

T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODİFİYE EDİLMİŞ BİR PİCARD TİPİ İTERATİF
ALGORİTMANIN SINIRLI PERTURBASYON DİRENÇLİLİĞİNİN
İNCELENMESİ VE LİNEER TERS PROBLEMLERE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülşah PAF ŞAHİN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

ADİYAMAN, 2024

ÖZET

MODİFİYE EDİLMİŞ BİR PİCARD TİPİ İTERATİF ALGORİTMANIN SINIRLI PERTURBASYON DİRENÇLİLİĞİNİN İNCELENMESİ VE LİNEER TERS PROBLEMLERE UYGULAMASI

Gülşah PAF ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz/2024, Sayfa:54

Danışman: Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

Son yıllarda, iteratif algoritmaların verimliliğini artırmak amacıyla "üstünleştirme" adı verilen bir yöntem giderek daha fazla ilgi görmektedir. Bu yöntem, iteratif algoritmalarda pertürbasyonlara izin vererek elde edilen perturbasyonlu algoritmanın, orijinal algoritmanın görevini yerine getirip getirmediğini veya daha üstün bir çıktı elde edip etmediğini belirleme prensibine dayanır.

Bu çalışmanın amacı, sabit nokta problemleri, konveks minimizasyon problemleri ve lineer ters problemler arasındaki ilişkiden faydalanarak üstünleştirme yöntemini lineer ters problemlere uygulamaktır. Bu amaçla, daha önceki çalışmalarda konveks minimizasyon problemini çözdüğü ve perturbasyonlara karşı dirençli olduğu gösterilen modifiye edilmiş bir Picard tipi iteratif algoritmadan yararlanılmıştır. Tezde bu iteratif algoritmanın perturbasyonlara karşı dirençli olduğu sonucu detaylı bir şekilde incelenmiştir. Üstünleştirme yöntemini lineer ters problemlere uygulayabilmek için, ilk olarak, konveks minimizasyon problemini çözen bu iteratif algoritmanın doğrusal ters problemlerini de çözdüğü gösterilmiştir. Ardından, bu iteratif algoritmanın perturbasyonlara karşı dirençli olduğu sonucu yardımıyla üstünleştirme yöntemi lineer ters problemlere uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Üstünleştirme metodu; Konveks minimizasyon problemi; Sabit nokta problemi; Lineer ters problem; İteratif algoritmalar.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE BOUNDED PERTURBATION RESILIENCE OF A MODIFIED PICARD TYPE ITERATIVE ALGORITHM AND ITS APPLICATION TO LINEAR INVERSE PROBLEMS

Gülşah PAF ŞAHİN

Department of Mathematics

Adıyaman University, Graduate Education Institute, July/2024, Page:54

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

In recent years, a method called "superiorization" has been gaining increasing attention in order to increase the efficiency of iterative algorithms. This method is based on the principle of allowing perturbations in iterative algorithms to determine whether the perturbed algorithm fulfills the task of the original algorithm or obtains a superior output.

The aim of this study is to apply the superiorization method to linear inverse problems by taking advantage of the relationship between fixed point problems, convex minimization problems and linear inverse problems. For this purpose, a modified Picard type iterative algorithm, which was shown in previous studies to solve the convex minimization problem and to be resilient to perturbations, has been utilized. In this thesis, the result that this iterative algorithm is resilient to perturbations is examined in detail. In order to apply the superiorization method to linear inverse problems, it is first shown that this iterative algorithm, which solves the convex minimization problem, also solves linear inverse problems. Then, using the result that this iterative algorithm is resilient to perturbations, the superiorization method is applied to linear inverse problems.

Keywords: Superiorization method; Convex minimization problem; Fixed point problem; Linear inverse problem; Iterative algorithms.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamı hazırlarken bana yol gösteren danışman hocam Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK'e ve lisansüstü eğitimim boyunca üzerimde emeği olan değerli hocalarıma da bana kattıkları bilgiler için teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, beni sürekli destekleyen, üzerimden sevgi ve şefkati esirgemeyen, tüm zorluklara onun sayesinde göğüs gerdiğim canım annem Zekiye PAF'a teşekkür ederim.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....

(İmza)

(Gülşah PAF ŞAHİN)

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	2
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
4. MATERYAL VE YÖNTEM	19
4.1. Konveks Minimizasyon Problemi ve Sabit Nokta Problemi ile İlişkisi	19
4.1.1. Gradient projeksiyon algoritması ve yakınsaklığı	22
4.1.1.1. GPA'nın güçlü yakınsaklığı.....	23
4.1.1.2. GPA'nın zayıf yakınsaklığı.....	24
4.2. SM ve İteratif Algoritmaların Pertürbasyon Dirençliliği	25
5. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	27
5.1. (2.3) ile Verilen GPA'nın Perturbasyon Dirençliliği	27
5.2. Lineer Ters Problemler ve Konveks Minimizasyon Problemi ile İlişkisi.....	45
5.3. Üstünleştirme Metodunun Lineer Ters Problemlere Uygulanması.....	48
6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	50
KAYNAKÇA.....	51
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A°	: A kümesinin içi
$\bar{A}$	: A kümesinin kapanışı
A'	: A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
$B(u_0, \varepsilon)$	: u_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(u_0, \varepsilon)$	: u_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar
F_T	: T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
l_p	: $l_p = \{(u_i) = (u_0, u_1, u_2, \dots) : u_i \in \mathcal{F} \text{ ve } \sum_{i=0}^{\infty} u_i ^p < \infty, p \geq 1\}$
l_∞	: $l_\infty = \{u = (u_0, u_1, u_2, \dots) : u_n \in \mathcal{F} \text{ ve } u \text{ sınırlıdır}\}$
P_C	: Metrik izdüşüm operatörü
S	: $\min_{u \in C} f(u)$ probleminin tüm çözümlerinin kümesi
(M, d)	: Metrik uzay
$(N, \ \cdot\)$	: Normlu uzay
$\mathcal{F}$	: Cisim
$(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	: İç çarpım uzayı
H	: Hilbert Uzayı
$u_n \rightarrow u$	: u_n dizisi u 'ya kuvvetli yakınsar
$u_n \rightharpoonup u$	: u_n dizisi u 'ya zayıf yakınsar
$w_w(u_n)$	: $w_w(u_n) := \{u : \exists u_{n_j} \rightharpoonup u\}$
∇f	: f fonksiyonunun gradienti
∂A	: A kümesinin sınırı
GPA	: Gradient Projeksiyon Algoritması
inf	: En Büyük Alt Sınır
PSG	: Projected Scaled Gradient
sup	: En Küçük Üst Sınır
SM	: Üstünleştirme Metodu

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaşılan pek çok problem matematiksel olarak ifade edilebilir. Ancak, gerçek dünyadaki verilerin karmaşıklığı, bu problemlerin analitik olarak çözülmesini zorlaştırır. Analitik çözümler, bazı basit durumlar için uygun olsa da gerçek dünya problemlerinin çoğu için kullanılamazlar. Verilerin belirsizliği, modellerin karmaşıklığı ve problem alanlarının genişliği, analitik çözümleri imkânsız hale getirebilir. İşte bu noktada iteratif algoritmalar devreye girer ve problemlerin çözümünde önemli bir rol oynarlar.

İteratif algoritmalar, matematiksel problemleri çözmek için tekrarlayan adımların kullanıldığı hesaplama yöntemleridir. Bu adımlar, bir başlangıç değerinden başlayarak, belirli bir kurala veya güncelleme prosedürüne göre ardışık değerlerin hesaplanmasını içerir ve problemin çözümüne yakınsayan bir dizi üretmek için tekrarlanır.

Günlük yaşamın karmaşıklığına matematiksel bir bakış açısıyla yaklaşıldığında, iteratif algoritmaların önemi açıkça ortaya çıkar. Bu algoritmalar, pratikteki gerçek problemlerin çözümünde güçlü bir araç oluştururlar ve matematiksel modellemelerin pratik uygulamalarını mümkün kılarlar.

İteratif algoritmalar, sabit nokta problemleri, optimizasyon problemleri, doğrusal denklem sistemleri, simülasyonlar, veri analizi, yapay zekâ gibi birçok alanda kullanılır. Özellikle büyük veri setlerinin işlenmesi veya karmaşık sistemlerin modellemesi gibi durumlarda, iteratif algoritmaların esnekliği ve etkinliği büyük önem taşır.

Son zamanlarda, iteratif algoritmaların etkinliğini artırmak için “üstünleştirme (superiorization)” metodu adında yenilikçi bir yaklaşım, önemli bir rol oynamaktadır. Bu yöntem, iteratif algoritmalarda bozulmalara müsaade ederek pertürbasyonlara karşı dirençli olup olmadığını ve pertürbasyonlu algoritmanın bozulmamış orijinal algoritmanın işlevini yerine getirip getirmediğini veya daha üstün bir çıktı elde edip edemediğini araştırır.

Bu bağlamda, bu tezde, iteratif algoritmaların çözüme yaklaşımda sıkça kullanıldığı sabit nokta, konveks minimizasyon ve lineer ters problemleri ele alınacak ve bu üç problem arasındaki ilişki verilecektir. Ertürk [1]’ün elde ettiği, modifiye edilmiş bir Picard tipi algoritmanın pertürbasyonlara karşı dirençli olduğu sonucu incelenecek ve bu sonuç yardımıyla üstünleştirme metodu lineer ters problemlere uygulanacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bir reel Hilbert uzayı H 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı konveks f fonksiyonunun H 'nin kapalı ve konveks C alt kümesindeki minimumlarının bulunması problemi konveks minimizasyon problemi olarak adlandırılır.

Konveks minimizasyon problemi ile sabit nokta problemi arasında yakın bir ilişki vardır. Bu yakın ilişki, sabit nokta problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerin, konveks minimizasyon probleminin çözümünde etkili ve güçlü bir araç olarak kullanılmasına olanak sağlar. Sabit nokta teorisi literatüründe, dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşmak amacıyla kullanılan birçok etkili iteratif algoritma vardır. Picard [2], Krasnoselskij [3], Mann [4], Ishikawa [5], Noor [6], Normal-S [7], Picard-S [8-9], algoritmaları en sık kullanılan iteratif algoritmalar arasındadır. Sabit nokta teoride kullanılan iteratif algoritmaların konveks minimizasyon problemlerini çözmede kullanıldığı birçok çalışma vardır [10-16]. Bunun yanı sıra, konveks minimizasyon problemin çözümünde sabit nokta teoremleri kullanılabilir.

Gradient projeksiyon algoritması (GPA) konveks minimizasyon problemini çözmek için güçlü bir araçtır. GPA, ρ, ρ_n pozitif reel sayılar, $\nabla f, f$ 'nin Fréchet türevi ve P_C, H 'den C üzerine metrik projeksiyon olmak üzere

$$u_{n+1} = P_C(I - \rho \nabla f)u_n, u_0 \in H$$

veya daha genel olarak

$$u_{n+1} = P_C(I - \rho_n \nabla f)u_n, u_0 \in H$$

şeklinde tanımlanır. GPA'nın yakınsaklığı ∇f 'nin özellikleri ile yakından ilişkilidir. Eğer, $\nabla f, L$ -Lipschitzian ve μ -strongly monoton dönüşüm ise ve $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2\mu}{L^2}$ şartını sağlarsa GPA, konveks minimizasyon probleminin bir tek çözümüne güçlü yakınsaktır [17].

Eğer ∇f , sadece L -Lipschitzian bir dönüşüm ise GPA güçlü yakınsak olmayabilir. Levitin and Polyak [18], f bir L -Lipschitzian dönüşüm ise GPA'nın $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$ için konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğunu gösterdiler.

Xu [19], 2011’de Levitin ve Polyak’ın bu sonucunu ortalama dönüşümler adında yeni bir yaklaşım kullanarak yeniden elde etti. Aynı çalışmada GPA’nın güçlü yakınsaklığını inceledi. Sabit nokta teorisinde, zayıf yakınsak olan bir iteratif algoritmanın güçlü yakınsak olmasını sağlamak için çalışılan dönüşüme veya uzaya ek koşullar getirmek bilindik bir yöntem olmasına karşın, Xu [19], GPA’nın konveks minimizasyon probleminin çözümüne güçlü yakınsamasını yeni bir bakış açısı ile inceledi. ∇f 'ye yeni koşullar eklemek yerine, F bir daraltan dönüşümü olmak üzere GPA’yı F daraltan dönüşümü ile

$$u_{n+1} = \xi_n F u_n + (1 - \xi_n) P_C(I - \rho_n \nabla f) u_n \quad (2.1)$$

şeklinde modifiye ederek $\xi_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_{n+1} - \xi_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_{n+1} - \rho_n| < \infty$ şartları altında konveks minimizasyon probleminin bir tek çözümüne güçlü bir şekilde yakınsadığını gösterdi.

2020 yılında Ertürk ve arkadaşları [10], genişlemeyen bir dönüşüm olan T için Picard-S iteratif algoritmasının T 'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsadığını gösterdi. Aynı çalışmada $0 < a \leq a_n, b_n \leq b < 1$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$ olmak üzere Picard-S iteratif algoritmasında T yerine $P_C(I - \rho_n \nabla f)$ koyarak elde ettikleri

$$\begin{cases} u_{n+1} = P_C(I - \rho_n \nabla f) v_n \\ v_n = (1 - a_n) P_C(I - \rho_n \nabla f) u_n + a_n P_C(I - \rho_n \nabla f) z_n \\ z_n = (1 - b_n) u_n + b_n P_C(I - \rho_n \nabla f) u_n \end{cases} \quad (2.2)$$

ile verilen gradient projeksiyon algoritmasının konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığı sonucunu elde ettiler.

Daha sonra Ertürk ve ark. [11], Xu [19]’nun GPA’ya uygulamış olduğu modifiye etme yöntemini kullanarak genişlemeyen T dönüşümü için Picard-S iteratif algoritmasının güçlü yakınsamasını inceledi. Sonuçlarının bir uygulaması olarak, $0 < a \leq a_n, b_n \leq b < 1$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_{n+1} - \xi_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < \infty$ olmak üzere Picard-S iteratif algoritmasında T yerine $P_C(I - \rho_n \nabla f)$ koyarak elde ettikleri ettikleri

$$\begin{cases} u_{n+1} = \xi_n F u_n + (1 - \xi_n) P_C(I - \rho_n \nabla f) v_n \\ v_n = (1 - a_n) P_C(I - \rho_n \nabla f) u_n + a_n P_C(I - \rho_n \nabla f) z_n \\ z_n = (1 - b_n) u_n + b_n P_C(I - \rho_n \nabla f) u_n, \end{cases} \quad (2.3)$$

ile verilen gradient projeksiyon algoritmasının konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne güçlü yakınsadığını gösterdiler.

Son zamanlarda, Davidi, Herman ve Censor'un [20] ve [21] 'de tanıttıkları yeni bir teknik olan üstünleştirme metodu (SM), iteratif yöntemlerin etkinliğini artırmak için kullanılmıştır. Bu yöntem, iteratif algoritmaların performansını artırmak amacıyla, algoritmalara pertürbasyonlar ekleyerek dirençliliğini inceleme prensibine dayanmaktadır. SM, bozulmuş bir algoritmanın, orijinal algoritmanın işlevlerini daha az hesaplama ile yerine getirmesini sağlayarak çalışır. Bu şekilde, algoritmaların hesaplama maliyetini düşürmek ve verimliliği artırmak amaçlanmaktadır.

