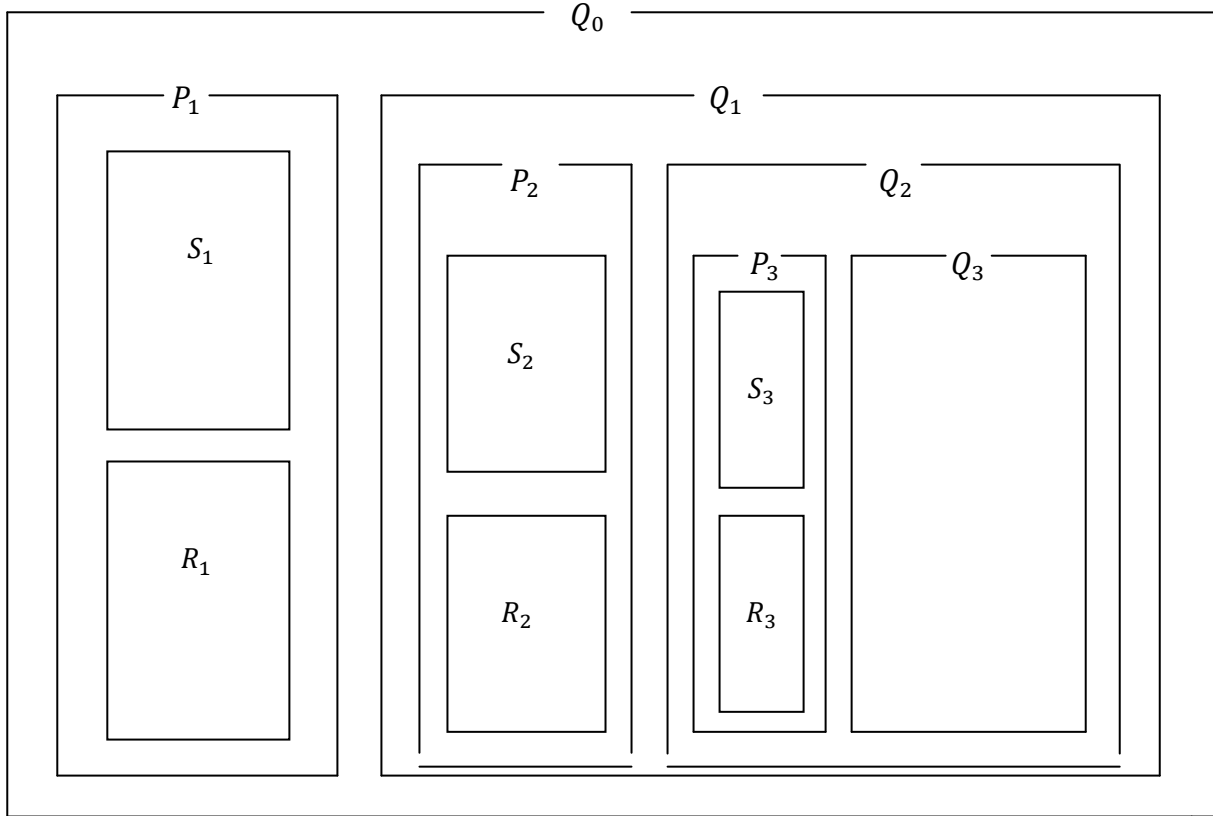
P_i Doğrulama geçidinde Z_{Gi} en az bir ölçümün gözlenebilme olayı;

Q_i Doğrulama geçidinde Z_{Gi} hiçbir ölçümün gözlenememesi olayı;

R_i Doğrulama geçidinde Z_{Gi} hedefin sezilme olayı;

S_i Doğrulama geçidinde Z_{Gi} yalnızca yanlış ölçümlerin gözlenmesi olayı;

Olaylar arasındaki ilinti Şekil 6.1'de verilmiştir.



Şekil 6.1 Arama Sürecinde meydana gelebilecek olaylar (M=3)

Yukarıda verilen şekildeki senaryolara göre bu olayların birbirleriyle olan ilişkileri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} P_i \cup Q_i &= Q_{i-1}, \quad P_i \cap Q_i = \emptyset, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad R_i \cap R_j = \emptyset, \\ S_i \cup R_i &= P_i, \quad S_i \cap R_i = \emptyset, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \quad Q_M = \bigcap_{i=1}^M Q_i, \quad i = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (6.6)$$

Q_0 başlangıç olayı olarak kabul etmektedir. Br başka deyişle bir önceki ışımda doğrulanmış bir ölçüm bulunmadığı kabul edilerek süreç başlamış ve modelleme kurgulanmıştır.

Olayların kümülatif toplamaları şu şekilde gösterilecektir.

$$\bigcup_{i=1}^M P_i, \bigcup_{i=1}^M R_i, \bigcup_{i=1}^M S_i, \text{ sırasıyla, } P^M, R^M, S^M$$

Ayrıca aşağıdaki küme ilişkisine göre,

$$P[P_i] = P[R_i] + P[S_i], \quad (6.7)$$

Şu sonuçlar elde edilebilmektedir.

$$P[R^M] = \sum_{i=1}^M P[R_i], \quad P[S^M] = \sum_{i=1}^M P[S_i], \quad P[Q_M] = 1 - P[R^M] - P[S^M]. \quad (6.8)$$

Öngörülen hedef konumu belirsizdir. Bu belirsiz konumun iki değerli(1,0) bir değişken (u, v) ile ifade edildiğini ve bu değişkenlerin olasılık dağılım fonksiyonunun da $f(u, v)$ olarak ifade edildiğini varsayıyoruz. Bir başka deyişle hedef konum öngörüsü dağılımı ile ilgili olarak aşağıda açıklanan varsayımlarda bulunuyoruz.

1. Tekrarlanan radar ışımları o kadar kısa zaman aralıklarında oluyorki hedef sezim öngörü dağılımlarının $f(u, v)$ bu süreç içerisinde değişmediğini

varsayıyoruz. Tanımlamış olduğumuz olayların P_i, Q_i, R_i, S_i verilen (u, v) pozisyonlarına göre $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 'nin gerçekleşmiş hali) koşullu olasılıkları aşağıda verildiği gibi olacaktır.

$$P[P_i | (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u, v)],$$

$$P[Q_i | (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u, v)], P[R_i | (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u, v)], \text{ve } P[S_i | (\mathbf{u}, \mathbf{v}) =] \quad (6.9)$$

Ya da daha basit gösterimle,

$$P[P_i | (u, v)], P[Q_i | (u, v)], P[R_i | (u, v)], P[S_i | (u, v)] \quad (6.10)$$

Olarak ifade edilir. Kümülatif olaylar ile ilintiside kesinlikle aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$P[P^M | (u, v)] = \sum_{i=1}^M P[P_i | (u, v)],$$

$$P[Q^M | (u, v)] = \sum_{i=1}^M P[Q_i | (u, v)],$$

$$P[R^M | (u, v)] = \sum_{i=1}^M P[R_i | (u, v)],$$

$$P[S^M | (u, v)] = \sum_{i=1}^M P[S_i | (u, v)], \quad (6.11)$$

Tanımlanan olayların $P_i, Q_i, R_i, S_i, Q_{i-1}$ ve $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u, v)$ bilinmesi koşuluyla tanımlanan olasılıkları ise şu şekildedir.

$$p_i(u, v) = P[P_i | Q_{i-1}, (u, v)] \quad (6.12a)$$

$$q_i(u, v) = P[Q_i | Q_{i-1}, (u, v)] \quad (6.12b)$$

$$r_i(u, v) = P[R_i | Q_{i-1}, (u, v)] \quad (6.12c)$$

$$s_i(u, v) = P[S_i | Q_{i-1}, (u, v)] \quad (6.12d)$$

Yukarıdaki olasılık ifadeleri arasındaki bazı ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} p_i(u, v) + q_i(u, v) &= 1, \\ p_i(u, v) &= r_i(u, v) + s_i(u, v) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dolayısıyla tanımlanan olayların $P_i, Q_i, R_i, S_i; Q_{i-1}$ ve $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u, v)$ bilinmesi koşuluyla tanımlanan olasılıkları ayrıca şu şekilde ifade edilebilir.

$$P[P_i | (u, v)] = p_i(u, v) q_{i-1}(u, v) \dots q_1(u, v) \quad (6.14a)$$

$$P[Q_i | (u, v)] = q_i(u, v) q_{i-1}(u, v) \dots q_1(u, v) \quad (6.14b)$$

$$P[R_i | (u, v)] = r_i(u, v) q_{i-1}(u, v) \dots q_1(u, v) \quad (6.14c)$$

$$P[S_i | (u, v)] = s_i(u, v) q_{i-1}(u, v) \dots q_1(u, v) \quad (6.14d)$$

$2 \leq i \leq M$ için, hedef sezim olasılığı (6.14c)'de yer alan koşullu olasılık cinsinden yazılabilir. Bir başka deyişle Hedefin doğrulama bölgesine düşmesi ve tespit edilmesi olasılığını (hedef pozisyonu (u, v) , öngörüsünün bilinmesi koşulu ile) $P_{DG}(u, v)$ olarak gösterip aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$P_{DG}(u, v) = P[R^M | (u, v)] = \sum_{i=1}^M P[R_i | (u, v)] \quad (6.15)$$

Bununla bağlantılı olarak, hedefin doğrulama bölgesine düşmesi ve tespit edilme olasılığının beklenen değeri, yani ortalama değeri aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$P_{DG} = E[P_{DG}(u, v)] = \sum_{i=1}^M E[P[R_i | (u, v)]] \quad (6.16)$$

Yukarıdaki olasılık ifadesi şu şekilde de ifade edilir.

$$P_{DG} = P[R^M] = \sum_{i=1}^M P[R_i] \text{ ve}$$

$$P[R_i] = E[P[R_i | (\mathbf{u}, \mathbf{v})]] \quad (6.17)$$

(6.16)'da gösterilen beklenen değer işlemi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$E[P[R_i | (\mathbf{u}, \mathbf{v})]] = \iint P[R_i | (u, v)] f(u, v) du dv \quad (6.18)$$

Aynı yöntem kullanılarak, $P[S_i]$ ve $P[S^M]$ ifadeleri de koşullu olasılıklar cinsinden yazılabilir.

$u-v$ uzayında geçit fonksiyonu için yapılacak tanımlama nedeniyle, bir ilave olay daha tanımlanmalıdır.

R_i' : Doğrulama geçidinde Z_{Gi} olup olmadığına bakılmaksızın, i 'nci ışımda hedefin tespit edilme olayı. Öncelikle $R_i \subset R_i'$, koşulu geçerlidir. Bununla birlikte önceki olaylara benzer eşitsizlikler burada da geçerli olacaktır. Aşağıda verilmektedir.

$$P[R_i | Q_{i-1}, (u, v)] = P[R_i | R_i', Q_{i-1}, (u, v)] \cdot P[R_i' | Q_{i-1}, (u, v)] \quad (6.19)$$

Ayrıca, hedef pozisyonu (u, v) ve hedef tespitinin yapıldığı koşulu ile hesaplanan, geçit içerisinde tespit edilme olasılığı aşağıdaki şekilde sade olarakta gösterilebilir.

$$P[R_i | R_i', Q_{i-1}, (u, v)] = P[R_i | R_i', (u, v)] \quad (6.20)$$

$P[R_i | R_i', (u, v)]$ ifadesini, geçit fonksiyonu olarak $P_{Gi}(u, v)$ şeklinde de gösterebiliriz. Geçit fonksiyonu genellikle ölçüm uzayında tanımlıdır. İki değerli bir fonksiyondur. Ölçümün geçit içerisinde veya dışarısında olduğunu gösterir. Sezim modelimiz doğru pozisyonlar (u, v) , cinsinden tanımlanmış olsa da geçit fonksiyonumuzu $P_{Gi}(u, v)$, ölçüm uzayı yerine $u-v$ uzayında tanımlamaktayız. Açısız ölçüm gürültüsü,

olasılıksal bir dağılıma sahip olduğundan, $u-v$ uzayında tanımlanmış geçit fonksiyonumuz da olasılık fonksiyonu gibi değerlendirilebilir.

Bu arada $P[R_i | Q_{i-1}, (u, v)]$ ifadesini de $P_{Di}(u, v)$ olarak, pozisyon bilgisi (u, v) koşuluyla, i 'nci ışımadaki hedef sezim olasılığı adlandırabiliriz. .

