



**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MODİFİYE EDİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN
OPERATÖR SPLITTING KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE
KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

İbrahim Halil TİCİ

**Ağustos-2024
BATMAN**

**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MODİFİYE EDİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN
OPERATÖR SPLITTING KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE
KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

İbrahim Halil TİCİ

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA**

**Ağustos-2024
BATMAN**

TEZ KABUL VE ONAYI

İbrahim Halil TİCİ tarafından hazırlanan “Modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin operatör splitting kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik çözümleri” adlı tez çalışması 24/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

.....

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet GÜZEL

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İbrahim Halil TİCİ

Tarih:24.08.2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODİFİYE EDİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN OPERATÖR SPLITTING KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

İbrahim Halil TİCİ

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

2024, 83 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA
Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet GÜZEL

Bu tez dört bölümden oluşmakta olup tezin giriş bölümünde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili genel bilgiler verildi. Ayrıca çeşitli dalga olaylarını modelleyen bazı kısmi diferansiyel denklemlerin yanında, bu tezde nümerik çözümleri hesaplanan modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denklemi tanıtıldı. Bu tezde kullanılan başka bir yöntem olan operatör splitting ile ilgili kısaca bilgiler verildi. Bu tezde nümerik çözümleri hesaplanan MEW denkleminin literatür taramasına giriş bölümünde yer verildi. Bunlara ek olarak MEW denkleminin sağladığı I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve literatürde sıkça kullanılan L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tezin ikinci bölümde, MEW denkleminin nümerik çözümlerinde kullanılacak olan sonlu fark yöntemleri, ağırlıklı kalan yöntemi, kollokasyon yöntemi, sonlu eleman yöntemi, spline fonksiyonlar, trigonometrik B-spline fonksiyonlar ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar ile ilgili konular anlatıldı. Daha sonra operatör splitting yöntemlerinden olan Lie-Trotter ve Strang bölme yöntemleri çözüm şemaları ile birlikte sunuldu. Üçüncü bölümde, modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin operatör splitting yöntemi uygulanarak lineer ve bir diğeri lineer olmamak üzere iki alt denkleme parçalandı. Ardından her bir alt denkleme kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemleri kullanıldı. Ardından Lie-Trotter ve Strang bölme şemalarının kararlılık analizleri Fourier Von Neumann kararlılık analizi yöntemi ile incelendi. Daha sonra bu tezde kullanılan yöntem ile hesaplanan nümerik sonuçlar literatürde bulunan farklı çalışmalarla elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tezin dördüncü yani sonuç bölümünde, nümerik sonuçlarla ilgili genel bir değerlendirme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Kollokasyon yöntemi, kübik trigonometrik B-spline, mew denklemi, operatör splitting, solitary ve soliton dalgaları, sonlu eleman yöntemi.

ABSTRACT

MS THESIS

NUMERICAL SOLUTIONS OF MODIFIED EQUAL WIDTH WAVE EQUATION WITH OPERATOR SPLITTING CUBIC TRIGONOMETRIC B-SPLINE COLLOCATION FINITE ELEMENT METHOD

İbrahim Halil TİCİ

Batman University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA

2024, 83 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. İhsan ÇELİKKAYA

Asst. Prof. Dr. Gonca ÇELİKTEN

Asst. Prof. Dr. Ahmet GÜZEL

This thesis consists of four chapters. In the introduction, general information regarding nonlinear partial differential equations is provided. Additionally, some partial differential equations that model various wave phenomena are discussed, along with the modified equal width (MEW) wave equation, whose numerical solutions are computed in this thesis. A brief overview of the operator splitting method, another technique used in this thesis, is given. The literature review on the MEW equation, whose numerical solutions are calculated, is also included in the introduction. Furthermore, the conservation constants I_1 , I_2 and I_3 satisfied by the MEW equation and the commonly used L_2 and L_∞ error norms in the literature are presented. In the second chapter, topics related to the finite difference methods, weighted residual methods, collocation methods, finite element methods, spline functions, trigonometric B-spline functions, and cubic trigonometric B-spline functions, which are used in the numerical solutions of the MEW equation, are discussed. Then, the solution schemes of the Lie-Trotter and Strang splitting methods, which are types of operator splitting methods, are presented. In the third chapter, the operator splitting method is applied to the modified equal width wave equation, splitting it into two sub-equations: one linear and the other nonlinear. Subsequently, each sub-equation is solved using cubic trigonometric B-spline collocation finite element methods. The stability analysis of the Lie-Trotter and Strang splitting schemes is examined using the Fourier Von Neumann stability analysis method. Following this, the numerical results computed using the methods employed in this thesis are compared with the results obtained in different studies in the literature. In the fourth and final chapter, a general evaluation of the numerical results is provided.

Keywords: Collocation method, cubic trigonometric B-spline, mew equation, operator splitting, solitary and soliton waves, finite element method.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini bizlerle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam; Dr. Öğr. Üyesi İhsan ÇELİKKAYA'ya, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Ömer ALKUM ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli eşim Özden Gül TİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İbrahim Halil TİCİ
BATMAN-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
2.1. Sonlu Fark Yöntemi.....	5
2.2. Ağırlıklı Kalan Yöntemi	6
2.2.1. Kollokasyon Yöntemi	8
2.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	8
2.4. Spline Fonksiyonlar	11
2.4.1. Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar	13
2.4.2. Lineer Trigonometrik B-Spline	13
2.4.3. Kuadratik Trigonometrik B-Spline	16
2.4.4. Kübik Trigonometrik B-Spline	21
2.5. Operatör Splitting Yöntemi	27
3. BULGULAR.....	30
3.1. Modifiye Edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Operatör Splitting Kübik Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Nümerik Çözümleri	30
3.2. Kararlılık Analizi	34
3.3. Model Problemler	35
4. SONUÇLAR.....	76
KAYNAKLAR	78
5. ÖZGEÇMİŞ	83

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Lineer trigonometrik B-spline	15
Şekil 2.2. Lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları	15
Şekil 2.3. Kuadratik trigonometrik B-spline.....	18
Şekil 2.4. Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonun birinci türevi.....	19
Şekil 2.5. Kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları.....	19
Şekil 2.6. Kübik trigonometrik B-spline.....	23
Şekil 2.7. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birinci türevi	24
Şekil 2.8. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının ikinci türevi.....	24
Şekil 2.9. Kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları.....	25
Şekil 3.1. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın farklı değerleri için fiziksel davranışı.....	43
Şekil 3.2. Problem 2'nin $\Delta t = 0.025$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq$ 80 değerleri için farklı zamanlardaki iki solitary dalganın girişimi.	46
Şekil 3.3. Problem 3'ün $t = 12.5$ zamandaki farklı değerleri için maxwellian başlangıç koşulu.....	51
Şekil 3.4. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın farklı A değerleri için fiziksel davranışı ve mutlak hatalar.....	62
Şekil 3.5. Problem 2'nin $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için farklı zamanlardaki iki solitary dalganın girişimi.	65
Şekil 3.6. Problem 3'ün $t = 12.5$ zamandaki farklı μ değerleri için maxwellian başlangıç koşulu.....	67

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için Lie-Trotter ve Strang şemalarıyla hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.....	38
Tablo 2. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.	39
Tablo 3. Problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.	40
Tablo 4. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının (Karakoç, 2011:42; Esen, 2006)) ile karşılaştırılması.....	41
Tablo 5. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının (Karakoç, 2011:42) ile karşılaştırılması.....	41
Tablo 6. Problem 1'in $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ ve değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ iken (Karakoç, 2011:43-44) ile karşılaştırılması.	42
Tablo 7. Problem 2'nin $h = 0.1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin korunum sabitlerinin $\Delta t = 0.025$ ve $\Delta t = 0.01$ iken karşılaştırılması.	44
Tablo 8. Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin korunum sabitlerinin $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ ken karşılaştırılması.....	45
Tablo 9. Problem 2'nin $h = 0.1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $\Delta t = 0.025$ ve 0.01 değerleri için Problem 2'nin korunum sabitleri ve (Karakoç, 2011:47) ile karşılaştırılması.....	46
Tablo 10a. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için A-B şeması ile hesaplan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri.	48
Tablo 10b. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için B-A şeması ile hesaplan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri.....	48
Tablo 10c. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için A-B-A şeması ile hesaplan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri.	49
Tablo 10d. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için B-A-B şeması ile hesaplan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve (Çelikkaya, 2019:63) ile karşılaştırılması.	50
Tablo 11. Problem 1'in farklı A değerleri için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin analitik değerleri.	52
Tablo 12. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 1.0$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	52
Tablo 13. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 1.0$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	53
Tablo 14. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.75$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	54

Tablo 15. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.75$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	54
Tablo 16. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	55
Tablo 17. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	56
Tablo 18. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 70$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	57
Tablo 19. Problem 1'in $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	58
Tablo 20. Problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	58
Tablo 21. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	59
Tablo 22. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 20$ iken h adım aralığının değişimine göre hata normlarının karşılaştırılması.	60
Tablo 23. Problem 1'in $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 20$ iken Δt adım aralığının değişimine göre hata normlarının karşılaştırılması.	61
Tablo 24. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	61
Tablo 25. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 70$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	62
Tablo 26. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.	64
Tablo 27. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve (Karta ve Kutluay,2022:17), (Başhan ve ark., 2021) çalışmalarıyla karşılaştırılması.	66
Tablo 28. Problem 1'in $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	68
Tablo 29. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	69
Tablo 30. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.01$, $A = 0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0 , $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ ve $t = 20$ için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	70

Tablo 31. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.	71
Tablo 32. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 12.5$ zamanında bazı çalışmalarla karşılaştırılması. ..	72
Tablo 33. Problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.	73
Tablo 34. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $A_1 = \sqrt{1/16}$, $A_2 = \sqrt{1/32}$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.....	73
Tablo 35. Problem 1'in $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.....	74
Tablo 36. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.	74
Tablo 37. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve (Raslan, 2006:44) ile karşılaştırılması.	75

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltmalar	Açıklama
MEW	Modified Equal width
EW	Equal Width
RLW	Regularized long wave
KDW	Korteweg-de vries
h	Konum adım uzunluğu
Δt	Zaman adım uzunluğu
A	Dalga genliği
I_1	Kütle korunum sabiti
I_2	Momentum korunum sabiti
I_3	Enerji korunum sabiti
L_2	Ortalama hata normu
L_∞	Maximum hata normu

1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün olmadığı durumlarda nümerik (sayısal) analize başvurulur. Nümerik analizin amacı; çözümün analitik olarak zor veya karmaşık olan problemlerin çözülebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşımı veren yöntemleri bulmak, ayrıca bunlardan anlamlı ve faydalı sonuçlar çıkarmaktır. Nümerik analizde, tam çözümü bulunamayan veya bulunması zor olan kısmi diferansiyel denklem ya da denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için birçok sayısal yöntem kullanılmaktadır. Lineer olmayan diferansiyel denklemler, sıvı mekaniği, katı hal fiziği, optik lifler, kimyasal kinetik, jeokimya ve plazma fiziği gibi birçok bilim alanında temel bir rol oynamaktadır. Dağılım, dağılma, difüzyon, reaksiyon ve konveksiyon gibi doğa olayları lineer olmayan dalga denklemleri için oldukça önemlidir (Wazwaz, 2006).

Doğrusal olmayan dalga olaylarını modelleyen Korteweg de-Vries (KdV) (Korteweg ve Vries, 1895) denklemi aşağıdaki formda verilmektedir:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Lineer olmayan yayılan dalga olaylarını açıklayan bir başka denklem de, düzenli uzun dalga (RLW) denklemi;

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

formundadır. RLW denklemi dalga olaylarını modellemek için KdV denkleminde daha çok kullanılan bir denklemdir. Dalga olaylarını modelleyen bir başka denklem de eşit genişlikli dalga (EW) denklemi

$$u_t + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

biçiminde (Evans ve Raslan, 2005; Gardner ve Gardner, 1992) tarafından tanıtıldı. Bu tezde nümerik çözümleri elde edilen modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga (MEW) denklemi $x \rightarrow \pm\infty$, $u \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşulları ile birlikte aşağıdaki formda verildi:

$$u_t + 3u^2u_x - \mu u_{xxt} = 0. \tag{1.1}$$

Burada t zaman, x konum koordinatı, μ pozitif bir parametre ve $u(x, t)$ sıvı problemlerinde, su yüzeyinin dikey yer değiştirmesi olan genlik iken plazma uygulamalarında u elektrostatik potansiyelin negatifidir (Evans ve Raslan, 2005).

Çeşitli başlangıç ve sınır koşulları altında, MEW denkleminin birkaç analitik ve nümerik çözümü vardır. MEW denklemin nümerik çözümleri birçok araştırmacı tarafından elde edilmiştir. Hamdi ve ark. (Hamdi, Enright, Schiesser ve Gottlieb, 2003), genelleştirilmiş EW ve EW-Burgers denklemi için kesin soliter dalga çözümleri türettiler. Wazvaz (Wazvaz, 2006), sinüs-kosinüs ve tanh yöntemi ile MEW denklemini üzerinde çalıştı. Esen ve Kutluay (Esen ve Kutluay, 2008), MEW denkleminin çözümlerini sonlu fark yöntemleri kullanarak elde ettiler. Evans ve Raslan (Evans ve Raslan, 2005), GEW denklemini kuadratik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak çözdüler. Raslan (Raslan, 2006), genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga (GEW) denklemini kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile çözdü. Jin (Jin, 2009), MEW denklemini için homotopi pertürbasyon yöntemine dayalı analitik bir yaklaşım kullandı. Lu (Lu, 2009), MEW denklemin analitik çözümü için varyasyonel iterasyon yöntemini kullandı. Esen (Esen, 2006), Lumped Galerkin yöntemi ikinci dereceden ve kübik B-spline ile birleştirerek çözdü. Zaki (Zaki, 2000) ve (Zaki, 2000)'de kuintik B-spline bazlar kullanarak Petrov-Galerkin yöntemiyle MEW denklemini çözdü. S.G. Karakoç ve H. Zeybek (Gazi Karakoç ve Zeybek, 2016) GEW dalga denklemini Lumped Galerkin kübik B-spline fonksiyonları ve (Zeybek ve Gazi Karakoç, 2017)'de iki farklı lineerleştirme tekniği ile algoritma kullanılan quintic B-spline kullanarak çözdüler. Roshan (Roshan, 2011), MEW denklemini Petrov-Galerkin yöntemi ile çözdü. Geyikli ve Karakoç (Geyikli ve Gazi Karakoç, 2011; Gazi Karakoç ve Geyikli, 2015), MEW denklemin yaklaşık çözümlerini sırasıyla hem quartik hem de sextik b-spline kullanarak Subdomain sonlu eleman ile nümerik çözümlerini elde ettiler. Saka (Saka, 2007), kuintik B-spline ile sıralama algoritmalarını kullanarak çözdü. Karakoç ve ark. (Gazi Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012), kübik B-spline kollokasyonu üzerinde, FEM yardımıyla, farklı lineerleştirme teknikleri kullandılar. Kaplan ve Dereli (Gül Kaplan ve Dereli, 2017), iyi bilinen radyal temel fonksiyonlarla sıralamaya dayalı meshless yöntemini kullanarak çözdüler. Cheng ve Liew (Cheng ve Liew, 2012), MEW denklemin sayısal çözümü için geliştirilmiş element içermeyen Galerkin (IEFG) yöntemi ile çözüm elde ettiler. Lu (Lu, 2007), MEW denklemin analitik çözümü için varyasyonel iterasyon yöntemini kullandı.

Taghizadeh (Taghizadeh, Mirzazadeh, Paghaleh ve Vahidi, 2012), değiştirilmiş basit denklem yöntemini MEW denklemine uygulayıp çözdü. Taha ve Noorani (Taha ve Noorani, 2014), G'/G -Genişletme yöntemiyle MEW denklemini çözdü. Rui ve ark. (Rui, Xie, Long ve He, 2007), integral çatallanma yöntemini kullanarak MEW denklemini çözdü. Gardner ve Gardner (Gardner ve Gardner, 1992), EW denklemini Galerkin yöntemi ile çözdüler. Essa (Essa, 2016), multigred yöntemini uygulayarak MEW denklemini çözdü. Yağmurlu ve Karakaş (Yağmurlu ve Karakaş, 2021), trigonometrik kübik B-spline yöntemi ile MEW denklemini çözdü. Çelikkaya (Çelikkaya, 2019), kübik B-spline ile kollokasyon yöntemlerini kullanarak strang bölme şeması ile denklemi çözdü. MEW (1.1) denkleminin soliter dalgaya sahip analitik çözümü aşağıdaki formdadır:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}[k(x - x_0 - vt)]. \quad (1.2)$$

Burada $k = 1/\sqrt{\mu}$ ve $v = A^2/2$. Hareket eden dalgaların çok özel bir türü olan soliton dalgalar, zaman ilerledikçe şeklini, hızını ve yüksekliğini koruyan dalgalardır. Soliton dalgalar başka bir soliton dalga ile çarpıştıktan sonra bile şeklini, hızını ve yüksekliğini koruyabilen dalgalardır (Gardner ve Gardner, 1992). MEW (1.1) denklemi tarafından sağlanan üç korunum sabitleri Olver (Olver, 1979) tarafından aşağıdaki şekilde verildi:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx \text{ ve } I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^4 dx. \quad (1.3)$$

Analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkı hesaplamak için L_2 ve L_∞ hata normlarını kullanıldı. L_2 ve L_∞ hata normları aşağıdaki formüller kullanılarak hesaplanır

$$L_2 = \|u^{exact} - U\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{exact} - U_j|^2} \quad (1.4)$$

$$L_\infty = \|u^{exact} - U\|_\infty = \max_j |u_i^{exact} - U_j|.$$

Bu çalışmada MEW denklemi Lineer ve lineer olmayan iki alt probleme parçalandı. Her bir alt problem kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman

yöntemi ile çözüldü. Ana denklemin çözümü, Lie-Trotter ve Strang bölme (Trotter, 1959; Strang, 1968; Çelikkaya, 2019:53) şeması kullanılarak elde edildi.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Sonlu Fark Yöntemi

Matematik, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkan problemler, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler veya sistemleri ile ifade edilirler. Bu tip denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik yani tam çözümü olmadığı ya da zor olduğu durumlarda, bu tür denklemleri çözebilmek için nümerik yöntemler kullanılır. Sonlu fark yöntemleri bu yöntemlerden biridir. Sonlu fark yöntemlerinde diferansiyel denklemin uygun tanım aralığı üzerinde, sonlu sayıda bölüntü noktalarına ayrılarak, tüm bölüntü noktalarındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımları yazılması şeklinde özetlenebilir. Sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi yardımıyla bulunur.