Yaygın olarak uygulanabilir ve çeşitli pratik durumlarda başarılı bir şekilde kullanılan SM ilkesi, projeksiyonlardan görüntü yeniden yapılandırması [21-23], ve yoğunluk ayarlı radyasyon terapisi [24] gibi uygulama alanlarında önemli bir kullanım alanı bulmuştur. Ayrıca, farklı alanlarda daha ileri uygulamalar ve testler için büyük bir potansiyel barındırmaktadır.

SM'yi kullanarak, Jin ve ark. [25], sonlu boyutlu $\mathbb{R}^l$ 'deki konveks minimizasyon problemleri için “projected scaled gradient (PSG)” iteratif algoritmasının sınırlı pertürbasyonlara dirençli olduğunu gösterdi. 2017 yılında, Xu [26], ortalamalı dönüşümler yaklaşımını kullanarak, sonsuz boyutlu Hilbert uzayında PSG iteratif algoritmasının üstünleştirilmiş versiyonunun zayıf yakınsaklığını çalıştı ve PSG iteratif algoritmasının GPA'nın genelleştirmesi olduğunu kullanarak elde ettiği sonucu GPA'ya uyguladı. 2023 yılında Ertürk ve Salkım [27], (2.2)'nin sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençli olduğunu gösterdi.

Ertürk [1], modifiye edilmiş bir Picard tipi iteratif algoritma olan (2.3)'ü temel algoritma olarak ele aldı ve (2.3)'ün üstünleştirilmiş versiyonunun, (2.3)'e benzer şekilde $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsadığını yani (2.3)'ün sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençli olduğunu gösterdi.

Bu tezde, iteratif algoritmaların çözüme yaklaşımda sıkça kullanıldığı sabit nokta problemleri, konveks minimizasyon problemleri ve lineer ters problemler arasındaki ilişki verilecek ve bu ilişkiden yararlanılarak (2.3) ile verilen iteratif algoritma aracılığıyla üstünleştirme yöntemi lineer ters problemlere uygulanacaktır. Bu sebeple, bulgular ve

tartışma bölümünde ilk olarak, [1]'de elde edilen, (2.3)'ün sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençli olduğu sonucu incelenecektir. Konveks minimizasyon problemi ve lineer ters problemler arasındaki ilişkiden yararlanarak (2.3) ile verilen iteratif algoritmanın lineer ters problemlerini de çözdüğü gösterilecek ve (2.3)'ün perturbasyonlara karşı dirençli olduğu sonucu yardımıyla üstünleştirme yöntemi lineer ters problemlere uygulanacaktır.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu kısmında, konuyu daha anlaşılır kılmak için tezde kullanılan kavramlar kısaca verilecektir.

Tanım 3.1. M boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $M \times M$ kümesi üzerinde tanımlı d fonksiyonu her $u, v, z \in M$ için aşağıdaki şartları sağlarsa M üzerinde bir metrik olarak adlandırılır ve (M, d) 'ye bir metrik uzay denir [28].

- i) d , sonludur ve negatif olmayan reel değerlidir.
- ii) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
- iii) $d(u, v) = d(v, u)$,
- iv) $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$.

Tanım 3.2. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, (M, d) metrik uzayında bir dizisi olsun. Verilen keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > N$ için

$$d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine M metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir [29].

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) = 0$ sağlanacak şekilde bir $u \in M$ mevcutsa, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, u 'ya yakınsaktır denir ve u elemanına $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti adı verilir. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, u 'ya yakınsaklığı $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ veya $u_n \rightarrow u, n \rightarrow \infty$ şeklinde gösterilir [28].

Tanım 3.3. Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise o metrik uzay tamdır denir [29].

Tanım 3.4. (M, d) bir metrik uzay, $u_0 \in M$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$B(u_0, \varepsilon) = \{u \in M : d(u, u_0) < \varepsilon\}$$

kümesine u_0 merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar denir [28].

$$\bar{B}(u_0, \varepsilon) = \{u \in M : d(u, u_0) \leq \varepsilon\}$$

kümesine u_0 merkezli ve ε yarıçaplı kapalı yuvar denir [28].

Aşağıdaki tanımlarda A , (M, d) metrik uzayının bir alt kümesi olarak alınmıştır.

Tanım 3.5. $B(u_0, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ bulunabiliyorsa u_0 , A 'nın bir iç noktası olarak adlandırılır. A kümesinin bütün iç noktalarınının oluşturduğu küme A 'nın içi olarak adlandırılır ve A° ile gösterilir [29].

Eğer $A = A^\circ$ ise A açık küme olarak adlandırılır [28].

Tanım 3.6. Bir $u_0 \in M$ için $B(u_0, \varepsilon)$, u_0 'dan farklı en az bir $v \in A$ bulunduruyorsa, u_0 'a A 'nın bir yığılma noktası denir. A 'nin tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir [29].

Tanım 3.7. M / A açık ise A 'ya kapalı küme denir [29].

Tanım 3.8. $A \cup A'$ 'ya A 'nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir [30].

Tanım 3.9. $\bar{A} \setminus A^\circ$ 'ya A 'nın sınırı denir ve ∂A ile gösterilir [30].

Tanım 3.10. $M_1 = (M_1, d_1)$ ve $M_2 = (M_2, d_2)$ metrik uzaylar olmak üzere $T: M_1 \rightarrow M_2$ dönüşümü verilsin. Eğer, her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d_1(u, u_0) < \delta$ şartını sağlayan bütün u 'lar için $d_2(Tu, Tu_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T 'ye $u_0 \in M_1$ noktasında süreklidir denir. Eğer T , M_1 'in bütün noktalarında sürekli ise T 'nin M_1 üzerinde sürekli olduğu söylenir [28].

Tanım 3.11. $L \neq \emptyset$ ve $\mathcal{F}$ bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: \mathcal{F} \times L \rightarrow L$ cebirsel dönüşümleri için aşağıdaki şartlar sağlanırsa L 'ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay), L 'nin her bir elemanına da vektör denir.

A. $(L, +)$, bir değişmeli gruptur. Bundan dolayı, $\forall u, v, z \in L$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

G₁. $u + v \in L$ 'dir,

G₂. $u + (v + z) = (u + v) + z$ 'dir,

G₃. $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

G₄. $u + (-u) = (-u) + u = \theta$ olacak şekilde $-u \in L$ vardır,

G₅. $u + v = v + u$ 'dur.

B. $\forall u, v \in L$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ için aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

L₁. $\alpha \cdot u \in L$ 'dir,

L₂. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ 'dur,

L₃. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ 'dur,

L₄. $(\alpha.\beta).u = \alpha.(\beta.u)$ 'dur,

L₅. $1_{\mathcal{F}}.u = u$ 'dur. ($1_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ cisminin birim elemanıdır.)

Tanımdaki $\mathcal{F}$ kümesi, L vektör uzayının skaler cismi olarak adlandırılır. $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ olması durumunda, L 'ye reel vektör uzayı, $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ olması durumunda ise L 'ye kompleks vektör uzayı denir [28].

Örnek 3.12. $\mathcal{F}$ bir cisim ve $L = \{a = (a_1, a_2, \dots, a_i), a_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots, i\}$ olsun.

$u, v \in L$ ve $\alpha \in \mathcal{F}$ olmak üzere, lineer işlemler

$$u + v = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_i) + (b_1, b_2, b_3, \dots, b_i)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_i + b_i)$$

ve

$$\alpha.u = \alpha.(a_1, a_2, a_3, \dots, a_i) = (\alpha.a_1, \alpha.a_2, \dots, \alpha.a_i)$$

olarak tanımlanırsa $L = \mathcal{F}^i$ 'nin $\mathcal{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğu görülür [31].

Tanım 3.13. L bir vektör uzayı ve A , L 'nin bir alt kümesi olmak üzere her $u, v \in A$ için

$$\{z \in L : z = tu + (1 - t)v, 0 \leq t \leq 1\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir [28].

Tanım 3.14. L vektör uzayının bir A alt kümesinden $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı f dönüşümü verilsin. $\forall u, v \in L$ ve $0 \leq t \leq 1$ için $f(tu + (1 - t)v) \leq tf(u) + (1 - t)f(v)$ ise f 'ye konveks dönüşüm denir [28].

Tanım 3.15. N , bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot\| : N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki dört özellik sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonu N üzerinde bir norm ve $(N, \|\cdot\|)$ ikilisi normlu uzay olarak adlandırılır [32].

$\forall u, v \in N$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{F}$ için

- i) $\|u\| \geq 0$,
- ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- iii) $\|\alpha u\| = |\alpha|. \|u\|$,
- iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Üçgen eşitsizliği).

N üzerinde tanımlanan norm fonksiyonu yardımıyla, N üzerinde her $u, v \in L$ için

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

olarak tanımlanan bir d metriği tanımlanır. Bu metrik, norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Bu sebeple, bir normlu uzay aynı zamanda metrik uzaydır [29].

Tanım 3.16. Norm ile üretilen metriğe göre tam olan N normlu uzayı, Banach uzayı olarak adlandırılır [28].

Tanım 3.17. L , bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere $\langle , \rangle : L \times L \rightarrow \mathcal{F}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa iç çarpım fonksiyonu olarak adlandırılır ve $(L, \langle , \rangle)$ çiftine de iç çarpım uzayı denir.

$\forall u, v, z \in L$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{F}$ için

- i) $\langle u + v, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle v, z \rangle$ 'dir,
- ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ 'dir,
- iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ 'dir,
- iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$ 'dir. Ayrıca, $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$.

İç çarpım fonksiyonu aracılığıyla L üzerinde

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

ile bir norm fonksiyonu ve

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

ile bir metrik fonksiyonu tanımlanır. Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımla tanımlanan metriğe göre tam ise Hilbert uzayı olarak adlandırılır. Bundan dolayı, her iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır. Hilbert uzayları da birer Banach uzayıdır [28].

Örnek 3.18. $u = (u_1, u_2, \dots, u_i)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_i) \in \mathbb{R}^i$ olmak üzere $\langle , \rangle : \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_i \cdot v_i$$

olarak tanımlanırsa

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_i^2}$$

şeklindedir. Böylece

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_i - v_i)^2}$$

Öklid metriği elde edilir. $\mathbb{R}^i$, Öklid metriğine göre tam olduğundan $\mathbb{R}^i$ bir Hilbert uzayı olur [33].

Lemma 3.19. L bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\forall u, v \in L$ için

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 3.20. L bir iç çarpım uzayı olsun. $\forall u, v \in L$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$\|tu + (1 - t)v\|^2 = t\|u\|^2 + (1 - t)\|v\|^2 - t(1 - t)\|u - v\|^2$$

eşitliği geçerlidir [34].

Tanım 3.21. L bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\forall u, v \in L$ için

- i) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$ (Schwarz Eşitsizliği)
- ii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

eşitsizlikleri sağlanır [33].

Lemma 3.22. H Hilbert uzayının keyfi u, v elamanları için

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\langle v, u + v \rangle$$

eşitsizliği gerçekleşir [35].

Tanım 3.23. L_1 ve L_2 iki vektör uzayı olsun. $T: L_1 \rightarrow L_2$ dönüşümü bir operatör olarak adlandırılır [28].

Tanım 3.24. L_1 ve L_2 aynı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun, $T: L_1 \rightarrow L_2$ operatörü, $\forall u, v \in L_1$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{F}$ için

$$T(u + v) = Tu + Tv \quad \text{ve} \quad T(\alpha u) = \alpha Tu$$

ise T 'ye lineer operatör denir [33].

Tanım 3.25. N_1 ve N_2 normlu uzaylar ve $T: N_1 \rightarrow N_2$ bir lineer operatör olmak üzere $\forall u \in N_1$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\|$$

sağlanacak şekilde bir $k \geq 0$ reel sayısı bulunabilirse T 'ye sınırlı operatör denir [33].

Örnek 3.26. $p \geq 1$ için $l_p = \{u = (u_0, u_1, u_2, \dots): u_n \in \mathcal{F} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < \infty\}$ olmak üzere l_p

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{\langle u, u \rangle} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p}$$

ile bir normlu uzaydır. $l_{\infty} = \{u = (u_0, u_1, u_2, \dots): u_n \in \mathcal{F} \text{ ve } u \text{ sınırlıdır}\}$ kümesi ise

$$\|u\|_{\infty} = \sup_n \{|u_n|\}$$

ile bir normlu uzaydır. $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$ olsun. $T_a: l_{\infty} \rightarrow l^p$, $T_a(u) = au$ ile tanımlansın. Burada her n için $(au)_n = a_n u_n$ 'dir. $u, v \in l_{\infty}$ ve α, β keyfi skalerler olmak üzere

$$\begin{aligned} T_a(\alpha u + \beta v) &= \alpha(\alpha u + \beta v) = \alpha a_n u_n + \beta a_n v_n \\ &= \alpha T_a(u) + \beta T_a(v) \end{aligned}$$

olduğundan T_a lineerdir. Şimdi T_a operatörünün sınırlılığını gösterelim. Her $u \in l_{\infty}$ için $u = \{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlıdır, bu sebeple her n için $|u_n| \leq \sup_n \{|u_n|\} = \|u\|_{\infty}$ 'dur.

$$\begin{aligned} \|T_a(u)\|_p &= \|\alpha u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{\infty} \|a\|_p \end{aligned}$$

olduğundan T_a sınırlıdır [31].

Tanım 3.27. H_1 ve H_2 Hilbert uzayı ve $T: H_1 \rightarrow H_2$ bir sınırlı lineer operatör olsun. $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ dönüşümü için

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle, \forall u \in H_1, \forall v \in H_2$$

eşitliği sağlanırsa T^* , T 'nin eşleniği olarak adlandırılır [28].

Tanım 3.28. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, N normlu uzayının bir dizisi olmak üzere sınırlı ve sürekli olan her g dönüşümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = g(u)$$

olacak şekilde bir $u \in N$ varsa, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, u 'ya zayıf yakınsar denir ve $u_n \rightharpoonup u$, $n \rightarrow \infty$ gösterimi kullanılır. u , $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin zayıf limiti olarak adlandırılır [28].

Normlu uzaylarda, $u_n \rightarrow u$ olması aynı zamanda $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin u 'ya güçlü yakınsaklığı anlamındadır.

Tanım 3.29. Bir H Hilbert uzayında $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi verilsin. $u \in H$ olmak üzere her $v \in H$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

ise $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi u 'ya zayıf yakınsaktır denir [28].

Örnek 3.30. $L^2[0, 2\pi] = \{f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^{2\pi} f^2(u) du < \infty\}$ üzerinde,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(u)g(u) du$$

iç çarpımı tanımlansın. $L^2[0, 2\pi]$,

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_0^{2\pi} (f(u) - g(u))^2 du \right)^{1/2}$$

metriğine göre tam olduğundan bir Hilbert uzayıdır.

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon dizisi her n için $f_n(u) = \sin(nu)$ ile tanımlansın. Herhangi bir $g \in L^2[0, 2\pi]$ fonksiyonu için $\int_0^{2\pi} \sin(nu) g(u) du$ dizisi 0'a yakınsadığından, $f_n(u) = \sin(nu)$ dizisi 0'a zayıf yakınsar. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle 0, g \rangle = 0$ 'dır [36].

Uyarı 3.31.

- i) Bir dizinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklığı sonlu boyutlu normlu uzaylarda birbirine denktir,
- ii) Kuvvetli yakınsayan bir dizi aynı zamanda zayıf yakınsaktır [33].