Doğrulama geçidindeki i 'nci ölçümde; yanlış ikaz sayısını Poisson dağılıma sahip bir parametre ile modellemiştik $\lambda_i V_{Gi} = m$

Ayrıca, $\lambda_i = m P_{Fi} / V_C + \rho_i$. İfadesinde de yanlış ikaz yoğunluğunun açık ifadesini vermiştik. Yanlış ikaz yapılmama olasılığı ise $\exp(-\lambda_i V_{Gi})$ Poisson dağılımı ile ifade edilir. (6.12)'de olduğu gibi yine koşullu olasılık ifadelerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$p_i(u, v) = P_{Gi}(u, v) P_{Di}(u, v) + (1 - P_{Gi}(u, v) P_{Di}(u, v)) (1 - \exp(-\lambda_i V_{Gi})) \quad (6.21a)$$

$$q_i(u, v) = 1 - p_i(u, v) = (1 - P_{Gi}(u, v) P_{Di}(u, v)) \exp(-\lambda_i V_{Gi}) \quad (6.21b)$$

$$r_i(u, v) = P_{Gi}(u, v) P_{Di}(u, v) \quad (6.21c)$$

$$s_i(u, v) = 1 - P_{Gi}(u, v) P_{Di}(u, v) (1 - \exp(-\lambda_i V_{Gi})) \quad (6.21d)$$

Direk olarak $P_{DG}(u, v)$ olasılığını yukarıdaki denklemler cinsinden ifade edebiliriz $M = 3$ için yazarsak aşağıdaki ifadeleri buluruz.

$$P_{DG}(u, v) = P_{G1}(u, v) P_{D1}(u, v) + P_{G2}(u, v) P_{D2}(u, v) (1 - P_{G1}(u, v) P_{D1}(u, v)) \exp(-\lambda_1 V_{G1})$$

$$\begin{aligned}
& +P_{G_3}(u,v)P_{D_3}(u,v)(1-P_{G_2}(u,v)P_{D_2}(u,v))\exp(-\lambda_2V_{G_2}) \\
& \cdot(1-P_{G_1}(u,v)P_{D_1}(u,v))\exp(-\lambda_1V_{G_1})
\end{aligned} \tag{6.22}$$

P_{DG} (6.16) için analitik bir ifade bulmak istiyorsak, aşağıdaki ifadelerinde analitik formlarını bulmamız gerekmektedir. ,

$$\begin{aligned}
& E[P_{G_{i_1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D_{i_1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{G_{i_2}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D_{i_2}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \dots P_{G_{i_l}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D_{i_l}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \quad (6.23) \\
& (\{1, \dots, M\} \text{ kümesinden seçilen } l \text{ adet ayrı tamsayının tamamı için.})
\end{aligned}$$

Bu ifadeler ayrıca $P[R_i]$ ve $P[S_i]$ için de kullanılabilir. Fakat beklenen değerler, başlangıç arama modelindeki huzme özgüleme stratejilerine bağlı olarak değişmektedir.

Arama stratejileri, tahmin edilen hedef pozisyonuna yakın bölgelere radar huzmesinin iteratif (tekrarlanarak) olarak yönlendirilmesi şeklinde kurgulanmaktadır. İlk huzmeler tahmini pozisyon bilgisine göre yönlendirildiği için enerji özgülemesi üzerinde, sonraki huzmelere göre önemli katkısı olmaktadır. Dolayısıyla ilk gönderilen huzmeler üzerine yoğunlaşmak ve sonradan gönderilen huzmelere ise yeniden konumlandırma olarak özgülemek akıllıca olacaktır. Sonraki bölümlerde, ilk huzmelerden sonra gönderilen huzmelerin özel stratejilerinden veya özgülemelerinden ziyade maliyet unsurları incelenecektir. Bundan sonraki çalışmalarda $M=3$ kabullenmesi üzerinden ve aşağıda verilen diğer varsayımlar ışığında ilerlenecektir.

2. Hedef sezim öngörüsü $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ birleşik bağımsız gauss dağılımına sahiptir.

Beklenen değeri (u_0, v_0) ve değişintisi ise her koordinatta ve skalar V_0 için $V_0^2 B^2$ olarak kabul edilir.

3. $(u_i, v_i) = (u_0, v_0)$, $i = 1, 2, 3$.

4. $P_{Gi}(u, v) \approx 1$, $i=1,2,3$ (u_0, v_0) 'nin yakın bölgesinde ve $f(u, v)$ ihmal edilemeyeceği koşullarda tüm (u, v) için geçerlidir.

2 numaralı varsayımda verilen V_0 açısal kestirim ile huzme genişliği arasındaki skalar oranı belirler. Fakat gerçek zamanlı PDA izleme sisteminde bu varsayım geçerli olmaz. PDA konum kestirimleri her zaman $u-v$ koordinatları ile ilintilidir. Yoğun ortam seviyesi arttıkça ve iz güncelleme aralığı azaldıkça bu ilinti daha da güçlenir. Sonuç olarak, yoğun ortam seviyesinin ve kestirim doğruluğunun yeterince yüksek olmadığı durumlarda hazırladığımız model uygulanabilir değildir. Fakat sezim modelinde aynı durum geçerli değildir. Bu varsayım, sezim modelini geliştirmemizi kolaylaştıran bir unsurdur. Çoğu radar izleme sistemlerinde kullanılabilir. Bu konuya Değişinti denklemi yaklaşıklamasında açıklık getirilecektir. 3'üncü varsayımda, başlangıç arama sürecinde yapılan tüm ışımların öngörülen hedef konumuna (u_0, v_0) doğru yapıldığı belirtilmektedir 4'üncü varsayımda ise, doğrulama bölgesi yeterince geniş tutulduğunda geçerli olmaktadır.

Yukarıda verilen varsayımlara göre, aşağıdaki yaklaşıklamaları kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
 E[P_{Gi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{Di}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] &\approx E[P_{Di}(\mathbf{u}, \mathbf{v})], i=1,2,3, \quad E[P_{Gi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{Di}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{Gj}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{Dj}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \\
 &\approx E[P_{Di}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{Dj}(\mathbf{u}, \mathbf{v})], i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3, \text{ and} \\
 E[P_{G1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{G2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{G3}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D3}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] &\approx E[P_{D1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D3}(\mathbf{u}, \mathbf{v})].
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

Sonuç olarak, (6.16)'da ifade edilen P_{DG} ifadesinin $M=3$ koşulu altında, yaklaşık ifadesi şu şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
 P_{DG} &\approx E[P_{D1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + P_{D2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) (1 - P_{D1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \exp(-\lambda_1 V_{G1}) + P_{D3}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) (1 - P_{D2}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \\
 &\quad \exp(-\lambda_2 V_{G2}) (1 - P_{D1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \exp(-\lambda_1 V_{G1})].
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

$E[P_{Di}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$, $i=1,2,3$, için ayrıca yapılmış olan analitik bir yaklaşıklama da Ek-A'da verilmiştir. Bunların dışında $E[P_{Di}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{Dj}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$, ve $E[P_{D1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) P_{D3}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$ ifadeleri için de benzer analitik yaklaşıklamalar Ek'lerde verilmiştir. Bu yaklaşımları (6.25)'te yerlerine koyduğumuzda P_{DG} 'nin analitik olarak yaklaşık ifadesini bulmuş oluruz.

P_{DG} bilindiği üzere V_0, SNR_{0i}, P_{Fi} ve $\rho_i, i=1,2,3$ parametrelerinin fonksiyonudur ve önceden belirlenen $m, V_C, V_{Gi}, i=1,2,3$ koşulları altında değer alır. Ayrıca V_0, SNR_{0i} , and P_{Fi} . Parametreleri tarafından kontrol edilebilir. Hatırlanacağı üzere $\lambda_i = mP_{Fi}/V_C + \rho_i$, şeklinde ifade edilen Poisson dağılımlı parametrede m i anında doğrulama bölgesinde yapılan ölçüm sayısını ifade eder. V_C , ölçüm işlem uzayındaki açısal hacim, ρ_i ise yoğun ortam kaynaklı yanlış ölçümlerin yoğunluğudur.

6.3. İzleme Sistemi Performansının Tanımı

Bu bölümde 6.2.2'de geliştirilen hedef sezim modeli ile ilgili olarak PDA izleme sistemi performansını karakterize(tanımlama) edeceğiz. Tanımlama için PDA kestirim hata değişinti matrisinin, kümülatif ölçüm kümesi Z^{k-1} ve t_k anındaki R^M olayı ($R^M(k)$ olarak gösterilmektedir.)koşulu altında beklenen değerini alacağız.

Bu yöntemlere geçmeden önce önceden bilmemiz gereken; Eğer başlangıç arama sürecinde hedef sezimi yapılamadıysa, hedefi tekrar tespit edebilmek için daha geniş çaplı ve maliyetli bir aramanın yapılması gerektiğidir. Bu arama süreci de, $R^M(k)$ olayı ve sezim için belirlenmiş bir maliyeti göz kullanılarak modellenenebilir. Bu model, $R^M(k)$ olayı altında PDA kestirimi üzerine yoğunlaşmamızı sağlar.

6.3.1. PDA izleme sistemi ve değişinti denklemi

PDA süzgeci, bir Bayesian Algoritmasıdır. Bu algoritmada yoğun ortam koşullarında izlenen tek bir hedef olduğu varsayılır. Açısal izleme üzerine yoğunlaşılacaktır. Dolayısıyla, hedef menzili(mesafesi) ve mesafe hızının bilindiği kabul edilecektir. Ek olarak, Hedefin hareketini sağlayan birbirinden bağımsız iki ayrı ivme süreci olduğunu kabul ediyoruz. Bu süreçler, sıfır ortalamalı, Gauss dağılımlı bir üstel otorelasyon fonksiyonu ile modellenmektedir. Ayrıca bu süreçlerin yönleri de doğrultman kosinüsleri yönündedir. σ_m^2 ve τ_m parametreleri sırasıyla, hedef ivmesinin değişintisi ve otokorelasyon fonksiyonunun zaman sabiti olarak tanımlayabiliriz. Açısal durum denkleminin durum vektörü $x = [x_u^T \ x_v^T]^T$, ayrıca, $x_u = [u \ v_u \ a_u]^T$ ve $x_v = [v \ v_v \ a_v]^T$. şeklinde ifade edilir. Burada v_u , v_v ve a_u , a_v hız ve ivmeyi ifade etmektedir. İz güncelleme anları arasındaki güncelleme aralığı $T(k)$ için durum denklemi aşağıda verildiği gibidir.

$$x(k+1) = F(k)x(k) + w_1(k) \quad (6.26)$$

$w_1(k)$, sıfır ortalamalı ve gauss dağılımlı bir gürültüdür. Değişinti matrisi $Q(k)$ olarak tanımlanmıştır. Ölçüm denkelemini de ayrıca aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$z(k) = Hx(k) + w_2(k) \quad (6.27)$$

$w_2(k)$, sıfır ortalamalı ve gauss dağılımlı bir gürültüdür. Değişinti matrisi $R(k)$ olarak tanımlanmıştır. u ve v koordinatlarında olan açısal ölçüm gürültüleri birbirinden bağımsız oldukları için, $R(k)$ matrisinin 2'ye 2 bir diagonal matris olduğunu ve diagonal elemanlarının ise (6.15)'de verilmektedir. Başlangıç durumunun Gauss dağılımlı ve u ve v yönlerinde birbirinden bağımsız ve ayrık olarak dağılmışlardır.

Durum ve ölçüm denklemlerine göre sistemin hedef durumlarını ve kestirim hata değişinti matrisini hesaplamak adına bir PDA süzgeci uyguyabiliriz.

k anında, doğrulama geçidindeki $(Z_G(k))$ ölçümler $z_i(k), i=1, \dots, m_k$, olarak ifade edilir. m_k doğrulama geçidindeki ölçüm sayısı, doğrulanmış ölçümlerin $\{z_i(k): i=1, \dots, m_k\}$ kümesi ise $Z(k)$, onun kümülatif kümesi ise $\{Z(j): j=1, \dots, k\}$ veya Z^k şeklinde gösterilir. Ayrıca $i=1, \dots, m_k$, için, $z_i(k)$ ölçümünün hedeften kaynaklanma durumunu (olayını) $\theta_i(k)$ parametresi ile ifade ederiz. Bu olayların hepsi, $R^M(k)$ olayının bilinmesi koşuluyla, birbirinden bağımsız ve tümüyle kapsamlıdır. Ek olarak $P[\theta_i(k)|Z^k, R^M(k)]$ koşullu olasılığını da $\beta_i(k)$ şeklinde ifade ediyoruz. $\beta_i(k)$ parametresinin m_k değerine kadar ki kümülatif toplamı ise tabii ki 1 olacaktır. $\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) = 1$.