$[a, b]$ tanım aralığı için N bir pozitif doğal sayı ve $h = \frac{b-a}{N}$ bölünme noktaları olmak üzere

$$x_m = a + mh, m = 1, 2, \dots, N$$

olsun. Bu durumda, $u(x)$ ve türevleri tanım aralığında sürekli olmak üzere, $u(x_m + h)$ ve $u(x_m - h)$ terimlerinin x_m noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u(x_m + h) = u(x_m) + hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (2.1.1)$$

$$u(x_m - h) = u(x_m) - hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots \quad (2.1.2)$$

şeklinde bulunur. Gerekli işlemler sonucunda (2. 1. 1) ve (2. 1. 2) eşitliklerinden birinci mertebeden türevlere yaklaşımlar

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m+h)-u(x_m)}{h} + O(h) \Rightarrow (u_x)_m \approx \frac{u_{m+1}-u_m}{h} \quad (2.1.3)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m)-u(x_m-h)}{h} + O(h) \Rightarrow (u_x)_m \approx \frac{u_m-u_{m-1}}{h} \quad (2.1.4)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m+h)-u(x_m-h)}{2h} + O(h^2) \Rightarrow (u_x)_m \approx \frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h} \quad (2.1.5)$$

olarak bulunur. (2. 1. 3), (2. 1. 4) ve (2. 1. 5) ifadelerindeki yaklaşımlar başka bir gösterimle

$$U_x = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h) \quad \text{İleri fark,}$$

$$U_x = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h) \quad \text{Geri fark,}$$

$$U_x = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h) \quad \text{Merkezi fark}$$

olarak yazılabilir. Taylor seri açılımları yardımıyla t ye bağlı birinci derecen fark formülleri benzer şekilde

$$U_t = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{h} + O(k) \quad \text{İleri fark,}$$

$$U_t = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{h} + O(k) \quad \text{Geri fark}$$

elde edilir. İkinci dereceden fark formülleri yine Taylor seri açılımları yardımıyla

$$U_{xx} = \frac{U_m^n - U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h) \quad \text{İleri fark,}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{m-2}^n - U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h) \quad \text{Geri fark,}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{m-1}^n - U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Merkezi fark}$$

şeklinde bulunur (Mersinli, 2014:5).

2.2. Ağırlıklı Kalan Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin analitik çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamalarının minimum yapılması ağırlıklı kalan yaklaşımıdır. Bu yaklaşıma da ağırlıklı kalan yöntemi denir. Her denklemin ağırlıklı integral ifadesi elde edilebileceği için her denkleme uygulanabilir. Ağırlıklı kalan yöntemleri her denklemin ağırlıklı integral formunu oluşturmakta kullanılabilir. Ağırlıklı integral form problemin sınır şartlarını içermediğinden, ağırlık

fonksiyonları analitik çözümün hem doğal hem de temel sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için D bölgesinde

$$A(u) = f \quad (2.2.1)$$

operatör denklemini ele alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, u bağımlı değişken ve f bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Buradaki u fonksiyonuna bir yaklaşım

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_j \quad (2.2.2)$$

olarak yazılabilir. (2.2.1) denkleminde (2.2.2) ile verilen u_N yaklaşık çözüm yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon çoğu kez f 'ye eşittir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_j\right) - f \neq 0 \quad (2.2.3)$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_D \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (2.2.4)$$

ağırlıklı kalan integralindeki R kalanının sıfır olarak seçilmesi gerekir. Burada D iki boyutlu bir bölge ve ψ_i ' ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonlarıdır. (2.2.4) integralinin hesaplanması ile bulunan ψ_i ' ler lineer bağımsız olmalıdır (Reddy, 2004; Karakoç, 2011:7). Bu tezde ağırlıklı kalan yöntemlerinden biri olan kollokasyon yöntemini kullanacağız.

2.2.1. Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yönteminde D çözüm bölgesinde seçilen N tane $x_i = (x_i, y_i)$ kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması beklenir. Yani

$$R(x_i, y_i, c_j) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (2.2.1.1)$$

şeklinde olmalıdır. x_i kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Kollokasyon yöntemde $\psi_i = \delta(x - x_i)$ alınır ve

$$\int_D \delta(x - x_i) dx dy = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases} \quad (2.2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra (2.2.1.2) ifadesi (2.2.4) denkleminde yerine bırakılırsa

$$\int_D \delta(x - x_i) R(x, c_j) dx dy = 0 \quad (2.2.1.3)$$

elde edilir. Burada (2.2.1.3) kapalı formu

$$R(x_i, c_j) = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots N) \quad (2.2.1.4)$$

şeklinde dir. (2.2.1.4) denklemi N adet kollokasyon noktalarında hesaplanır. Burada $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur ve N -bilinmeyenli N -tane denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. c_j katsayıları (2.2.1.4) denklem sisteminden bulunur (Reddy, 2004; Stasa, 1985; Karakoç, 2011:9).

2.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Varyasyonel yöntemler bir problemin yaklaşık çözümünde kullanılan oldukça kolay ve etkili yöntemlerdir. Fakat bu yöntemlerde yaklaşım fonksiyonlarının elde edilmesi meşakkatli olduğundan yöntemlerin uygulanabilirliğini azaltmaktadır. Çünkü yaklaşım fonksiyonları sürekli, tam, lineer bağımsız ve problemin temel sınır şartlarını

sağlamak zorundadır. Ayrıca yaklaşım fonksiyonlarını üretecek sistematik bir algoritma yoktur. Problemin çözüm bölgesi kompleks ise yaklaşım fonksiyonlarını oluşturma işlemi oldukça güç bazen de imkansız olmaktadır. Varyasyonel yöntemlerin bu zorluklarından dolayı son yıllarda sonlu elemanlar yöntemi daha sık kullanılmaya başlanmıştır (Reddy, 2004; Karakoç, 2011:10). Sonlu elemanlar yönteminin kullanımı ilk olarak mühendislik alanlarında başlamıştır. Bu alandaki ilk çalışmaları Hrennikoff ve McHenry gerçekleştirmiştir. Virtüel iş prensibine dayalı direkt bir yaklaşım, Argyris tarafından verilmiş ve bir dizi makalede kendisi ve meslektaşları hesaplama tekniklerini kullanarak kompleks problemlerin çözümü için bu çalışmayı geliştirmişlerdir (Argyris, 1964; Karakoç, 2011:10). “Sonlu eleman” terimi ilk olarak 1960 yılında Clough tarafından düzlem esnekliğindeki uygulamaları tanımladığı makalesinde ortaya atılmıştır (Clough, 1960; Karakoç, 2011:10). Son altmış yılda dijital bilgisayarlardaki gelişmeler sonlu eleman yönteminin hızlı bir şekilde ilerlemesini sağlamış ve her geçen gün matematikçiler, fizikçiler ve mühendisler bu yöntem ile ilgili çalışmalarını artırmışlardır (Davies, 1986; Karakoç, 2011:10). Sonlu eleman yöntemi; akışkanlar mekaniği, yapı mekaniği, yapı mühendisliği, nükleer enerji mühendisliği, uzay mühendisliği, bio mekanik ve elastik cisimlerin mekaniği, ısı iletim problemleri ve dinamik gibi farklı alanlardaki problemlere çok kolay uygulanabilir.

Sonlu eleman yönteminin avantajları (Logan, 2007; Karakoç, 2011:11):

1. Düzensiz şekilli yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen farklı karmaşık bölgeleri kolay bir şekilde modelleyebilir,
2. Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan farklı malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
3. Çok farklı sınır şartları ile birlikte kullanılabilmesi. Sınır şartlarının değişmesi durumunda sonlu eleman modelinin değişmemesi,
4. Gerektiği zaman elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
5. İstenildiğinde sonlu eleman modelinin kolay bir şekilde değiştirilebilmesi,
6. Bilgisayarda programlama mantığına uygun olması.

Sonlu elemanlar yönteminin avantajlarının yanında, çözüm bölgesini alt bölgelere ayırmak işleminin belirli bir tecrübe gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında birtakım zorluklarla karşılaşılması ve bilgisayar programında bilgi girişi sırasında hatalar yapılması gibi dezavantajları da vardır.

Bir problemin sonlu eleman analizinde kullanılan temel adımlar (Reddy, 2004; Karakoç, 2011:11):

1. Problemin çözüm bölgesinin ayrıştırılması:
 - a. Önceden belirlenen elemanların sonlu eleman kümesi oluşturulur.
 - b. Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır.
 - c. Problem için gerekli olan geometrik özellikler üretilir.
2. Çözüm bölgesindeki bütün karakteristik elemanlar için eleman denklemlerinin oluşturulması:
 - a. Karakteristik elemanlar üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formülü oluşturulur.
 - b. Karakteristik bir “ u ” bağımlı değişkeni

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i$$

şeklinde olduğu var sayılır ve bu yaklaşım adım 2a da yerine yazılır ve

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

şeklinde eleman denklemleri bulunur.

- c. ψ_i yaklaşım fonksiyonları literatürde varsa hazır alınır veya türetilir ve eleman matrisleri hesaplanır.
3. Verilen problemin denklemlerini elde etmek için eleman denklemlerinin birleştirilmesi:
 - a. Eleman düğümleri global düğümlerle eşleştirilerek birincil değişkenler arasında elemanlar arasında süreklilik şartları tanımlanır.
 - b. İkincil değişkenler arasındaki denge şartları belirlenir.
 - c. 3a ve 3b deki adımları kullanarak eleman denklemleri birleştirilir.
4. Problemin sınır şartlarının uygulanması:
 - a. Global birincil serbestlik dereceleri belirlenir.
 - b. Global ikincil serbestlik dereceleri belirlenir.

5. Birleştirilmiş denklemlerin çözülmesi.
6. Çözüm sonunda sonuçların değerlendirilmesi:
 - a. Adım 5 de elde edilen birincil serbestlik derecelerinden hareketle çözümlerin gradyanı veya diğer istenilen özellikleri hesaplanır.
 - b. Sonuçlar tablo veya grafik şeklinde verilir.

2.4. Spline Fonksiyonlar

Yaklaşık yöntemleri arasında polinom yaklaşımı büyük bir öneme sahiptir. Bilindiği üzere kullanılan noktaların sayısı arttıkça yaklaşımda kullanılacak polinomun derecesi de arttığından dolayı hesaplama hataları da artacaktır. Ayrıca istenen fonksiyon $[a, b]$ aralığının farklı yerlerinde birbirlerinden farklı özelliklere sahip olabileceğinden fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak hata payımızı yükseltebilir. Bu nedenlerden ötürü ardışık iki done arasında derecesi yüksek olmayan, farklı derecedeki (birinci, ikinci, üçüncü, ...) polinom fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline tahmin (interpolasyon) yöntemini kullanmak daha iyi sonuçlar verecektir. Bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümlerinde kullanılan spline fonksiyonlar parçalı polinomlar kapsamında olup, tanımlanan $[a, b]$ aralığını sonlu sayıda alt aralıklara parçalayarak, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma temeline dayanır. Spline terimi, ilkin 1946 yılında Schoenberg tarafından literatüre alınmıştır(Schoenberg, 1946; Keskin, 2016:10). Spline fonksiyonlar, çok etkili bir yaklaşıma ve hesaplamalarda kolaylık sağlaması bakımından interpolasyon, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, eğri ve yüzey uydurma gibi birçok bilim dalında sık sık ele alınmaktadırlar. $[a, b]$ aralığının düzgün parçalanışı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (2.4.1)$$

olacak şekilde bölünme noktalarında tanımlanan k . dereceden $S(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

1. $S(x)$, her $[x_m, x_{m+1}]$ ($m = 0, 1, \dots, N - 1$) alt aralıklarında k . yada daha küçük dereceden polinomdur.

2. $S(x)$ ve $0, 1, \dots, N - 1$ basamktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve x_m , ($m = 0, 1, \dots, N - 1$) bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki özelliklere göre, parçalı polinom fonksiyonlarının kendisi ve türevlerinin uygun koşulları sağlaması halinde spline fonksiyonlar oluşur. $k = 0$ durumunda ikinci öncül geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu diye belirtilir. $k = 1$ olması halinde $S(x)$ fonksiyonu kırık doğru olup, lineer polinomların birleştirilmesi ile elde edilir(Karakoç, 2011; Keskin, 2016:10).

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlar (Schumaker, 2007; Keskin, 2016:10):

- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar makul bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda kullanılmaya elverişli fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyondur.
- Spline fonksiyonların kullanılması ile oluşturulan matrisler, uygun işaretleri ve determinant özellikleri nedeniyle çok kolay hesaplanabilir.
- Yeterli sayıda alt aralıklara parçalanmış $[a, b]$ üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon; k . dereceden spline fonksiyonu ile çok iyi bir şekilde gösterilebilir.
- Spline fonksiyonlar ile yalnızca fonksiyonun kendisine değil aynı zamanda bu fonksiyonun türevlerine de çok iyi yaklaşımlarda bulunulabilir.
- Spline fonksiyonların kullanılması yakınsaklığını ve kararlılığını araştırmada kolaylık sağlar.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar yumuşaktır ve polinomlar gibi sivri salınımlar da bulunmazlar.

2.4.1. Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar

Sıfırıncı dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonu

$$\mathbb{T}_m^0(x) = \begin{cases} 1 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.1.1)$$

olarak tanımlanır $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$\mathbb{T}_m^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+k}-x_m}{2}\right)} \mathbb{T}_m^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+k+1}-x_{m+1}}{2}\right)} \mathbb{T}_{m+1}^{k-1}(x) \quad (2.4.1.2)$$

bağıntısı ile istenilen derecede trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilebilir (Hamid ve ark. ,2010; Abbas ve ark. , 2014; Walz, 1997; Keskin, 2016:16). $[a, b]$ çözüm bölgesi düzgün parçalanmış bir bölge olmak üzere (2.4.1.2) indirgeme bağıntısı

$$\mathbb{T}_m^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} \mathbb{T}_m^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} \mathbb{T}_{m+1}^{k-1}(x) \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.1.3)$$

şeklinde yazılabilir.

2.4.2. Lineer Trigonometrik B-Spline

$[a, b]$ çözüm aralığının bir düzgün bölüntüsü

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad x_m = x_{m-1} + h, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

olsun. $\mathbb{T}_m$ lineer trigonometrik B-spline $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere (2.4.1.3) bağıntısında $k = 1$ alınırsa,

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\mathbb{T}_m^1(x) = \frac{p(x_m)}{\theta} \mathbb{T}_m^0(x) - \frac{p(x_{m+2})}{\theta} \mathbb{T}_{m+1}^0(x) \quad (2.4.2.1)$$

bulunur. (2.4.2.1) ifadesi parçalı fonksiyon olarak

$$\mathbb{T}_m^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ -p(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.2.2)$$

formunda yazılabilir. Lineer trigonometrik B-spline fonksiyonların lineer B-spline fonksiyonların yazılımıyla uyumlu olabilmesi için bazı düzenlemeler yapılırsa düğüm noktalarındaki $\mathbb{T}_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$p(x) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere

$$\mathbb{T}_m^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ -p(x_{m+1}) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.2.3)$$

formunda tanımlanır. Lineer trigonometrik B-spline fonksayonlarda

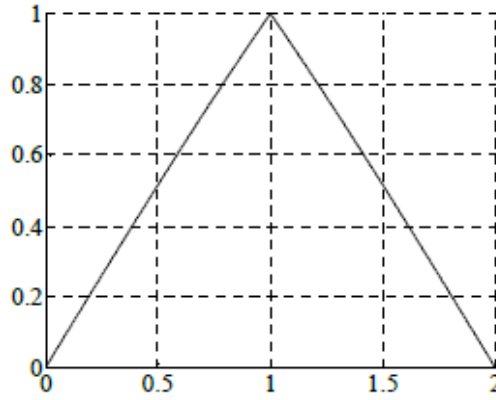
$$\lim_{x \rightarrow x_m^+} \mathbb{T}_m^1(x) = \lim_{x \rightarrow x_m^-} \mathbb{T}_m^1(x) = \mathbb{T}_m^1(x_m) \quad (2.4.2.4)$$

eşitlik sağlandığından trigonometrik B-spline fonksiyonunun x_m noktasında sürekli olduğu görülmektedir. $u(x, t)$ herhangi bir problemin tam çözümü olmak üzere $U_N(x, t)$ nümerik çözümü, lineer trigonometrik B-spline kullanılarak

$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{m=0}^N \mathbb{T}_m^1(x) \delta_m(t) \quad (2.4.2.5)$$

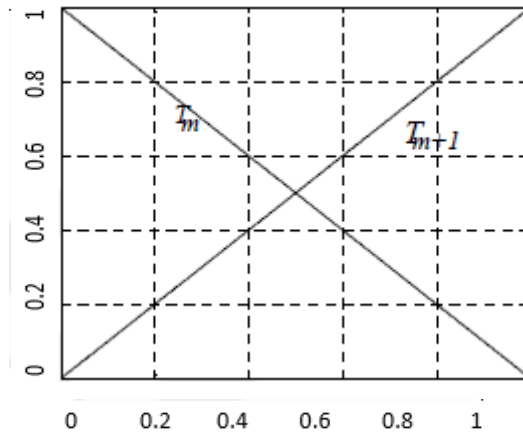
formunda ifade edilebilir. Burada $\mathbb{T}_m$ fonksiyonları lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları temsil eder. Denklemdaki δ_m katsayıları zamana bağlı değişkenlerdir.

$\mathbb{T}_m^1(x)$ doğrusal trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığındaki ardışık iki elemanı örtmektedir. Bu durumu daha iyi ifade edebilmek için $h = 1$ alınıp $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 2]$ aralığına dönüştürülerek (2.4.2.3) lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar şekil 2.1.' da verilmiştir.



Şekil 2.1. Lineer trigonometrik B-spline

Şekil 2.1.' de görüldüğü üzere spline fonksiyonlar ardışık iki elemanı örttüğünden her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı iki lineer B-spline ile örtülmektedir. $h = 1$ alınıp $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına çevrilerek bu aralığa düşen bütün lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları ise şekil 2.2.' da gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı iki lineer trigonometrik B-spline ile örtüldüğünden bu eleman üzerinde tanımlı bir fonksiyona yaklaşım; $u(x, t)$ herhangi bir problemin tam çözümü olmak üzere $U_N(x, t)$ nümerik çözümü, lineer trigonometrik B-spline kullanılarak

$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=m}^{m+1} \mathbb{T}_i^1(x) \delta_i(t) = \mathbb{T}_m^1(x) \delta_m + \mathbb{T}_{m+1}^1(x) \delta_{m+1} \quad (2.4.2.6)$$

şeklinde olur. x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ için yaklaşım ise (2.4.2.3) eşitliklerinin (2.4.2.6) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = \mathbb{T}_m^1(x_m)\delta_m + \mathbb{T}_{m+1}^1(x)\delta_{m+1} \\
 &= -\frac{\sin\left(\frac{x_m - x_{m+1}}{2}\right)}{\theta}\delta_m + \frac{\sin\left(\frac{x_m - x_m}{2}\right)}{\theta}\delta_{m+1} \\
 U_m &= \delta_m
 \end{aligned} \tag{2.4.2.7}$$

elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\xi = x - x_m$ dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. O halde lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$\mathbb{T}_m^1(\xi) = \frac{\sin(\frac{h-\xi}{2})}{\theta}, \tag{2.4.2.8}$$

$$\mathbb{T}_{m+1}^1(\xi) = \frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\theta} \tag{2.4.2.9}$$

olarak bulunur. Aynı aralıktaki lineer B-spline fonksiyonlarda

$$\mathcal{B}_m^1(\xi) = 1 - \xi, \tag{2.4.2.10}$$

$$\mathcal{B}_{m+1}^1(\xi) = \xi \tag{2.4.2.11}$$

eşitlikleri ile ele alınır.