Lemma 3.32. C , reel Hilbert uzayı H 'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, H 'de bir dizi ve $w_w(u_n) = \{u: \exists u_{n_j} \rightarrow u\}$, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin zayıf yakınsayan alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. Eğer,

- i) $\forall u \in C$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|$ mevcuttur,
- ii) $w_w(u_n) \subset C$ 'dir,

şartları sağlanırsa $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi, C 'deki bir noktaya zayıf yakınsaktır [37].

Tanım 3.33. $M \neq \emptyset$ ve $T: M \rightarrow M$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer, $Tu = u$ olacak şekilde bir $u \in M$ varsa u 'ya T 'nin sabit noktası denir [38].

Bu tezde, T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T ile gösterilecektir.

Örnek 3.34. $M = \mathbb{R}$ ve $T: M \rightarrow M$ dönüşümü $Tu = u^2 + 5u + 4$ şeklinde tanımlansın. $Tu = u^2 + 5u + 4 = u$ ise $u^2 + 4u + 4 = 0$ olur. Buradan $(u + 2)^2 = 0$ olduğundan $u = -2$ 'dir. Dolayısıyla $F_T = \{-2\}$ 'dir.

Örnek 3.35. $M = \mathbb{R}$ ve $T: M \rightarrow M$, $Tu = u + 5$ şeklinde tanımlanan dönüşüm olsun. $u + 5 = u$ eşitliğini sağlayan hiçbir reel sayı olmadığından $F_T = \emptyset$ 'dir.

Tanım 3.36. (M, d) bir metrik uzay ve $T: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olmak üzere her $u, v \in M$ için

$$d(Tu, Tv) \leq Ld(u, v)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $L \geq 0$ sayısı bulunabilirse T , L –Lipschitzian dönüşüm olarak adlandırılır [39].

T bir L –Lipschitzian dönüşüm olsun. $L \in [0, 1)$ ise T 'ye daraltan (contraction) dönüşüm, $L = 1$ ise T 'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [39].

Bir Lipschitzian dönüşüm aynı zamanda süreklidir. Bu sebeple, sürekli olmayan bir dönüşümün Lipschitzian olamaz.

Örnek 3.37. $\mathbb{R}$ üzerinde $d(u, v) = |u - v|$ ile tanımlanan alışılmış mutlak değer metriği olsun. $T: [\frac{1}{2}, 2] \rightarrow [\frac{1}{2}, 2]$ dönüşümü $Tu = \frac{1}{u}$ ile tanımlansın. T dönüşümü bir Lipschitzian dönüşümdür. Çünkü,

$$u, v \in [\frac{1}{2}, 2] \Rightarrow \frac{1}{u}, \frac{1}{v} \in [\frac{1}{2}, 2] \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u \cdot v} \leq 4$$

olduğundan

$$|T u - T v| = \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right| \leq \left| \frac{u - v}{u \cdot v} \right| \leq 4 |u - v|$$

elde edilir. T , 4-Lipschitzian olur.

Örnek 3.38. $\mathbb{R}$ üzerinde $d(u, v) = |u - v|$ ile tanımlanan alışımlı mutlak değer metriği olsun.

$$T: [0, 3] \rightarrow [0, 3], T u = \begin{cases} 0, & u \in [0, 2] \\ 1, & u \in (2, 3] \end{cases}$$

olsun. T dönüşümü $u = 2$ 'de süreksizdir. Bu nedenle T bir Lipschitzian dönüşüm değildir.

Uyarı 3.39. Bir L – daraltan T dönüşümü için $d(Tu, Tv) \leq Ld(u, v) \leq d(u, v)$ eşitsizliği sağlandığından daraltan olan dönüşüm aynı zamanda genişlemeyen dönüşümdür [40].

Lemma 3.40. H Hilbert uzayının kapalı ve konveks alt kümesi C olsun. $T: C \rightarrow C$ genişlemeyen bir dönüşüm ise F_T kapalı ve konvekstir [40].

Lemma 3.41. C , H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: C \rightarrow C$, $F_T \neq \emptyset$ özelliğinin sağlayan genişlemeyen bir dönüşüm olsun. C 'de $u_n \rightarrow u$ ve $(I - T)u_n \rightarrow v$ ise $(I - T)u = v$ 'dir. Özellikle $v = 0$ ise $u \in F_T$ olur [37]. Bu lemma, yarı kapalılık (demiclosedness) prensibi olarak bilinir.

Tanım 3.42. (M, d) bir metrik uzay ve $T: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Bir G fonksiyonu için

$$\begin{cases} u_0 \in M \\ u_{n+1} = G(T, u_n); \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ile tanımlanan dizi bir iteratif algoritma olarak adlandırılır [39].

Sabit nokta teorisi literatüründe en çok çalışılan iteratif algoritmalarından bazıları aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.43. $A, (M, d)$ metrik uzayının bir alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olmak üzere $u_0 \in A$ için Picard iteratif algoritması,

$$u_n = Tu_{n-1} = T^n u_0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

ile tanımlanır [2].

Aşağıdaki teoremden, sabit nokta bulma yöntemlerinin temelini oluşturan ve geniş bir uygulama alanı sayesinde matematiksel problemlerin çözümünde vazgeçilmez bir araç olan Banach Daraltan Dönüşüm Teoremi verilecektir.

Teorem 3.44. (M, d) bir tam metrik uzay ve $T: M \rightarrow M$ bir daraltan dönüşüm ise T 'nin M 'de bir tek sabit noktası vardır ve M 'nin herhangi bir elemanı ile üretilen Picard iteratif algoritması bu sabit noktaya yakınsar [41].

Örnek 3.45. $M = [0, 1]$ ve $T: M \rightarrow M$ dönüşümü $Tu = \frac{1}{5}u^2$ şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= |Tu - Tv| = \left| \frac{u^2}{5} - \frac{v^2}{5} \right| \\ &= \frac{1}{5} |u - v| \cdot |u + v| \leq \frac{2}{5} |u - v| = \frac{2}{5} d(u, v) \end{aligned}$$

olduğundan $T, \frac{2}{5}$ -daraltan dönüşüm olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} Tu = \frac{u^2}{5} = u &\Rightarrow \frac{u^2}{5} - u = 0 \Rightarrow u \left(\frac{u}{5} - 1 \right) = 0 \\ &\Rightarrow u = 0 \text{ veya } u = 5 \end{aligned}$$

elde edilir. $5 \notin [0, 1]$ olduğundan, T 'nin sabit noktası 0'dır.

Şimdi, $[0, 1]$ 'de keyfi iki başlangıç noktası olarak elde edeceğimiz Picard iteratif algoritmasının 0'a yakınsadığını kolaylıkla görebiliriz.

$u_0 = 1$ ve $u_0 = \frac{1}{2}$ başlangıç noktaları için Picard iteratif algoritmalarını üretelim. Bu durumda $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{5^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2 \cdot 10^{2n+1}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri elde edilir ve her iki dizi de sabit nokta olan 0'a yakınsar.

Picard iteratif algoritması genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamayabilir:

Örnek 3.46. $M = [0, 1]$ olmak üzere, $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1], T(u) = 1 - u$ olsun.

$$d(Tu, Tv) = |1 - u + v - 1| = |u - v| = d(u, v)$$

olduğundan T genişlemeyen bir dönüşüm ve

$$T(u) = 1 - u = u \Rightarrow u = \frac{1}{2} \text{ ve } F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}, \text{ dir.}$$

Herhangi bir $u_0 \neq \frac{1}{2}$ noktası için

$$u_1 = Tu_0 = 1 - u_0,$$

$$u_2 = Tu_1 = T^2u_0 = u_0,$$

$$u_3 = Tu_2 = T^2u_1 = T^3u_0 = 1 - u_0,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

şeklinde devam ettiğinden Picard iteratif algoritması, $(u_0, 1 - u_0, u_0, 1 - u_0, \dots)$ dizisi olur. Bu dizi $u_0 \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak değildir. Dolayısıyla, Picard iteratif algoritması dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz [39]. Bu sebeple, dönüşümün sabit noktasına yakınsayan başka iteratif algoritmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Picard iteratif algoritmasının genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamayabileceği gerçeğini dikkate alan Krasnoselskij, aşağıdaki iteratif algoritmayı önermiştir [3].

Tanım 3.47. $(N, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve A , N 'nin boştan farklı bir konveks alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in A$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$u_{n+1} = (1 - \lambda)u_n + \lambda Tu_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan dizi Krasnoselskij iteratif algoritması olarak tanımlanır [3]. Bu iteratif algoritmada $\lambda = 1$ seçilirse Picard iteratif algoritması elde edilir.

Örnek 3.48. $M = [0,1]$ olmak üzere, $\forall u \in [0,1]$ için $T: M \rightarrow M$, $T(u) = 1 - u$ olarak tanımlansın. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, dir. Keyfi bir $u_0 = a \neq \frac{1}{2}$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ noktası için

$$\begin{aligned}
u_0 &= a, \\
u_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)u_0 + \frac{1}{2}Tu_0 = \frac{1}{2}, \\
u_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)u_1 + \frac{1}{2}Tu_1 = \frac{1}{2}, \\
u_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)u_2 + \frac{1}{2}Tu_2 = \frac{1}{2}, \\
&\vdots \\
u_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)u_{n-1} + \frac{1}{2}Tu_{n-1} = \frac{1}{2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olacağından Krasnoselskij iteratif algoritması $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$ dizisi olur ve bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için T 'nin sabit noktası olan $\frac{1}{2}$ 'ye yakınsar [39].

Tanım 3.49. $(N, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve A , N 'nin boştan farklı bir konveks alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in A$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ 'de bir dizi olmak üzere,

$$u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tu_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan dizi Mann iteratif algoritması olarak adlandırılır [4].

Mann iteratif algoritmasında, $\alpha_n = \lambda$ seçilirse, Krasnoselskij iteratif algoritması elde edilir.

Tanım 3.50. $(N, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve A , N 'nin boştan farklı bir konveks alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in A$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ 'de diziler olmak üzere

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tv_n, \\ v_n = (1 - \zeta_n)u_n + \zeta_n Tu_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanan dizi Ishikawa iteratif algoritması olarak tanımlanır [5].

Ishikawa iteratif algoritmasında $\zeta_n = 0$ alınırsa, Mann iteratif algoritması elde edilir.

Tanım 3.51. $(N, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve A , N 'nin boştan farklı bir konveks alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in A$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ 'de diziler olmak üzere

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n, \\ v_n = (1 - \zeta_n)u_n + \zeta_n T z_n, \\ z_n = (1 - \theta_n)u_n + \theta_n T u_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanana dizi Noor iteratif algoritması olarak adlandırılır [6].

Noor iteratif algoritmasında, her n için $\theta_n = \zeta_n = 0$ ve $\alpha_n = 1$ alınırsa Picard iteratif algoritması, $\theta_n = \zeta_n = 0$ alınırsa Mann iteratif algoritması, $\theta_n = 0$ seçilirse Ishikawa iteratif algoritması elde edilir.

Tanım 3.52. $(N, \| \cdot \|)$ normlu bir uzay ve A , N 'nin boştan farklı bir konveks alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in A$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, [0,1]$ 'de bir dizi olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = T v_n, \\ v_n = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n T z_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan dizi Normal-S iteratif algoritması olarak adlandırılır [7].

Tanım 3.53. $(N, \| \cdot \|)$ normlu bir uzay ve A , N 'nin boştan farklı bir konveks alt kümesi ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in A$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}, [0,1]$ 'de diziler olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = T v_n, \\ v_n = (1 - \alpha_n)T u_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1 - \zeta_n)u_n + \zeta_n T u_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan dizi Picard-S iteratif algoritması olarak adlandırılır [8-9].

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak konveks minimizasyon problemi tanıtılacaktır. Bu problemin bir sabit nokta problemi olarak nasıl yazıldığı ele alınacak ve bu problemi çözmek için kullanılan gradient projeksiyon algoritması (GPA) tanıtılacaktır. Bununla beraber GPA'nın yakınsaklığı incelenecektir. Son olarak, üstünleştirme metodu ve iteratif algoritmaların pertürbasyon dirençliliği ele alınacaktır.

4.1. Konveks Minimizasyon Problemi ve Sabit Nokta Problemi ile İlişkisi

H reel bir Hilbert uzayı ve C , H 'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Konveks $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu minimum yapan C kümesinin elemanlarının bulunması problemi konveks minimizasyon problemi olarak adlandırılır ve

$$\min_{u \in C} f(u) \quad (4.1)$$

şeklinde gösterilir. (4.1) probleminin çözülebilir olduğu varsayalım. Bu durumda konveks minimizasyon problemi “tutarlı (consistent)” olarak adlandırılır. (4.1) ile ifade edilen konveks minimizasyon probleminin tüm çözümlerinin kümesini S ile gösterelim.

Konveks minimizasyon problemleri ve sabit nokta problemleri arasında derin ve önemli bir ilişki bulunmaktadır. Bu ilişki, konveks optimizasyon problemlerinin sabit nokta problemleri olarak yeniden formüle edilebilmesinden kaynaklanır. Bu ilişki hem teorik analiz hem de pratik çözümler açısından önemli faydalar sağlar. Örneğin, sabit nokta problemlerini çözmek için kullanılan iteratif algoritmalar, konveks minimizasyon problemlerinin çözümüne yaklaşmak için de kullanılabilir. Bunun yanı sıra, sabit nokta problemleri için geniş bir teorik çerçeve sunan sabit nokta teoremleri ve yakınsaklık sonuçları, konveks minimizasyon problemleri için de kullanılabilir.

Bu bölümde sabit nokta problemleri ve konveks minimizasyon problemleri arasındaki ilişki ele alınacaktır.

Tanım 4.1.1. H , Hilbert uzayı, $C \neq \emptyset \subset H$ ve $u \in H$ olmak üzere H 'nin herhangi bir u elemanına C 'nin en yakın elemanını bulan dönüşüme metrik izdüşüm (projeksiyon) operatörü denir ve P_C ile gösterilir. Yani, $P_C : H \rightarrow C$, her bir $u \in H$ için bir tek $P_C u \in C$ tanımlar ve

$$\|u - P_C u\| = \inf\{\|u - v\| : v \in C\}$$

özelliğini sağlar [42].

Bu tanımdan, $\forall u \in C$ için, $P_C u = u$ 'dur ve $\forall u \notin C$ için $P_C u \in \partial C$ 'dir. Ayrıca, eğer C , kapalı ve konveks ise her $u \in H$ için $P_C u$ vardır ve tektir [42].

Teorem 4.1.2. C , H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi, $u \in H$ ve $v \in C$ olmak üzere $\forall z \in C$ için aşağıdakiler denktir [42].

- i) $v = P_C u$,
- ii) $\langle v, z - v \rangle \geq \langle u, z - v \rangle$ 'dir.

Örnek 4.1.3. $H = \mathbb{R}$ ve $C = [-2, 7]$ olsun. Bu durumda P_C , aşağıdaki şekildedir:

$$P_C u = \begin{cases} -2, & u < -2 \\ u, & -2 \leq u \leq 7 \\ 7, & u > 7 \end{cases}$$

Teorem 4.1.4. H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir C bir alt kümesi için $P_C: H \rightarrow C$ genişlemeyendir. Yani, her $u, u^* \in H$ için

$$\|P_C u - P_C u^*\| \leq \|u - u^*\|$$

dir [42].