$R^M(k)$ olayının bilinmesi koşuluyla, PDA izleme sisteminde güncellenmiş durum kestirimi ve değişinti matrisinin çıkarımı yapılacaktır. Yapılacak olan çıkarım 4. Kısımda çıkarım ile paraleldir. Yukarıda açıklanan olaylara göre $\theta_1(k), \theta_2(k), \dots, \theta_{m_k}(k)$, toplam olasılık teoremini kullanarak, k anındaki durumun koşullu ortalamasını şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k) &= E[x(k)|Z^k, R^M(k)] \\ &= \sum_{i=1}^{m_k} E[x(k)|\theta_i(k), Z^k, R^M(k)] P[\theta_i(k)|Z^k, R^M(k)] \\ &= \sum_{i=1}^{m_k} \hat{x}(k|k) \beta_i(k) \end{aligned} \tag{6.28}$$

i'nci doğrulanmış ölçümün hedef kaynaklı olması anlamına gelen $\theta_i(k)$ 'nin olduğu koşuluyla hesaplanan $\hat{x}(k|k)$, güncellenmiş durum kestirim denklemdir. Bu denklem ayrıca aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\hat{x}_i(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k, R^M(k), SNRT) v_i(k), \quad i = 1, \dots, m_k \quad (6.29)$$

Ek olarak, $\hat{x}(k|k-1) = F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)$, $v_i(k) = z_i(k) - H\hat{x}(k|k-1)$, ve $K(k, R^M(k), SNRT)$ ise k anındaki Kalman süzgeci kazancıdır. Kalman kazancı aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$$K(k, R^M(k), SNRT) = P(k|k-1)H^T S^{-1}(k, R^M(k), SNRT) \quad (6.30)$$

SNRT k anındaki anlık sinyal gürültü oranını belirtir. (SNRT(k)'nin kısaltılmış versiyonudur.)

Standart PDA süzgeci, doğrulanmış tüm ölçümler için $\{z_i(k) : i = 1, \dots, m_k\}$, gürültü değişinti matrislerinin özdeş olduğunu varsaymaktadır. $R^M(k)$ olayının bilindiği koşuluyla doğrulanmış tüm ölçümlerin gürültü değişintilerinin hedef sezimindeki ile özdeş olduğunu varsayıyoruz. Bu varsayım, [2] 'de yer alan performans değerlendirme metodunu kullanabilmemizi olanak tanıdığından ötürü izleyici karakterizasyonunu kolaylaştırmaktadır. Aslında pratik olarak gürültü değişinti matrislerinin hepsi aynı olamaz. Zira her değişinti, ona karşılık gelen ölçümün sinyal şiddetine bağlı olarak değişmektedir. Farklı değişinti matrislerini de hesaba katarak PDA süzgeci uygulanabilmektedir. PDA süzgeci kullanılırken tasarladığımız izleme sisteminin performansı ise yaklaşıklama yapılarak değerlendirilebilmektedir. Bunun için izleyici performans tanımlaması(karakterizasyonu) kullanılacaktır. Özellikle sezim eşiği çok düşük olmadığı zaman bu yaklaşık değerlendirmenin doğruluğu çok yüksek

olacaktır. Bu performans tanımlaması ve değerlendirmesi sonraki bölümde açıklanacaktır.

Yapmış olduğumuz varsayıma göre inovasyonun $v_i(k): i=1, \dots, m_k$, değişintisi matrisi daha öncekilerle aynı formatta olacaktır.

$$S(k, R^M(k), SNRT) = HP(k|k-1)H^T + R(k, R^M(k), SNRT) \quad (6.31)$$

Yukarıdaki denklemde $P(k|k-1)$, öngörölmüş hata değişinti matrisidir ve şu şekilde hesaplanır.

$$P(k|k-1) = F(k-1)P(k-1|k-1, R^M(k-1), SNRT(k-1)) \cdot F^T(k-1) + Q(k-1). \quad (6.31)$$

Hata değişinti matrisi $P(k-1|k-1, R^M(k-1), SNRT(k-1))$ özyinelemeli olarak aşağıda, (6.35)'te, verilen formda ifade edilmiştir. Doğrulama geçidi $Z_G(k)$ ölçüm uzayında g-sigma elips modelindedir ve hacmi ise aşağıda verildiği gibidir.

$$V_G(k, R^M(k), SNRT) = \pi g^2 |S(k, R^M(k), SNRT)|^{1/2} \quad (6.32)$$

(6.28) ile (6.29) denklemleri birleştirildiğinde, PDA süzgecinin durum güncelleme denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k, R^M(k), SNRT)v(k), \quad (6.33)$$

Yukarıda verilen $v(k)$ 'nin açılımı şu şekildedir.

$$v(k) = \sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) \quad (6.34)$$

Yukarıdaki inovasyon denklemine birleştirilmiş inovasyon adı verilmektedir. [3] ilişkilendirme olasılığı $\beta_i(k)$ [3] 'de açıklandığı gibi hesaplanmaktadır. Fakat P_D ve 1 olduğu varsayılan geçit olasılığı P_G ile, Hata değişintisi ve ona karşılık gelen güncellenmiş durum kestirim matrisi (SNRT ve hedef seziminin bilinmesi koşuluyla) şu şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned} P(k | k, R^M(k), SNRT) &= P(k | k-1) - K(k, R^M(k), SNRT) \\ &\quad \cdot S(k, R^M(k), SNRT) K^T(k, R^M(k), SNRT) \\ &\quad + \tilde{P}(k, R^M(k), SNRT) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Yukarıda verilen $\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT)$ 'nin açılımı ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k, R^M(k), SNRT) &= K(k, R^M(k), SNRT) \\ &\quad \cdot \left[\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) v_i^T(k) - v(k) v^T(k) \right] \\ &\quad \cdot K^T(k, R^M(k), SNRT) \end{aligned} \quad (6.36)$$

$R^M(k)$ sadece durum ve değişinti güncelleme denklemlerinde hesaba katılmıştır. Kestirim hata değişinti matrisi (6.35) direkt olarak gözlemlenen ölçümlere bağlı olarak değiştiğinden ötürü yayılması da ancak istatistiksel olarak belirlenmektedir. Olasılıksal hata değişintisi güncelleme denklemi (6.35) bir sonraki kısımda belirlenimci değişinti güncelleme denklemi ile yaklaşılanmaktadır.

6.3.2. Yaklaşık değişinti denklemi

Bu bölümde (6.35)'teki denkleme yaklaşıklama yapılacaktır. Bunun için tüm doğrulanmış ölçümlerin yanısıra rassal değişken $SNRT_i$ ($SNRT$ $SNRT_i$ 'nin gerçekleşmiş halidir.) ve önceden bilinen $P(k|k-1)$, üzerine denklemin beklenen değeri alınacaktır. Bu işlem aşağıdaki gibi olacaktır.

$$P(k|k, R^M(k)) \approx E[P(k|k, R^M(k), SNRT) | Z^{k-1}, R^M(k)] \quad (6.37)$$

Bu yaklaşıklama işlemi, denkelmdeki 2. terimi ve (6.36)'da belirtilen rassal matrisi $\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT)$,beklenen değerleri ile değiştirerek elde edilir. Bu bize, $R^M(k)$ olayının bilinmesi koşuluyla, belirlenimci değişinti güncelleme denklemini verir. Bu denklem de zaman ekseninde yinelenebilmektedir. İlk olarak rassal matrisin $\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT)$ beklenen değeri aşağıda verildiği gibi bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} & E[\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT) | Z^{k-1}, R^M(k)] \\ &= E[E[\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT) | Z^{k-1}, R^M(k), SNRT] | Z^{k-1}, R^M(k)] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^M E[\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT) | Z^{k-1}, R_i(k), SNRT] \cdot P[R_i(k) | R^M(k) | Z^{k-1}, R^M(k)]\right] \\ &= \sum_{i=1}^M E\left[E[\tilde{P}(k, R_i(k), SNRT_i) | Z^{k-1}, R_i(k), SNRT_i] | Z^{k-1}, R^M(k)]\right] \\ & \quad \cdot P[R_i(k) | Z^{k-1}, R^M(k)] \end{aligned} \quad (6.38)$$

$SNRT_i$ rassal bir değişkendir ve gerçekleşmiş hali i'nci ışıma sonucundaki anlık sinyal gürültü oranıdır.(SNR) ve $SNRT_i$ olarak gösterilmektedir. (6.38)'in son eşitliği, $R_i(k)$

olayı bir kez meydana geldiğinde, $SNRT=SNRT_i$ ve $R^M(k) = R_i(k)$ eşitliklerinin sonucu olarak bulunmuştur. (6.38) deki denklemde, içerdeki beklenen değer ifadesi bilgi azaltıcı faktörün $(q_2(k, \lambda_i(k), R_i(k), SNRT_i))$ cinsinden ifade edilebilmektedir. [3,4]

$$\begin{aligned}
& E[\tilde{P}(k, R_i(k), SNRT_i) | Z^{k-1}, R_i(k), SNRT_i] \\
& \approx (1 - q_2(k, \lambda_i(k), R_i(k), SNRT_i)) \\
& \quad .K(k, R_i(k), SNRT_i) S(k, R_i(k), SNRT_i) \\
& \quad .K^T(k, R_i(k), SNRT_i).
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Yukarıda verilen ifadelerde $.K(k, R_i(k), SNRT_i)$ ve $S(k, R_i(k), SNRT_i)$ sırasıyla Kalman kazancı ve inovasyon değişinti matrisidir ve $SNRT_i$ ile $R_i(k)$ parametrelerinin bilindiği koşulu ile hesaplanmaktadır. (6.39)'u (6.38) 'de yer alan denklemde yerine koyduğumuzda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& E[\tilde{P}(k, R^M(k), SNRT_i) | Z^{k-1}, R^M(k)] \\
& \approx \sum_{i=1}^M E[(1 - q_2(k, \lambda_i(k), R_i(k), SNRT_i)) \\
& \quad .\eta(k, R_i(k), SNRT_i | Z^{k-1}, R^M(k)) \\
& \quad P(R_i(k) | Z^{k-1}, R^M(k))]
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Ayrıca,

$$\eta(k, R_i(k), SNRT_i) = K(k, R_i(k), SNRT_i) S(k, R_i(k), SNRT_i) K^T(k, R_i(k), SNRT_i)$$

Bilgi azaltıcı faktör için, 2 boyutlu uzay ve 4-sigma boyutundaki doğrulama geçidi koşullarında yapılan analitik bir yaklaşım [5]'te belirtilmektedir. Bu faktör için bir yaklaşımla elde edebilmek adına bu referanstaki sonuçları kullanarak aşağıdaki ifadeler bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
& q_2(k, \lambda_i(k), R_i(k), \text{SNRT}_i) \\
& \approx \tilde{q}_2(k, \lambda_i(k), R_i(k), \text{SNRT}_i) \\
& = \frac{0,997}{1 + 0,29 \left(\lambda_i(k) V_{Gi(4)}(k, R_i(k), \text{SNRT}_i) \right)^{1,104}} \quad (6.41)
\end{aligned}$$