2.4.3. Kuadratik Trigonometrik B-Spline

$\mathbb{T}_m^2$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları hesaplamak için (2.4.1.3) eşitliğinde $k = 2$ alınarak,

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right)$$

olmak şartı ile

$$\mathbb{T}_m^2(x) = \frac{p(x_m)}{\sin(h)} \mathbb{T}_m^1(x) - \frac{p(x_{m+3})}{\sin(h)} \mathbb{T}_{m+1}^1(x) \quad (2.4.3.1)$$

yazılabilir. (2.4.3.1) denkleminde gerekli şart olan lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\frac{p(x_m)}{\sin(h)} \mathbb{T}_m^1(x) = \frac{1}{\sin(h)\sin(\frac{h}{2})} \begin{cases} p(x_m)p(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ -p(x_m)p(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{p(x_{m+3})}{\sin(h)} \mathbb{T}_{m+1}^1(x) = \frac{1}{\sin(h)\sin(\frac{h}{2})} \begin{cases} -p(x_{m+3})p(x_{m+1}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ p(x_{m+3})p(x_{m+3}) & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olduğundan (2.4.3.1) eşitliği

$$\mathbb{T}_m^2(x) = \frac{1}{\sin(h)\sin(\frac{h}{2})} \begin{cases} p^2(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ -p(x_m)p(x_{m+2}) - p(x_{m+3})p(x_{m+1}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ p^2(x_{m+3}) & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.3.2)$$

formunda düzenlenebilir. Kuadratik B-spline fonksiyonlarının yazılımıyla uyum içinde olabilmesi için gerekli düzenlemeler yaparsak

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere

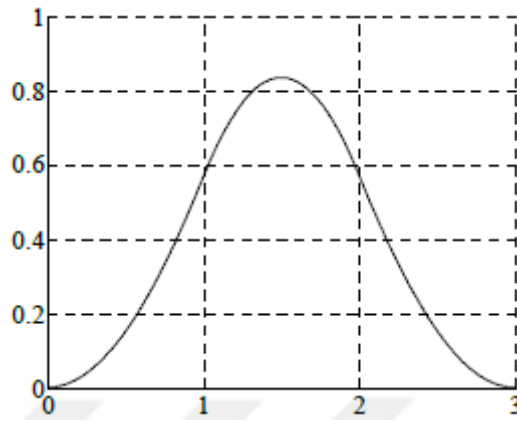
$$\mathbb{T}_m^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^2(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ -p(x_{m-1})p(x_{m+1}) - p(x_{m+2})p(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ p^2(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.3.3)$$

eşitliği ile $\mathbb{T}_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar bulunur. (2.4.3.3) eşitliği ile verilen kuadratik trigonometrik B-spline için (2.4.2.4)' e benzer şekilde $\mathbb{T}_m^2(x)$ parçalı

fonksiyonu ve birinci türevinin x_m ve x_{m+1} düğüm noktalarında yani konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu gösterilebilir. $u(x, t)$ her hangi bir problemin tam çözümü olmak üzere $U_N(x, t)$ nümerik çözümü, kuadratik trigonometrik B-spline kullanılarak

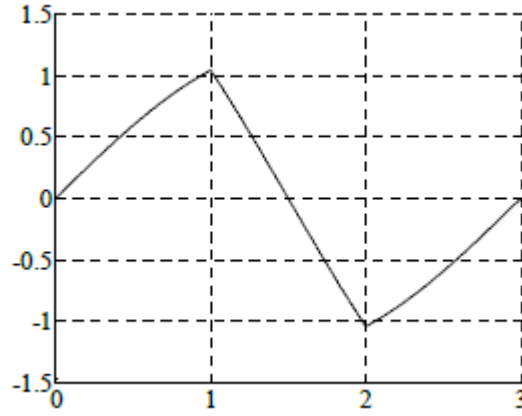
$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N T_m^2(x) \delta_m(t) \quad (2.4.3.4)$$

formunda ifade edilebilir. Mevcut δ_m katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_m^2(x)$ fonksiyonları kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını ifade eder. $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır ve aynı zaman $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık üç elemanı örtmektedir. Bu durumu daha iyi ifade edebilmek için $h = 1$ alınıp $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 3]$ aralığı yapılarak (2.4.3.3) kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar şekil 2.3.' da verilmiştir.



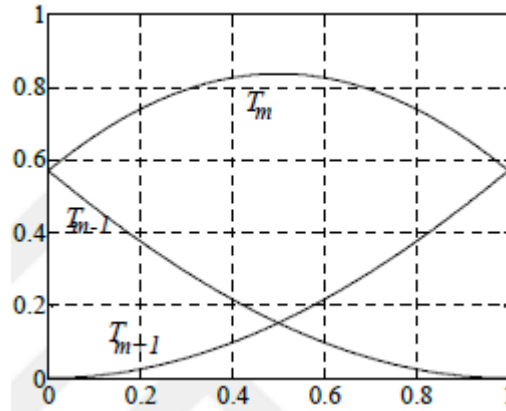
Şekil 2.3. Kuadratik trigonometrik B-spline

Aynı şekilde $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci türevleri de $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır, parçalanma noktalarında sürekli ve $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardıl üç elemanı örtmektedir. Bu husus şekil 2.4.'da kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci türevlerine ait grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonun birinci türevi

Şekil 2.3. ve şekil 2.4.'dan görüldüğü üzere kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar ve birinci türevleri ardıl üç elemanı kapladığından her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\mathbb{T}_{m-1}^2$, $\mathbb{T}_m^2$ ve $\mathbb{T}_{m+1}^2$ üç kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına çevrilerek bu aralığa denk gelen tüm kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları şekil 2.5.' da verilmiştir.



Şekil 2.5. Kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\mathbb{T}_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfır olup $\mathbb{T}_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında ardıl üç elemanı kaplamaktadır. Hasebiyle her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\mathbb{T}_{m-1}^2$, $\mathbb{T}_m^2$ ve $\mathbb{T}_{m+1}^2$ üç kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Bu halde (2.4.3.4) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} \mathbb{T}_i^2(x) \delta_i = \mathbb{T}_{m-1}^2(x) \delta_{m-1} + \mathbb{T}_m^2(x) \delta_m + \mathbb{T}_{m+1}^2(x) \delta_{m+1} \quad (2.4.3.5)$$

formunda ifade edilir. (2.4.3.3) kuadratik trigonometrik B-spline parçalı fonksiyon eşitliklerinin kullanılması ile x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ ve x' e göre birinci türevi için yaklaşımlar,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \mathbb{T}_i^2(x_m) \delta_i,$$

$$\frac{dU_N(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{d\mathbb{T}_i^2(x_m)}{dx} \delta_i$$

şeklinde ifade edilir ve gerekli işlemler yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki yaklaşımlar için

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{\theta}, \quad \beta_1 = \frac{\sin(h)}{\theta}$$

olmak üzere

$$U_m = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_1 \delta_m, \quad (2.4.3.6)$$

$$U'_m = -\beta_1 \delta_{m-1} + \beta_1 \delta_m \quad (2.4.3.7)$$

denklemleri bulunur. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. O halde kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\mathbb{T}_{m-1}^2(\xi) = \frac{\sin^2(\frac{h-\xi}{2})}{\theta} \quad (2.4.3.8)$$

$$\mathbb{T}_m^2(\xi) = \frac{\sin(\frac{h-\xi}{2})\sin(\frac{h-\xi}{2}) + \sin(\frac{2h-\xi}{2})\sin(\frac{\xi}{2})}{\theta} \quad (2.4.3.9)$$

$$\mathbb{T}_{m+1}^2(\xi) = \frac{\sin^2(\frac{\xi}{2})}{\theta} \quad (2.4.3.10)$$

şeklinde bulunur. Aynı aralıkta kuadratik B-spline fonksiyonlar ise

$$\mathcal{B}_{m-1}^2(\xi) = (1 - \frac{\xi}{2})^2, \quad (2.4.3.11)$$

$$\mathcal{B}_m^2(\xi) = \frac{h^2 + 2h\xi + 2\xi^2}{h^2}, \quad (2.4.3.12)$$

$$\mathcal{B}_{m+1}^2(\xi) = \frac{\xi^2}{h^2} \quad (2.4.3.13)$$

eşitlikleri ile verilir.

2.4.4. Kübik Trigonometrik B-Spline

$\mathbb{T}_m^3$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları hesaplamak için (2.4.1.3) eşitliğinde $k = 3$ alınarak,

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)$$

olmak şartı ile

$$\mathbb{T}_m^3(x) = \frac{p(x_m)}{\sin(\frac{3h}{2})} \mathbb{T}_m^2(x) - \frac{p(x_{m+4})}{\sin(\frac{3h}{2})} \mathbb{T}_{m+1}^2(x) \quad (2.4.4.1)$$

yazılabilir. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları elde edebilmek için

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{p(x_m)}{\sin(\frac{3h}{2})} \mathbb{T}_m^2(x) \\ &= \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ p^2(x_m)p(x_{m+2}) - p(x_m)p(x_{m+3})p(x_{m+1}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ p(x_m)p^2(x_{m+3}) & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & , \text{diğer durumla} \end{cases} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & -\frac{p(x_{m+4})}{\sin(\frac{3h}{2})} \mathbb{T}_{m+1}^2(x) = \\ & \frac{1}{\theta} \begin{cases} -p(x_{m+4})p^2(x_{m+1}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ p(x_{m+4})p(x_{m+1})p(x_{m+3}) - p^2(x_{m+4})p(x_{m+2}) & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ -p^3(x_{m+4}) & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumla} \end{cases} \quad (2.4.4.2) \end{aligned}$$

olduğundan (2.4.4.1) eşitliği

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_m^3(x) \\ &= \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ -p^2(x_m)p(x_{m+2}) - p(x_m)p(x_{m+3})p(x_{m+1}) - p(x_{m+4})p^2(x_{m+1}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ p(x_m)p^2(x_{m+3}) + p(x_{m+4})p(x_{m+1})p(x_{m+3}) + p^2(x_{m+4})p(x_{m+2}) & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ -p^3(x_{m+4}) & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \end{aligned}$$

formunda düzenlenebilir. Kübik B-spline fonksiyonlarının yazılımıyla uyum içinde olabilmesi için gerekli düzenlemeler yaparsak $\mathbb{T}_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$p(x_m) = \sin(\frac{x-x_m}{2}), \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin(\frac{3h}{2}), m = 0, 1, \dots, N$$

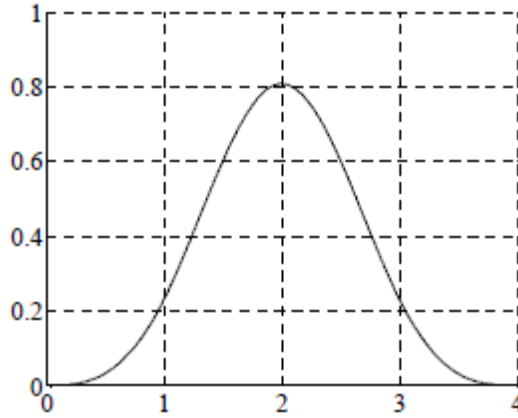
olmak üzere

$$\mathbb{T}_m^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_{m-2}) & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ -p^2(x_{m-2})p(x_m) & \\ -p(x_{m-2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ -p(x_{m+2})p^2(x_{m-1}) & \\ p(x_{m-2})p^2(x_{m+1}) & \\ +p(x_{m+2})p(x_{m-1})p(x_{m+1}) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ +p^2(x_{m+2})p(x_m) & \\ -p^3(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4.4.3)$$

eşitliği ile $\mathbb{T}_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar bulunur. (2.4.4.3) eşitliği ile verilen kübik trigonometrik B-spline için (1.4.2.4)' e benzer şekilde $\mathbb{T}_m^3(x)$ parçalı fonksiyonu, birinci türevi ve ikinci türevinin x_{m-1} , x_m ve x_{m+1} parçalanma noktalarında yani konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu gösterilebilir. $u(x, t)$ her hangi bir problemin tam çözümü olmak üzere $U_N(x, t)$ nümerik çözümü, kübik trigonometrik B-spline kullanılarak

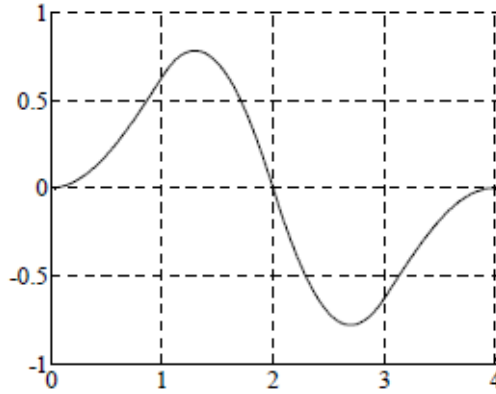
$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \mathbb{T}_m^3(x) \delta_m(t) \quad (2.4.4.4)$$

formunda ifade edilebilir. Mevcut δ_m katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $\mathbb{T}_m^3(x)$ fonksiyonları kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını ifade eder. $\mathbb{T}_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır ve aynı zaman $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık dört elemanı örtmektedir. Bu durumu daha iyi ifade edebilmek için $h = 1$ alınıp $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı $[0, 4]$ aralığı yapılarak (2.4.4.3) kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar şekil 2.6.' da verilmiştir.

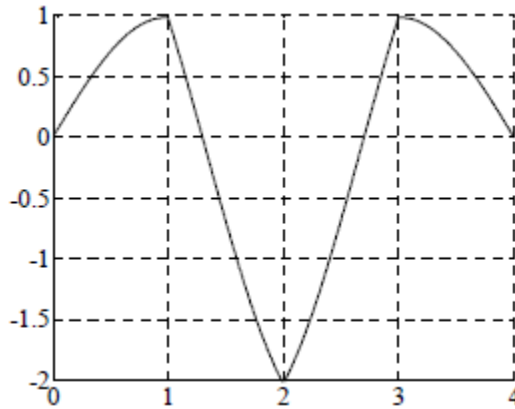


Şekil 2.6. Kübik trigonometrik B-spline

Aynı şekilde $\mathcal{T}_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri de $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır, parçalanma noktalarında süreklidir ve $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardıl dört elemanı örtmektedir. Bu husus şekil 2.7. ve şekil 2.8.' da kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların birinci ve ikinci türevlerine ait grafikleri gösterilmiştir.

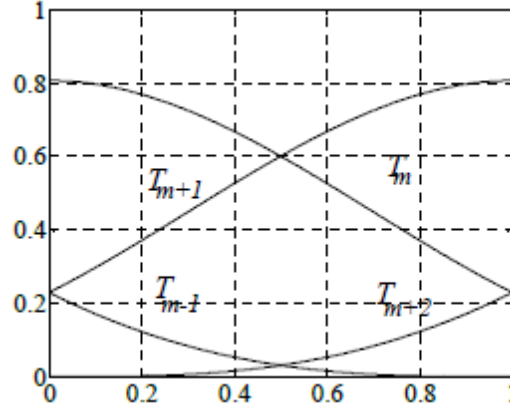


Şekil 2.7. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birinci türevi



Şekil 2.8. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının ikinci türevi

Şekil grafiklerinden de görüldüğü üzere kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar, birinci ve ikinci türevleri ardıl dört elemanı kapladığından her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\mathcal{T}_{m-1}^3$, $\mathcal{T}_m^3$ ve $\mathcal{T}_{m+1}^3$, $\mathcal{T}_{m+2}^3$ dört kübik trigonometrik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. $h = 1$ için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına çevrilerek bu aralığa denk gelen tüm kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları şekil 2.9.' da verilmiştir.



Şekil 2.9. Kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\mathcal{T}_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfır olup $\mathcal{T}_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardıl dört elemanı kaplamaktadır. Hasebiyle her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $\mathcal{T}_{m-1}^3$, $\mathcal{T}_m^3$, $\mathcal{T}_{m+1}^3$ ve $\mathcal{T}_{m+2}^3$ olarak dört kübik trigonometrik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Bu halde (2.4.4.4) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} \mathcal{T}_i^3(x) \delta_i,$$

$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \mathcal{T}_{m-1}^3(x) \delta_{m-1} + \mathcal{T}_m^3(x) \delta_m + \mathcal{T}_{m+1}^3(x) \delta_{m+1} + \mathcal{T}_{m+2}^3(x) \delta_{m+2} \quad (2.4.4.5)$$

formunda ifade edilir. (2.4.4.3) kübik trigonometrik B-spline parçalı fonksiyon eşitliklerinin kullanılması ile x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ için x e göre birinci türevi ve ikinci türev yaklaşımlar,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \mathcal{T}_i^3(x_m) \delta_i,$$

$$\frac{dU_N(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d\mathcal{T}_i^3(x_m)}{dx} \delta_i,$$

$$\frac{d^2U_N(x_m, t)}{dx^2} = U''_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^2\mathcal{T}_i^3(x_m)}{dx^2} \delta_i$$

şeklinde ifade edilir ve gerekli işlemler yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki yaklaşımlar için

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad \alpha_2 = \frac{2}{1+2\cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \quad \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3((1+3\cos(h)\csc^2(\frac{h}{2})))}{16(2\cos(\frac{h}{2})+\cos(\frac{3h}{2}))}, \quad \gamma_2 = -\frac{3\cot^2(\frac{h}{2})}{2+4\cos(h)}$$

olmak üzere

$$U_m = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1}, \quad (2.4.4.6)$$

$$U'_m = \beta_1 \delta_{m-1} + \beta_2 \delta_{m+1}, \quad (2.4.4.7)$$

$$U''_m = \gamma_1 \delta_{m-1} + \gamma_2 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m+1}, \quad (2.4.4.8)$$

denklemleri bulunur. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülebilir. O halde kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\mathbb{T}_{m-1}^3(\xi) = \frac{\sin^3(\frac{h-\xi}{2})}{\theta}, \quad (2.4.4.9)$$

$$\mathbb{T}_m^3(\xi) = \frac{\sin(\frac{\xi+2h}{2})\sin^2(\frac{\xi-h}{2})+\sin(\frac{\xi-2h}{2})\sin(\frac{\xi+h}{2})\sin(\frac{\xi-h}{2})+\sin^2(\frac{\xi-2h}{2})\sin(\frac{\xi}{2})}{\theta}, \quad (2.4.4.10)$$

$$\mathbb{T}_{m+1}^3(\xi) = \frac{\sin^2(\frac{\xi+h}{2})\sin(\frac{h-\xi}{2})+\sin(\frac{\xi+h}{2})\sin(\frac{2h-\xi}{2})\sin(\frac{\xi}{2})+\sin(\frac{3h-\xi}{2})\sin^2(\frac{\xi}{2})}{\theta}, \quad (2.4.3.11)$$

$$\mathbb{T}_{m+2}^3(\xi) = \frac{\sin^3(\frac{\xi}{2})}{\theta} \quad (2.4.3.12)$$

şeklinde bulunur. Aynı aralıkta kübik B-spline fonksiyonlar ise

$$\mathcal{B}_{m-1}^3(\xi) = (1 - \frac{\xi}{h})^3 \quad (2.4.4.13)$$

$$\mathcal{B}_m^3(\xi) = 4 - 6\frac{\xi^2}{h^2} + 3\frac{\xi^3}{h^3}, \quad (2.4.4.14)$$

$$\mathcal{B}_{m+1}^3(\xi) = 1 + 3\frac{\xi}{h} + 3\frac{\xi^2}{h^2} - 3\frac{\xi^3}{h^3}, \quad (2.4.4.15)$$

$$\mathcal{B}_{m+2}^3(\xi) = \frac{\xi^3}{h^3} \quad (2.4.4.16)$$

eşitlikleri ile verilir.