Tanım 4.1.5. $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|f(u+v) - f(u) - \langle v, j \rangle|}{\|v\|} = 0$ 'ı sağlayacak bir $j \in H$ varsa, j elemanı f 'nin u 'daki Fréchet diferansiyeli olarak adlandırılır ve ∇f ile temsil edilir [40].

Örnek 4.1.6. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $f(u) = u_1^4 + u_2^4$, $u = (u_1, u_2)$ olsun. Bu durumda f 'nin Fréchet türevi, $\nabla f(u) = (4u_1^3, 4u_2^3)$ 'dür.

Önerme 4.1.7. f , bir L iç çarpım uzayının konveks bir C alt kümesinden $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f konvektir ancak ve ancak her $u, v \in C$ için $f(v) - f(u) \geq \langle \nabla f(u), v - u \rangle$ 'dur [43].

Tanım 4.1.8. (Monoton Dönüşümler) T , bir iç çarpım uzayının A altkümesinde tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall u, v \in A$ için,

- i) $\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq 0$ ise, T 'ye monoton dönüşüm denir [44].

- ii) $u \neq v$ için, $\langle Tu - Tv, u - v \rangle > 0$ ise, T 'ye kesin monoton (strictly monotone) dönüşüm denir [44].
- iii) $u \neq v$ için, $\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq \eta \|u - v\|^2$ sağlanacak şekilde $\eta > 0$ varsa, T 'ye η - kuvvetli monoton (η -strongly monotone) dönüşüm denir [44].
- iv) $\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq v \|Tu - Tv\|^2$ sağlanacak şekilde $v > 0$ varsa, T 'ye v - ters kuvvetli monoton (v - inverse strongly monotone) dönüşüm denir [44].

“ v - ters kuvvetli monoton” ifadesi bu tezde v -ism şeklinde kısaltılacaktır.

Teorem 4.1.9. u^* , (4.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak u^* , her $u \in C$ için $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ eşitsizliğini sağlar [45].

İspat: u^* , minimizasyon probleminin bir çözümü olsun. Her $t \in [0,1]$ için, $g(t) = f(u^* + t(u - u^*))$ olsun. $t = 0$ 'da g fonksiyonunu minimum yapar. Bu sebeple, $g'(0) \geq 0$ 'dır. $g'(0) = \langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle$ olduğundan $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ 'dır.

Şimdi, u^* , her $u \in C$ için $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ eşitsizliğini sağlasın. f 'nin konveksliğinden, Önerme 4.1.7 kullanılarak her $u \in C$ için,

$$f(u) \geq f(u^*) + \langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle$$

yazılır. $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ olduğu kabulünden, $f(u) \geq f(u^*)$ elde edilir. Yani u^* , f 'yi minimum yapan bir noktadır.

Teorem 4.1.10. u^* , (4.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak herhangi bir $\rho > 0$ için $u^* = P_C(u^* - \rho \nabla f(u^*))$ 'dir [45].

İspat: u^* , (4.1) ile verilen probleminin bir çözümü ise Teorem 4.1.9'dan $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ dır. $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ 'ın her iki tarafı $-\rho < 0$ ile çarpılır ve her iki tarafına $\langle u^*, u - u^* \rangle$ eklenirse,

$$\langle u^*, u - u^* \rangle \geq \langle u^* - \rho \nabla f(u^*), u - u^* \rangle, \forall u \in C$$

olduğu görülür. Teorem 4.1.2'den $u^* = P_C(u^* - \rho \nabla f(u^*))$ olduğu elde edilir. Tersine $\rho > 0$ için, $u^* = P_C(u^* - \rho \nabla f(u^*))$ olsun. Bu durumda,

$$\langle u^*, u - u^* \rangle \geq \langle u^* - \rho \nabla f(u^*), u - u^* \rangle, \quad \forall u \in C$$

olur. Buradan da, $\forall u \in C$ için $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ olduğu görülür. Teorem 4.1.9'dan u^* , (4.1) ile ifade edilen probleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.1.11. ∇f , C üzerinde tanımlı kesin monoton bir operatör olmak üzere $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ eşitsizliğinin çözümü varsa bu çözüm tektir [45].

İspat: u_1 ve u_2 'nin $\langle \nabla f(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ eşitsizliğinin iki farklı çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $u \in C$ için,

$$\langle \nabla f(u_1), u - u_1 \rangle \geq 0 \quad (4.2)$$

ve

$$\langle \nabla f(u_2), u - u_2 \rangle \geq 0 \quad (4.3)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.2)'de u yerine u_2 ve (4.3)'de u yerine u_1 yazılırsa,

$$\langle \nabla f(u_1) - \nabla f(u_2), u_2 - u_1 \rangle \geq 0$$

olur. Elde edilen bu eşitsizlik, ∇f 'nin kesin monotonluğu ile çeliştiğinden varsayımın yanlış olduğu sonucuna varılır. Demek ki $u_1 = u_2$ 'dir.

Sonuç 4.1.12. ∇f , C üzerinde tanımlı ve kesin monoton bir operatör olmak üzere eğer, (4.1) problemi çözülebilirse bir tek çözüm vardır [43].

4.1.1. Gradient projeksiyon algoritması ve yakınsaklığı

u_0 , H 'nin keyfi bir elemanı ve her n için $\rho, \rho_n \geq 0$ olmak üzere,

$$u_{n+1} = P_C(u_n - \rho \nabla f(u_n)), \quad (4.4)$$

veya daha genel olarak,

$$u_{n+1} = P_C(u_n - \rho_n \nabla f(u_n)) \quad (4.5)$$

iteratif algoritmasına Gradient Projeksiyon Algoritması (GPA) denir

GPA'nın yakınsaklığı, ∇f 'nin taşıdığı özellikler ile sıkı bir ilişki içindedir. (4.4)'de, $T = P_C(I - \rho \nabla f)$ olarak seçilirse, GPA'nın aslında bir Picard iteratif algoritması olduğu görülür.

4.1.1.1. GPA'nın güçlü yakınsaklığı

Bu kısımda GPA'nın hangi şartlar altında güçlü yakınsak olduğu verilecektir.

Önerme 4.1.1.1.1. ∇f , L –Lipschitzian ve η – kuvvetli monoton ve $0 < \rho < \frac{2\eta}{L^2}$ olsun.

$T = P_C(I - \rho \nabla f)$ bir daraltan dönüşümdür.

Daha açık bir ifadeyle; $\forall u, v \in H$ için $\tau = \sqrt{1 - \rho(2\eta - \rho L^2)} < 1$ olmak üzere,

$\|Tu - Tv\| \leq \tau \|u - v\|$ 'dir [46].

İspat: $\forall u, v \in C$ için, P_C 'nin genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|^2 &= \|P_C(I - \rho \nabla f)u - P_C(I - \rho \nabla f)v\|^2 \\ &\leq \|(I - \rho \nabla f)u - (I - \rho \nabla f)v\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - 2\rho \langle \nabla f(u) - \nabla f(v), u - v \rangle + \rho^2 \|\nabla f(u) - \nabla f(v)\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - 2\rho \eta \|u - v\|^2 + \rho^2 L^2 \|u - v\|^2 \\ &= (1 - \rho(2\eta - \rho L^2)) \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

ve $\sqrt{1 - \rho(2\eta - \rho L^2)} < 1$ olduğundan T , bir daraltan dönüşümdür.

Teorem 4.1.1.1.2. ∇f , L –Lipschitzian ve η – kuvvetli monoton olsun. $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi,

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2\eta}{L^2} \quad (4.6)$$

özelliğini sağlasın. Bu takdirde, (4.5) ile verilen GPA, (4.1) probleminin bir tek çözümüne kuvvetli yakınsar [46].

İspat: ∇f , η – kuvvetli monoton olduğundan, aynı zamanda kesin monotondur. Sonuç 4.1.12'den dolayı, $T = T_n = P_C(I - \rho_n \nabla f)$ 'nin bir tek sabit noktası olur.

(4.6) şartından, her $n \geq N$ için,

$$0 < \alpha \leq \theta < \frac{2\eta}{L^2} \text{ ve } \alpha \leq \rho_n \leq \theta$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır.

$h = \max_{\alpha \leq \rho \leq \theta} \sqrt{1 - \rho(2\eta - \rho L^2)}$ olsun. $h \in [0, 1]$ 'dir ve her $n \geq N$ için

$$0 \leq \sqrt{1 - \rho_n(2\eta - \rho_n L^2)} \leq h$$

olur.

Önerme 4.1.1.1.1'den, $T \equiv T_{\rho_n} : P_C(I - \rho_n \nabla f)$ 'nin bir daraltan dönüşüm olduğu sonucuna varılır. Banach daraltan teoreminden, (4.5) ile verilen GPA, T 'nin bir tek sabit noktasına yakınsar.

4.1.1.2. GPA'nın zayıf yakınsaklığı

Bu kısımda, GPA'nın hangi şartlar altında zayıf yakınsak olduğu verilecektir.

Önerme 4.1.1.2.1. Fréchet diferansiyellenebilir $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için ∇f , $L -$ Lipschitzian ise $\nabla f, \frac{1}{L} -$ ism'dir [47].

Önerme 4.1.1.2.2. Fréchet diferansiyellenebilir $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için ∇f , $L -$ Lipschitzian ise $0 < \rho < \frac{2}{L}$ için $P_C(I - \rho \nabla f)$ bir genişlemeyen dönüşümdür [43].

İspat: P_C 'nin bir genişlemeyen dönüşüm ve Önerme 4.1.1.2.1'den, ∇f 'nin $\frac{1}{L} -$ ism olduğu gerçeği ile, her $u, v \in C$ için,

$$\begin{aligned} \|P_C(I - \rho \nabla f)(u) - P_C(I - \rho \nabla f)(v)\|^2 &\leq \|(I - \rho \nabla f)(u) - (I - \rho \nabla f)(v)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - 2\rho \langle \nabla f(u) - \nabla f(v), u - v \rangle \\ &\quad + \rho^2 \|\nabla f(u) - \nabla f(v)\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - 2\rho \frac{1}{L} \|\nabla f(u) - \nabla f(v)\|^2 \\ &\quad + \rho^2 \|\nabla f(u) - \nabla f(v)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - \rho \left(2\frac{1}{L} - \rho\right) \|\nabla f(u) - \nabla f(v)\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $P_C(I - \rho \nabla f)$ bir genişlemeyen dönüşümdür.

Sonuç 4.1.1.2.3. $\rho > 0$ olmak üzere $S = F_{P_C(I - \rho \nabla f)}$ olduğundan S kapalı ve konveks bir kümedir.

Teorem 4.1.1.2.4. (4.1) problemi çözülebilir, ∇f , L –Lipschitzian ve $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$ olsun. Bu takdirde (4.5) ile verilen GPA, (4.1)’in bir çözümüne zayıf yakınsar [18].

4.2. SM ve İteratif Algoritmaların Pertürbasyon Dirençliliği

Belirli bir görevi gerçekleştiren iteratif bir algoritma göz önüne alınsın ve bu algoritma temel algoritma olarak adlandırılınsın. Bu temel algoritmada pertürbasyonlara izin verilerek perturbe edilmiş bir algoritma elde edilsin ve bu algoritma üstünleştirilmiş algoritma olarak adlandırılınsın. Üstünleştirilmiş algoritma, temel algoritmanın görevini yerine getiriyorsa veya daha üstün bir çıktı elde ediyorsa, temel algoritmanın pertürbasyonlara karşı dirençli olduğu söylenir. İteratif algoritmaların etkinliğini artırma prensibine dayanan bu metoda üstünleştirme (SM) denir. SM’nin avantajı, üstünleştirilmiş algoritmanın temel algoritmanın görevini daha az hesaplama çabasıyla yerine getirmesi ve daha faydalı sonuçlar elde etmesidir.

SM aynı temel yaklaşımdan türetilen iki yönü bünyesinde barındırır. İlk husus, zayıf üstünleştirme olarak bilinen tutarlı problem yapılarında sınırlı perturbasyon dirençliliği kavramını kullanır. İkinci husus, SM’nin mutlaka tutarlılık gerektirmeyen problem yapılarına genişletilmesini içerir ve güçlü perturbasyon dirençliliği kavramını içerir [23]. Bu ikinci husus güçlü üstünleştirme olarak adlandırılmaktadır. Zayıf ve güçlü üstünleştirmenin daha iyi anlaşılması için ayrıntılı bilgiye [48]’den ulaşılabilir.

Bu tezde, (4.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin tutarlı olduğu varsayıldığı için için zayıf üstünleştirme uygulanacaktır. Bu bağlamda, Censor’un Öklid uzayında vermiş olduğu sınırlı pertürbasyon dirençliliğinin tanımı aşağıdaki gibidir [48]:

Tanım 4.2.1. $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^i$ ve $\mathcal{K} \neq \emptyset$ olsun. $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n < \infty$ özelliğini sağlayan reel sayıların negatif olmayan bir dizisi ve $\{\vartheta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbb{R}^i$ ’nin sınırlı bir dizi olsun. $u_0 \in \mathbb{R}^i$ için $u_{n+1} = G(u_n)$ ile tanımlanan $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif algoritması $\mathcal{K}$ ’nin bir elemanına yakınsak olsun. Eğer $v_{n+1} = G(v_n + \omega_n \vartheta_n)$ ile tanımlanan $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif algoritması, keyfi bir $v_0 \in \mathbb{R}^i$ için $\mathcal{K}$ ’nin bir elemanına yakınsak olursa $G: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^i$ algoritmik operatörü $\mathcal{K}$ ’ya göre sınırlı pertürbasyon dirençliliğine sahiptir denir.

Burada, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, orijinal algoritma, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ de orijinal algoritmanın üstünleştirilmiş versiyonudur.

Xu, [26]'de (4.5) ile verilen GPA'nın sınırlı perturbasyonlara karşı dirençli olduğu sonucunu elde etti:

Teorem 4.2.2. (4.1) ile verilen problem çözülebilir olsun. $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, $\sum_{n=0}^\infty \omega_n < \infty$ özelliğini sağlayan reel sayıların negatif olmayan bir dizisi ve $\{\vartheta_n\}_{n=0}^\infty$, H 'nin sınırlı bir dizi olsun. ∇f , L -Lipschitzian ise ve $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$ şartını sağlıyorsa, (4.5) ile verilen GPA, sınırlı perturbasyonlara karşı dirençlidir. Yani,

$$u_{n+1} = P_C(u_n + \omega_n \vartheta_n - \rho_n \nabla f(u_n + \omega_n \vartheta_n))$$

ile verilen (4.5)'in üstünleştirilmiş versiyonu, (4.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsaktır [26].

Xu [26]'dan ilham alarak Ertürk ve Salkım, [27]'de Picard-S iteratif algoritmasını temel alan gradient projeksiyon algoritmasının sınırlı perturbasyonlara karşı dirençli olduğunu gösterdi.