$V_{Gi(4)}(k, R_i(k), \text{SNRT}_i)$ 4-sigma elips modelindeki doğrulama geçidinin i'nci ışımadaki hacmini ifade etmektedir. Yukarıdaki ifadeye göre $\lambda_i(k) V_{Gi(4)}(k, R_i(k), \text{SNRT}_i)$ çarpımının 1'den çok küçük olması durumunda çoğu radar izleme sistemlerinde olduğu gibi, bilgi azaltıcı faktör SNRT_i parametresinden neredeyse bağımsız hale gelecektir. Dolayısıyla $\tilde{q}_2(k, \lambda_i(k), R_i(k), \text{SNRT}_i)$ ifadesini (6.41)'deki rassal olmayan sayısal bir ifade ile yaklaşıklemek için $V_{Gi(4)}(k, R_i(k), \text{SNRT}_i)$ ifadesini, $E[V_{Gi(4)}(k, R_i(k), \text{SNRT}_i)]$ şeklinde beklenen değerini alarak yaklaşıkleme yapabiliriz. Bu yöntemi kullanarak (6.40) 'ı tekrar aşağıda verildiği gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
& E[\tilde{P}(k, R^M(k), \text{SNRT}_i) | Z^{k-1}, R^M(k)] \\
& \approx \sum_{i=1}^M (1 - \tilde{q}_2(k, \lambda_i(k), R_i(k))) \\
& \cdot E[\eta(k, R_i(k), \text{SNRT}_i) | Z^{k-1}, R^M(k)] \\
& P[R_i(k) | Z^{k-1}, R^M(k)] \quad (6.42)
\end{aligned}$$

Bu arada, ölçüm gürültüsü, hedef ivme sürecinin gürültüsü ve başlangıç durum hatasının birbirinden bağımsız olduğunu unutmamak gerekir. Ek olarak herbirinin olasılık dağılımları, u ve v doğrultularına göre bağımsız özdeşçe dağılmış ve ilintisizdir. Dolayısıyla (6.37)'deki yaklaşıkleme ile hesapladığımız (6.31)'deki $P(k | k-1)$ özdeş diagonal blokları olan ve sıfırdan farklı diagonal değerleri olan bir

matristir. Sonuç olarak, $S(k, R_i(k), \text{SNRT}_i)$ matrisi, $R_i(k)$ olayını bilmesi koşuluyla, $(P_{(1,1)}(k|k-1) + B^2/\text{SNRT}_i)I$ olarak ifade edilebilir. Bu ifadede yer alan $P_{(1,1)}(k|k-1)$ skalar bir sayı olup $P(k|k-1)$ matrisinin (1.1)'nci elemanıdır. I birim matrisi ise 2 x 2 boyutlu özdeş diagonal formundadır. Doğrulama geçidi hacminin beklenen değeri aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} & E[V_{Gi(4)}(k, R_i(k), \text{SNRT}_i)] \\ &= 16\pi \left(P_{(1,1)}(k|k-1) + B^2 E[(\text{SNRT}_i)^{-1} | Z^{k-1}, R_i(k)] \right) \end{aligned} \quad (6.43)$$

Beklenen geçit hacmini $\bar{V}_{Gi(4)}(k)$ olarak göstereceğiz ve bu değeri (6.25)'teki denklemde yer alan hacim değerinde $(V_{Gi(4)})$ kullanarak $P[R^M(k)] \approx (P_{DG}(k))$. İfadesini hesaplayabiliriz. $E[(\text{SNRT}_i)^{-1} | Z^{k-1}, R_i(k)]$ beklenen değer ifadesi için [6]'nın içerisinde (Ek B)'de yer alan analitik bir çıkarım yapılmıştır. Bunların dışında (6.42)'de yer alan beklenen değer ifadesi de $E[\eta(k, R_i(k), \text{SNRT}_i) | Z^{k-1}, R^M(k)]$ aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir.

$$\begin{aligned} & E[\eta(k, R_i(k), \text{SNRT}_i) | Z^{k-1}, R^M(k)] \\ &= E[\eta(k, R_i(k), \text{SNRT}_i) | Z^{k-1}, R_i(k)] \\ &= P(k|k-1) H^T H P(k|k-1) \\ & \cdot E[(P_{(1,1)}(k|k-1) + B^2/\text{SNRT}_i)^{-1} | Z^{k-1}, R_i(k)] \end{aligned} \quad (6.45)$$

Yukarıdaki son denklem için de ayrıca bir analitik yaklaşım [6]'nın içerisinde (Ek C)'de verilmektedir. (6.35)'teki beklenen değer ifadesi de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& E \left[K(k, R^M(k), SNRT) S(k, R^M(k), SNRT) K^T(k, R^M(k), SNRT) \right] \\
&= \sum_{i=1}^M E \left[\eta(k, R_i(k), SNRT_i) | Z^{k-1}, R_i(k) \right] \\
& \quad .P[R_i(k) | Z^{k-1}, R^M(k)]
\end{aligned} \tag{6.46}$$

(6.44), (6.45) ve (6.46) denklemlerini kullanarak (6.37)'deki yaklaşılamayı, bilinen $P(k | k-1)$ matrisi koşuluyla, (6.35)'teki değişinti güncelleme denklemine uygulayabiliriz.

$$\begin{aligned}
& P(k | k, R^M(k)) \\
& \approx P(k | k-1) - \sum_{i=1}^M \tilde{q}_2(k, \lambda_i(k), R_i(k)) \\
& \quad .P(k | k-1) H^T H P(k | k-1) \\
& \quad .E \left[\left(P_{(1,1)}(k | k-1) + B^2 / SNRT_i \right)^{-1} | Z^{k-1}, R_i(k) \right] \\
& \quad .P[R_i(k) | Z^{k-1}, R^M(k)]
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Yukarıdaki denklemdeki yaklaşım Ek-A ve Ek-C 'deki sonuçlar kullanılarak daha da açık ve detaylı olarak ta ifade edilebilmektedir. Bu yaklaşım ve öngörü hata değişintisi (6.31) birlikte özyinelemeli bir denklem ortaya koyarmaktadır ve bu denklem PDA izleme performansının ilerleyişini yaklaşık olarak tanımlamaktadır. Sonraki bölümdeki parametre eniyilemesinde eşitlik kısıtı özelliğini alırlar. Görünüşte çok karmaşık olsa da. Bu denklemleri yorumlamak ve hesaplamak oldukça kolaydır.

Yukarıda açıklandığı gibi (6.31)'de yer alan $P(k | k-1)$ matrisinin (6.47)'deki yaklaşıklama metoduyla hesaplanmaktadır. Bu matris özdeş diagonal bloklar içermektedir ve bu bloklar sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, açısıl öngörü hata değişinti matrisi $u-v$ uzayında bir daire haline gelir. 1-sigma elips şeklinin yarı çapı ise

$P_{(1,1)}(k|k-1)^{1/2}$ olacaktır. V_0 oranı açısal öngörü ile huzme genişliği arasındaki bağılı doğruluğu belirten bir parametredir.

$$V_0(k) = P_{(1,1)}(k|k-1)^{1/2} / B \quad (6.48)$$

$V_0(k)$ parametresi, $T(k-1)$ ile beraber $\{SNR_{0i}(k): i=1, \dots, M\}$ ve $\{P_{Fi}(k): i=1, \dots, M\}$ parametreleriyle hesaplanmaktadır. Tam tersini düşünecek olursak, Eğer $V_0(k)$ biliniyorsa, ona karşılık gelen $T(k-1)$, (6.48)'deki değeri verecek şekilde hesaplanabilir. İz güncelleme aralığını kontrol altında tutabilmek adına bu oran iyi bir referans parametresi konumundadır. Sonraki bölümde yer alan benzetimleri uygulayabilmek adına gerçek zamana yakın bir PDA izleyici sistemi gerçekleştirmeye çalıştık. Gerçek zamanlı PDA izleme sisteminde, açısal öngörü hata değişinti matrisi daire şeklinde değildir. PDA izleyici sisteminde, (6.48)'de, $P_{(1,1)}(k|k-1)^{1/2}$ parametresini kullanarak, bilinen $V_0(k)$ değerine göre $T(k-1)$ parametresini hesaplamak yerine 1-sigma elipsin major yarı eksen uzunluğunu kullandık. Çıkarımını yaptığımız belirlenimci modelimizdeki aksine PDA izleme sistemindeki elips, daire şeklinde değildir ve $T(k-1)$ için yapılan belirleme bu sistemde korunumludur. Bu faktörler modelimizin geçerliliğini azaltmamaktadır. Aksine çoğu radar izleme sistemleri için uygulanabilir bir modeldir.

Hedef uzaklığı ve menzil hızının bilindiğini varsaydığımıza göre, (6.26)'daki $F(k-1)$ ve $Q(k-1)$ matrisleri, $T(k-1)$, τ_m ve σ_m^2 parametrelerinin fonksiyonudur. Ayrıca, hedef uzaklığı ve menzil hızının bilindiği kabul edilmesine rağmen, daha gerçeğe yakın bir sezim modellemesi yapabilmek için, m adet ölçüm olduğu varsayılmaktadır.

Hedefin tekrar elde edilmesi sürecinin, ancak başlangıç arama modelimizde hedefin seziminin ilgili doğrulama geçidinde yapılamaması durumunda ($R^M(k)$ olayının değil söz konusu olduğunda) başlatılacağını varsaymıştık. Bu olayın değilinin olasılığı

$1 - P_{DG}(k)$ şeklinde gösterilmelidir. Biz bu olasılığı $P_{enf}(k)$ olarak adlandırabiliriz. Hedefin tekrar elde edinim sürecinin, k anındaki, kümülatif olasılığı ise şu şekilde ifade edilebilir.

$$P_{ENF}(k) = P_{ENF}(k-1) + (1 - P_{ENF}(k-1))P_{enf}(k). \quad (6.49)$$

$P_{ENF}(k)$ kümülatif olasılığı, eğer tekrar bir arama süreci başlatılmaz ve hedefin kaybedildiği duyurulursa, “iz kaybının kümülatif olasılığı” olarak ta yorumlanabilir.

6.4. Sezim ve İzleme Parametrelerinin Eniyilenmesi

(6.3) ve (6.4)’te geliştirilen modellere göre, radar enerjisini minimum kullanmak suretiyle hedef takibi yapabilecek bir sistem için bir parametre eniyilemesi problemi oluşturulmuştur. Öncelikle t_k anında iz güncellemenin maliyetini aşağıda belirtildiği gibi ifade edebiliriz.

$$L(k) = \sum_{i=1}^M L(R_i(k))P[R_i(k)] + \sum_{i=1}^M L(S_i(k))P[S_i(k)] + L(Q_M(k))P[Q_M(k)] \quad (6.50)$$

Yukarıdaki denklemde, $L(R_i(k)) = \sum_{j=1}^i c_{jk} SNR_{0j}(k)$ ve

$L(Q_M(k)) = \sum_{j=1}^M c_{jk} SNR_{0j}(k) + C_k$ olarak belirtilmektedir. C_k bir sabittir ve hedefin tekrar edinimin sağlanması için k ‘nıncı iz güncelleme anındaki genişletilmiş mahalle taraması için gerekli enerji kaynağına göre seçilmektedir. c_{jk} ise orantısal bir sabittir.