2.5. Operatör Splitting Yöntemi

Genel olarak, bölme yöntemlerinde, orijinal denklem birkaç denkleme parçalanır ve her bir parçalanmış denklem orijinal denklemden bağımsız olarak $[t_n, t_{n+1}]$ zaman aralığında ayrı ayrı çözülür. Bu yöntemler genel olarak zaman parçalamalı veya kesirli adım yöntemleri olarak bilinir. Bu durumda denklemi farklı fiziksel olguları içerecek şekilde parçalamanın yöntemi “operatör splitting” (Hundsdofer, 2000; Çelikkaya, 2018: 17) olarak bilinir.

Aşağıdaki gibi verilen bir Cauchy problemini ele alalım

$$\frac{du(t)}{dt} = Cu(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (2.5.1)$$

(2.5.1)’de, $u(x, t)$ fonksiyonunun konum yönünde yarı ayrıklaştırıldığı varsayılmaktadır. Biz $C = \hat{A} + \hat{B}$ operatörünün lineer (ve/veya lineer olmayan) iki operatörün toplamı olarak yazılabilecek durumlar üzerinde yoğunlaşacağız. Yani aşağıdaki gibi

$$\frac{du(t)}{dt} = \hat{A}u(t) + \hat{B}u(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (2.5.2)$$

Burada $u(x, t)$ vektörü, $u_0 \in X$ başlangıç koşulundan elde edilen çözüm vektörüdür ve C , $\hat{A}$, $\hat{B}$ operatörleri, sonlu veya sonsuz bir X Banach uzayında sınırlı veya sınırsız operatörlerdir. Lie operatörü formülasyonunun yardımıyla, genel olarak ifade (2.5.2) (lineer olmayabilir) aşağıdaki gibi yazılmalıdır

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + Bu(t). \quad (2.5.3)$$

Burada A ve B operatörleri, $u(t)$ fonksiyonuna aşağıdaki gibi uygulanan

$$A = \hat{A}(u(t)) \frac{\partial}{\partial t}, \quad B = \hat{B}(u(t)) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.5.4)$$

Lie operatörleridir (Seydaoğlu, Erdoğan ve Öziş, 2016; Çelikkaya, 2018: 18). (2.5.3) probleminin çözümü $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ olmak üzere

$$(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)} u(t_n)$$

şeklindedir. Bu çözüm ayrıca üstel fonksiyonların Taylor seri açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır

$$u(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)} u(t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\hat{A}(u(t)) \frac{\partial}{\partial t} + \hat{B}(u(t)) \frac{\partial}{\partial t} \right)^k u(t_n)$$

(2.5.3) ifadesi aşağıdaki gibi iki alt denkleme parçalanır

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \frac{du(t)}{dt} = Bu(t) \quad (2.5.5)$$

ve her bir parçanın uygun bir nümerik yöntemle yada analitik yöntemle çözülür (Trotter, 1959; Çelikkaya, 2018:18). Varsayalım ki $\varphi_{\Delta t}^{[A]}$ ve $\varphi_{\Delta t}^{[B]}$ sırasıyla A ve B operatörlerini içeren (2.5.5)'deki denklemlerin tam ve sayısal çözümleri olsun. E_n temel birinci dereceden parçalama tekniği şu şekilde tanımlanır:

$$L_{\Delta t} = \varphi_{\Delta t}^{[A]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[B]} = e^{\Delta t A} e^{\Delta t B} \quad \text{veya} \quad L_{\Delta t}^* = \varphi_{\Delta t}^{[B]} \circ \varphi_{\Delta t}^{[A]} = e^{\Delta t B} e^{\Delta t A}$$

ve Lie-Trotter bölme teknikleri (Trotter, 1959; Çelikkaya, 2018:21) olarak bilinir. A ve B operatörlerinin yerlerini değiştirip ve yarım zaman adımı için birleşimleri alınır aşağıdaki gibi

$$S_{\Delta t} = e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} \quad \text{veya} \quad S_{\Delta t}^* = e^{\frac{\Delta t}{2} B} e^{\Delta t A} e^{\frac{\Delta t}{2} B} \quad (2.5.6)$$

simetrik Marchuk (Marchuk, 1968; Çelikkaya, 2018:21) veya strang bölme (Strang, 1968; Çelikkaya, 2018:21) şemaları elde edilir. Strang bölme yönteminin çözüm algoritması aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned}\frac{du^*(t)}{dt} &= Au^*(t), & u^*(t_n) &= u_n^0, & t &\in \left[t_n, t_{n+\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{du^{**}(t)}{dt} &= Bu^*(t), & u^{**}(t_n) &= u^*\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right), & t &\in [t_n, t_{n+1}] \\ \frac{du^{***}(t)}{dt} &= Au^{**}(t), & u^{***}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) &= u^{**}(t_{n+1}), & t &\in \left[t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}\right].\end{aligned}$$

Burada $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ve istenilen zaman adımındaki çözümler $u(t_{n+1}) = u^{***}(t_{n+1})$ ifadesinden elde edilir. Orijinal problemin alt problemlerle değiştirilmesi doğal olarak bölme hatası adı verilen bir hataya yol açar (Hundsdorfer ve Verwer, 2003; Çelikkaya, 2018:25). E_n yerel kesme hatası olmak üzere

$$u(t_{n+1}) = e^{\Delta t(A+B)}u(t_n) \approx e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta tB}e^{\frac{\Delta t}{2}A}u(t_n) + \Delta tE_n$$

ifadesi yazılabilir. Üstel fonksiyonların Taylor seri açılımı kullanılarak E_n aşağıdaki gibi hesaplanır

$$E_n = \frac{\Delta t^2}{24}([A, [B, A]] - 2[B, [B, A]])ut_n + O(\Delta t^3) \quad (2.5.7)$$

Köşeli parantezler için Baker-Campbell-Hausdorff formülü uygulanır.

3. BULGULAR

3.1. Modifiye Edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Operatör Splitting Kübik Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Nümerik Çözümleri

$[a, b]$ çözüm aralığının düzgün bir parçalanması x_m düğüm noktaları cinsinden, $m = 0, 1, \dots, N$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_m^3(x) &= \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_m) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ -p^2(x_m)p(x_{m+2}) - p(x_m)p(x_{m+3})p(x_{m+1}) - p(x_{m+4})p^2(x_{m+1}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ p(x_m)p^2(x_{m+3}) + p(x_{m+4})p(x_{m+1})p(x_{m+3}) + p^2(x_{m+4})p(x_{m+2}) & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ -p^3(x_{m+4}) & , x_{m+3} \leq x < x_{m+4} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \\ \mathbb{T}_m^3(x) &= \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_{m-2}) & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ -p^2(x_{m-2})p(x_m) & \\ -p(x_{m-2})p(x_{m+1})p(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ -p(x_{m+2})p^2(x_{m-1}) & \\ p(x_{m-2})p^2(x_{m+1}) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ +p(x_{m+2})p(x_{m-1})p(x_{m+1}) & \\ +p^2(x_{m+2})p(x_m) & \\ -p^3(x_{m+2}) & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$p(x_m) = \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

formunda tanımlanır (Hamid ve ark. , 2010; Abbas ve ark., 2014; Walz, 1997; Keskin, 2016:16). $[a, b]$ bölgesi üzerinde $\{\mathbb{T}_{-1}^3(x), \mathbb{T}_0^3(x), \dots, \mathbb{T}_{N+1}^3(x)\}$ fonksiyonlarının bir taban oluşturduğu açıktır. $u(x, t)$ fonksiyonuna kübik trigonometrik B-spline tabanlar ve $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametreler cinsinden aşağıdaki gibi bir yaklaşım yazılabilir

$$u(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \mathbb{T}_m^3(x) \delta_m(t). \quad (3.2)$$

Burada zamana bağılı $\delta_m(t)$ parametreleri (1.1) denklemi ve yardımcı koşullar kullanılarak elde edilecektir. (1.1) numaralı denklem birinci ve ikinci dereceden türevleri içerdiğinden U, U' ve U'' nün düğüm noktalarındaki değerleri $\delta_m(t)$ parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned} U_m &= \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1}, \\ U'_m &= \beta_1 \delta_{m-1} + \beta_2 \delta_{m+1}, \\ U''_m &= \gamma_1 \delta_{m-1} + \gamma_2 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m+1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ ve γ_2 katsayılarının değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \alpha_2 = \frac{2}{1+\cos(h)}, \\ \beta_1 &= -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right), \\ \gamma_1 &= \frac{3((1+3\cos(h)\csc^2(\frac{h}{2})))}{16(2\cos(\frac{h}{2})+\cos(\frac{3h}{2}))}, \gamma_2 = -\frac{3\cot^2(\frac{h}{2})}{2+4\cos(h)}. \end{aligned}$$

MEW denkleminin zaman terimine göre parçalanmış formu aşağıdaki gibidir:

$$A: \quad u_t - \mu u_{xxt} = 0, \quad (3.4)$$

$$B: \quad u_t - \mu u_{xxt} + 3u^2 u_x = 0. \quad (3.5)$$

(3.3) ifadesinde verilen U, U' ve U'' değerleri (3.4) ve (3.5) denklemlerinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemleri elde edilir:

$$\alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1} - \mu(\gamma_1 \delta_{m-1} + \gamma_2 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m+1}) = 0, \quad (3.6)$$

$$\alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1} - \mu(\gamma_1 \delta_{m-1} + \gamma_2 \delta_m + \gamma_1 \delta_{m+1}) + 3z_m^2(\beta_1 \delta_{m-1} + \beta_2 \delta_{m+1}) = 0. \quad (3.7)$$

Burada “ $\circ$ ” sembolü t ye göre birinci mertebeden türevi ifade ederken

$$U_m = z_m = \alpha_1 \delta_{m-1} + \alpha_2 \delta_m + \alpha_1 \delta_{m+1}$$

dir. (3.6) ve (3.7) denklemlerinde Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları $\delta_m(t) = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}$ ve $\delta_m^s = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}$ kullanılırsa $(N + 1) \times (N + 3)$ boyutlu cebirsel denklem sistemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{A:} \quad & (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m-1}^{n+1} + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^{n+1} + (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m+1}^{n+1} = (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m-1}^n + \\ & (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^n + (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m+1}^n, \quad m = 0(1)(N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{B:} \quad & \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2\Delta t\beta_1}{2}\right)\delta_{m-1}^{n+1} + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^{n+1} + \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2\Delta t\beta_2}{2}\right)\delta_{m+1}^{n+1} = \\ & \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2\Delta t\beta_1}{2}\right)\delta_{m-1}^n + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^n + \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2\Delta t\beta_2}{2}\right)\delta_{m+1}^n, \\ & m = 0(1)(N). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Çözüm bölgesinin dışında kalan δ_{-1} ve δ_{N+1} parametrelerini yok etmek için A sistemi için $U(a, t) = U(b, t) = 0$ sınır şartları kullanırken, B sisteminde $U''(a, t) = U''(b, t) = 0$ kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} U_0 = \alpha_1\delta_{-1} + \alpha_2\delta_0 + \alpha_1\delta_1 = 0 & \Rightarrow \delta_{-1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta_0 - \delta_1, \\ U_N = \alpha_{N-1} + \alpha_2\delta_N + \alpha_1\delta_{N+1} = 0 & \Rightarrow \delta_{N+1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta_N - \delta_{N-1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} U_0'' = \gamma_1\delta_{-1} + \gamma_2\delta_0 + \gamma_1\delta_1 = 0 & \Rightarrow \delta_{-1} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\delta_0 - \delta_1, \\ U_N'' = \gamma_1\delta_{N-1} + \gamma_2\delta_N + \gamma_1\delta_{N+1} = 0 & \Rightarrow \delta_{N+1} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\delta_N - \delta_{N-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bu ifadeler (3.8) ve (3.9) sistemlerine kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \text{A:} \quad & \left(\frac{\mu\gamma_1\alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2\right)\delta_0^{n+1} = \left(\frac{\mu\gamma_1\alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2\right)\delta_0^n, \quad m = 0 \\ & (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m-1}^{n+1} + (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^{n+1} + (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m+1}^{n+1} = (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m-1}^n + \\ & (\alpha_2 - \mu\gamma_2)\delta_m^n + (\alpha_1 - \mu\gamma_1)\delta_{m+1}^n, \quad m = 1(1)(N-1) \\ & \left(\frac{\mu\gamma_1\alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2\right)\delta_N^{n+1} = \left(\frac{\mu\gamma_1\alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2\right)\delta_N^n, \quad m = N \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{B:} \quad \left(\frac{\mu\gamma_1\alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2\right)\delta_0^{n+1} = \left(\frac{\mu\gamma_1\alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2\right)\delta_0^n, \quad m = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2 \Delta t \beta_1}{2} \right) \delta_{m-1}^{n+1} + (\alpha_2 - \mu\gamma_2) \delta_m^{n+1} + \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2 \Delta t \beta_2}{2} \right) \delta_{m+1}^{n+1} = \\
& \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2 \Delta t \beta_1}{2} \right) \delta_{m-1}^n + (\alpha_2 - \mu\gamma_2) \delta_m^n + \left(\alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2 \Delta t \beta_2}{2} \right) \delta_{m+1}^n, \\
& m = 1(1)(N-1) \\
& \left(\frac{\mu\gamma_1 \alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2 \right) \delta_N^{n+1} = \left(\frac{\mu\gamma_1 \alpha_2}{\alpha_1} - \mu\gamma_2 \right) \delta_N^n, \quad m = N \quad (3.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sınır şartlarının (3.8) ve (3.9) sistemlerine uygulanmasıyla, Thomas algoritmasıyla çözülebilir $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu (3.12) ve (3.13) cebirsel denklem sistemleri elde edilir.

(3.12) ve (3.13) sistemlerinin çözümünde kullanılmak üzere bir başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Problemlerle birlikte verilen $U(x, 0) = f(x)$ başlangıç şartı kullanılarak δ_m^0 , $m = 0, 1, \dots, N$ başlangıç vektörü aşağıdaki sistemden bulunabilir:

$$\begin{aligned}
U_m &= \alpha_1 \delta_{m-1}^0 + \alpha_2 \delta_m^0 + \alpha_1 \delta_{m+1}^0 \\
U_0 &= \alpha_1 \delta_{-1}^0 + \alpha_2 \delta_0^0 + \alpha_1 \delta_1^0 \\
U_1 &= \alpha_1 \delta_0^0 + \alpha_2 \delta_1^0 + \alpha_1 \delta_2^0 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
U_N &= \alpha_1 \delta_{N-1}^0 + \alpha_2 \delta_N^0 + \alpha_1 \delta_{N+1}^0
\end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.14) sistemi de $(N+1) \times (N+3)$ boyutlu bir sistem olduğundan çözüm bölgesi içine düşmeyen hayali δ_{-1} ve δ_{N+1} parametrelerinin yok edilmesi gerekir. $U''(a, t) = U''(b, t) = 0$ sınır şartlarının kullanılmasıyla (3.14) sistemi $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu bir sisteme dönüşür ve otomatik olarak çözülebilir. Böylece δ_m^0 başlangıç vektörü aşağıdaki sistemin çözümünden hesaplanabilir

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & -\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} + \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}.$$

3.2. Kararlılık Analizi

(3.8) ve (3.9) sistemlerinin kararlılık analizleri Fourier Von Neumann (Von Neumann ve Richmyer, 1950; Çelikkaya:38) yöntemiyle araştırıldı. Bu yöntemde $i = \sqrt{-1}$, β mod sayısı, ξ amplifikasyon faktörü ve h konum adım uzunluğu olmak üzere $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ alınmıştır. (1.1) numaralı denklemde lineerleştirme amacıyla $u^2 = z_m$ şeklinde aldığımızdan u^2 terimi yerel bir sabit gibi davranacaktır. (3.8) ve (3.9)'daki şemalarla ilgili amplifikasyon faktörleri sırasıyla ρ_A ve ρ_B olsun.

$$k_1 = \alpha_1 - \mu\gamma_1, k_2 = \alpha_2 - \mu\gamma_2, k_3 = \alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2 \Delta t \beta_1}{2}, k_4 = \alpha_1 - \mu\gamma_1 + \frac{3z_m^2 \Delta t \beta_2}{2}$$

olmak üzere, (3.8) numaralı denklemde $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} k_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + k_2 \xi^{n+1} e^{i\beta m h} + k_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m+1)h} \\ = k_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + k_2 \xi^{n+1} e^{i\beta m h} + k_1 \xi^{n+1} e^{i\beta(m+1)h} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$\rho_A \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{k_1 e^{-i\beta h} + k_2 + k_1 e^{i\beta h}}{k_1 e^{-i\beta h} + k_2 + k_1 e^{i\beta h}} = 1 \leq 1$$

bulunur. Benzer şekilde (3.9) denkleminde de $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$ ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& k_3 \xi^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + k_2 \xi^{n+1} e^{i\beta m h} + k_4 \xi^{n+1} e^{i\beta(m+1)h} \\
& = k_3 \xi^{n+1} e^{i\beta(m-1)h} + k_2 \xi^{n+1} e^{i\beta m h} + k_4 \xi^{n+1} e^{i\beta(m+1)h}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) = \frac{k_3 e^{-i\beta h} + k_2 + k_4 e^{i\beta h}}{k_3 e^{-i\beta h} + k_2 + k_4 e^{i\beta h}} = 1 \leq 1$$

bulunur. O halde

$$\rho_L(\xi) = p_A^{n+1} p_B^{n+1} \text{ veya } \rho_L(\xi) = p_B^{n+1} p_A^{n+1}$$

$$|\rho_L(\xi)| \leq \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$$

olduğundan Lie-Trotter bölme şemaları koşulsuz olarak kararlıdır. Benzer şekilde,

$$\rho_S(\xi) = p_A^{n+1/2} p_B^{n+1} p_A^{n+1/2} \text{ veya } \rho_S(\xi) = p_B^{n+1/2} p_A^{n+1} p_B^{n+1/2}$$

$$|\rho_S(\xi)| \leq \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_B \left(\frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right) \right| \left| \rho_A \left(\frac{\xi^{n+1/2}}{\xi^n} \right) \right| \leq 1$$

Strang bölme şemaları da koşulsuz olarak kararlıdır.