Teorem 4.2.3. (4.1) ile verilen problem çözülebilir, $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, $\sum_{n=0}^\infty \omega_n < \infty$ özelliğini sağlayan reel sayıların negatif olmayan bir dizisi ve $\{\vartheta_n\}_{n=0}^\infty$, H 'nin sınırlı bir dizi olsun. ∇f , L -Lipschitzian ise ve $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$, $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ ve $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ dizileri, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 1$ ve $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 1$ şartlarını sağlıyorsa, (2.2) ile verilen GPA, sınırlı perturbasyonlara karşı dirençlidir. Yani,

$$\begin{cases} u_{n+1} = P_C(I - \rho_n \nabla f)(v_n + \omega_n \vartheta_n - \rho_n \nabla f(v_n + \omega_n \vartheta_n)) \\ v_n = (1 - a_n)P_C(I - \rho_n \nabla f)(u_n + \omega_n \vartheta_n - \rho_n \nabla f(u_n + \omega_n \vartheta_n)) \\ \quad + a_n P_C(I - \rho_n \nabla f)(z_n + \omega_n \vartheta_n - \rho_n \nabla f(z_n + \omega_n \vartheta_n)) \\ z_n = (1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) \\ \quad + b_n P_C(I - \rho_n \nabla f)(u_n + \omega_n \vartheta_n - \rho_n \nabla f(u_n + \omega_n \vartheta_n)) \end{cases}$$

ile verilen (2.2)'in üstünleştirilmiş versiyonu (4.1)'in bir çözümüne zayıf yakınsaktır [27].

5. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde Ertürk [1] tarafından pertürbasyonlara dirençli olduğu gösterilen (2.3) algoritması yardımıyla SM'nin lineer ters problemlere nasıl uygulandığını göstereceğiz. Bu sebeple ilk olarak Ertürk [1]'ün elde ettiği sonuç incelenecektir. Ardından, lineer ters problemler ve konveks minimizasyon problemi arasındaki ilişkiden yararlanarak (2.3) ile verilen iteratif algoritmasının lineer ters problemleri çözdüğü gösterilecek ve [1]'de elde edilen sonuç yardımıyla SM'nin lineer ters problemlere uygulaması verilecektir.

5.1. (2.3) ile Verilen GPA'nın Perturbasyon Dirençliliği

(2.3) algoritması temel algoritma olarak ele alınsın. Her n için $\omega_n \geq 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n < \infty$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$ $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$ ve $\{\vartheta_n\}_{n=0}^{\infty}$, H 'de sınırlı bir dizi olmak üzere (2.3) iteratif algoritmasının üstünleştirilmiş versiyonu

$$\begin{cases} u_{n+1} = \xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) + (1 - \xi_n) P_c(I - \rho_n \nabla f)(v_n + \omega_n \vartheta_n) \\ v_n = (1 - a_n) P_c(I - \rho_n \nabla f)(u_n + \omega_n \vartheta_n) + a_n P_c(I - \rho_n \nabla f)(z_n + \omega_n \vartheta_n) \\ z_n = (1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) + b_n P_c(I - \rho_n \nabla f)(u_n + \omega_n \vartheta_n), \end{cases} \quad (5.1)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki lemma, teoremin ispatında kullanıldığından ilk olarak lemma verilecektir.

Lemma 5.1.1. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan reel sayıların her n için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir dizisi olsun:

$$\alpha_{n+1} \leq (1 - \beta_n) \alpha_n + \beta_n \theta_n + \epsilon_n.$$

$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$ ve $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,\infty)$ olmak üzere

- i) $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$ veya denk olarak $\prod_{n=0}^{\infty} (1 - \beta_n) = 0$,
- ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n \leq 0$,
- iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n < \infty$,

şartları sağlanırsa $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, 0'a yakınsar [49].

Teorem 5.1.2. (4.1) ile verilen konveks minimizasyon probleminin çözülebilir olduğu varsayılın. ∇f , L -Lipschitzian bir dönüşüm ve F bir q –daraltan dönüşümü olmak üzere $u_0 \in H$ için $\{u_n\}_{n=0}^\infty$, (5.1) ile verilen iteratif algoritma olsun. $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$ ve $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

- i) $\xi_n \rightarrow 0$,
- ii) $\sum_{n=0}^\infty \xi_n = \infty$,
- iii) $\sum_{n=0}^\infty |\xi_{n+1} - \xi_n| < \infty$,
- iv) $\sum_{n=0}^\infty |\rho_{n+1} - \rho_n| < \infty$,
- v) $\sum_{n=0}^\infty |a_{n+1} - a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=0}^\infty |b_{n+1} - b_n| < \infty$.

Bu durumda, (5.1) ile verilen iteratif algoritma (4.1)'in bir çözümü olan u^* 'a güçlü yakınsar ve bu çözüm aynı zamanda $\langle (I - F)u^*, u - u^* \rangle \geq 0, \forall u \in S$ eşitsizliğinin bir tek çözümüdür [1].

İspat: İspat uzun olduğu için adımlar halinde incelenecektir.

1.Adım: $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilecektir.

(5.1)'de her n için $P_c(I - \rho_n \nabla f) = T_n$ olsun. u^*, S 'nin herhangi bir elemanı olmak üzere, üçgen eşitsizliği, her n için T_n 'nin genişlemeyen ve F 'nin daraltan dönüşüm olduklarını kullanarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &= \|\xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) + (1 - \xi_n)T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
&= \|\xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) + (1 - \xi_n)T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - \xi_n + \xi_n)u^*\| \\
&= \|\xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) + (1 - \xi_n)T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - \xi_n)u^* - \xi_n u^*\| \\
&= \|\xi_n (F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*) + (1 - \xi_n)(T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*)\| \\
&= \left\| \begin{aligned} &\xi_n (F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - Fu^* + Fu^* - u^*) \\ &+ (1 - \xi_n)(T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*) \end{aligned} \right\| \\
&\leq \xi_n \|F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - Fu^*\| + \xi_n \|Fu^* - u^*\| \\
&\quad + (1 - \xi_n) \|T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
&\leq \xi_n q \|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| + \xi_n \|Fu^* - u^*\| + (1 - \xi_n) \|v_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| \\
&\leq \xi_n q \|\omega_n \vartheta_n\| + \xi_n q \|u_n - u^*\| + \xi_n \|Fu^* - u^*\| + (1 - \xi_n) \|\omega_n \vartheta_n\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1 - \xi_n)\|v_n - u^*\| \\
& = \xi_n q \|u_n - u^*\| + \xi_n \|Fu^* - u^*\| \\
& \quad +(1 - \xi_n)\|v_n - u^*\| + (1 - \xi_n(1 - q))\omega_n \|\vartheta_n\|, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_n - u^*\| & = \|(1 - a_n)T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) + a_n T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
& = \|(1 - a_n)T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) + a_n T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - a_n + a_n)u^*\| \\
& = \|(1 - a_n)T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) + a_n T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - a_n)u^* - a_n u^*\| \\
& = \|(1 - a_n)[T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*] + a_n [T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*]\| \\
& \leq (1 - a_n)\|T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| + a_n \|T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
& \leq (1 - a_n)\|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| + a_n \|z_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| \\
& \leq (1 - a_n)[\|\omega_n \vartheta_n\| + \|u_n - u^*\|] + a_n [\|\omega_n \vartheta_n\| + \|z_n - u^*\|] \\
& = (1 - a_n)\|\omega_n \vartheta_n\| + a_n \|\omega_n \vartheta_n\| + (1 - a_n)\|u_n - u^*\| + a_n \|z_n - u^*\| \\
& = (1 - a_n + a_n)\|\omega_n \vartheta_n\| + (1 - a_n)\|u_n - u^*\| + a_n \|z_n - u^*\| \\
& = (1 - a_n)\|u_n - u^*\| + a_n \|z_n - u^*\| + \omega_n \|\vartheta_n\| \tag{5.3}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - u^*\| & = \|(1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) + b_n T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
& = \|(1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) + b_n T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - b_n + b_n)u^*\| \\
& = \|(1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - b_n)u^* + b_n T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - b_n u^*\| \\
& = \|(1 - b_n)[(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*] + b_n [T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*]\| \\
& \leq (1 - b_n)\|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| + b_n \|T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
& \leq (1 - b_n)\|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| + b_n \|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| \\
& = [1 - b_n + b_n]\|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\| \\
& = \|(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\| \\
& \leq \|u_n - u^*\| + \omega_n \|\vartheta_n\|. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

(5.3)'de (5.4) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|v_n - u^*\| &\leq (1 - a_n)\|u_n - u^*\| + a_n[\|u_n - u^*\| + \omega_n\|\vartheta_n\|] + \omega_n\|\vartheta_n\| \\
&= \|u_n - u^*\| + (1 + a_n)\omega_n\|\vartheta_n\|
\end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

(5.2)'de (5.5)'i kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &\leq \xi_n q \|u_n - u^*\| + \xi_n \|Fu^* - u^*\| + (1 - \xi_n) \left[\frac{\|u_n - u^*\|}{+(1 + a_n)\omega_n\|\vartheta_n\|} \right] \\
&\quad + (1 - \xi_n(1 - q))\omega_n\|\vartheta_n\| \\
&\leq (1 - \xi_n(1 - q))\|u_n - u^*\| + \xi_n \|Fu^* - u^*\| \\
&\quad + \left[\frac{(1 - \xi_n)(1 + a_n)}{+(1 - \xi_n(1 - q))} \right] \omega_n\|\vartheta_n\|
\end{aligned} \tag{5.6}$$

eşitsizliği elde edilir. $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{\xi_n\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$ ve $\{\vartheta_n\}_{n=0}^\infty$, H 'de sınırlı bir dizi olduğundan

$$[(1 - \xi_n)(1 + a_n) + (1 - \xi_n(1 - q))]\|\vartheta_n\| \leq K \tag{5.7}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. (5.6)'da (5.7)'yi kullanarak ve $\xi_n(1 - q) = c_n$ diyerek

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq (1 - c_n)\|u_n - u^*\| + \xi_n(1 - q) \frac{\|Fu^* - u^*\|}{(1 - q)} + K\omega_n \tag{5.8}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.8) eşitsizliğinde iki durum söz konusudur:

$$\|u_n - u^*\| \geq \frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\| \tag{5.9}$$

veya

$$\|u_n - u^*\| < \frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\|. \tag{5.10}$$

(5.8) eşitsizliğinde (5.9) eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &\leq (1 - c_n)\|u_n - u^*\| + c_n\|u_n - u^*\| + K\omega_n \\
&\leq \|u_n - u^*\| + K\omega_n
\end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.8) eşitsizliğinde (5.10) eşitsizliği doğru olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &< (1 - c_n) \frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\| + c_n \frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\| + K\omega_n \\
&= \frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\| + K\omega_n
\end{aligned} \tag{5.12}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (5.11) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &\leq \|u_n - u^*\| + K\omega_n \\
\|u_n - u^*\| &\leq \|u_{n-1} - u^*\| + K\omega_{n-1} \\
\|u_{n-1} - u^*\| &\leq \|u_{n-2} - u^*\| + K\omega_{n-2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \|u_0 - u^*\| + K \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.12) ve (5.13) eşitsizliklerinden

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \max\{\|u_0 - u^*\| + K \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n, \frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\| + K\omega_n\} \tag{5.14}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(5.14)'de $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n < \infty$ olduğundan

$$\|u_0 - u^*\| + K \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \leq K_1$$

ve

$$\frac{1}{1 - q} \|Fu^* - u^*\| + K\omega_n \leq K_2$$

olacak şekilde K_1 ve K_2 pozitif reel sayıları vardır. Bu sebeple, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır.

2.Adım: $\|u_{n+1} - u_n\| \rightarrow 0$ olduğu gösterilecektir.

$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlı olduğundan, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri de sınırlı dizilerdir.

A kümesi aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \left\{ \|F(u_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|, \|T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|, \|\nabla f(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|, \right.$$

$$\|T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|, \|T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|, \|\nabla f(u_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|,$$

$$\|T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\|, \|\nabla f(u_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\| \}.$$

Her n için T_n 'nin genişlemeyen, F 'nin daraltan, ∇f 'nin L -Lipschitzian dönüşüm olduklarını ve $\{u_n\}_{n=0}^\infty$, $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ ve $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ dizilerinin sınırlılığını kullanarak A 'nın her bir elemanının $\mathbb{R}$ 'de sınırlı bir dizi olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$M \geq \max\{\sup_n \sigma : \sigma \in A\} \quad (5.15)$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır.

Üçgen eşitsizliğini, her n için T_n ve P_c 'nin genişlemeyen dönüşüm olmasını, F 'nin daraltan dönüşümü olduğunu ve (5.15)'i kullanarak aşağıdaki eşitsizliklere ulaşılır:

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\| &= \left\| \begin{array}{l} \xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) + (1 - \xi_n) T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) \\ - \xi_{n-1} F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ - (1 - \xi_{n-1}) T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\ &= \left\| \begin{array}{l} \xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) \\ - \xi_n F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + \xi_n F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ + (1 - \xi_n) T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - \xi_{n-1} F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ + (1 - \xi_n) T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - (1 - \xi_n) T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ - (1 - \xi_{n-1}) T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\ &\leq \xi_n \left\| \begin{array}{l} F(u_n + \omega_n \vartheta_n) \\ - F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| + (1 - \xi_n) \left\| \begin{array}{l} T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) \\ - T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\ &\quad + \|(\xi_n - \xi_{n-1}) F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\ &\quad + \left\| \begin{array}{l} (1 - \xi_n) T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ - (1 - \xi_{n-1}) T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\ &\leq \xi_n q \|u_n + \omega_n \vartheta_n - u_{n-1} - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\ &\quad + (1 - \xi_n) \|v_n + \omega_n \vartheta_n - v_{n-1} - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\ &\quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| \|F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\ &\quad + \left\| \begin{array}{l} T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - \xi_n T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ - T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + \xi_{n-1} T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\ &\leq \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + \xi_n q \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| \\ &\quad + (1 - \xi_n) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + |\xi_n - \xi_{n-1}| \|F(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \begin{pmatrix} T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \\ -\xi_n T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) + \xi_n T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \\ -\xi_n T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) + \xi_{n-1} T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
& \leq \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| \\
& \quad + (1 - \xi_n(1 - q)) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& \quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| M + \left\| \begin{pmatrix} T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \\ -\xi_n (T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})) \\ -(\xi_n - \xi_{n-1}) T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
& \leq \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| + (1 - \xi_n(1 - q)) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& \quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| M + (1 - \xi_n) \|T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\| \\
& \quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| \|T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\| \\
& = \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| \\
& \quad + (1 - \xi_n(1 - q)) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& \quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| 2M + (1 - \xi_n) \left\| \begin{pmatrix} T_n(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \\ -T_{n-1}(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
& = \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| \\
& \quad + (1 - \xi_n(1 - q)) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& \quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| \cdot 2M + (1 - \xi_n) \left\| \begin{pmatrix} P_C(I - \rho_n \nabla f)(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \\ -P_C(I - \rho_{n-1} \nabla f)(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
& \leq \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| \\
& \quad + (1 - \xi_n(1 - q)) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& \quad + |\xi_n - \xi_{n-1}| \cdot 2M + (1 - \xi_n) |\rho_n - \rho_{n-1}| \|\nabla f(v_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\| \\
& \leq \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \xi_n) \|v_n - v_{n-1}\| \\
& \quad + (1 - \xi_n(1 - q)) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + (|\xi_n - \xi_{n-1}| + |\rho_n - \rho_{n-1}|) \cdot 2M,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\|v_n - v_{n-1}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{pmatrix} (1-a_n)T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) + a_n T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) \\ -(1-a_{n-1})T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -a_{n-1}T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} (1-a_n)T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) \\ -(1-a_n)T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + (1-a_n)T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ +a_n T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - a_n T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + a_n T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -(1-a_{n-1})T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - a_{n-1}T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1-a_n)\|T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\quad + a_n\|T_n(z_n + \omega_n \vartheta_n) - T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} (1-a_n)T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + a_n T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -(1-a_{n-1})T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - a_{n-1}T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1-a_n)\|u_n + \omega_n \vartheta_n - u_{n-1} - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + a_n\|z_n + \omega_n \vartheta_n - z_{n-1} - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -a_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + a_n T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ +a_{n-1}T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - a_{n-1}T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1-a_n)\|u_n - u_{n-1}\| + (1-a_n)\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + a_n\|z_n - z_{n-1}\| + a_n\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} [T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})] \\ -a_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + a_n T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ +a_{n-1}T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - a_{n-1}T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -a_n T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + a_n T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -a_n T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + a_n T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1-a_n)\|u_n - u_{n-1}\| + a_n\|z_n - z_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} (1-a_n)[T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})] \\ -(a_n - a_{n-1})T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + (a_n - a_{n-1})T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ +a_n(T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1-a_n)\|u_n - u_{n-1}\| + a_n\|z_n - z_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + (1-a_n)\|T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\quad + |a_n - a_{n-1}|\|T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +|a_n - a_{n-1}| \|T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\| \\
& +a_n \|T_n(z_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(z_{n-1} + \omega_{n-1}\vartheta_{n-1})\| \\
\leq & (1 - a_n) \|u_n - u_{n-1}\| + a_n \|z_n - z_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + (1 - a_n) \left\| \begin{array}{c} P_C(I - \rho_n \nabla f)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -P_C(I - \rho_{n-1} \nabla f)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| + |a_n - a_{n-1}| M \\
& + |a_n - a_{n-1}| M + a_n \left\| \begin{array}{c} P_C(I - \rho_n \nabla f)(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -P_C(I - \rho_{n-1} \nabla f)(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\
\leq & (1 - a_n) \|u_n - u_{n-1}\| + a_n \|z_n - z_{n-1}\| \\
& + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + |a_n - a_{n-1}| \cdot 2M \\
& + (1 - a_n) |\rho_n - \rho_{n-1}| \|\nabla f(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
& + a_n |\rho_n - \rho_{n-1}| \|\nabla f(z_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
\leq & (1 - a_n) \|u_n - u_{n-1}\| + a_n \|z_n - z_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + |a_n - a_{n-1}| \cdot 2M + (1 - a_n) |\rho_n - \rho_{n-1}| M + a_n |\rho_n - \rho_{n-1}| \cdot M \\
= & (1 - a_n) \|u_n - u_{n-1}\| + a_n \|z_n - z_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + (|a_n - a_{n-1}| + |\rho_n - \rho_{n-1}|) 2M, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \|z_n - z_{n-1}\| \\
= & \left\| \begin{array}{c} (1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) + b_n T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) \\ - (1 - b_{n-1})(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\
= & \left\| \begin{array}{c} (1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) - (1 - b_n)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ + (1 - b_n)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ + b_n T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ + b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ - (1 - b_{n-1})(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\| \\
\leq & (1 - b_n) \|u_n + \omega_n \vartheta_n - (u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
& + b_n \|T_n(u_n + \omega_n \vartheta_n) - T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
& + \left\| \begin{array}{c} (1 - b_n)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ - (1 - b_{n-1})(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{array} \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - b_n)\|u_n - u_{n-1}\| + (1 - b_n)\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + b_n\|u_n + \omega_n \vartheta_n - u_{n-1} - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} (b_{n-1} - b_n)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1 - b_n)\|u_n - u_{n-1}\| + (1 - b_n)\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + b_n\|u_n - u_{n-1}\| + b_n\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} (b_{n-1} - b_n)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + |b_{n-1} - b_n| \|u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
&\quad + \|b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + |b_{n-1} - b_n| M \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} b_n T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - b_{n-1} T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -b_n T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) + b_n T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + |b_{n-1} - b_n| M \\
&\quad + b_n \|T_n(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) - T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\quad + |b_{n-1} - b_n| \|T_{n-1}(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + |b_{n-1} - b_n| M + |b_{n-1} - b_n| M \\
&\quad + b_n \left\| \begin{pmatrix} P_C(I - \rho_n \nabla f)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \\ -P_C(I - \rho_{n-1} \nabla f)(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + 2|b_{n-1} - b_n| M \\
&\quad + b_n |\rho_n - \rho_{n-1}| \|\nabla f(u_{n-1} + \omega_{n-1} \vartheta_{n-1})\| \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + 2|b_{n-1} - b_n| M + b_n |\rho_n - \rho_{n-1}| M \\
&\leq \|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + 2M(|b_{n-1} - b_n| + |\rho_n - \rho_{n-1}|). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

(5.18), (5.17) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|v_n - v_{n-1}\| \leq (1 - a_n)\|u_n - u_{n-1}\|$$

$$\begin{aligned}
& +a_n \left[\|u_n - u_{n-1}\| + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \right] \\
& + 2M(|b_{n-1} - b_n| + |\rho_n - \rho_{n-1}|) \\
& + \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + (|b_{n-1} - b_n| + |\rho_n - \rho_{n-1}|)2M \\
& = \|u_n - u_{n-1}\| + (1 + a_n)\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + (|b_{n-1} - b_n| + |a_n - a_{n-1}| + 2|\rho_n - \rho_{n-1}|)2M \tag{5.19}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.19) eşitsizliği (5.16)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\| & \leq \xi_n q \|u_n - u_{n-1}\| \\
& + (1 - \xi_n) \left[\|u_n - u_{n-1}\| + (1 + a_n)\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \right. \\
& \quad \left. + (|b_{n-1} - b_n| + |a_n - a_{n-1}| + 2|\rho_n - \rho_{n-1}|)2M \right] \\
& + (1 - \xi_n(1 - q))\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| + \left(\frac{|\xi_n - \xi_{n-1}|}{|\rho_n - \rho_{n-1}|} \right) \cdot M \\
& = (1 - \xi_n(1 - q))\|u_n - u_{n-1}\| \\
& + \left((1 - \xi_n)(1 + a_n) + (1 - \xi_n(1 - q)) \right) \|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + (1 - \xi_n)(|b_{n-1} - b_n| + |a_n - a_{n-1}| + 2|\rho_n - \rho_{n-1}|)2M \\
& + (|\xi_n - \xi_{n-1}| + |\rho_n - \rho_{n-1}|) \cdot M \\
& = (1 - \xi_n(1 - q))\|u_n - u_{n-1}\| + \xi_n(1 - q)(-1)\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + (1 + (1 - \xi_n)(1 + a_n))\|\omega_n \vartheta_n - \omega_{n-1} \vartheta_{n-1}\| \\
& + [|\xi_n - \xi_{n-1}| + 3|\rho_n - \rho_{n-1}| + |a_n - a_{n-1}| + |b_n - b_{n-1}|]2M \\
& \leq (1 - \xi_n(1 - q))\|u_n - u_{n-1}\| + \xi_n(1 - q)(-1) \left[\frac{\omega_n \|\vartheta_n\|}{\omega_{n-1} \|\vartheta_{n-1}\|} \right] \\
& + 3 \cdot [\omega_n \|\vartheta_n\| + \omega_{n-1} \|\vartheta_{n-1}\|] \\
& + [|\xi_n - \xi_{n-1}| + 3|\rho_n - \rho_{n-1}| + |a_n - a_{n-1}| + |b_n - b_{n-1}|]2M \tag{5.20}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin i),ii),iii),iv) ve v) şartları sağlandığından Lemma 5.1.1, (5.20)'ye uygulanırsa,

$$\beta_n := \xi_n(1 - q),$$

$$\theta_n := -(\omega_n \|\vartheta_n\| + \omega_{n-1} \|\vartheta_{n-1}\|),$$

$$\epsilon_n := 3. [\omega_n \|\vartheta_n\| + \omega_{n-1} \|\vartheta_{n-1}\|] + \left[\begin{array}{l} |\xi_n - \xi_{n-1}| + 3|\rho_n - \rho_{n-1}| \\ + |a_n - a_{n-1}| + |b_n - b_{n-1}| \end{array} \right] 2M$$

olur. Buradan, $\|u_{n+1} - u_n\| \rightarrow 0$ olduğu görülür.

3. Adım: Bu adımda $\omega_w(u_n) \subset S$ olduğu gösterilecektir.

$u' \in \omega_w(u_n)$ olsun ve $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ 'nin bazı $\{u_{n_j}\}_{j=0}^\infty$ alt dizisileri için $u_{n_j} \rightarrow u'$ olduğu varsayalım. $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{L}$ olduğundan $\rho_{n_j} \rightarrow \rho \in (0, \frac{2}{L})$ olduğu kabul edilebilir. $T = P_C(I - \rho \nabla f)$ olsun. Dikkat edilirse, T , genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F_T = S$ 'dir. Üçgen eşitsizliği, her j için T_{n_j} ve P_C 'nin genişlemeyen dönüşüm olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \|u_{n_{j+1}} - T_{n_j}u_{n_j}\| + \|T_{n_j}u_{n_j} - Tu_{n_j}\| \\ &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| \\ &\quad + \|\xi_{n_j}F(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) + (1 - \xi_{n_j})T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - T_{n_j}u_{n_j}\| \\ &\quad + \|T_{n_j}u_{n_j} - Tu_{n_j}\| \\ &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \xi_{n_j}\|F(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - T_{n_j}u_{n_j}\| \\ &\quad + (1 - \xi_{n_j})\|T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - T_{n_j}u_{n_j}\| + \|T_{n_j}u_{n_j} - Tu_{n_j}\| \\ &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \xi_{n_j}[\|F(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| + \|T_{n_j}u_{n_j}\|] \\ &\quad + (1 - \xi_{n_j})\|v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j} - u_{n_j}\| + \|T_{n_j}u_{n_j} - Vu_{n_j}\| \\ &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \xi_{n_j}M + (1 - \xi_{n_j})\|v_{n_j} - u_{n_j}\| \\ &\quad + (1 - \xi_{n_j})\omega_{n_j}\|\vartheta_{n_j}\| + \|P_C(I - \rho_{n_j}\nabla f)u_{n_j} - P_C(I - \rho\nabla f)u_{n_j}\| \\ &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \xi_{n_j}M + (1 - \xi_{n_j})\|v_{n_j} - u_{n_j}\| \\ &\quad + (1 - \xi_{n_j})\omega_{n_j}\|\vartheta_{n_j}\| + \|u_{n_j} - \rho_{n_j}\nabla f u_{n_j} - u_{n_j} + \rho\nabla f u_{n_j}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \xi_{n_j}M + (1 - \xi_{n_j}) \|v_{n_j} - u_{n_j}\| \\
&\quad + (1 - \xi_{n_j})\omega_{n_j} \|\vartheta_{n_j}\| + |\rho_{n_j} - \rho| \|\nabla f u_{n_j}\| \\
&\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + (1 - \xi_{n_j}) \|v_{n_j} - u_{n_j}\| \\
&\quad + \xi_{n_j}M + (1 - \xi_{n_j})\omega_{n_j}M + |\rho_{n_j} - \rho| M \\
&= \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + (1 - \xi_{n_j}) \|v_{n_j} - u_{n_j}\| \\
&\quad + (\xi_{n_j} + (1 - \xi_{n_j})\omega_{n_j} + |\rho_{n_j} - \rho|) M
\end{aligned} \tag{5.21}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v_{n_j} - u_{n_j}\| &\leq \|v_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \\
&\leq \left\| \begin{aligned} &(1 - a_{n_j})T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) + a_{n_j}T(z_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) \\ &-\xi_{n_j}F(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - (1 - \xi_{n_j})T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) \end{aligned} \right\| \\
&\quad + \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \\
&\leq (1 - a_{n_j}) \|T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| \\
&\quad + a_{n_j} \|T_{n_j}(z_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| \\
&\quad + \xi_{n_j} \|F(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| + \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \\
&\leq (1 - a_{n_j}) \|u_{n_j} - v_{n_j}\| + a_{n_j} \|z_{n_j} - v_{n_j}\| \\
&\quad + \xi_{n_j} [\|F(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| + \|T_{n_j}(v_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\|] + \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \\
&\leq (1 - a_{n_j}) \|u_{n_j} - v_{n_j}\| + a_{n_j} \|z_{n_j} - v_{n_j}\| + \xi_{n_j}M + \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|
\end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(5.22)'i düzenleyerek,

$$\|v_{n_j} - u_{n_j}\| \leq \|z_{n_j} - v_{n_j}\| + \frac{\xi_{n_j}}{a_{n_j}}M + \frac{1}{a_{n_j}} \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \tag{5.23}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|z_{n_j} - v_{n_j}\| &\leq \|z_{n_j} - T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j})\| + \|T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) - v_{n_j}\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} (1 - b_{n_j})(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) + b_{n_j} T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) \\ -T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\quad + \left\| \begin{pmatrix} T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) \\ -(1 - a_{n_j})T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) - a_{n_j} T_{n_j}(z_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq (1 - b_{n_j}) \|(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) - T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j})\| \\
&\quad + a_{n_j} \|T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) - T_{n_j}(z_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j})\| \\
&\leq (1 - b_{n_j}) \left\| \begin{pmatrix} (u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) - T u_{n_j} + T u_{n_j} \\ -T_{n_j} u_{n_j} + T_{n_j} u_{n_j} - T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}) \end{pmatrix} \right\| + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| \\
&\leq (1 - b_{n_j}) \left[\|u_{n_j} - T u_{n_j}\| + \omega_{n_j} \|\vartheta_{n_j}\| + \|T u_{n_j} - T_{n_j} u_{n_j}\| \right] \\
&\quad + \|T_{n_j} u_{n_j} - T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j} \vartheta_{n_j})\| \\
&\quad + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| \\
&\leq (1 - b_{n_j}) \left[\|u_{n_j} - T u_{n_j}\| + \omega_{n_j} M + \left\| \begin{pmatrix} P_C(I - \rho \nabla f) u_{n_j} \\ -P_C(I - \rho_{n_j} \nabla f) u_{n_j} \end{pmatrix} \right\| \right] \\
&\quad + \|u_{n_j} - u_{n_j} - \omega_{n_j} \vartheta_{n_j}\| \\
&\quad + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| \\
&\leq (1 - b_{n_j}) \left[\|u_{n_j} - T u_{n_j}\| + \omega_{n_j} M \right. \\
&\quad \left. + \|u_{n_j} - \rho \nabla f u_{n_j} - u_{n_j} + \rho_{n_j} \nabla f u_{n_j}\| + \omega_{n_j} \|v_{n_j}\| \right] \\
&\quad + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| \\
&\leq (1 - b_{n_j}) \|u_{n_j} - T u_{n_j}\| + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| \\
&\quad + (1 - b_{n_j}) |\rho_{n_j} - \rho| \|\nabla f u_{n_j}\| + (1 - b_{n_j}) 2\omega_{n_j} M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - b_{n_j}) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| \\
&\quad + (1 - b_{n_j}) (|\rho_{n_j} - \rho| + 2(1 - b_{n_j})\omega_{n_j}) M
\end{aligned} \tag{5.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_{n_j} - u_{n_j}\| &= \|(1 - b_{n_j})(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) + b_{n_j}T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}) - u_{n_j}\| \\
&\leq b_{n_j} \|u_{n_j} - T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| + (1 - b_{n_j})\omega_{n_j} \|\vartheta_{n_j}\| \\
&\leq b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + b_{n_j} \|Tu_{n_j} - T_{n_j}u_{n_j}\| \\
&\quad + b_{n_j} \|T_{n_j}u_{n_j} - T_{n_j}(u_{n_j} + \omega_{n_j}\vartheta_{n_j})\| + (1 - b_{n_j})\omega_{n_j}M \\
&\leq b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + b_{n_j} \|P_C(I - \rho\nabla f)u_{n_j} - P_C(I - \rho_{n_j}\nabla f)u_{n_j}\| \\
&\quad + b_{n_j} \|u_{n_j} - u_{n_j} - \omega_{n_j}\vartheta_{n_j}\| + (1 - b_{n_j})\omega_{n_j}M \\
&\leq b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + b_{n_j} \|u_{n_j} - \rho\nabla f u_{n_j} - u_{n_j} + \rho_{n_j}\nabla f(u_{n_j})\| \\
&\quad + b_{n_j}\omega_{n_j}M + (1 - b_{n_j})\omega_{n_j}M \\
&\leq b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + b_{n_j} |\rho_{n_j} - \rho| \|\nabla f u_{n_j}\| + \omega_{n_j}M \\
&\leq b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + (b_{n_j} |\rho_{n_j} - \rho| + \omega_{n_j}) M
\end{aligned} \tag{5.25}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$B = (\xi + (1 - \xi_{n_j})\omega_{n_j} + |\rho_{n_j} - \rho|) M ,$$