Burada $L(R_i(k))$, $L(S_i(k))$ ve $L(Q_M(k))$ olarak verilen maliyetler, sırasıyla $R_i(k)$, $S_i(k)$ ve $Q_M(k)$, olayları için hesaplanmaktadır. $S_i(k)$ olayı, izleme sisteminde $Q_M(k)$ olayından daha kötü bir durum olduğu için $L(S_i(k))$, $L(Q_M(k))$ ’dan daha fazla olmalıdır. Hatta bu iki parametreyi birbirinin cinsinden işu şekilde ifade edebiliriz.

$$L(S_i(k)) = \sum_{j=1}^i c_{jk} SNR_{0j}(k) + L(Q_M(k)) \quad (6.51)$$

$L(R_i(k)), L(S_i(k))$ ve $L(Q_M(k))$ maliyetlerini, (6.50)'de yerlerine koyduğumuzda, şu sonucu alırız.

$$\begin{aligned} L(k) = & \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^i c_{jk} SNR_{0j}(k) \right) P[R_i(k) \cup S_i(k)] \\ & + \left(\sum_{j=1}^M c_{jk} SNR_{0j}(k) + C_k \right) P[Q_M(k) \cup S^M(k)]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

$R_i(k) \cup S_i(k) = P_i(k)$ ilişkisi ve $Q_M(k) \cup S^M(k)$, $R^M(k)$ olayının değili olduğundan ötürü maliyet $(L(k))$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} L(k) = & \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^i c_{jk} SNR_{0j}(k) \right) P[P_i(k)] \\ & + \left(\sum_{j=1}^M c_{jk} SNR_{0j}(k) + C_k \right) P[1 - R^M(k)]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

(6.31) ve (6.47)'deki denklemlerden anlaşılacağı üzere, (6.48)'deki $V_0(k)$ parametresinin $T(k-1)$ ve $P(k-1|k-1, R^M(k-1))$ ifadelerinin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla $L(k)$, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} L(k) = & \bar{L}(P(k-1|k-1, R^M(k-1))), \\ & SNR_{0i}(k), T(k-1), P_{Fi}(k)), \\ & i = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Ayrıca (6.31)'i ve Ek A ve Ek C'deki sonuçları kullanarak (6.47)'de yer alan $P(k|k, R^M(k-1))$ ifadesini de şu şekilde yazabiliriz.

$$P(k|k, R^M(k)) = h(P(k-1|k-1, R^M(k-1)), \\ SNR_{0i}(k), T(k-1), P_{Fi}(k)), \quad i = 1, \dots, M. \quad (6.56)$$

T_{track} , toplam izleme zamanını, N izleme zamanı boyunca yapılan toplam iz güncelleme sayısını belirtsin. Bu durumda, izleri kontrol altında tutabilmek için T_{track} zamanı içerisinde N adet güncelleme yaparak, optimal enerji planlaması problemini şu parametre dizilerine göre hazırlayabiliriz.

$$\{SNR_{0i}(k) : i = 1, \dots, M, k = 1, \dots, N\} \\ \{T(k-1) : k = 1, \dots, N\} \\ \{P_{Fi}(k) : i = 1, \dots, M, k = 1, \dots, N\}$$

$N, T_{track}, P(0|0), C_k, c_{jk}$, ve manevra ile ilgili σ_m^2 ve τ_m parametrelerinin bilindiğini varsayıyoruz. Dolayısıyla söz konusu planlama(scheduling) problemimiz bir eniyileme problemine dönüşmektedir.

$$\min_{\{SNR_{0i}(k), T(k-1), P_{Fi}(k) : i=1, \dots, M, k=1, \dots, N\}} L_N \\ \sum_{k=1}^N \bar{L}(P(k-1|k-1, R^M(k-1)), SNR_{0i}(k), T(k-1), P_{Fi}(k)), \quad (6.57)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
P(k|k, R^M(k)) &= h(P(k-1|k-1, R^M(k-1))), \\
&SNR_{0i}(k), T(k-1), P_{Fi}(k)), \\
i=1, \dots, M, \quad k=1, \dots, N \quad &P(0|0, R^M(0)) = P_{00}
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\sum_{k=1}^N T(k-1) = T_{track} \tag{6.59}$$

$$T(k-1) \geq T_{\min} \quad k=1, \dots, N \tag{6.60}$$

$$SNR_{0i}(k) \leq SNR_{0\max}, \quad i=1, \dots, M, \quad k=1, \dots, N \tag{6.61}$$

$$\bar{V}_{Gi(4)}(k) \leq \beta V_B, \quad i=1, \dots, M, \quad k=1, \dots, N \tag{6.62}$$

$$P_{ENF}(N) \leq \gamma. \tag{6.63}$$

(6.57)'de belirtilen performans indeksi index L_N , N adet iz güncellemesi için toplam maliyeti ifade etmektedir. Optimal denetim problemimizde (6.58)'de belirtilen $P(k-1|k-1, R^M(k-1))$ ifadesinin elemanları, durum değişkenlerini, $\{T(k-1)\}$ dizisi, $\{[SNR_{01}(k)...SNR_{0M}(k)]^T\}$ ve $\{[P_{F1}(k)...P_{FM}(k)]^T\}$ vektör dizileri ise denetim değişkenlerini oluşturmaktadır. (6.59)'da eşitlik kısıtı olarak verildiği üzere güncelleme aralıklarının tamamının toplamı T_{track} olarak bilinmektedir. (6.60) ve (6.61)'deki kısıtlar ise radar sisteminin karşılayabileceği fiziksel kısıtları ifade etmektedir. (6.62)'de yer alan kısıtta 4-sigma doğrulama geçidi hacminin ölçüm uzayındaki hacmi βV_B ($\beta V_B \leq V_C$) geçmemesi gerektiği belirtilmektedir. V_B huzme ışıma hacmini temsil etmektedir ve πB^2 değerindedir. $\beta=1$ seçilmesi durumunda, doğrulama geçidinin yaklaşık olarak bir dairesel alanın içinde kalması gerektiği ve bu alanın yarıçapının huzme genişliği B

ve merkezinin de huzme konumlandırma yönü olması gerektiği gerekmektedir. Bu koşul huzme yönlendirme alanı dışındaki sezim ölçümlerinin doğrulanmasını ve takip edilebilmesini engellemektedir. Son kısıtta (6.63) ise T_{track} süresince kümülatif iz kaybı olasılığının üst limti belirtilmektedir.

(6.57)'de verilen eniyileme probleminde N adet iz güncellemesi için eniyi dizileri belirlemektedir. Radar parametre eniyilemesi problemimiz aslında doğrusal olmayan ve tamsayı parametresine sahip (N) bir problemidir. Problemi bir N kümesi için çalıştırdığımızda optimal iz güncelleme sayısını N^* , N 'ye göre minimize edilmiş optimal maliyet L_N^* kullanılarak bulabiliriz. Bir önceki kısımda (6.37)'deki denklemi kullanarak, hata değişinti güncelleme denkleminde yaklaşıklama uygulanmıştır.

C_k , birçok faktöre bağlı olarak değişebilmektedir. Örnek olarak, Hedef uzaklığı, Radar Kesit Alanı(RCS) ortalaması yoğun ortam sıklığı, tekrar sezim süreci için özgüleme stratejisi ve veri ilişkilendirme performansı gibi faktörleri örnek verebiliriz. Hedef mesafesi ve radar kesit alanı ortalamasını hesaba kattığımız taktirde C_k 'nin varsayımla veya deneysel yöntemlerle belirlemek gerekmektedir. c_{jk} sabiti de aynı şekilde hedef mesafesine ve ortalama radar kesit alanına bağlıdır. Bu iki parametrenin seçilmesi bir senaryonun belirlenmesine bağlıdır. Dolayısıyla hem C_k hem de c_{jk} seçilecek senaryoya bağlıdır.

Gerçek zamanlı izleme sistemlerinde SNR_{0i} paramtresinin sabit bir seviyeye getirilebilmesi için gönderilen gücün seviyesi ayarlanabilmektedir. SNR_{0i} 'nin öngörülen değeri, ortalama RCS, hedef uzaklığı kestirimi ve diğer bilinen temel radar parametreleri ile hesaplanmaktadır. Sunmuş olduğumuz optimal çözüm, gönderilen gücü ayarlayarak, öngörülen SNR_{0i} paramtresinin gelmesi gereken sinyal gürültü oranı seviyelerini elde etmemizi sağlar. Hazırladığımız eniyileme probleminde, hedef uzaklığı ve RCS değerlerinin bilinmekte veya doğru bir şekilde öngörülmektedir.

Geçtiğimiz 2 bölümde hazırladığımız arama ve izleme modellerinde maliyetli benzetimler yapılmasına gerek duymadan arama sürecinde olabilecek olayları öngörebilmek için de oldukça kullanışlı olduğunu unutmamak gerekir. Bu öngörü, faz dizilimli radar izleme sistemlerinin farklı boyutlarındaki kaynak özgüleme performanslarını değerlendirmede etkin olarak kullanılabilir. Dolayısıyla bu problem farklı amaçlardaki farklı performans ölçümlerini de kapsayacak şekilde genişletilebilir.

7. SONUÇ

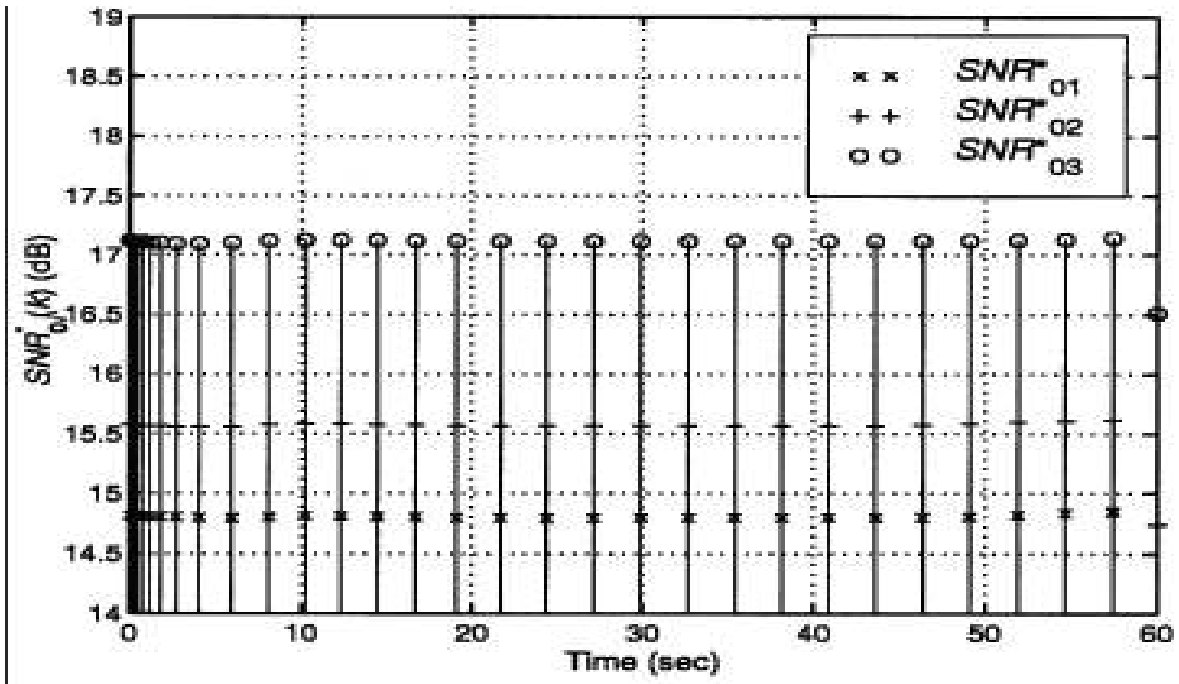
Faz dizilimli radarların sezim ve izleme parametreleri, radar enerjisinin asgari seviyede kullanılarak hedef takibi yapabilmek amacıyla eniyilenmesi düşünülmüştür. Yanlış ikaz ve yoğun ortam girişimleri, arama süreci ve hedef sezimi modellerinde hesaba katılmaktadır. Enerjiyi asgari seviyede kullanabilmek için ilgili parametrelerin eniyilenmesi üzerine çalışılmıştır. Bu parametreler iz güncelleme aralıkları ve ardışık olarak yapılan her iz güncellemesindeki Sinyal gürültü oranları ve Sezim eşik değerleri olarak belirlenmiştir. Bu problem [6] 'da çeşitli örnekler için çözülmüş ve benzetimlerle doğrulanmıştır. Bu örneklerden birindeki değerlere göre çıkarılan sonuçlar sırasıyla Şekil 7.1, Şekil 7.2., Şekil 7.3, Şekil 7.4 ve Şekil 7.5'te belirtilmektedir. Bu örnekte $N=32$ (izleme zamanı boyunca yapılan iz güncelleme sayısı), $C=180$, (genişletilmiş arama süreci için gerekli maliyet) olarak kabul edilmiştir. Bu eniyileme çözümü ayrıca gerçek zaman uygulamaları için uygun olacak eniyileme yakın parametre kümesinin seçimi için de önemli bir bakış açısı kazandırmaktadır. Asgari seviyeye çekilmiş olan maliyet, radar özgüleme algoritmalarında bir performans değerlendirme kriteri olarak kullanılabilir. Ayrıca oluşturulan arama ve izleme modelleri kullanılarak süreç içerisinde meydana gelebilecek olayların olasılıklarının da, ek bir benzetim çalışması yapılmadan, kesitirimi yapılabilir. Bu kesitirim, faz dizilimli radar izleme sistemlerinin değişik versiyonlarındaki kaynak özgüleme performanslarının değerlendirilmesinde de etkin bir şekilde kullanılabilir. Dolayısıyla bu eniyileme probleminin yalnızca bir enerji minimizasyonu olarak düşünülmemesi gerekmektedir. Tasarım

amaçlarına(gereklerine) göre farklı performans ölçütlerinin de böyle bir problemde yer alması sağlanabilmektedir. Son olarak şunu belirtmemiz gerekir ki; İzleme modelimiz, hedef uzaklığı ve uzaklık değişim hızının bilindiği(sabit) kabul edilerek hazırlanmıştır. Bu kabullenme sayesinde açısal izlemeyi, mesafe izlemeden ayırıp modelin daha karmaşık yapıda olmasını engellemiş olduk.