3.3. Model Problemler

Lineer olmayan MEW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek ve uygulanan yöntemi test etmek için üç problem göz önüne alındı. Model problemlerin sağladığı üç korunum sabiti sırasıyla kütle, momentum ve enerji olmak üzere aşağıdaki formüller ile hesaplanır:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^4 dx.$$

Uygulanan yöntemin hesaplama gücünü ve etkinliğini test etmek için literatürde en çok kullanılan aşağıdaki hata normları kullanıldı

$$L_2 = \|u^{tam} - U\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{tam} - U_j|^2},$$

$$L_\infty = \|u^{tam} - U\|_\infty = \max_j |u_j^{tam} - U_j|.$$

Problem 1: Tek Solitary Dalga Çözümü

Bu problemde, MEW denkleminin $x \rightarrow \pm\infty$, $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşulları altında verilen analitik çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}[k(x - x_0 - vt)]$$

ve

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech}[k(x - x_0)]$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Burada A bağımsız solitary dalganın genliği, $v = A^2/2$ dalganın hızı ve $k = \sqrt{1/\mu}$ dalga sayısıdır. Bu problem için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin analitik değerleri $\mu = 1$, $A = 0.25$, $x_0 = 30$ parametreleri için

$$I_1 = \frac{A\pi}{k} = 0.7853982,$$

$$I_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu\pi A^2}{3} = 0.1666667,$$

$$I_3 = \frac{4A^4}{3k} = 0.0052083$$

şeklinde (Zaki, 2000; Karakoç, 2011:33) tarafından verilmiştir.

Problem 2: İki Solitary Dalganın Girişimi

İki solitary dalganın girişimini incelemek için MEW denklemi aşağıdaki başlangıç şartı ile göz önüne alındı

$$U(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}[k(x - x_1)] + A_2 \operatorname{sech}[k(x - x_2)].$$

Burada, $0 \leq x \leq 80$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ değerleri için I_1 , I_2 ve I_3 ile gösterilen kütle, momentum ve enerji korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$I_1 = \pi(A_1 + A_2) = 4.7123889,$$

$$I_2 = \frac{8}{3}(A_1^2 + A_2^2) = 3.3333333,$$

$$I_3 = \frac{4}{3}(A_1^4 + A_2^4) = 1.4166667$$

şeklinde (Zaki, 2000; Karakoç, 2011:34) tarafından verildi.

Problem 3: Dalga oluşumu

Problem 3 için

$$U(x, 0) = e^{-x^2}$$

Maxwellian başlangıç şartı ve

$$U(-20, t) = U_x(-20, t) = U(20, t) = U_x(20, t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak MEW denkleminin nümerik çözümleri μ' nün farklı değerleri için hesaplandı (Zaki, 2000; Karakoç, 2011:35).

Tablo 1. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için Lie-Trotter ve Strang şemalarıyla hesaplanan korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
A – B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026672	0.023192
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052795	0.046918
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077848	0.070102
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101359	0.091704
B – A	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026672	0.023192
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052795	0.046918
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077848	0.070102
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101359	0.091704
A – B – A	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026672	0.023192
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052795	0.046918
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077848	0.070102
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101359	0.091704
B – A – B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026670	0.023184
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052791	0.046902
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077840	0.070077
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101349	0.091670

Tablo 1’de Problem 1’in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalgaının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki korunum sabitleri ve hata normlarının A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar verildi. Tablo 1’den görüldüğü gibi A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Bu da uygulanan yöntemin kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde etkili bir yöntem olduğunun göstergesidir. Ayrıca, Tablo 1’de A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hatalarının zaman ilerledikçe arttığı gözlemlendi. B-A-B şemasıyla elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının diğer üç şemaya göre daha küçük olduğu Tablo 1’den açıkça görülmektedir.

Tablo 2. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga'nın korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
A – B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006667	0.005801
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013197	0.011734
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019459	0.017532
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025338	0.022935
B – A	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006667	0.005801
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013197	0.011734
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019459	0.017532
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025338	0.022935
A – B – A	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006667	0.005801
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013197	0.011734
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019459	0.017532
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025338	0.022935
B – A – B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006664	0.005793
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013192	0.011718
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019452	0.017507
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025327	0.022901

Tablo 2’de problem 1’in, $\Delta t = 0.05$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga'nın $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamandaki korunum sabitleri ve hata normlarının A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar verildi. Tablo 2’den görüldüğü gibi A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Bu da uygulanan yöntemin kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde etkili bir yöntem olduğunun göstergesidir. Ayrıca, Tablo 2’de A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hatalarının zaman ilerledikçe arttığı gözlemlendi. B-A-B şemasıyla elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının diğer üç şemaya göre daha küçük olduğu Tablo 2’den açıkça görülmektedir.

Tablo 3. Problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
A – B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006677	0.005830
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013217	0.011797
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019490	0.017631
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025379	0.023072
B – A	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006677	0.005830
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013217	0.011796
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019490	0.017630
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025379	0.023071
A – B – A	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006677	0.005830
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013217	0.011797
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019490	0.017631
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025379	0.023072
B – A – B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006667	0.005801
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013197	0.011734
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019459	0.017532
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025338	0.022935

Tablo 3'te problem 1'in, $\Delta t = 0.1$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamandaki korunum sabitleri ve hata normlarının A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçları verildi. Tablo 3'ten görüldüğü gibi A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Bu da uygulanan yöntemin kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde etkili bir yöntem olduğunun göstergesidir. Ayrıca, Tablo 3'te A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hatalarının zaman ilerledikçe arttığı gözlemlendi. B-A-B şemasıyla elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının diğer üç şemaya göre daha küçük olduğu Tablo 3'ten açıkça görülmektedir.

Tablo 1 ve tablo 2'de görüldüğü üzere Strang B-A-B şemasında $\Delta t = 0.05$ alınarak $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ için yapılan hesaplamalarda $t = 20$ 'de L_2 ve L_∞ hata normlarının $h = 0.1$ için sırasıyla 0.101349, 0.091670; $h = 0.05$ için sırasıyla 0.025327, 0.022901 olduğu görüldü. Elde edilen sonuçlardan h adım uzunluğu küçüldükçe hata normlarının da küçüldüğü görüldü. Tablo 2 ve Tablo 3'te görüldüğü üzere Strang B-A-B şeması ile $h = 0.05$ alınarak $\Delta t = 0.05$ ve $\Delta t = 0.1$ için yapılan hesaplamalarda $t = 20$ 'de L_2 ve L_∞ hata norm değerlerinin $\Delta t = 0.05$ için sırasıyla 0.025327, 0.022901; $\Delta t = 0.1$ için sırasıyla 0.025338, 0.022935 olduğu görüldü. Elde edilen sonuçlardan Δt adım uzunluğu küçüldükçe hata norm değerlerinin de küçüldüğü görüldü.

Tablo 4. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının (Karakoç, 2011:42; Esen, 2006)) ile karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026672	0.023192
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052795	0.046918
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077848	0.070102
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101359	0.091704
(Karakoç, 2011:42)	20	0.8236523	0.1799408	0.0060628	16.591909	12.299878
(Karakoç, 2011:43)	20	0.8233779	0.1798179	0.0060545	16.452886	12.147687
(Esen, 2006)	20	0.7853898	0.1667614	0.0052082	0.0796940	0.0465523
(Esen, 2008)	20	0.785397	0.166473	0.005208	0.269281	0.256997

Tablo 5. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.05$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının (Karakoç, 2011:42) ile karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.006664	0.005793
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.013192	0.011718
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.019452	0.017507
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.025327	0.022901
(Karakoç, 2011:42)	20	0.8041800	0.1731119	0.0056170	8.1295265	6.0283621
(Karakoç, 2011:43)	20	0.8041468	0.1730971	0.0056160	8.1123878	6.0033067

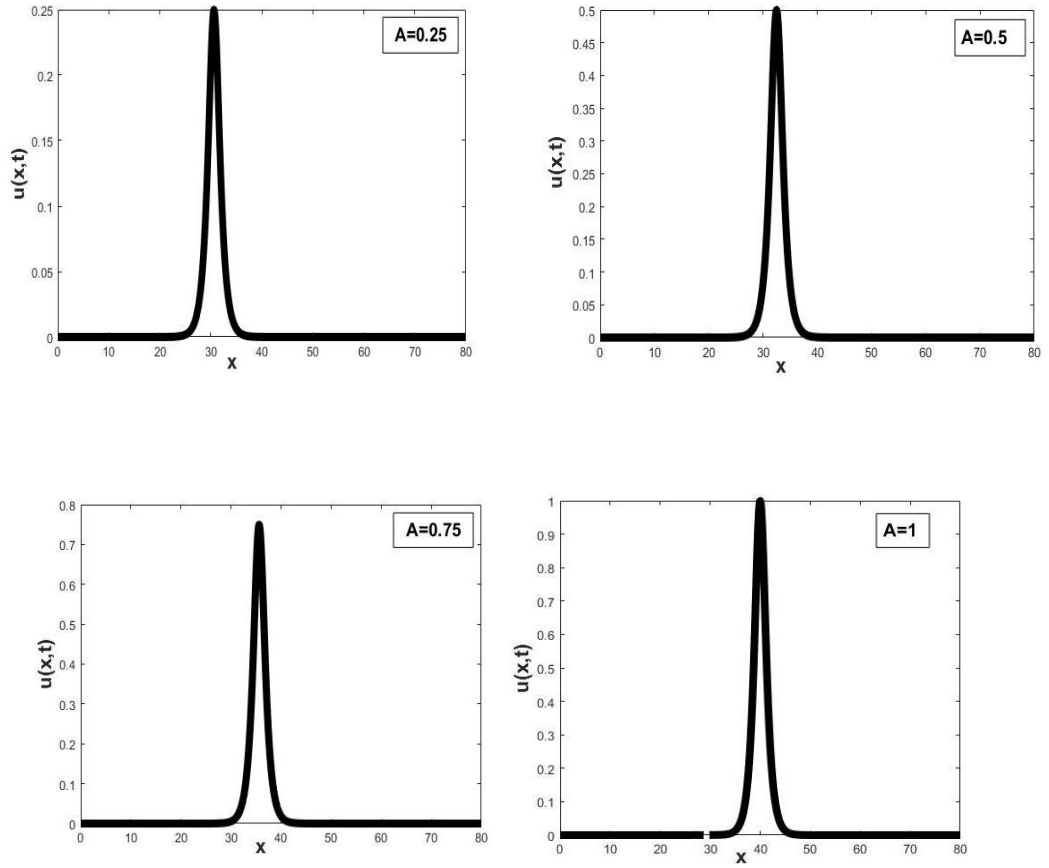
Problem 1 için, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ iken $\Delta t = 0.05$ alınarak $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ değerleri için yapılan hesaplamalar tablo 4 ve tablo 5'te verildi. Tablo 4'te $t = 20$ 'de Strang B-A-B için $h = 0.1$ iken L_2 ve L_∞ hata norm değerleri sırası ile 0.101359, 0.091704 olduğu görüldü. Aynı değerler için (Karakoç, 2011:42-43)'ün yapmış olduğu çalışmalardan birinde L_2 ve L_∞ hata norm değerleri sırası ile 16.591909, 12.299878 iken (Karakoç, 2011:42-43)'ün diğer çalışmasında L_2 ve L_∞ hata norm değerleri sırası ile 16.452886, 12.147687'dir. Tablo 4'ten görüldüğü üzere B-A-B şemasıyla hesaplanan nümerik sonuçlar referans (Karakoç, 2011:42-43)'ün elde ettiği sonuçlardan daha iyi olduğu açıktır. Tablo 5'te aynı parametreler kullanılarak $h = 0.05$ için hesaplanan nümerik sonuçlara bakıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Ayrıca, referans (Karakoç, 2011:42-43) çalışmasına göre B-A-B şemasıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının daha küçük olduğu ve korunum

sabitlerini daha iyi korunduğu görülmektedir. Referans (Esen, 2006)' da kullanılan Galerkin yöntemiyle yapılan karşılaştırmada, B-A-B ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının $t = 20$ 'de daha büyük olduğu fakat Referans (Esen, 2008)'de kullanılan sonlu fark yöntemine göre hataların daha küçük olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 6. Problem 1'in $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının $\Delta t = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ iken (Karakoç, 2011:43-44) ile karşılaştırılması.

Yöntem	Δt	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	0.1	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026682	0.023221
		10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052815	0.046980
		15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077877	0.070201
		20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101400	0.091841
(Karakoç, 2011:43)		20	0.8236521	0.1799407	0.0060628	16.5917510	12.2996715
(Karakoç, 2011:44)		20	0.8233777	0.1798178	0.0060545	16.4527307	12.1474822
B-A-B	0.01	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026669	0.023182
		10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052789	0.046898
		15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077838	0.070070
		20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101347	0.091660
(Karakoç, 2011:43)		20	0.8236523	0.1799408	0.0060628	16.5919596	12.2999444
(Karakoç, 2011:44)		20	0.8233779	0.1798179	0.0060545	16.4529352	12.1477525

Problem 1'in $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve L_2 ve L_∞ hata normlarının $\Delta t = 0.1$ ve 0.01 değerleri için yapılan hesaplamalar tablo 6'da verildi. Tablo 6'da $t = 20$ 'de görüldüğü üzere Strang B-A-B için $\Delta t = 0.1$ iken L_2 ve L_∞ hata norm değerleri sırası ile 0.101400, 0.091841 olduğu görüldü. Aynı değerler için Referans (Karakoç, 2011:43)'ün yapmış olduğu çalışmalardan birinde L_2 ve L_∞ hata norm değerleri sırası ile 16.5917510, 12.2996715 iken (Karakoç, 2011:44)'ün diğer çalışmasında L_2 ve L_∞ hata norm değerleri sırası 16.4527307, 12.1474822'dir. Ayrıca, uygulanan yöntemle elde edilen korunum sabitlerinin (Karakoç, 2011) çalışmasında verilen nümerik sonuçlara göre daha iyi korunduğu açıktır. Tablo 6'dan açıkça görüldüğü üzere Δt küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normları da azalmaktadır.



Şekil 3.1. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın farklı A değerleri için fiziksel davranışı.

Şekil 3.1'de problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın farklı A değerleri için fiziksel davranışı $t = 20$ 'de verildi. Şekilden görüldüğü gibi dalganın genliği büyüdükçe dalga sağa doğru daha hızlı ilerlemekte ve genliğini korumaktadır.

Tablo 7. Problem 2'nin $h = 0.1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin korunum sabitlerinin $\Delta t = 0.025$ ve $\Delta t = 0.01$ iken karşılaştırılması.

Yöntem	t	$\Delta t = 0.025$			$\Delta t = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_2
A-B	5	4.712381	3.333325	1.416659	4.712389	3.333336	1.416669
	10	4.712373	3.333313	1.416647	4.712388	3.333334	1.416668
	15	4.712365	3.333295	1.416636	4.712388	3.333327	1.416668
	20	4.712356	3.333254	1.416625	4.712387	3.333296	1.416667
B-A	5	4.712373	3.333314	1.416647	4.712388	3.333335	1.416668
	10	4.712356	3.333291	1.416625	4.712387	3.333332	1.416667
	15	4.712340	3.333262	1.416603	4.712386	3.333324	1.416665
	20	4.712323	3.333210	1.416581	4.712385	3.333293	1.416664
A-B-A	5	4.712381	3.333325	1.416659	4.712389	3.333336	1.416669
	10	4.712373	3.333313	1.416647	4.712389	3.333334	1.416668
	15	4.712365	3.333295	1.416636	4.712388	3.333327	1.416668
	20	4.712356	3.333254	1.416625	4.712387	3.333296	1.416667
B-A-B	5	4.712388	3.333334	1.416668	4.712389	3.333336	1.416670
	10	4.712386	3.333331	1.416666	4.712389	3.333335	1.416669
	15	4.712385	3.333322	1.416663	4.712389	3.333328	1.416669
	20	4.712383	3.333290	1.416661	4.712389	3.333298	1.416669

Problem 2'nin $h = 0.1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 5, 10, 15$ ve 20 değerleri için iki solitary dalganın girişiminin korunum sabitleri, $\Delta t = 0.025$ ve 0.01 iken elde edilen nümerik sonuçlar tablo 7'de verildi. Problem 2 için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin tam çözümü sırası ile 4,7123889, 3.3333333 ve 1.4166667'dir. Tablo 7'de görüldüğü gibi A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan korunum sabitleri zaman ilerledikçe neredeyse değişmemekte ve B-A-B şeması ile elde edilen sonuçlar tam çözüme daha yakındır. Tablo 7'de $\Delta t = 0.01$ iken elde edilen sonuçlar, $\Delta t = 0.025$ iken elde edilen sonuçlara göre daha yakınsaktır.

Tablo 8. Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin korunum sabitlerinin $h = 0.1$ ve $h = 0.05$ iken karşılaştırılması.