$$C = (1 - b_{n_j}) (|\rho_{n_j} - \rho| + 2(1 - b_{n_j})\omega_{n_j}) M ,$$

$$D = (b_{n_j} |\rho_{n_j} - \rho| + \omega_{n_j}) M$$

olsun. (5.21), (5.23), (5.24) ve (5.25) eşitsizlikleri aşağıdaki şekilde olur:

$$\|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| \leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + (1 - \xi_{n_j}) \|v_{n_j} - u_{n_j}\| + B, \tag{5.26}$$

$$\|v_{n_j} - u_{n_j}\| \leq \|z_{n_j} - v_{n_j}\| + \frac{\xi_{n_j}}{a_{n_j}} M + \frac{1}{a_{n_j}} \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|, \quad (5.27)$$

$$\|z_{n_j} - v_{n_j}\| \leq (1 - b_{n_j}) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + a_{n_j} \|u_{n_j} - z_{n_j}\| + C, \quad (5.28)$$

$$\|z_{n_j} - u_{n_j}\| \leq b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + D. \quad (5.29)$$

(5.29), (5.28)'de, (5.27), (5.26)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|z_{n_j} - v_{n_j}\| &\leq (1 - b_{n_j}) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + a_{n_j} [b_{n_j} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + D] + C \\ &= (1 - b_{n_j} (1 - a_{n_j})) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + a_{n_j} D + C \end{aligned} \quad (5.30)$$

ve

$$\begin{aligned} \|v_{n_j} - u_{n_j}\| &\leq \left(1 - b_{n_j} (1 - a_{n_j})\right) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + a_{n_j} D + C + \frac{\xi_{n_j}}{a_{n_j}} M \\ &\quad + \frac{1}{a_{n_j}} \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \end{aligned} \quad (5.31)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.31) eşitsizliği, (5.25)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| &\leq \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| \\ &\quad + (1 - \xi_{n_j}) \left[(1 - b_{n_j} (1 - a_{n_j})) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| \right. \\ &\quad \left. + a_{n_j} D + C + \frac{\xi_{n_j}}{a_{n_j}} M + \frac{1}{a_{n_j}} \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\| \right] + C \\ &= (1 - \xi_{n_j}) (1 - b_{n_j} (1 - a_{n_j})) \|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| + \left(1 + \frac{1}{a_{n_j}}\right) \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| \\ &\quad + (1 - \xi_{n_j}) \left(a_{n_j} C + B + \frac{\xi_{n_j}}{a_{n_j}} M \right) + B \end{aligned} \quad (5.32)$$

elde edilir. (5.32)'den

$$\|u_{n_j} - Tu_{n_j}\|$$

$$\leq \frac{1}{1-(1-\xi_{n_j})(1-b_{n_j}(1-a_{n_j}))} \left(\left(1 + \frac{1}{a_{n_j}}\right) \|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| + (1 - \xi_{n_j}) \left(a_{n_j}C + B + \frac{\xi_{n_j}}{a_{n_j}}M\right) + A \right) \quad (5.33)$$

eşitsizliği yazılır. (5.33) eşitsizliğinin her iki yanının limiti alınır, $\xi_{n_j} \rightarrow 0$, $\|u_{n_j} - u_{n_{j+1}}\| \rightarrow 0$ ve $B, C, D \rightarrow 0$ olduğundan $\|u_{n_j} - Tu_{n_j}\| \rightarrow 0$ elde edilir. Lemma 3.41'dan $\omega_w(u_n) \subset S = F_T$ olduğu sonucuna ulaşılır.

4. Adım: Bu adımda, $u_n \rightarrow u^*$ olduğu gösterilecektir. Dikkat edilirse,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Fu^* - u^*, u_n - u^* \rangle = \langle Fu^* - u^*, u' - u^* \rangle \leq 0$$

olacak şekilde $u' \in \omega_w(u_n) \subset S$ vardır.

$$E_n = (1 - \xi_n)(1 + a_n)^2 \omega_n \|\vartheta_n\|^2 + 2(1 - \xi_n)(1 + a_n)M \|\vartheta_n\| + \xi_n q \omega_n \|\vartheta\|^2 + qM \|\vartheta_n\| + (1 - \xi_n) \omega_n \|\vartheta_n\|^2$$

olsun. $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$, $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\|\vartheta_n\|\}_{n=0}^\infty$ dizileri sınırlı olduklarından $\{E_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi de sınırlıdır.

Lemma 3.20, Lemma 3.22, (5.5), Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u^*\|^2 &= \left\| \frac{\xi_n F(u_n + \beta_n \vartheta_n)}{(1 - \xi_n)T_n(v_n + \beta_n \vartheta_n) - u^*} \right\|^2 \\ &= \|\xi_n(F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*) + (1 - \xi_n)(T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*)\|^2 \\ &= \left\| \frac{\xi_n(F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - Fu^*)}{(1 - \xi_n)(T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*) + \xi_n(Fu^* - u^*)} \right\|^2 \\ &\leq \|\xi_n(F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - Fu^*) + (1 - \xi_n)(T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*)\|^2 \\ &\quad + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \\ &\leq \xi_n \|F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - Fu^*\|^2 + (1 - \xi_n) \|T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) - u^*\|^2 \\ &\quad - \xi_n(1 - \xi_n) \|F(u_n + \omega_n \vartheta_n) - Fu^* - T_n(v_n + \omega_n \vartheta_n) + u^*\|^2 \\ &\quad + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \xi_n q^2 \|u_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\|^2 + (1 - \xi_n) \|v_n + \omega_n \vartheta_n - u^*\|^2 \\
&\quad + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \\
&\leq \xi_n q^2 \|u_n - u^*\|^2 + \xi_n q^2 \omega_n^2 \|\vartheta\|^2 + \xi_n q^2 \omega_n \langle u_n - u^*, \vartheta_n \rangle \\
&\quad + (1 - \xi_n) \|v_n - u^*\|^2 + (1 - \xi_n) \omega_n^2 \|\vartheta_n\|^2 \\
&\quad + (1 - \xi_n) q^2 \omega_n \langle v_n - u^*, \vartheta_n \rangle + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \\
&\leq \xi_n q^2 \|u_n - u^*\|^2 + (1 - \xi_n) \left(\frac{\|u_n - u^*\|}{1 + a_n} \omega_n \|\vartheta_n\| \right)^2 \\
&\quad + \xi_n q \omega_n^2 \|\vartheta\|^2 + \xi_n q \omega_n \|u_n - u^*\| \|\vartheta_n\| + (1 - \xi_n) \omega_n^2 \|\vartheta_n\|^2 \\
&\quad + (1 - \xi_n) q \omega_n \|v_n - u^*\| \|\vartheta_n\| + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \\
&= (1 - \xi_n (1 - q^2)) \|u_n - u^*\|^2 + (1 - \xi_n) (1 + a_n)^2 \omega_n^2 \|\vartheta_n\|^2 \\
&\quad + 2(1 - \xi_n) (1 + a_n) \omega_n M \|\vartheta_n\| + \xi_n q \omega_n^2 \|\vartheta\|^2 + \xi_n q \omega_n M \|\vartheta_n\| \\
&\quad + (1 - \xi_n) \omega_n^2 \|\vartheta_n\|^2 + (1 - \xi_n) q \omega_n M \|\vartheta_n\| \\
&\quad + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \\
&= (1 - \xi_n (1 - q^2)) \|u_n - u^*\|^2 + (1 - \xi_n) (1 + a_n)^2 \omega_n^2 \|\vartheta_n\|^2 \\
&\quad + 2(1 - \xi_n) (1 + a_n) \omega_n M \|\vartheta_n\| + \xi_n q \omega_n^2 \|\vartheta\|^2 + q \omega_n M \|\vartheta_n\| \\
&\quad + (1 - \xi_n) \omega_n^2 \|\vartheta_n\|^2 + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle \\
&\leq (1 - \xi_n (1 - q^2)) \|u_n - u^*\|^2 \\
&\quad + 2\xi_n \langle Fu^* - u^*, u_{n+1} - u^* \rangle + \omega_n \cdot E_n
\end{aligned} \tag{5.34}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.34) eşitsizliğine Lemma 5.1.1 uygulanırsa $\|u_{n+1} - u^*\| \rightarrow 0$ yani $u_n \rightarrow u^*$ olduğu elde edilir.

Bir sonraki bölümde Ertürk [1] tarafından pertürbasyonlara dirençli olduğu gösterilen (2.3) algoritması yardımıyla SM'nin lineer ters problemlere nasıl uygulandığı gösterilecektir.

5.2. Linear Ters Problemler ve Konveks Minimizasyon Problemi ile İlişkisi

Üstünleştirme metodu, çeşitli pratik uygulamalarda verimliliği artırmak amacıyla kullanılan bir yaklaşımdır. Özellikle görüntü rekonstrüksiyonu [20,22], yoğunluk ayarlı radyasyon tedavisi [24] ve tahribatsız muayene [50] gibi ters problemlerde üstünleştirme, algoritmaların performansını iyileştirmek için perturbasyonlar ekleyerek çalışır. Bu yöntem, orijinal algoritmanın doğruluğunu bozmadan veya çok az bozarak daha hızlı veya daha az kaynak tüketen çözümler üretebilir.

Bu kısımda genellikle regresyon, sinyal işleme, görüntü restorasyonu, tıbbi görüntüleme ve manyetik rezonans görüntüleme gibi alanlarda gürültülü veya eksik veri setleri üzerinde stabil ve güvenilir tahminler elde etmek için yaygın olarak kullanılan ve önemli uygulamalara sahip olan lineer ters problem tanıtılacak ve konveks minimizasyon problemi ile ilişkisi verilecektir. Bu ilişki yardımıyla (2.3) iteratif algoritmasının lineer ters problemleri çözdüğü gösterilecek ve (5.1) iteratif algoritması aracılığıyla SM'nin lineer ters problemlere uygulaması verilecektir.

Tanım 5.2.1. H bir Hilbert uzayı, C , H nin boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. A , H üzerinde eşleniği A^* olan bir sınırlı lineer operatör olsun. $b \in H$ olmak üzere

$$Au = b, u \in C \quad (5.35)$$

problemi konveks olarak kısıtlı lineer ters problem olarak adlandırılır. Bu problem, en küçük kareler yöntemi ile bir konveks minimizasyon problemi olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\min_{u \in C} \frac{1}{2} \|Au - b\|^2.$$

Lineer ters problemlerin çözümü bulunurken istenmeyen dalgalanmaları veya gürültüyü azaltmak için yaygın olarak kullanılan bir teknik olan Tikhonov regularizasyonu ile bu problem

$$\min_{u \in C} f_\lambda(u) = \min_{u \in C} \frac{1}{2} \|Au - b\|^2 + \lambda \|u\|^2 \quad (5.36)$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.36)'daki $\lambda > 0$ bir regülerleştirme parametresidir. İlk terim, veriye olan uyumayı ifade ederken, ikinci terim çözümün büyüklüğünü sınırlar ve bu sayede istenmeyen dalgalanmaları azaltır. Regülerleştirme parametresi λ , çözümün

pürüzsüzleşme derecesini kontrol eder. Daha büyük λ değerleri, çözümün daha fazla pürüzsüzleşmesine neden olur, ancak gerçek veriye daha az uyum sağlayabilir. Bu nedenle, uygun bir λ seçimi, doğru ve stabil bir çözüm elde etmek için önemlidir.

Önerme 5.2.2. f_λ Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $\nabla f_\lambda(u) = A^*(Au - b) + 2\lambda u$ 'dur. Ayrıca ∇f_λ , $(\|A\|^2 + 2\lambda)$ -Lipschitzidir.

İspat: f_λ fonksiyonu için ∇f_λ 'yı hesaplamak için Frechet diferansiyellenebilmenin tanımından

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|f_\lambda(u+v) - f_\lambda(u) - \langle v, j \rangle|}{\|v\|} = 0$$

olacak şekilde $j \in H$ bulunması gerekir.

θ , Hilbert uzayının birim elemanı olmak üzere herhangi bir $v \neq \theta$ için $z \neq \theta$ ve $t > 0$ olmak üzere $v = t.z$ olarak yazalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_\lambda(u+v) - f_\lambda(u) - \langle v, j \rangle &= \frac{1}{2} \|A(u+t.z) - b\|^2 + \lambda \|u+t.z\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|Au - b\|^2 - \lambda \|u\|^2 - t \langle z, j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|Au - b\|^2 + t^2 \frac{1}{2} \|Az\|^2 + t \langle Au - b, Az \rangle \\ &\quad + \lambda \|u\|^2 + \lambda t^2 \|z\|^2 + 2\lambda t \langle u, z \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \|Au - b\|^2 - \lambda \|u\|^2 - t \langle z, j \rangle \\ &= \frac{1}{2} t^2 \|A(z)\|^2 + t \langle Au - b, Az \rangle + \lambda t^2 \|z\|^2 + 2\lambda t \langle u, z \rangle - t \langle z, j \rangle \\ &= t \left[\frac{1}{2} t \|Az\|^2 + \langle Au - b, Az \rangle + \lambda t \|z\|^2 + 2\lambda \langle u, z \rangle - \langle z, j \rangle \right] \end{aligned}$$

olur. Fréchet türevinin tanımından

$$\frac{1}{\|z\|} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} t \|Az\|^2 + \langle Au - b, Az \rangle + \lambda t \|z\|^2 + 2\lambda \langle u, z \rangle - \langle z, j \rangle \right] = 0$$

yazılır. Bu eşitlikte A 'nın lineerliği, eşlenik operatörün tanımını ve iç çarpımın özelliklerini kullanarak

$$[\langle Au - b, Az \rangle + 2\lambda \langle u, z \rangle - \langle z, j \rangle] = 0$$

$$\Rightarrow [\langle Au, Az \rangle - \langle b, Az \rangle + 2\lambda \langle u, z \rangle - \langle z, j \rangle] = 0$$

$$\Rightarrow [\langle A^*(Au), z \rangle - \langle A^*b, z \rangle + \langle 2\lambda u, z \rangle - \langle j, z \rangle] = 0$$

$$\Rightarrow [\langle A^*(Au) - A^*b + 2\lambda u - j, z \rangle] = 0$$

yani,

$$j = \nabla f_\lambda(u) = A^*(Au) - A^*b + 2\lambda u$$

$$= A^*(Au - b) + 2\lambda u, u \in H,$$

olduğu elde edilir. Ayrıca, üçgen eşitsizliği ve A 'nın sınırlı ve lineer olmasını kullanarak

$$\begin{aligned} \|A^*(Au - b) + 2\lambda u - A^*(Av - b) - 2\lambda v\| &= \|A^*(Au - Av) + 2\lambda(u - v)\| \\ &= \|A^*A(u - v) + 2\lambda(u - v)\| \\ &\leq \|A^*A(u - v)\| + 2\lambda\|u - v\| \\ &\leq \|A^*A\|\|u - v\| + 2\lambda\|u - v\| \\ &\leq \|A\|\|A^*\|\|u - v\| + 2\lambda\|u - v\| \\ &= (\|A\|^2 + 2\lambda)\|u - v\| \end{aligned}$$

olduğundan f_λ fonksiyonunun gradienti olan ∇f_λ 'nin $(\|A\|^2 + 2\lambda)$ -Lipschitzian olduğu görülür.