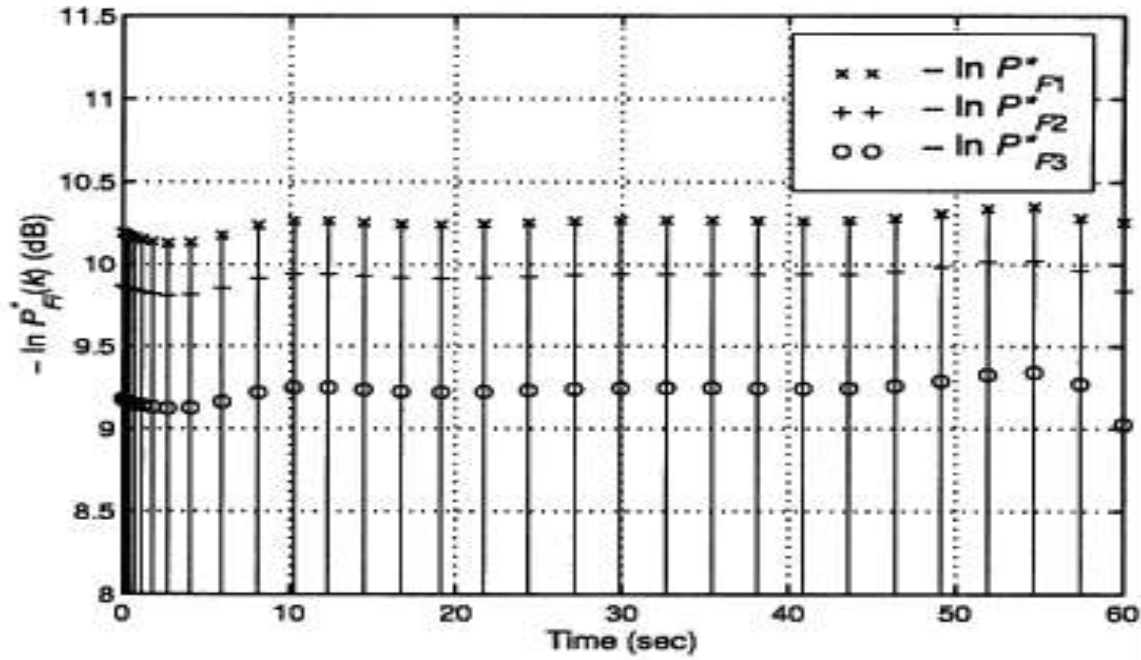
Bunların dışında PDA algortiması için yapılan benzetim çalışmasında $x_0\{1,0.1,0.01\}$ ve başlangıç durumu ve giriş işareti olarak da $\cos(2\pi \cdot 5/2t)$ uygulandığında MATLAB ortamında Şekil 7.6 'da görüldüğü gibi giriş işaretini doğru bir şekilde izlediğini görüyoruz. Ayrıca Şekil 7.7 'de Ölçüm hatasının, $(v(k))$ $-0.2 < v(k) < 0.2$ aralığında salınıp yaptığı ancak ortalama değerinin sıfır olduğu net olarak görülmektedir.

Giriş durum değerlerini $x_0\{10,22,10\}$ gibi rastgele değerler, giriş işaretimizde parabolik bir sinyal olduğunda, $(1+t+t^2)$ Şekil 7.8 ve Şekil 7.9 'da hata salınımının arttığını görüyoruz. Dolayısıyla izlenen hedefin doğruluğu ve güvenilirliği azalmaktadır. Buradan da anlaşılabacağı üzere PDA algoritmasında belirleyici faktör başlangıç durum değerlerinin doğru ve gerçek zamana en yakın değerler olduğundan emin olunmasıdır. Şekil 7.6 ve Şekil 7.7 'de elde edilen sonuçlarda x_0 değerlerinin, hareket eden bir hedefin konum, hız ve ivme değerlerini temsil ettiğini düşünmemiz gerekmektedir. hız değerini temsi eden x_1 , konum değerinin iz güncelleme periyodu olan T katsayısına bölünmesiyle elde edilir $x_1=x_0/T$. İvme değeri de konum değerinin T^2 değerine bölünmesiyle ortaya çıkacaktır x_0/T^2 . Bu deterministik değerler Markov dağılımına sahip hareket eden hedef modeli kabullenmesi kullanılarak yapılan yaklaşıklamalar neticesinde bulunmuştur. [3] 'de detaylı olarak açıklanmaktadır.

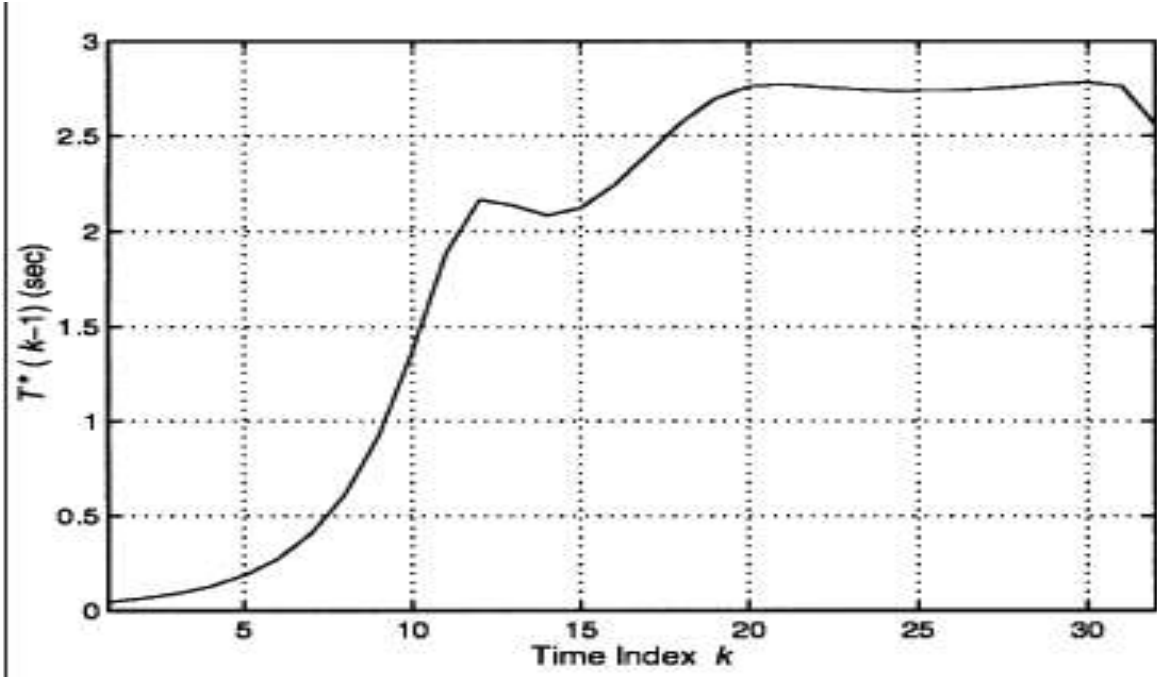
Yapmış olduğumuz ilk benzetim de $T=1$ olarak alınmıştır. Dolayısıyla $x_0=1$, $x_1=0.1$ ve $x_2=0.01$ olarak belirlenmiştir.



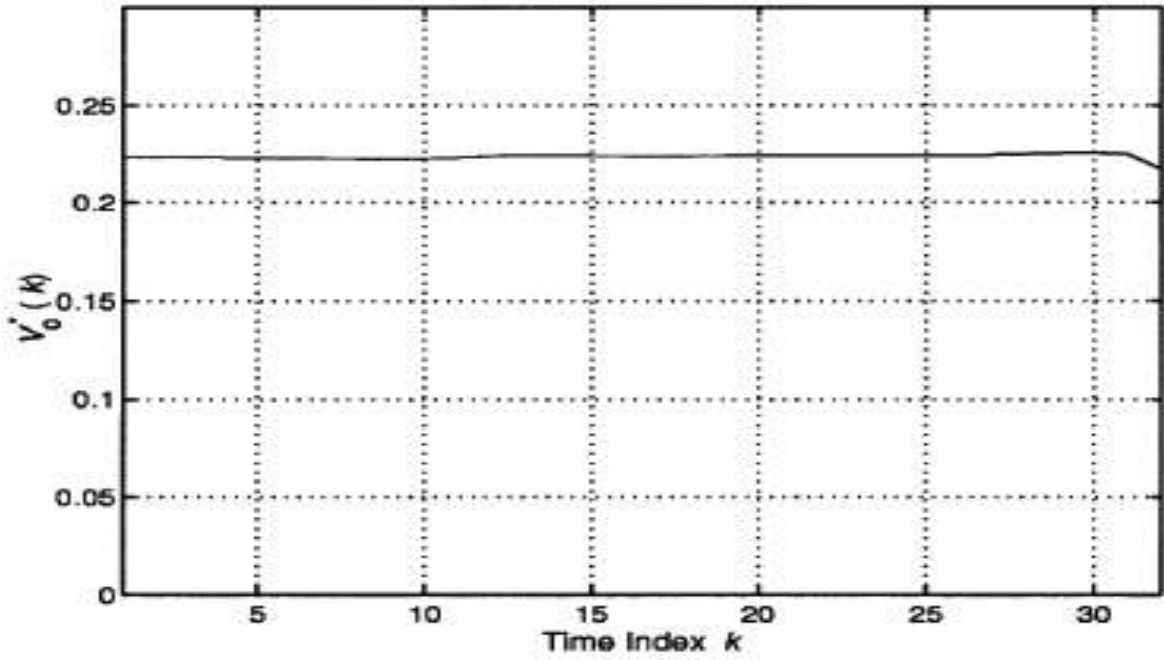
Şekil 7.1. t_k anında her ışımadaki sinyal gürültü oranları



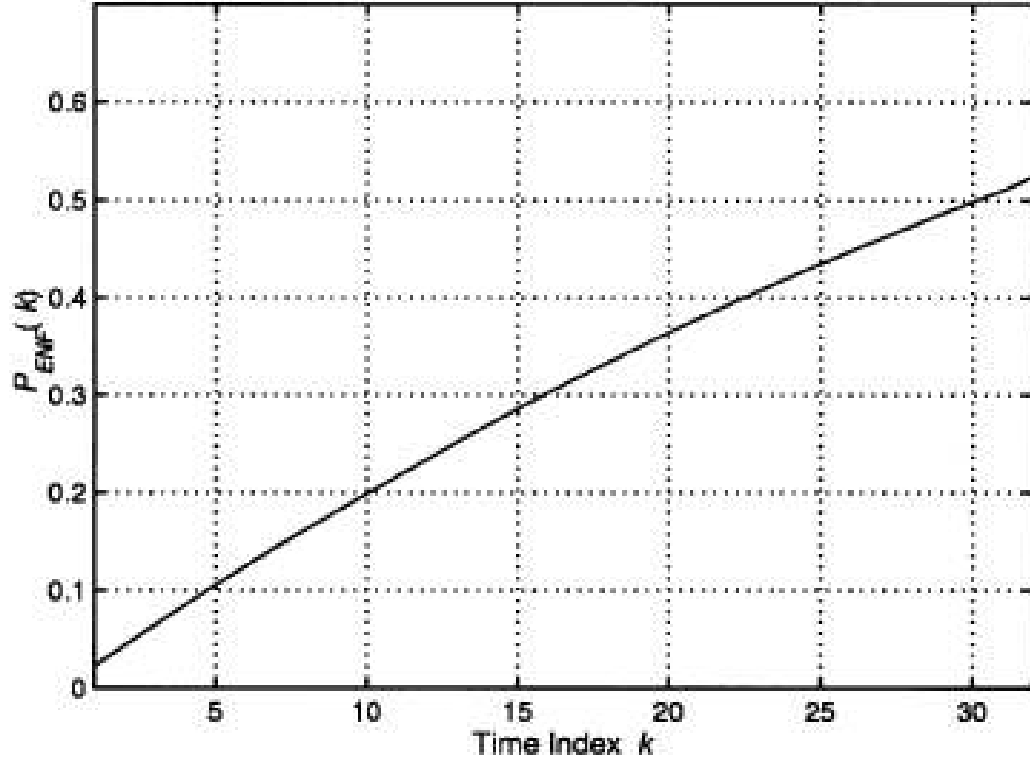
Şekil 7.2. Eniyilenmiş Sezim Eşik değerleri