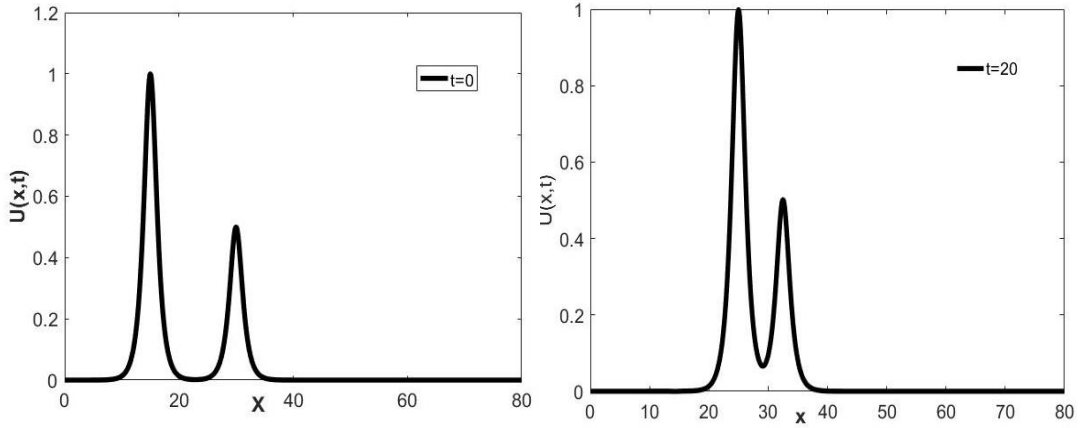
Yöntem	t	$h = 0.1$			$h = 0.05$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
A-B	5	4.712389	3.333336	1.416669	4.712389	3.333335	1.416669
	10	4.712388	3.333334	1.416668	4.712388	3.333334	1.416668
	15	4.712388	3.333327	1.416668	4.712388	3.333332	1.416668
	20	4.712387	3.333296	1.416667	4.712387	3.333323	1.416667
B-A	5	4.712388	3.333335	1.416668	4.712388	3.333334	1.416668
	10	4.712387	3.333332	1.416667	4.712387	3.333333	1.416667
	15	4.712386	3.333324	1.416665	4.712386	3.333330	1.416665
	20	4.712385	3.333293	1.416664	4.712385	3.333321	1.416664
A-B-A	5	4.712389	3.333336	1.416669	4.712389	3.333335	1.416669
	10	4.712389	3.333334	1.416668	4.712389	3.333334	1.416668
	15	4.712388	3.333327	1.416668	4.712388	3.333332	1.416668
	20	4.712387	3.333296	1.416667	4.712387	3.333323	1.416667
B-A-B	5	4.712389	3.333336	1.416670	4.712389	3.333336	1.416670
	10	4.712389	3.333335	1.416669	4.712389	3.333335	1.416669
	15	4.712389	3.333328	1.416669	4.712389	3.333333	1.416669
	20	4.712389	3.333298	1.416669	4.712389	3.333326	1.416669

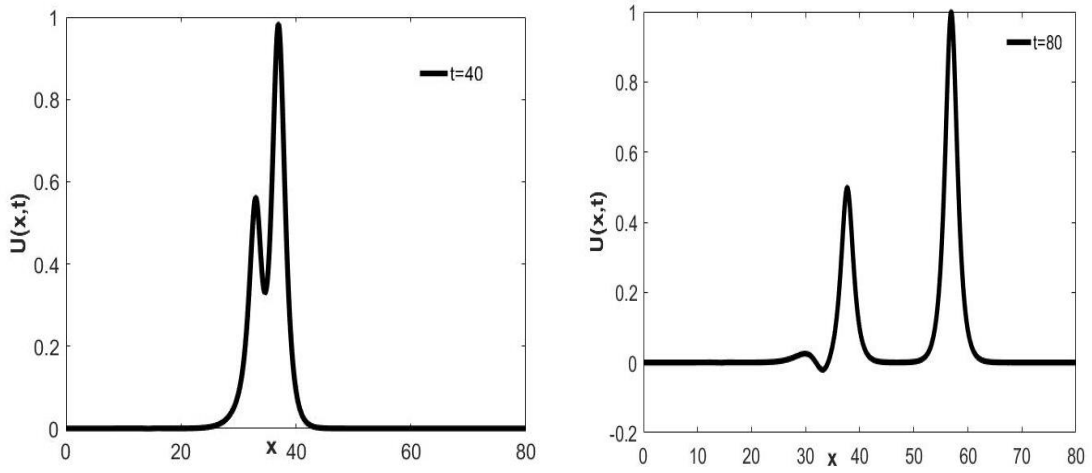
Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 5, 10, 15$ ve 20 değerleri için iki solitary dalganın girişiminin korunum sabitleri $h = 0.1$ ve 0.05 değerleri için hesaplanan nümerik sonuçlar tablo 8'de verildi. Problem 2 için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin tam çözümü sırası ile 4,7123889, 3.3333333 ve 1.4166667'dir. Tablo 8'de görüldüğü gibi A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik sonuçlar korunum sabitlerinin gerçek değerlerine oldukça yakın ve zamanla neredeyse değişmemektedir. Ayrıca, korunum sabitlerinin gerçek değerlerine en yakın sonuçlar B-A-B şemasıyla elde edildi. Tablo 8'den açıkça görüldüğü gibi h konum adım uzunluğu küçüldükçe hesaplanan nümerik sonuçlar da korunum sabitlerini gerçek değerlerine yaklaşmaktadır.

Tablo 9. Problem 2'nin $h = 0.1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $\Delta t = 0.025$ ve 0.01 değerleri için Problem 2'nin korunum sabitleri ve (Karakoç, 2011:47) ile karşılaştırılması.

Yöntem	t	$\Delta t = 0.025$			$\Delta t = 0.01$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
B-A-B	10	4.712386	3.333331	1.416666	4.712389	3.333335	1.416669
	20	4.712383	3.333290	1.416661	4.712389	3.333298	1.416669
	30	4.712381	3.332867	1.416657	4.712389	3.332878	1.416669
	40	4.712380	3.332899	1.416656	4.712389	3.332912	1.416670
	50	4.712377	3.333261	1.416653	4.712389	3.333277	1.416669
	60	4.712373	3.333309	1.416648	4.712389	3.333329	1.416668
	70	4.712370	3.333327	1.416644	4.712388	3.333351	1.416668
	80	4.712367	3.333321	1.416640	4.712388	3.333349	1.416668
(Karakoç, 2011:47)	80	3.3351572	0.8913993	0.0732870	3.3351561	0.8913948	0.0732861

Problem 2'nin $h = 0.1$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $\Delta t = 0.025$ ve 0.01 değerleri için hesaplanan nümerik sonuçlar tablo 9'da verildi. Problem 2 için hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin tam çözümü sırası ile 4,7123889, 3.3333333 ve 1.4166667'dir. Ayrıca, Tablo 9'da B-A-B şemasıyla hesaplanan nümerik sonuçlar (Karakoç, 2011:47) çalışmasında bulunan sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablo 9' dan açıkça görüldüğü gibi B-A-B şemasıyla elde edilen sonuçlar korunum sabitlerinin gerçek değerlerine (Karakoç, 2011:47) çalışmasında verilen sonuçlara göre daha yakınsaktır.





Şekil 3.2. Problem 2'nin $\Delta t = 0.025$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için farklı zamanlardaki iki solitary dalganın girişimi.

Şekil 3.2'de $\Delta t = 0.025$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişimi $t = 0, 20, 40$ ve 80 zamanlarında gözlemlendi. Şekilden görüldüğü gibi $t = 0$ 'da genliği büyük olan dalga genliği küçük dalganın solunda durmaktadır. Büyük dalga daha hızlı olduğu için zaman ilerledikçe küçük dalgayı içine alarak geride bıraktığı görülmektedir. Çarpışmadan sonra küçük dalganın arkasında küçük dalgacıklar bıraktığı görüldü.

Tablo 10a. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için A-B şeması ile hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
		$\mu = 0.5$			$\mu = 0.1$		
A-B	2.5	1.772454	1.879787	0.886229	1.772457	1.377909	0.886282
	5.0	1.772454	1.879993	0.886227	1.772457	1.377930	0.886282
	7.5	1.772454	1.880002	0.886227	1.772458	1.377898	0.886282
	10.0	1.772454	1.879991	0.886227	1.772459	1.377860	0.886282
	12.5	1.772454	1.879988	0.886227	1.772459	1.377837	0.886282
		$\mu = 0.05$			$\mu = 0.02$		
A-B	2.5	1.772465	1.314677	0.886438	1.772519	1.275351	0.887319
	5.0	1.772469	1.314465	0.886443	1.772532	1.274893	0.887341
	7.5	1.772469	1.314403	0.886443	1.772533	1.274702	0.887327
	10.0	1.772469	1.314410	0.886442	1.772533	1.274628	0.887306
	12.5	1.772470	1.314396	0.886442	1.772535	1.274532	0.887285
		$\mu = 0.005$			$\mu = 0.0025$		
A-B	2.5	1.773056	1.251366	0.897694	1.773376	1.244419	0.913032
	5.0	1.772870	1.249100	0.895884	1.771948	1.240024	0.907364
	7.5	1.772540	1.247785	0.893973	1.770043	1.236102	0.901565
	10.0	1.772163	1.246650	0.891927	1.767624	1.229564	0.885717
	12.5	1.771770	1.245676	0.889929	1.765650	1.225545	0.876267

Tablo 10b. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için B-A şeması ile hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
		$\mu = 0.5$			$\mu = 0.1$		
B-A	2.5	1.772454	1.879787	0.886229	1.772457	1.377909	0.886282
	5.0	1.772454	1.879993	0.886227	1.772457	1.377930	0.886282
	7.5	1.772454	1.880002	0.886227	1.772458	1.377898	0.886282
	10.0	1.772454	1.879991	0.886227	1.772458	1.377860	0.886282
	12.5	1.772454	1.879988	0.886227	1.772459	1.377837	0.886282
		$\mu = 0.05$			$\mu = 0.02$		
B-A	2.5	1.772465	1.314676	0.886437	1.772515	1.275344	0.887305
	5.0	1.772469	1.314464	0.886442	1.772522	1.274874	0.887304
	7.5	1.772469	1.314402	0.886442	1.772517	1.274671	0.887267
	10.0	1.772468	1.314409	0.886440	1.772511	1.274586	0.887222
	12.5	1.772469	1.314394	0.886439	1.772506	1.274479	0.887178
		$\mu = 0.005$			$\mu = 0.0025$		
B-A	2.5	1.772751	1.250768	0.896291	1.771690	1.241772	0.908881
	5.0	1.772119	1.247649	0.892547	1.767914	1.231796	0.886384
	7.5	1.771353	1.245469	0.888562	1.764156	1.223809	0.868806
	10.0	1.770557	1.243534	0.884695	1.760348	1.215174	0.849441
	12.5	1.769753	1.241705	0.880551	1.757120	1.2088945	0.835874

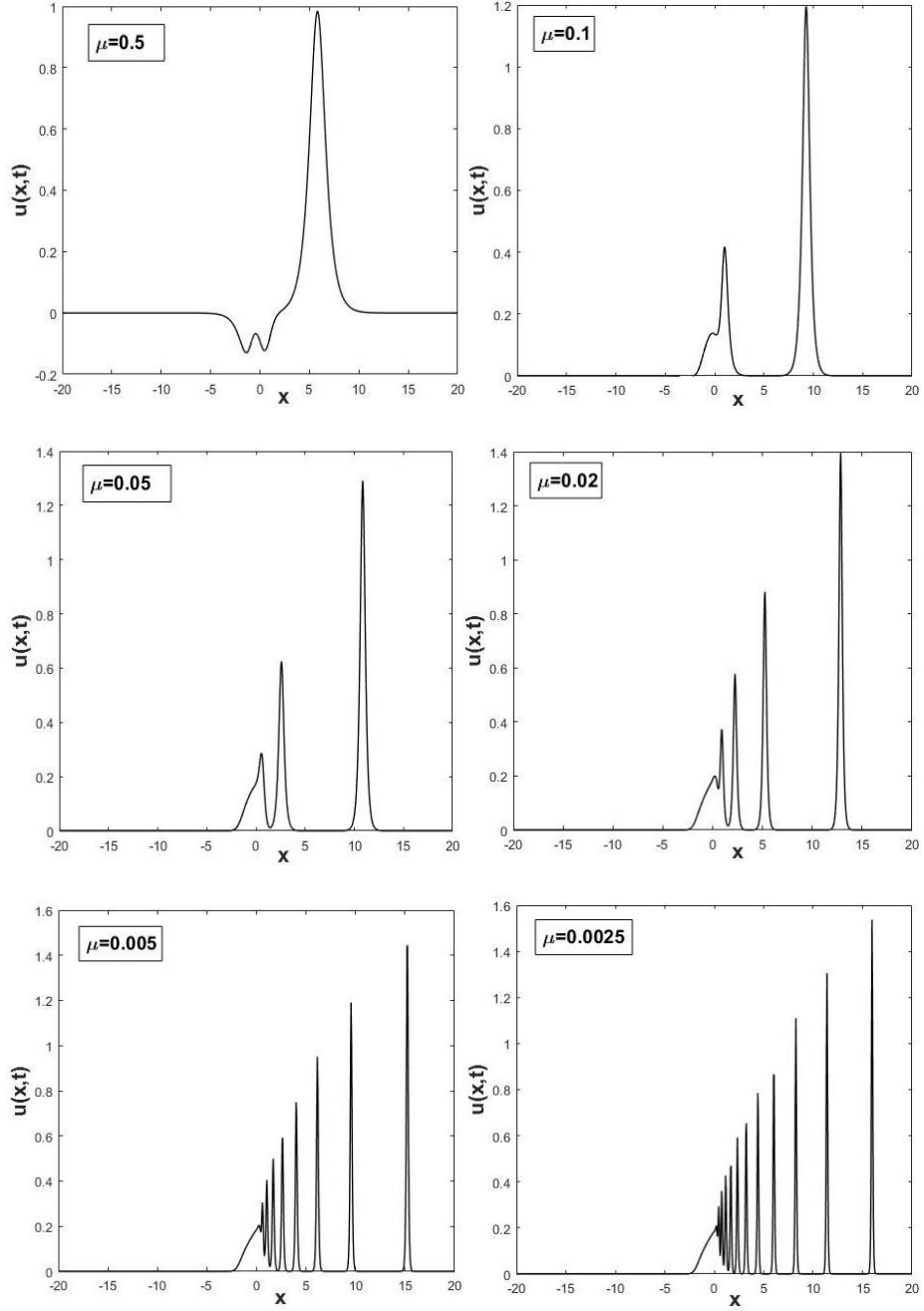
Tablo 10c. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için A-B-A şeması ile hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
		$\mu = 0.5$			$\mu = 0.1$		
A-B-A	2.5	1.772454	1.879787	0.886229	1.772457	1.377909	0.886282
	5.0	1.772454	1.879993	0.886227	1.772457	1.377930	0.886282
	7.5	1.772454	1.880002	0.886227	1.772458	1.377898	0.886282
	10.0	1.772454	1.879991	0.886227	1.772459	1.377860	0.886282
	12.5	1.772454	1.879988	0.886227	1.772459	1.377837	0.886282
		$\mu = 0.05$			$\mu = 0.02$		
A-B-A	2.5	1.772465	1.314677	0.886438	1.772519	1.275351	0.887319
	5.0	1.772469	1.314465	0.886443	1.772532	1.274893	0.887341
	7.5	1.772469	1.314403	0.886443	1.772533	1.274702	0.887327
	10.0	1.772469	1.314410	0.886442	1.772533	1.274628	0.887306
	12.5	1.772470	1.314396	0.886442	1.772535	1.274532	0.887285
		$\mu = 0.005$			$\mu = 0.0025$		
A-B-A	2.5	1.773056	1.251366	0.897694	1.773376	1.244419	0.913032
	5.0	1.772870	1.249100	0.895884	1.771948	1.240024	0.907364
	7.5	1.772540	1.247785	0.893973	1.770043	1.236102	0.901565
	10.0	1.772163	1.246650	0.891927	1.767624	1.229564	0.885717
	12.5	1.771770	1.245676	0.889929	1.765650	1.225545	0.876267

Tablo 10d. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için B-A-B şeması ile hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve (Çelikkaya, 2019:63) ile karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
		$\mu = 0.5$			$\mu = 0.1$		
B-A-B	2.5	1.772454	1.879787	0.886229	1.772457	1.377909	0.886265
	5.0	1.772454	1.879993	0.886227	1.772457	1.377930	0.886265
	7.5	1.772454	1.880002	0.886227	1.772458	1.377898	0.886265
	10.0	1.772454	1.879991	0.886227	1.772459	1.377860	0.886265
	12.5	1.772454	1.879988	0.886227	1.772459	1.377837	0.886265
(Çelikkaya, 2019:63)	12.5	1.77245	1.88008	0.88623	1.77249	1.37774	0.88627
		$\mu = 0.05$			$\mu = 0.02$		
B-A-B	2.5	1.772465	1.314677	0.886377	1.772522	1.275355	0.887105
	5.0	1.772469	1.314465	0.886383	1.772541	1.274909	0.887148
	7.5	1.772470	1.314403	0.886384	1.772549	1.274729	0.887156
	10.0	1.772470	1.314411	0.886384	1.772555	1.274667	0.887157
	12.5	1.772471	1.314397	0.886384	1.772562	1.274582	0.887158
(Çelikkaya, 2019:63)	12.5	1.77254	1.31431	0.88639	1.77275	1.27458	0.88717
		$\mu = 0.005$			$\mu = 0.0025$		
B-A-B	2.5	1.773355	1.251925	0.897971	1.775376	1.248992	0.924133
	5.0	1.773630	1.250632	0.898649	1.776423	1.249123	0.930584
	7.5	1.773737	1.250098	0.898383	1.776635	1.247582	0.924336
	10.0	1.773810	1.249911	0.898698	1.776705	1.247318	0.927559
	12.5	1.773845	1.249704	0.898293	1.776850	1.247821	0.930099
(Çelikkaya, 2019:63)	12.5	1.77465	1.25032	0.89902	1.77868	1.24930	0.92893

10a, 10b, 10c ve 10d tablolarında $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$, $x_0 = 10$, $-20 \leq x \leq 20$, $t = 2.5, 5, 7.5, 10$ ve 12.5 değerleri için problem 3'ün A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemaları ile hesaplanan nümerik sonuçlar verildi. Tablolardan açıkça görüldüğü gibi her dört şema ile hesaplanan I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri birbirleri ile iyi uyum içindedir. Ayrıca, tablo 10d'de B-A-B Strang şeması ile hesaplanan nümerik değerler standart B-spline kullanan (Çelikkaya, 2019:63) çalışması ile $t = 12.5$ zamanındaki sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen nümerik sonuçlara bakıldığında A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemaları ile hesaplanan sayısal değerler literatürde bulunan çalışmalarla uyum içindedir.



Şekil 3.3. Problem 3'ün $t = 12.5$ zamandaki farklı μ değerleri için maxwellian başlangıç koşulu

Şekil 3.3'te $t = 12.5$, $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$, $x_0 = 10$ ve $-20 \leq x \leq 20$ parametreleri için problem 3'ün farklı μ değerleri için ürettiği soliton dalgaların grafikleri verildi. Şekil 3.3'ten görüldüğü üzere μ küçüldükçe üretilen soliton dalga sayısı artarken dalgaların genlikleri de yükselmektedir. Ayrıca, farklı μ değerleri için Problem 3 tarafından üretilen en büyük genliğe sahip soliton dalgaların $t = 12.5$ zamanındaki konum ve genlikleri hesaplandı. $\mu = 0.5$ için en büyük genliğe sahip soliton dalganın konumu $x = 5.800$ ve genliği 0.984 olarak hesaplandı. $\mu = 0.1$ için en büyük genliğe sahip soliton dalganın konumu $x = 9.300$ ve genliği 1.195 olarak hesaplandı. $\mu = 0.05$ için en büyük genliğe

sahip soliton dalganın konumu $x = 10.850$ ve genliği 1.291 olarak hesaplandı. $\mu = 0.02$ için en büyük genliğe sahip soliton dalganın konumu $x = 12.850$ ve genliği 1.396 olarak hesaplandı. $\mu = 0.005$ için en büyük genliğe sahip soliton dalganın konumu $x = 15.250$ ve genliği 1.445 olarak hesaplandı. $\mu = 0.0025$ için en büyük genliğe sahip soliton dalganın konumu $x = 15.950$ ve genliği 1.537 olarak hesaplandı.