Lineer ters problemin konveks minimizasyon formuna dönüştürülmesi konveks minimizasyon probleminin çözümünü bulmak için kullanılan çeşitli etkili iteratif algoritmaların ve yöntemlerin kullanılmasına olanak tanır. Bu bağlamda, Önerme 5.2.2'i dikkate alarak Ertürk ve ark.'nın [11]'de göstermiş oldukları, (2.3) iteratif algoritmasının konveks minimizasyon probleminin bir tek çözümüne güçlü yakınsaması sonucunu lineer ters problemlere aşağıdaki gibi uygulayabiliriz:

Teorem 5.2.3. $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \frac{2}{\|A\|^2 + 2\lambda}$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$,

$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$ olmak üzere $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{\xi_n\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$ ve $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$

için aşağıdaki şartlar sağlansın.

$$\text{i) } \xi_n \rightarrow 0,$$

- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n = \infty$,
- iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_{n+1} - \xi_n| < \infty$,
- iv) $\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_{n+1} - \rho_n| < \infty$,
- v) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < \infty$.

Bu takdirde

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \xi_n F u_n + (1 - \xi_n) P_C((1 - 2\lambda\rho_n)v_n - \rho_n A^* A v_n + \rho_n A^* b) \\ v_n = (1 - a_n) P_C((1 - 2\lambda\rho_n)u_n - \rho_n A^* A u_n + \rho_n A^* b) \\ \quad + a_n P_C((1 - 2\lambda\rho_n)z_n - \rho_n A^* A u_n + \rho_n A^* b) \\ z_n = (1 - b_n)u_n \\ \quad + b_n P_C((1 - 2\lambda\rho_n)u_n - \rho_n A^* A u_n + \rho_n A^* b) \end{array} \right. \quad (5.36)$$

ile verilen (5.36) iteratif algoritması, (5.35) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar.

İspat: [11]'de bulunan Teorem 3.2'de $\nabla f_\lambda(u) = A^*(Au - b) + 2\lambda$ olduğu ve ∇f_λ 'nın $(\|A\|^2 + 2\lambda)$ -Lipschitzian olduğu kullanılırsa (5.36) iteratif algoritmasının (5.35) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsadığı sonucu elde edilir.

5.3. Üstünleştirme Metodunun Lineer Ters Problemlere Uygulanması

(5.36) iteratif algoritması temel algoritma olarak alalım. (5.36)'nın üstünleştirilmiş versiyonu aşağıda verilen (5.37) iteratif algoritmasıdır.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \xi_n F(u_n + \omega_n \vartheta_n) + (1 - \xi_n) P_C\left(\begin{array}{l} (1 - \rho_n 2\lambda)(v_n + \omega_n \vartheta_n) - \rho_n A^* A(v_n + \omega_n \vartheta_n) \\ + \rho_n A^* b \end{array}\right) \\ v_n = (1 - a_n) P_C\left(\begin{array}{l} (1 - \rho_n 2\lambda)(u_n + \omega_n \vartheta_n) - \rho_n A^* A(u_n + \omega_n \vartheta_n) + \rho_n A^* b \\ + a_n P_C\left(\begin{array}{l} (1 - \rho_n 2\lambda)(z_n + \omega_n \vartheta_n) - \rho_n A^* A(u_n + \omega_n \vartheta_n) + \rho_n A^* b \end{array}\right) \end{array}\right) \\ z_n = (1 - b_n)(u_n + \omega_n \vartheta_n) \\ \quad + b_n P_C\left(\begin{array}{l} (1 - \rho_n 2\lambda)(u_n + \omega_n \vartheta_n) - \rho_n A^* A(u_n + \omega_n \vartheta_n) + \rho_n A^* b \end{array}\right) \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Aşağıdaki teoremden, (5.1) ile verilen ve Teorem 5.1.2'de sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençli olduğu gösterilen GPA'yı kullanarak üstünleştirme metodunun (5.35) problemine bir uygulaması verilecektir.

Teorem 5.3.1. $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$, negatif olmayan sayıların $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n < \infty$ şartını gerçekleyen bir dizisi ve $\{\vartheta_n\}_{n=0}^{\infty}$, H 'de sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < \infty$

$\frac{2}{\|A\|^2 + 2\lambda}$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$ olmak üzere

$\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{\xi_n\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$ ve $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

- i) $\xi_n \rightarrow 0$,
- ii) $\sum_{n=0}^\infty \xi_n = \infty$,
- iii) $\sum_{n=0}^\infty |\xi_{n+1} - \xi_n| < \infty$,
- iv) $\sum_{n=0}^\infty |\rho_{n+1} - \rho_n| < \infty$,
- v) $\sum_{n=0}^\infty |a_{n+1} - a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=0}^\infty |b_{n+1} - b_n| < \infty$.

(5.36) ile verilen iteratif algoritma sınırlı pertürbasyonlara karşı dirençlidir. Yani, (5.37) ile verilen iteratif algoritma, (5.35) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsar.

İspat: $\nabla f_\lambda(u) = A^*(Au - b) + \lambda u$, $L(f_\lambda) = \|A\|^2 + 2\lambda$ olduğu göz önüne alınarak Teorem 5.1.2'den (5.37) iteratif algoritmasının (5.35) probleminin bir çözümüne güçlü yakınsadığı sonucuna ulaşılır.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde sabit nokta ve lineer ters problemlerinin konveks minimizasyon problemi ile ilişkisi dikkate alınarak, [1]'de elde edilen, modifiye edilmiş bir Picard tipi iteratif algoritma olan (2.3)'ün pertürbasyonlara dirençli olması sonucu incelenmiştir. (2.3) iteratif algoritmasının lineer ters problemleri çözdüğü gösterilmiş, [1]'de elde edilen sonuç aracılığıyla üstünleştirme yöntemi lineer ters problemlere uygulanmıştır.

Üstünleştirme metodu, mevcut algoritmaları optimize ederek ve yeni uygulamalara uyarlayarak geniş bir yelpazede kullanılabilir. Bu sebeple, (5.1) algoritması yeni uygulamalar için kullanılabilir.

Bunun yanı sıra farklı iteratif algoritmalar alınarak bunların pertürbasyon dirençliği incelenebilir. Bu iteratif algoritmalar yardımıyla üstünleştirme metodunun görüntü restorasyonunda görüntü bozulmalarının azaltılması, makine öğrenmesi ve yapay zekâ alanlarında çıkarma, veri temizleme ve model optimizasyonu yapılması, sinyal işleme uygulamalarında sinyallerdeki gürültüyü azaltmak veya sinyal kalitesini artırmak gibi çeşitli gerçek dünya problemlerinde uygulanabileceğini öngörmekteyiz.

KAYNAKÇA

- [1] Ertürk, M. (2024). "Superiorization of a Modified Picard-type Gradient Projection Algorithm: Convergence and Applications", Dergiye gönderildi.
- [2] Picard, E. (1890). "Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives". Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6, 145-210.
- [3] Krasnoselskij, M. A. (1955). "Two remarks on the method of successive approximations", Uspekhi Mathematical Nauk, 10, 123-127.
- [4] Mann, W. R. (1953). "Mean Value Methods in Iteration", American Mathematical Society, 4(3), 506-510.
- [5] Ishikawa, S. (1974). "Fixed Points by A New Iteration Method", American Mathematical Society, 44(1), 147-150.
- [6] Noor, M. A. (2000). "New approximation schemes for general variational inequalities", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251(1), 217-229.
- [7] Sahu, D. R. (2011). "Applications of the S-iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems". Fixed Point Theory 12(2), 187-204.
- [8] Gürsoy, F. (2016). "A Picard-S iterative method for approximating fixed point of weak-contraction mappings", Filomat, 30(8), 2127-2137.
- [9] Gürsoy, F. & Karakaya, V. (2014). "A Picard-S Hybrid Type Iteration Method for Solving A Differential Equation with Retarded Argument", 1-16, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1403.2546>.
- [10] Ertürk, M., Gürsoy, F., Ansari, Q. & Karakaya, V. (2020). "Picard type iterative method with applications to minimization problems and split feasibility problems". Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 21(4).
- [11] Ertürk, M., Gürsoy, F., Ansari, Q. & Karakaya, V. (2018). "Modified Picard type iterative algorithm for nonexpansive mappings". Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 19(6), 919-933.
- [12] Gürsoy, F., Ertürk, M. & Abbas, M. (2020). "A Picard-type iterative algorithm for general variational inequalities and nonexpansive mappings". Numerical Algorithms, 83(4), 867-883.
- [13] Abbas, M. & Nazir, T. (2014). "Some new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems". Matematik Vesnik, 66(2), 223-234.

- [14] Garodia, C., Uddin, I. & Baleanu, D. (2022). "On constrained minimization, variational inequality and split feasibility problem via new iteration scheme in Banach spaces". *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 48(4), 1493-1512.
- [15] Keten Çopur, A., Hacıoğlu, E., Gürsoy, F. & Ertürk, M. (2021). "An efficient inertial type iterative algorithm to approximate the solutions of quasi variational inequalities in real Hilbert spaces". *Journal of Scientific Computing*, 89(2), 1-28.
- [16] Ertürk, M., Gürsoy, F. & Şimşek, N. (2021). "S-iterative algorithm for solving variational inequalities". *International Journal of Computer Mathematics*, 98(3), 435-448.
- [17] Ansari, Q. H. (2011). *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization*. World Education.
- [18] Levitin, E. S. & Polyak, B. T. (1966). "Constrained minimization methods". *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(3), 14-29.
- [19] Xu, H. K. (2011). "Averaged Mappings and the Gradient-Projection Algorithm", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 150(2), 360–378.
- [20] Davidi, R., Herman, G. T. & Censor, Y. (2009). "Perturbation-resilient block-iterative projection methods with application to image reconstruction from projections", *International Transactions in Operational Research*, 16(4), 505–524.
- [21] Censor, Y., Davidi, R. & Herman, G. T. (2010). "Perturbation resilience and superiorization of iterative algorithms", *Inverse Problem*, 26(6), 065008.
- [22] Nikazad, T., Davidi, R. & Herman, G. T. (2012). "Accelerated perturbation-resilient blockiterative projectionmethods with application to image reconstruction". *Inverse Problem*, 28(3), 035005.
- [23] Herman, G. T., Garduño, E., Davidi, R. & Censor, Y. (2012). "Superiorization: An optimization heuristic for medical physics", *Medical Physics*, 39(9), 5532–5546.
- [24] Bonacker, E., Gibali, A. & Küfer, K. H. (2021). "Accelerating two projection methods via perturbations with application to intensity-modulated radiation therapy". *Applied Mathematics and Optimization*, 83(2), 881-914.
- [25] Jin, W., Censor, Y. & Jiang, M. (2016). "Bounded perturbation resilience of projected scaled gradient methods", *Computational Optimization and Applications*, 63(2), 365–392.
- [26] Xu, H.K. (2017). "Bounded Perturbation Resilience and Superiorization Techniques for Projected Scaled Gradient Method", *Inverse Problem*, 33 (4), 19.
- [27] Ertürk, M. & Salkım, A. (2023). "Superiorization and bounded perturbation resilience of a gradient projection algorithm solving the convex minimization problem". *Optimization Letters*, 17, 1957-1978.

- [28] Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. Inc., United States of America.
- [29] Çakar, Ö. (2007). Fonksiyonel Analize Giriş 1 Erwin Kreyszig'den Uyarlanmış Yeniden Düzenlenmiş . A. Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletme Yayınları, 7. Baskı, Ankara.
- [30] Maddox, I. J. (1988). Elements of Functional Analysis, Second Edi. Cambridge University Press, New York.
- [31] Ankara Üniversitesi Fonksiyonel Analiz I dersi Açık Erişim Ders Notları. <https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=88>
- [32] Lipschutz, S. (1965). Schaum's Outline of General Topology. McGraw-Hill Companies, Incorporated, Birleşik Krallık.
- [33] Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.
- [34] Ceng, L. C., Guu, S. M. & Yao, J. C. (2013). "Hybrid methods with regularization for minimization problems and asymptotically strict pseudocontractive mappings in the intermediate sense", Journal of Optimization Theory and Applications, 157(3), 717–732.
- [35] Chang, S. S. (1997). "On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216(1), 94–111.
- [36] [https://en.wikipedia.org/wiki/Weak_convergence_\(Hilbert_space\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Weak_convergence_(Hilbert_space))(02.07.2024)
- [37] Opial, Z. (1967). "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings", Bull. American Mathematical Society, 73(4), 591–597.
- [38] Agarwal, R. P., O'Regan, D. & Sahu, D. R. (2007). "Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings", Journal of Nonlinear Convex Analysis, 8(1), 61–79.
- [39] Berinde, V. (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics. Springer.
- [40] Sahu, D. R., O'Regan, D. & Agarwal, R. P. (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer.
- [41] Banach, S. (1922). "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales", Fundamenta Mathematica, 3(1), 133–181.
- [42] Cegielski, A. (2012). Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces. Lecture Notes in Mathematics 2057. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [43] Ansari, Q. H. (2014). Nonlinear Analysis: Approximation Theory, Optimization and Applications (Trend in Mathematics), Birkhauser.

- [44] Zeidler, E. (1985). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: III: Variational Methods and Optimization*. Springer Science+Business Media, New York.
- [45] Nagurney, A. (1999). *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Revised Se. Boston, MA: Springer US.
- [46] Ansari, Q. H. (2012). *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization*, World Education, Dehli.
- [47] Baillon, J. B. & Haddad, G. (1977). "Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés etn-cycliquement monotones", *Israel Journal of Mathematics*, 26(2), 137–150.
- [48] Censor, Y. (2015). "Weak and strong superiorization: Between feasibility-seeking and minimization", *Analele Stiint. ale Univ. Ovidius Constanta, Seria Matematica, Versita*, 23(3), 41-54.
- [49] Xu, H. K. (2002). "Iterative algorithms for nonlinear operators". *Journal of the London Mathematical Society*, 66, 240–256.
- [50] Schrapp, M. J. & Herman, G. T. (2014). "Data fusion in X-ray computed tomography using a superiorization approach". *Review of Scientific Instruments*, 85(5), 053701.