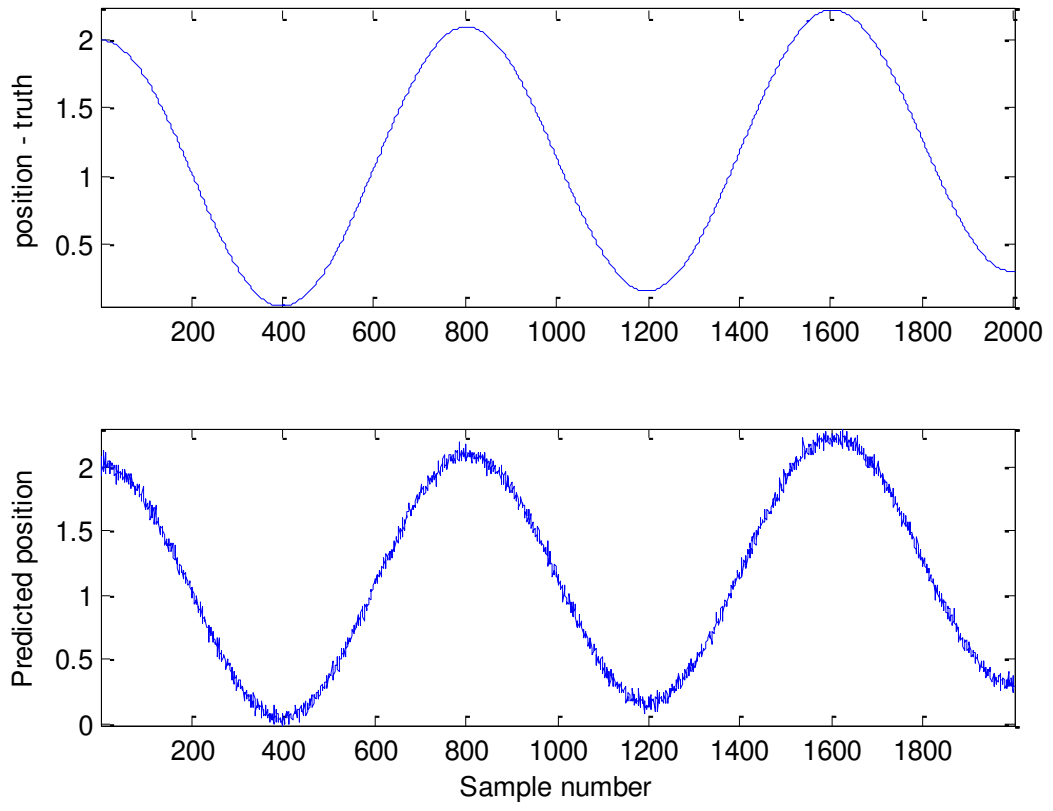
Şekil 7.3. Eniyilenmiş iz güncelleme aralıkları



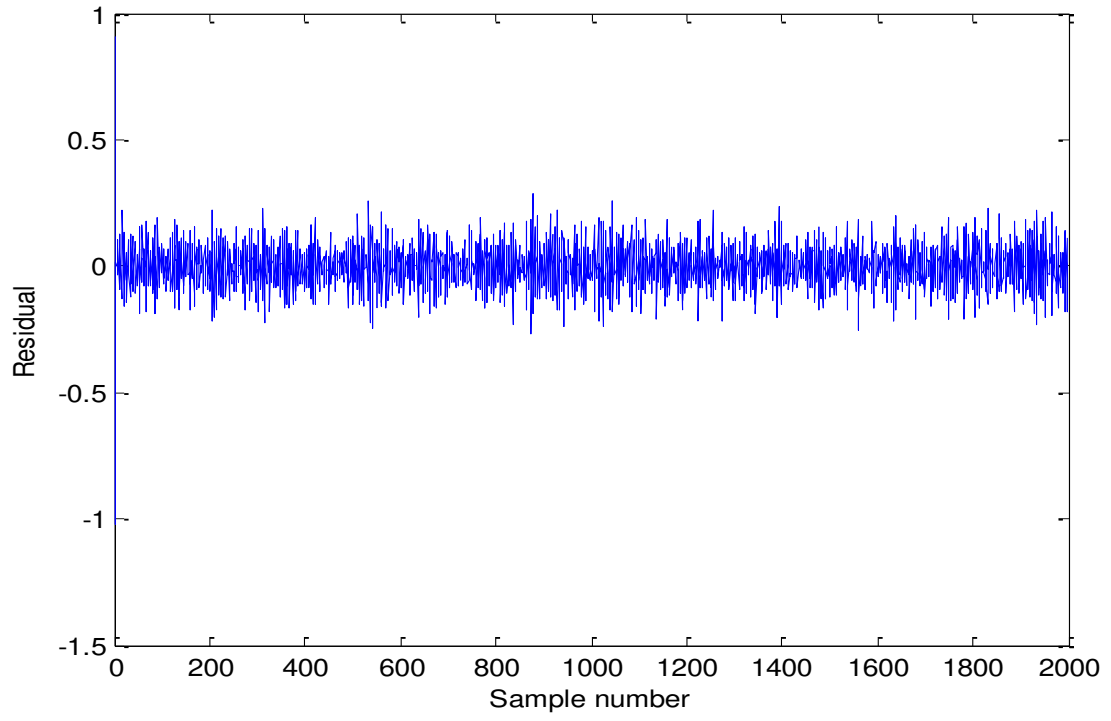
Şekil 7.4. Eniyilenmiş Aaçısal kestirim doğruluk oranı



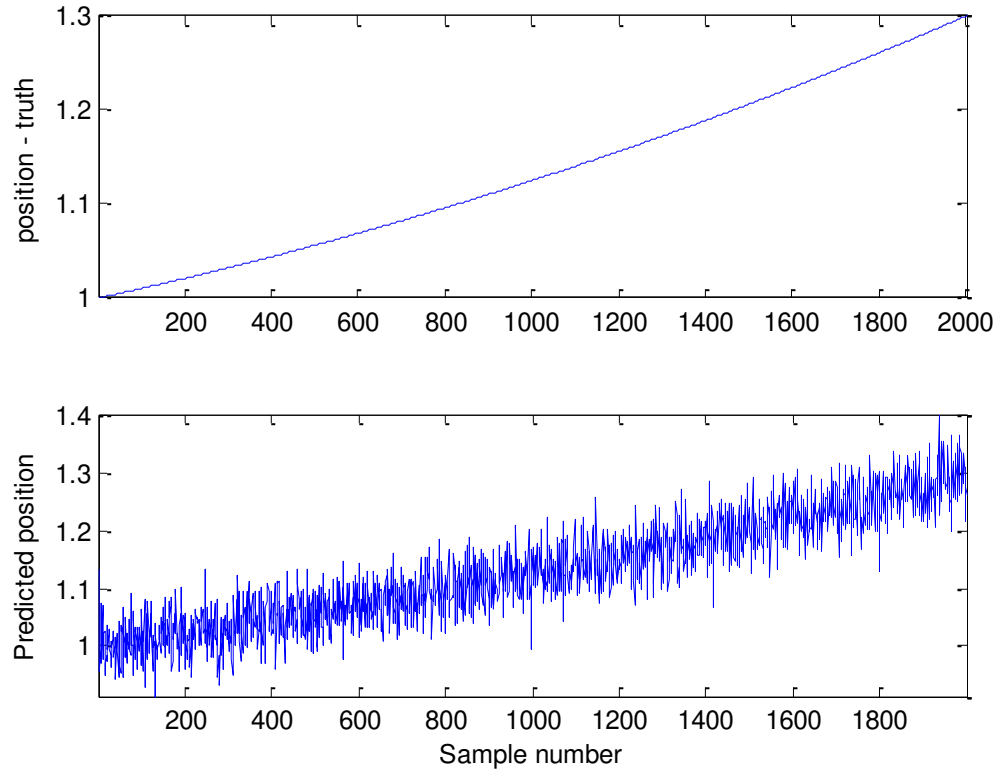
Şekil 7.5. Hedefi tekrar yakalamak için başlatılan arama sürecinin birikimli olasılığı



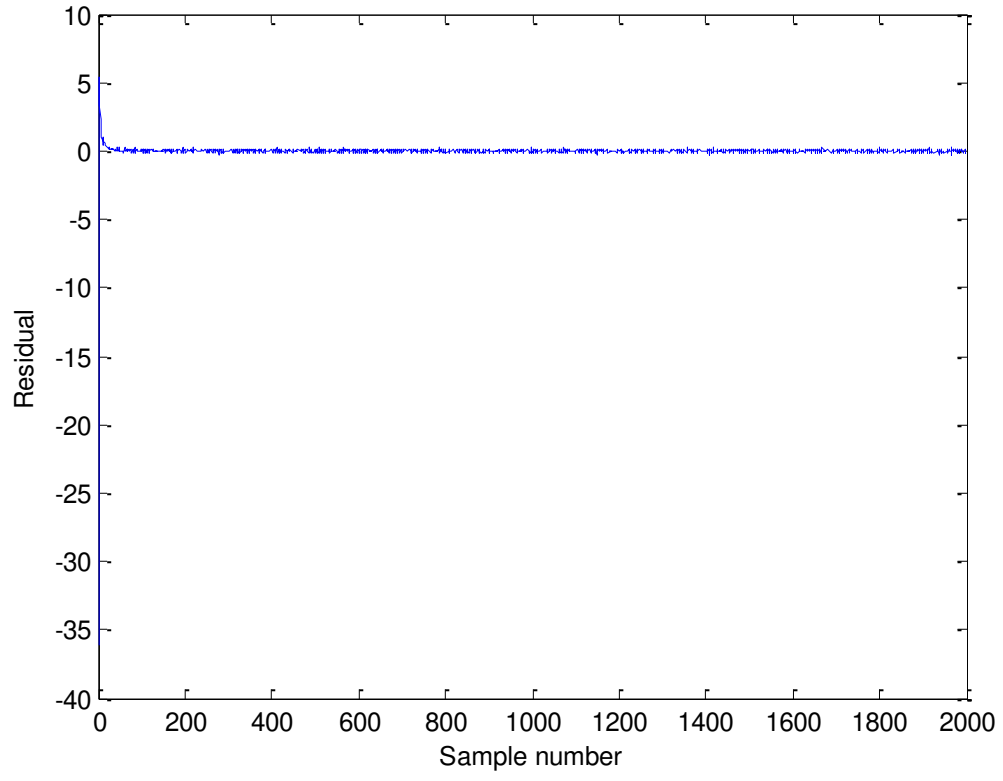
Şekil 7.6 Başlangıç Durum $x_0\{1,.1,.01\}$ için doğru ve kestirim yapılan konum



Şekil 7.7 Başlangıç durumu değeri $x_0 \{1, .1, .01\}$ için konum kestirim hata ($v(k)$) parametresi



Şekil 7.8 Başlangıç Durum $x_0\{10,22,10\}$ için doğru ve kestirim yapılan konum



Şekil 7.9 Başlangıç durum değeri $x_0 \{10,22,10\}$ için konum kestirim hata ($v(k)$) parametresi

KAYNAKLAR LİSTESİ

- [1] Levanon, N., Radar Principles., New York: Wiley, 1988.
- [2] Fortmann, T. E., Bar-Shalom, Y., Scheffe, M., and Gelfand,S., Detection thresholds for tracking in clutter-A connection between estimation and signal processing., IEEE Transactions on Automatic Control, 30 (Mar. 1985),221—229.
- [3] Bar-Shalom, Y., and Fortmann, T. E., Tracking and Data Association., Orlando, FL: Academic Press, 1988.
- [4] Fortmann, T. E., Bar-Shalom, Y., Scheffe, M., and Gelfand,S., Detection thresholds for tracking in clutter-A connection between estimation and signal processing., IEEE Transactions on Automatic Control, 30 (Mar. 1985), 221—229.
- [5] Kershaw, D. J., and Evans, R. J., A contribution to performance prediction for probabilistic data association tracking filters., IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 32 (July 1996), 1143—1147.
- [6] Young-Hun Jung and Sun-Mog Hong, Modeling and Parameter Optimization of Agile Beam Radar Tracking, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems Vol. 39, No. 1 January 2003
- [7] Blair, W. D., Watson, G. A., Kirubarajan, T., and Bar-Shalom, Y., Benchmark for radar allocation and tracking in ECM., IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 34 (Oct. 1998), 1097—1114.
- [8] Hong, S. M., and Jung, Y. H., Optimal scheduling of track updates in phased array radars., IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 34 (July 1998), 1016—1022.