Tablo 11. Problem 1'in farklı A değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin analitik değerleri.

Yöntem	A	I_1	I_2	I_3
Analitik	0.25	0.7853981633974	0.1666666666667	0.00520833333333
	0.50	1.5707963267949	0.6666666666667	0.08333333333333
	0.75	2.3561944901923	1.5	0.421875
	1.0	3.1415926535898	2.6666666666667	1.33333333333333

Tablo 12. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 1.0$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	3.141580	2.666651	1.333317	0.847237	0.535918
	10	3.141568	2.666634	1.333300	0.741485	0.445549
	15	3.141555	2.666617	1.333283	0.948385	0.633442
	20	3.141543	2.666601	1.333267	1.227119	0.851415
(Karta ve Kutluay, 2022:9)	20	3.1415925	2.6666665	1.3333332	1.04683	0.65254
(Çelikkaya, 2019)	20	3.1415922	2.6666685	1.3333329	2.49435	1.78185
(Başhan ve ark., 2021)	20	3.1416760	2.6667600	1.3334280	1.50692	0.92893

Tablo 13. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 1.0$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga'nın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	3.141593	2.666668	1.333333	0.828178	0.528876
	10	3.141592	2.666667	1.333333	0.682647	0.403625
	15	3.141592	2.666667	1.333333	0.806347	0.485041
	20	3.141592	2.666667	1.333333	0.968625	0.639920
(Karta ve Kutluay, 2022:9)	20	3.1415927	2.6666667	1.3333333	0.04402	0.02808
(Esen ve Kutluay, 2008)	20	3.1415790	2.6666350	1.3333310	0.14945	0.09870
(Geyikli ve Karakoç, 2015)	20	3.1415838	2.6666592	1.3333251	3.61948	2.25768
Karakoç ve Geyikli, 2013)	20	3.1415860	2.6666612	1.3333279	3.61297	2.25401
Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	3.1415842	2.6666609	1.3333890	3.98833	2.84859
(Başhan ve ark., 2021)	20	3.1416120	2.6667230	1.3333890	0.02601	0.01908

Tablo 11’de problem 1’in $A = 0.25, 0.5, 0.75$ ve 1 için korunum sabitlerinin analitik değerleri verildi. Tablo 12’de $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 1.0$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Ayrıca, literatürde bulunan farklı çalışmalarla $t = 20$ ’de verilen sonuçlar karşılaştırıldı. Tablo 12’den görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri neredeyse değişmemektedir. Tablo 12’den anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları diğer çalışmalarla uyum içindedir. Tablo 13’te aynı parametreler kullanılarak $\Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri ve L_2 , L_∞ hata normları hesaplandı. Tablo 13’ten görüldüğü gibi Δt küçüldükçe hata normlarının da düştüğü görülmektedir. Ayrıca B-A-B şeması ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablo 12 ve tablo 13’den görüldüğü gibi korunum sabitlerimiz neredeyse sabit kalmakta ve L_2 , L_∞ hata normları karşılaştırma yapılan çoğu çalışmada bulunan sonuçlardan daha küçük olmasına rağmen kuintik B-spline kullanan (Karta ve Kutluay, 2022) çalışmasında bulunan sonuçlardan daha büyüktür.

Tablo 14. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.75$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	2.356194	1.500000	0.421874	0.557474	0.464771
	10	2.356193	1.499999	0.421874	0.607660	0.388715
	15	2.356192	1.499997	0.421873	0.524769	0.327975
	20	2.356191	1.499997	0.421873	0.538766	0.306975
(Karta ve Kutluay, 2022:10)	20	2.3561945	1.5000000	0.4218750	0.14323	0.09075
(Çelikkaya, 2019)	20	2.3561944	1.5000012	0.4218750	2.03819	1.46910
(Başhan ve ark., 2021)	20	2.3562210	1.5000350	0.4218947	0.14153	0.08585

Tablo 15. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.75$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	2.356194	1.500001	0.421875	0.555457	0.458533
	10	2.356194	1.500000	0.421875	0.603143	0.389140
	15	2.356194	1.500000	0.421875	0.517019	0.327357
	20	2.356194	1.500000	0.421875	0.525183	0.289792
(Karta ve Kutluay, 2022:10)	20	2.3561945	1.5000000	0.4218750	0.00701	0.00485
(Esen ve Kutluay, 2008)	20	2.3561860	1.4999790	0.4218745	0.05193	0.03667
(Geyikli ve Karakoç, 2015)	20	2.3561893	1.4999973	0.4218732	1.48146	0.93623
(Karakoç ve Geyikli, 2013)	20	2.3561895	1.4999769	0.4218733	1.48020	0.93594
(Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	2.3561896	1.4999782	0.4218733	2.24293	1.62010
(Başhan ve ark., 2021)	20	2.3561560	1.4999630	0.4218543	0.01595	0.01218

Tablo 14’de Problem 1’in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.75$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Tablo 14’ten görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri nerede ise değişmemektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan farklı çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablo 14’ten anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları

diğer çalışmalarla uyum içindedir. Tablo 15’te aynı parametreler kullanılarak $\Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları hesaplandı. Tablo 15’ten görüldüğü gibi Δt küçüldükçe hata normlarının da düştüğü görülmektedir. Tablodan görüldüğü gibi korunum sabitlerimiz neredeyse sabit kalmakta ve L_2, L_∞ hata normları karşılaştırma yapılan çoğu çalışmada bulunan sonuçlardan daha küçük olmasına rağmen kuintik B-spline kullanan (Karta ve Kutluay, 2022:10)’un çalışmasında bulunan sonuçlardan daha büyüktür. Tablo 12 ve tablo 14 ile tablo 13 ve tablo 15’te A parametreleri dışında tüm parametreler sabittir. Tablolardan da görüldüğü gibi A parametresi küçüldükçe korunum sabitleri analitik değerlere yaklaşmakta ve L_2, L_∞ hata normlarımız azalmaktadır.

Tablo 16. Problem 1’in $\Delta t = 0.05, h = 0.1, A = 0.5, \mu = 1, x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	1.570796	0.666667	0.083333	0.202800	0.183680
	10	1.570796	0.666667	0.083333	0.347068	0.296192
	15	1.570796	0.666667	0.083333	0.411704	0.300275
	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.414275	0.264399
(Karta ve Kutluay, 2022:10)	20	1.5707963	0.6666667	0.0833333	0.00920	0.00640
(Çelikkaya, 2019)	20	1.5707963	0.6666673	0.0833333	1.05855	0.86024

Tablo 17. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga'nın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	1.570796	0.666667	0.083333	0.202696	0.183331
	10	1.570796	0.666667	0.083333	0.346843	0.295457
	15	1.570796	0.666667	0.083333	0.411345	0.299234
	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.413783	0.264504
(Karta ve Kutluay, 2022:11)	20	1.5707963	0.6666667	0.0833333	0.00118	0.00095
(Esen ve Kutluay, 2008)	20	1.5707920	0.6666588	0.0833333	0.01864	0.01509
(Geyikli ve Karakoç, 2015)	20	1.5707930	0.6666655	0.0833330	0.42152	0.27116
Karakoç ve Geyikli, 2013	20	1.5707930	0.6666653	0.0833330	0.42111	0.27119
Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012	20	1.5707931	0.6666660	0.0833330	1.06979	0.86864
(Başhan ve ark., 2021)	20	1.5708080	0.6666710	0.0833345	0.00662	0.00450

Tablo 16'da Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Tablo 16'dan görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri nerede ise değişmemektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablo 16'dan anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları diğer çalışmalarla uyum içindedir. Tablo 17'de aynı parametreler kullanılarak $\Delta t = 0.01$ için korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Δt küçüldükçe hata normlarının da düştüğü Tablo 17'den açıkça görülmektedir. Tablo 17'ye bakıldığında korunum sabitlerimiz neredeyse sabit kalmakta, L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırma yapılan bazı çalışmalara göre küçük olmasına rağmen bazılarından daha büyüktür. Tablo 12, tablo 14 ve tablo 16 ile tablo 13, tablo 15 ve tablo 17'de A parametreleri dışında tüm parametreler sabittir. Tablolardan da görüldüğü gibi A parametresi küçüldükçe korunum sabitleri analitik değerlere yaklaşmakta ve L_2 , L_∞ hata normlarımız azalmaktadır.

Tablo 18. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 70$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	1.570796	0.666667	0.083333	0.202800	0.183680
	10	1.570796	0.666667	0.083333	0.347068	0.296192
	15	1.570796	0.666667	0.083333	0.411704	0.300275
	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.414275	0.264399
(Karta ve Kutluay, 2022:11)	20	1.5707963	0.6666667	0.083333	0.00894	0.00610
(Dereli, 2010)	20	1.5707355	0.6666084	0.083333	0.09475	0.03564
(Dereli, 2010)	20	1.5707661	0.6666460	0.083333	0.03186	0.02476
(Dereli, 2010)	20	1.5710582	0.6669421	0.083333	0.25540	0.19890
(Dereli, 2010)	20	1.5705602	0.6664956	0.083333	0.17124	0.13536
(Zaki, 2000)	20	1.57078	0.66666	0.083333	0.01172	0.00852
(Saka, 2006)	20	1.5707963	0.6666667	0.083333	0.00920	0.00640
(Saka, 2006)	20	1.5707963	0.6666667	0.083333	0.00920	0.00640
(Saka, 2007)	20	1.5707963	0.6666667	0.083333	0.00860	0.00568

Tablo 18’de $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.5$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 70$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Tablo 18’de görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri nerede ise değişmemektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan bazı sonuçlar için karşılaştırıldı. Tablo 18’de anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları diğer çalışmalarla uyum içindedir.

Tablo 19. Problem 1'in $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.266821	0.232207
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.528151	0.469801
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.778775	0.702005
	20	0.785398	0.166667	0.005208	1.014000	0.918402
(Karta ve Kutluay, 2022:11)	20	0.7853982	0.1666667	0.0052083	0.012027	0.010137
(Esen ve Kutluay, 2008)	20	0.7853977	0.1664736	0.0052083	2.701647	2.576377
(Evans ve Raslan, 2005)	20	0.7852864	0.1665818	0.0052061	2.021476	1.569539
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021)	20	0.7850300	0.1666259	0.0052058	1.471099	0.897036

Tablo 20. Problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^6$	$L_\infty \times 10^6$
B-A-B	0.2	0.785398	0.166667	0.005208	1.070586	0.904685
	0.4	0.785398	0.166667	0.005208	2.141137	1.812145
	0.6	0.785398	0.166667	0.005208	3.211616	2.721700
	0.8	0.785398	0.166667	0.005208	4.281989	3.632673
	1.0	0.785398	0.166667	0.005208	5.352219	4.544397
(Karta ve Kutluay, 2022:12)	1.0	0.7853982	0.1666667	0.0052083	0.02182	0.02106
(Raslan ve ark., 2014)	1.0	0.785341	0.166453	0.0052071	29.6099	23.5070
(Raslan ve ark., 2014)	1.0	0.787173	0.167079	0.0052460	727.1920	411.7200
(Raslan ve ark., 2014)	1.0	0.785398	0.166473	0.0052083	17.7110	10.8337
(Başhan ve ark., 2021)	1.0	0.7853981	0.1666666	0.0052083	0.2706	0.2164

Tablo 21. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.266699	0.231843
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.527906	0.469021
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.778401	0.700774
	20	0.785398	0.166667	0.005208	1.013494	0.916698
(Karta ve Kutluay, 2022:12)	20	0.7853982	0.1666667	0.0052083	0.00266	0.00319
(Esen, 2006)	20	0.7853970	0.1667636	0.0052083	0.80145	0.46009
(Esen, 2006)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.80098	0.46061
(Esen ve Kutluay, 2008)	20	0.7853977	0.1664735	0.0052083	2.69281	2.56997
(Essa, 2016)	20	0.7853965	0.1666638	0.0052081	0.05208	0.05456
(Geyikli ve Karakoç, 2015)	20	0.7853967	0.1666664	0.0052083	0.51873	0.32113
(Karakoç ve Geyikli, 2013)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.51774	0.32114
(Geyikli ve Karakoç, 2012)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.80146	0.46121
(Evans ve Raslan, 2005)	20	0.7849545	0.1664765	0.0051995	2.90516	2.49892
(Başhan ve ark., 2009)	20	0.7853979	0.1666671	0.0052084	0.01653	0.01194
(Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	0.7853966	0.1666662	0.0052083	1.75277	1.76465
(Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	0.7853966	0.1666662	0.0052083	1.75270	1.76459
(Çelikkaya, 2019)	20	0.7853982	0.1666666	0.0052083	1.75081	1.76288
(Başhan ve ark., 2021)	20	0.7853989	0.1666675	0.0052084	0.01275	0.01047
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021)	20	0.7850300	0.1666259	0.0052058	1.46806	0.89667

Tablo 19’da $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Tablo 19’dan görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri nerede ise değişmemektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan bazı sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablo 19’dan anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları diğer çalışmalarla uyum içindedir. Tablo 20’de aynı parametreler kullanılarak $\Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları hesaplandı. Tablo 20’den görüldüğü gibi Δt küçüldükçe

hata normlarının da düştüğü görülmektedir. Tablo 21’de de aynı parametreler kullanılarak $\Delta t = 0.05$ için korunum sabitleri ve L_2, L_∞ hata normları hesaplandı. Tablo 21’den görüldüğü gibi Δt küçüldükçe hata normlarının da düştüğü görülmektedir. Tablo 19, tablo 20 ve tablo 21’de görüldüğü gibi korunum sabitlerimiz neredeyse sabit kalmakta ve L_2, L_∞ hata normları karşılaştırma yapılan çoğu çalışmada bulunan sonuçlardan daha küçük sonuç vermiştir. Tablo 12, tablo 14, tablo 16 ve tablo 21’de A parametreleri dışında tüm parametreler sabittir. Tablolardan da görüldüğü gibi A parametresi küçüldükçe korunum sabitleri analitik değerlere yaklaşmakta ve L_2, L_∞ hata normlarımız azalmaktadır.

Tablo 22. Problem 1’in $\Delta t = 0.05, A = 0.25, \mu = 1, x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga için $t = 20$ iken h adım aralığının değişimine göre hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	B-A-B	B-A-B	(Karta ve Kutluay,2022:12)	(Karta ve Kutluay,2022:12)
h	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.8	6.605270	4.558305	3.06141247	2.28725768
0.4	1.635570	1.477172	0.19632160	0.13763922
0.2	0.406161	0.368050	0.01285990	0.00899224
0.1	0.101349	0.091670	0.00057606	0.16269906
0.05	0.025327	0.022901	0.00005149	0.00003627

Tablo 22’de problem 1’in $\Delta t = 0.05, A = 0.25, \mu = 1, x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga için $t = 20$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının $h = 0.8, 0.4, 0.2, 0.1$ ve 0.05 konum adım uzunlukları ile hesaplanan değerleri verildi. h adım uzunluğu küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normları azaldığı Tablo 22’den açıkça görülmektedir. Tablo 22’de B-A-B şeması ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları (Karta ve Kutluay,2022:12) çalışması ile karşılaştırıldı. $h = 0.1$ için B-A-B ile hesaplanan L_∞ , kuintik B-spline kullanan (Karta ve Kutluay,2022:12) çalışmasında bulunan L_∞ ’dan daha küçük olduğu Tablo 22’den görülmektedir. Daha yüksek dereceden spline ve splitting yöntemi kullanan (Karta ve Kutluay,2022:12) çalışmasındaki nümerik sonuçların genel olarak daha iyi olduğu Tablo 22’den açıkça görülmektedir.

Tablo 23. Problem 1'in $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 20$ iken Δt adım aralığının değişimine göre hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	B-A-B	B-A-B	(Karta ve Kutluay,2022:13)	(Karta ve Kutluay,2022:13)
Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.8	0.102292	0.094489	0.01754897	0.01252201
0.4	0.101566	0.092379	0.00876262	0.00630404
0.2	0.101400	0.091840	0.00439789	0.00315468
0.1	0.101359	0.091704	0.00220678	0.00157957
0.05	0.101349	0.091670	0.00110645	0.00079042

Tablo 23'te problem 1'in $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 20$ için L_2 ve L_∞ hata normlarının $\Delta t = 0.8, 0.4, 0.2, 0.1$ ve 0.05 zaman adım uzunlukları ile hesaplanan değerleri verildi. Tablo 23'ten görüldüğü üzere Δt adım aralığı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normları azalmaktadır. Ayrıca, (Karta ve Kutluay,2022:13) çalışmasında bulunan nümerik sonuçların daha iyi olduğu açıkça tablo 23'ten görülmektedir.