- [9] van Keuk, G., and Blackman, S. S., On phased-array radar tracking and parameter control., IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 29 (Jan. 1993), 186—194.
- [10] Blackman, S. S., and Popoli, R. F., Design and Analysis of Modern Tracking Systems, Norwood, MA: Artech House, 1999.
- [11] Hong, S. M., and Jung, Y. H., Optimal scheduling of track updates in phased array radars. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 34 (July 1998), 1016—1022.

EKLER LİSTESİ

Ek 1 Toplam Olasılık Teoremi.....	111
Ek 2 BAYES Kuralı.....	116
Ek 3 Koşullu Beklenen Değer ve Kaydırma Özelliği... ..	116
Ek 4 PDA Süzgecinde Değişinti Güncelleme.....	115

Ek 1. Toplam Olasılık Teoremi

β_i , $i=1, \dots, n$ olay dizisindeki olayların birbirinden bağımsız olduğunu kabul ediyoruz.

$$P\{B_i B_j\} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{Ek 1.1})$$

Ayrıca tümüyle kapsamlı olduğunu varsayıyoruz.

$$\sum_{i=1}^n P\{B_i\} = 1 \quad (\text{Ek 1.2})$$

Dolayısıyla her A olayı için,

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^n P\{A, B_i\} = \sum_{i=1}^n P\{A | B_i\} P\{B_i\} \quad (\text{Ek 1.3})$$

Yukarıdaki sonucun benzeri rassal değişkenlerde de mevcuttur.

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(x | y) p(y) dy \quad (\text{Ek 1.4})$$

Bu sonuç aşağıdaki verilen birleşik olasılık denklemin bir genellemesidir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = p(x)$$

Olay ve rassal değişken karışımı durumlar için de aşağıdaki koşul geçerlidir.

$$p(x) = \sum_{i=1}^n p(x | B_i) P\{B_i\} \quad (\text{Ek 1.5})$$

ve,

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(A|x)p(x) \quad (\text{Ek 1.6})$$

Olay ve rassal değişken karışımı durumlarda ek olarak, tüm olasılıklarda geçerli olan, ortak bir koşullama özelliği de aşağıda verilmiştir.

$$P\{A|C\} = \sum_{i=1}^n P\{A, B_i|C\} = \sum_{i=1}^n P\{A|B_i, C\}P\{B_i|C\} \quad (\text{Ek 1.7})$$

Ya da,

$$P\{A|y\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(A|x, y)p(x|y) \quad (\text{Ek 1.8})$$

Ek 2 BAYES Kuralı

B_i olayının, A olayı koşulu altında, olasılığı, ters koşullama cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{P\{A\}} \quad (\text{Ek 2.1})$$

Bu kurala Bayes kuralı denilir. B_i olayının koşullu olasılığı, bazı durumlarda “posterior”, koşulsuz olasılığı da “prior” olarak ta geçmektedir. (Ek 1.3)’te yer alan denklemdeki sonucu payda da kullandığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{\sum_{j=1}^n P\{A|B_j\}P\{B_j\}} \quad (\text{Ek 2.2})$$

Burada payda, açık bir şekilde düzgeleme faktörü olarak görölmektedir. Aşağıdaki şartı sağlamaktadır.

$$\sum_{i=1}^n P\{B_i | A\} = 1 \quad (\text{Ek 2.3})$$

Rassal değişkenler için Bayes kuralı ise aşağıdaki gibidir.

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x)p(x)dx} \quad (\text{Ek 2.4})$$

$p(x)$, bu durumda “prior” olasılık dağılım fonksiyonu (PDF), $p(x|y)$ ise “posterior” PDF olarak anılır. Olay/rassal değişken karmaşık haldeki durumda

$$P\{B_i | x\} = \frac{P\{x|B_i\}P\{B_i\}}{\sum_{j=1}^n P\{x|B_j\}P\{B_j\}} \quad (\text{Ek 2.5})$$

Yukarıdaki denklemde de yine payda düzgeleme faktörüdür.

Koşullu rassal değişken veya koşullu olaylar söz konusu ise, Bayes kuralı yalnızca bazılarının yerini değiştirmede kullanılabilir. Örnek olarak aşağıdaki denklemi gösterebiliriz.

$$p(B_i | x, y) = \frac{p(x|B_i, y)P(B_i | y)}{p(x|y)} = \frac{p(x|B_i, y)P(B_i | y)}{\int_{j=1}^n p(x|B_j, y)P(B_j | y)} \quad (\text{Ek 2.6})$$

Ek 3 Koşullu Beklenen Değer ve Kaydırma Özelliği

Koşullu ortalama ve koşullu beklenen değer, rassal değişkenlerin beklenen değer ifadeleriyle benzerdir fakat koşullu olasılık fonksiyonuna göre aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$E[x|y] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y)dx \quad (\text{Ek 3.1})$$

Beklenen değerlerin kaydırma özelliği, koşullu bir beklenen değer ifadesinin beklenen değeri koşulsuz beklenen değere eşittir. Aşağıda bu özelliğin ispatı verilmektedir.

$$\begin{aligned} E[E[x|y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y)dx \right] p(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E[x] \end{aligned} \quad (\text{Ek 3.2})$$

Yukarıdaki denklemde iç kısımdaki beklenen değer, y'nin fonksiyonudur. Dış kısımda yer alan beklenen değer işlemiyle dışarı alınarak ortalaması alınmaktadır. Aynı özellik olay veya rassal değişken koşullamalarında da geçerlidir.

Ek 4 PDA Süzgecinde Değişinti Güncelleme

(4.25) 'te verilen güncellenmiş durumun değişintisi denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} P(k|k) &= E \left\{ [x(k) - \hat{x}(k|k)][x(k) - \hat{x}(k|k)]' | Z^k \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{m_k} E \left\{ [x(k) - \hat{x}(k|k)][x(k) - \hat{x}(k|k)]' | \theta_i(k), Z^k \right\} \beta_i(k) \\ &= P^1 + P^2 + (P^2)' + P^3 \end{aligned} \quad (\text{Ek 4.1})$$

4 üst simgeli ifade, dıştaki çarpımların sonucu olarak ortaya çıkmıştır ve daha sonra hesaplanacaktır. İlk terim

$$\begin{aligned}
P^1 &= \sum_{i=0}^{m_k} E \left\{ x(k) x'(k) \mid \theta_i(k), Z^k \right\} \beta_i(k) \\
&= \sum_{i=0}^{m_k} \left[\hat{x}_i(k|k) \hat{x}'_i(k|k) + P_i(k|k) \right] \beta_i(k)
\end{aligned} \tag{Ek 4.2}$$

Ayrıca,

$$P_i(k|k) = E \left\{ \left[x(k) - \hat{x}(k|k) \right] \left[x(k) - \hat{x}(k|k) \right]' \mid \theta_i(k), Z^k \right\} \tag{Ek 4.3}$$

Koşullu değişintiler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
P_0(k|k) &= P(k|k-1) \\
P_i(k|k) &= P^c(k|k) = \left[1 - W(k) H(k) \right] P(k|k-1) \quad i = 1, \dots, m_k
\end{aligned} \tag{Ek 4.4}$$

Güncellenmiş değişinti denklemi, $i \neq 0$ koşuluyla, (2.30)'da verilmektedir. $i = 0$ koşulunda ise direk öngörülen değişinti güncellenmiş değişintiye eşit olacaktır. (4.20)'deki tanımı kullanacak olursak,

$$\beta_0(k) = 1 - \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) = 1 \tag{Ek 4.5}$$

(Ek 4.4)'ü, (Ek 4.2)'de yerine koyduğumuzda aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$P^1 = \beta_0(k) P(k|k-1) + (1 - \beta_0(k)) P(k|k) \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{x}_i(k|k) \hat{x}'_i(k|k) \tag{Ek 4.6}$$

(Ek 4.1)'deki 2.terim ise,

$$\begin{aligned}
P^2 &= -\hat{x}(k|k) \sum_{i=0}^{m_k} E \left[x'(k) \mid \theta_i(k), Z^k \right] \beta_i(k) \\
&= -\hat{x}(k|k) \hat{x}'(k|k) = (P^2)'
\end{aligned} \tag{Ek 4.7}$$

(Ek 4.1)'deki son terim ise,

$$P^3 = \hat{x}(k|k) \hat{x}'(k|k) \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) = \hat{x}(k|k) \hat{x}'(k|k) = -P^2 \quad (\text{Ek 4.8})$$

(Ek 4.8) ve (Ek 4.6) denklemlerini (Ek 4.1)'de yerine koyduğumuzda aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$P(k|k) = \beta_0(k) P(k|k-1) + [1 - \beta_0(k)] P^c(k|k) + \tilde{P}(k) \quad (\text{Ek 4.9})$$

Ayrıca,

$$\tilde{P}(k) = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{x}(k|k) \hat{x}'_i(k|k) - \hat{x}(k|k) \hat{x}'(k|k) \quad (\text{Ek 4.10})$$

(4.22), (4.25) ve (4.26) kullanılarak, olasılıksal terim aşağıdaki formda yazılabilmektedir.

$$\tilde{P}(k) = W(k) \left[\sum_{i=1}^{m_k} \beta_i(k) v_i(k) v'_i(k) - v(k) v'(k) \right] W'(k) \quad (\text{Ek 4.11})$$

Yukarıdaki geçisin ispatı ise aşağıda yapılmaktadır.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k) &= \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \left[\hat{x}(k|k-1) + W(k) v_i(k) \right] \left[\hat{x}(k|k-1) + W(k) v_i(k) \right]' \\ &\quad - \left[\hat{x}(k|k-1) + W(k) v(k) \right] \left[\hat{x}(k|k-1) + W(k) v(k) \right]' \\ &= \hat{x}(k|k-1) \hat{x}'(k|k-1) \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) + \hat{x}(k|k-1) \left[W(k) v(k) \right]' \\ &\quad + W(k) v(k) \hat{x}'(k|k-1) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) W(k) v_i(k) \left[W(k) v_i(k) \right]' - \hat{x}(k|k-1) \hat{x}'(k|k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{x}(k|k-1)[W(k)v(k)]' - W(k)v(k)\hat{x}'(k|k-1) \\
& -W(k)v(k)[W(k)v(k)]'
\end{aligned} \tag{Ek 4.12}$$

Sadeleştirmelerden sonra (Ek 4.11)'deki ifadeyi ulaşılmış oluruz. $v_0 = 0$, olduğu için yukarıdaki toplama işlemi $i=1$ 'den başlamaktadır. Bu durum (4.27)'nin ispatını tamamlamaktadır. $\tilde{P}$ 'nin yarı-kesin pozitifliği aşağıdaki gibi gösterilmektedir. (zaman indeksleri kolaylık olması açısından kaldırılmıştır.) y , n_z boyutlu rastegel bir vektör olsun.

$$y'\tilde{P}y = \sum_{i=0}^m \beta_i \alpha_i^2 - \left[\sum_{i=0}^m \beta_i \alpha_i \right]^2 \tag{Ek 4.13}$$

Aynı zamanda,

$$\alpha_i = y'\hat{x}_i \tag{Ek 4.14}$$

Schwarz eşitsizliğine göre ($|a'b| \leq \|a\|\|b\|$) aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$\left[\sum_{i=0}^{m_k} \beta_i \alpha_i \right]^2 = \left[\sum_{i=0}^{m_k} (\sqrt{\beta_i})(\sqrt{\beta_i} \alpha_i) \right]^2 \leq \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i \alpha_i^2 = \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i \alpha_i^2 \tag{Ek 4.15}$$

Son terim (4.20)'nin sonucudur. (Ek 4.13) ve (Ek 4.15) eşitsizlikleri, aşağıdaki eşitsizliği ifade etmektedir.

$$y'\tilde{P}y \geq 0 \tag{Ek 4.16}$$

Bu ifade, öne sürülen tezi de ispatlamaktadır.