Tablo 24. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026669	0.023182
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052789	0.046897
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077838	0.070069
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101346	0.091659
(Karta ve Kutluay,2022:13)	20	0.7853982	0.1666667	0.0052083	0.0002322	0.0002748
(Geyikli ve Karakoç, 2015)	20	0.7853967	0.1666664	0.0052083	0.0518107	0.0320756
(Karakoç ve Geyikli, 2013)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.0517742	0.0321145
(Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	0.7853967	0.1666662	0.0052083	0.1752326	0.1764220
(Başhan ve ark., 2021)	20	0.7853976	0.1666651	0.0052082	0.0036871	0.0042041

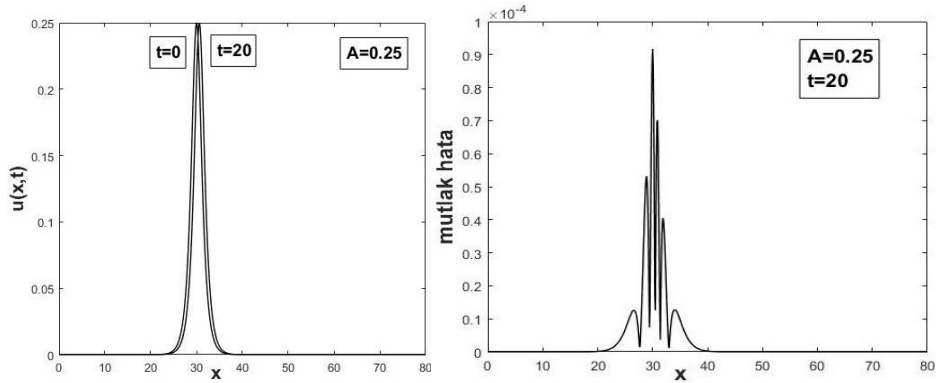
Tablo 24'te $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Tablo 24'te görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri nerede ise değişmemektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablo 24'ten anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları diğer çalışmalarla uyum içindedir. Tablo 13, tablo 15, tablo 17 ve tablo 24'te A parametreleri dışında tüm

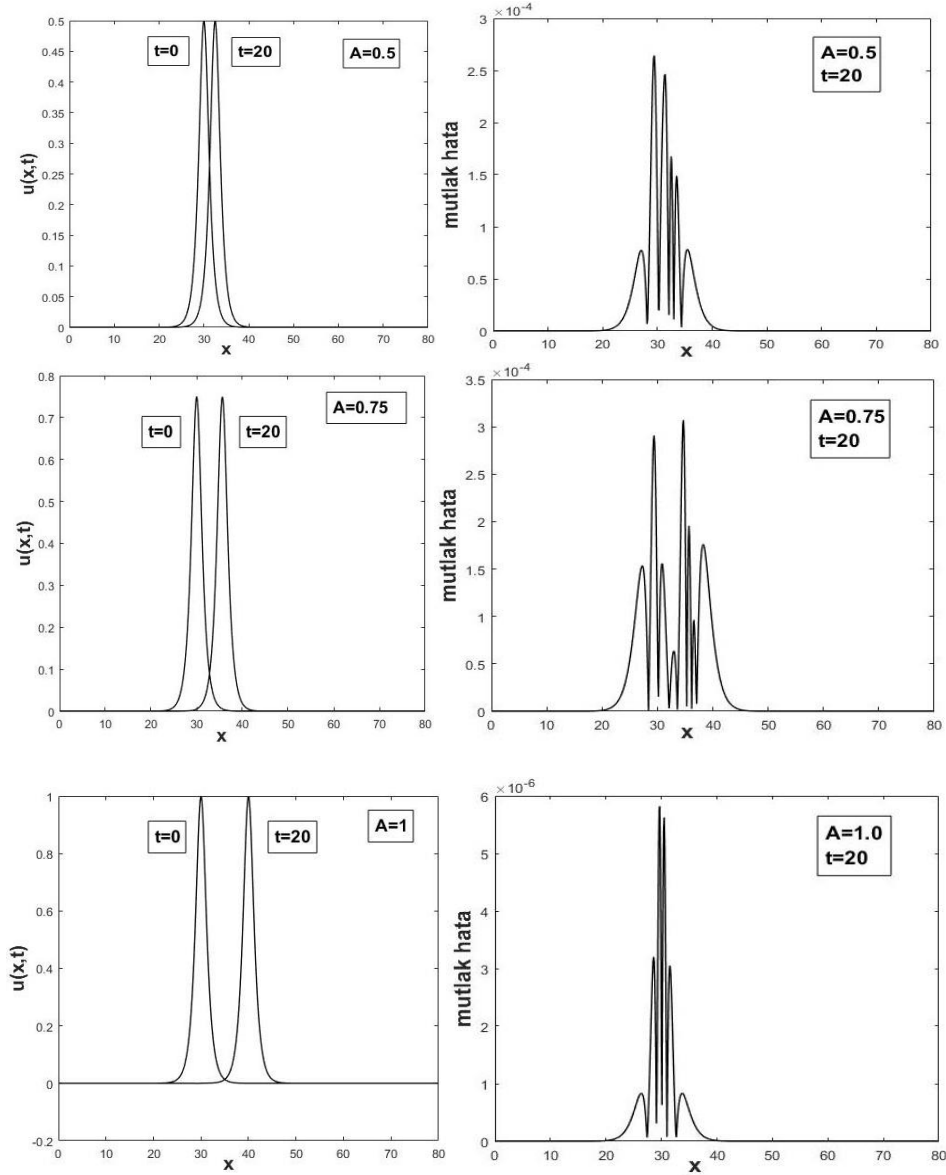
parametreler sabittir. Tablolardan da görüldüğü gibi A parametresi küçüldükçe korunum sabitleri analitik değerlere yaklaşmakta ve L_2 , L_∞ hata normlarımız azalmaktadır.

Tablo 25. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 70$ değerleri için tek solitary dalga'nın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026670	0.023184
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052791	0.046902
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077840	0.070077
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101349	0.091670
(Karta ve Kutluay,2022:13)	20	0.7853982	0.1666667	0.0052083	0.00017	0.00020
(Esen, 2006)	20	0.7853970	0.1667636	0.0052083	0.08014	0.04600
(Dereli, 2010)	20	0.7854414	0.1666622	0.0052081	0.06152	0.03324
(Dereli, 2010)	20	0.00550	0.00369	0.0052080	0.03186	0.02476
(Dereli, 2010)	20	0.7855228	0.1667260	0.0052120	0.06676	0.05134
(Dereli, 2010)	20	0.7852686	0.1666209	0.0052055	0.05347	0.03716
(Zaki, 2000)	20	0.78539	0.16667	0.00521	0.00345	0.00203
(Başhan ve ark., 2021)	20	0.7853975	0.1666667	0.0052083	0.00133	0.00120

Tablo 25'te $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 70$ için korunum sabitleri ve hata normlarının $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarındaki değerleri verildi. Tablo 25'te görüldüğü gibi zaman ilerledikçe korunum sabitleri nerede ise değişmemektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları literatürde bulunan bazı sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablo 25'ten anlaşıldığı üzere B-A-B şeması ile hesaplanan hata normları diğer çalışmalarla uyum içindedir.





Şekil 3.4. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın farklı A değerleri için fiziksel davranışı ve mutlak hatalar.

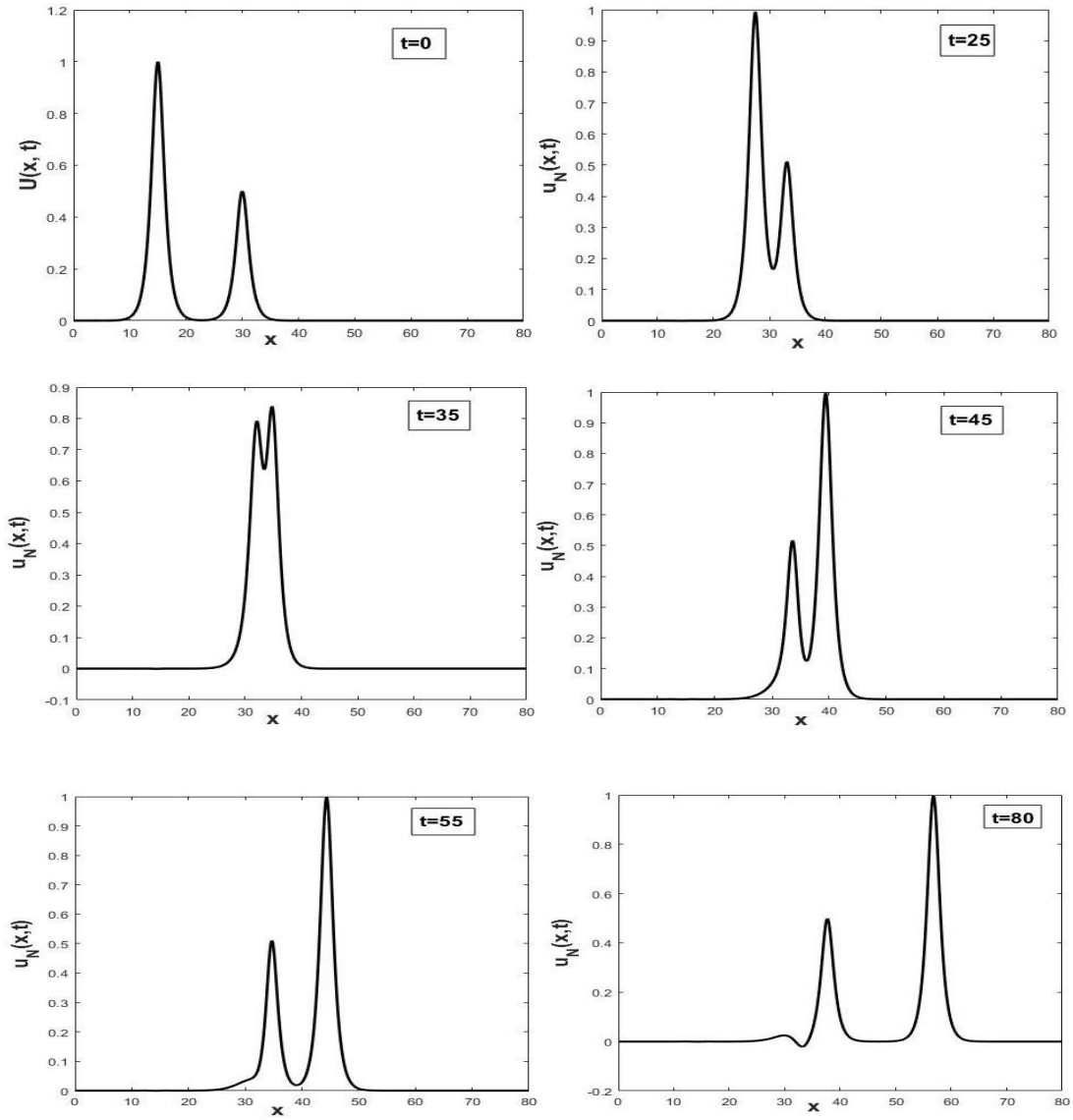
Şekil 3.4'te problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için farklı A değerleri kullanılarak B-A-B şeması ile elde edilen grafikler verildi. Grafiklerden görüldüğü gibi A genlik değeri büyüdükçe dalga sağa doğru daha hızlı ilerlemektedir. Ayrıca solitary dalganın $t = 0$ zamanındaki konumu $x_0 = 30$ ve genliği $A = 1$ iken $t = 20$ de dalganın konumu $x = 40$ ve genliği yine $A = 1$ olarak hesaplandı. Solitary dalganın $t = 0$ zamanındaki konumu $x_0 = 30$ ve genliği $A = 0.75$ iken $t = 20$ de dalganın konumu $x = 35.60$ ve genliği yine $A = 0.75$ olarak hesaplandı. Solitary dalganın $t = 0$ zamanındaki konumu $x_0 = 30$ ve genliği $A = 0.5$ iken $t = 20$ de dalganın konumu $x = 32.50$ ve genliği yine $A = 0.5$ olarak hesaplandı. Solitary dalganın $t = 0$ zamanındaki konumu $x_0 = 30$ ve genliği $A = 0.25$ iken $t = 20$ de dalganın

konumu $x = 30.60$ ve genliği yine $A = 0.25$ olarak hesaplandı. Şekil 3.4'te görüldüğü üzere tüm A değerleri için hesaplanan mutlak hatalar çözüm bölgesinin ortasında yoğunlaşmaktadır. Ayrıca zaman ilerledikçe solitary dalgaların hızını, şeklini ve genliğini koruyarak sağa doğru ilerlediği şekil 3.4'ten açıkça görülmektedir. Bu da uygulanan yöntemin problemin fiziksel yapısını koruduğunu göstermektedir.

Tablo 26. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Yöntem		B-A-B		(Karta ve Kutluay,2022:15)		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
10	4.710810	3.331225	1.414562	4.712329	3.333255	1.416588
20	4.709231	3.329079	1.412455	4.712273	3.333174	1.416501
30	4.707843	3.326807	1.410539	4.712217	3.333106	1.416136
40	4.707245	3.326063	1.409862	4.712202	3.333086	1.416229
50	4.705768	3.324454	1.407937	4.712147	3.333011	1.416347
60	4.704197	3.322411	1.405850	4.712086	3.332930	1.416269
70	4.702629	3.320343	1.403769	4.712025	3.332849	1.416187
80	4.701068	3.318260	1.401699	4.711964	3.332767	1.416106
Yöntem		(Yağmurlu ve Karakaş, 2021)		(Evans ve Raslan, 2005)		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
10	4.710180	3.331961	1.415419	4.712022	3.324678	1.400768
20	4.710180	3.331341	1.414833	4.711697	3.324210	1.401182
30	4.710181	3.329523	1.413184	4.711242	3.346583	1.424847
40	4.710181	3.329690	1.413358	4.711017	3.321250	1.398239
50	4.710180	3.330105	1.413629	4.710804	3.320956	1.398729
60	4.710180	3.329600	1.413079			
70	4.710180	3.329056	1.412516			
80	4.710180	3.328490	1.411954			

Tablo 26'da problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitleri verildi. Tablo 26'da görüldüğü üzere B-A-B şeması ile bulduğumuz korunum sabitleri (Karta ve Kutluay,2022:15) ve (Yağmurlu ve Karakaş, 2021)'in yapmış olduğu çalışmalarla ile iyi uyum içindedir.



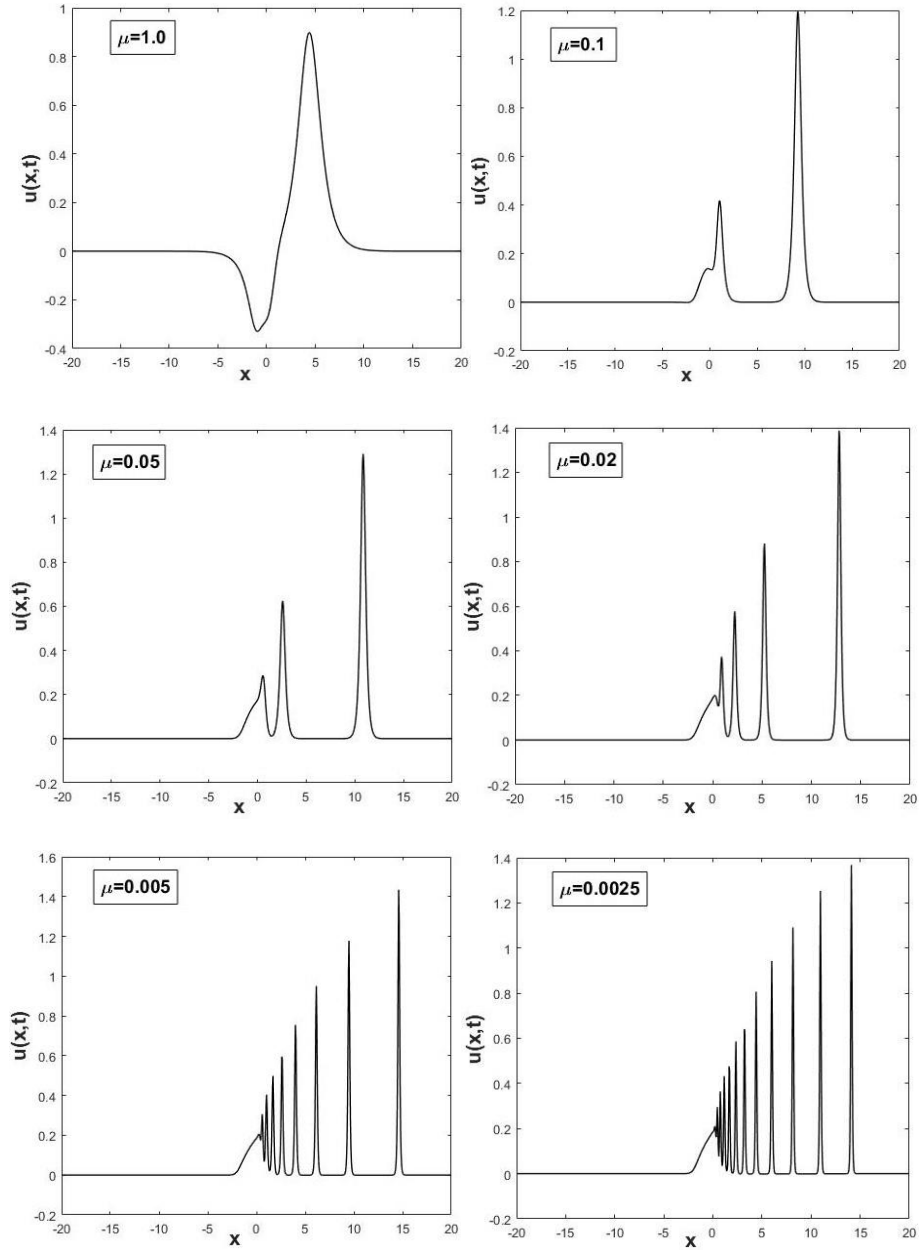
Şekil 3.5. Problem 2'nin $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için farklı zamanlardaki iki solitery dalganın girişimi.

Şekil 3.5'te problem 2'nin $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için iki solitry dalganın girişimi farklı t değerleri için incelendi. Şekilde görüldüğü gibi $t = 0$ anında genliği büyük olan dalga küçük dalganın solunda yer almaktadır. Genliği büyük olan dalganın hızı da daha büyük olduğundan, zaman ilerledikçe büyük dalganın küçük dalgayı içererek geride bıraktığı ve sağa doğru ilerlediği görülmektedir. Çarpışmadan sonra $t = 80$ de genliği büyük dalganın konumu $x = 56.80$ iken genliği $A = 0.997$, genliği küçük olan dalganın ise $x = 37.70$ konumunda genliği $A = 0.499$ olarak hesaplandı. Ayrıca, çarpışmadan sonra genliği küçük olan dalganın arkasında küçük dalgacıklar bıraktığı görüldü.

Tablo 27. Problem 3'ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün farklı değerleri için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve (Karta ve Kutluay,2022:17), (Başhan ve ark., 2021) çalışmalarıyla karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$\mu = 1.0$					$\mu = 0.5$		
B-A-B	2.5	1.772454	2.506556	0.886228	1.772454	1.879787	0.886229
	5.0	1.772454	2.506766	0.886227	1.772453	1.879993	0.886226
	7.5	1.772453	2.506915	0.886226	1.772453	1.880002	0.886226
	10.0	1.772453	2.506883	0.886226	1.772453	1.879990	0.886226
	12.5	1.772453	2.506847	0.886226	1.772453	1.879987	0.886226
(Karta ve Kutluay,2022:17)	12.5	1.77245	2.50663	0.88623	1.77245	1.87997	0.88623
(Başhan ve ark., 2021)	12.5	1.77246	2.50635	0.88603	1.77248	1.88009	0.88635
$\mu = 0.1$					$\mu = 0.05$		
B-A-B	2.5	1.772453	1.377902	0.886255	1.772439	1.314633	0.886305
	5.0	1.772445	1.377910	0.886236	1.772400	1.314346	0.886183
	7.5	1.772437	1.377865	0.886217	1.772356	1.314208	0.886057
	10.0	1.772430	1.377814	0.886199	1.772312	1.314140	0.885930
	12.5	1.772422	1.377778	0.886181	1.772269	1.314050	0.885803
(Karta ve Kutluay,2022:17)	12.5	1.77245	1.37864	0.88625	1.77245	1.31597	0.88631
(Başhan ve ark., 2021)	12.5	1.77244	1.37869	0.88630	1.77245	1.31605	0.88640
$\mu = 0.02$					$\mu = 0.005$		
B-A-B	2.5	1.772299	1.274942	0.886295	1.769606	1.244659	0.881316
	5.0	1.771963	1.273837	0.885041	1.764699	1.233500	0.859869
	7.5	1.771616	1.273002	0.883759	1.760013	1.224012	0.840093
	10.0	1.771268	1.272286	0.882475	1.755607	1.215421	0.822106
	12.5	1.770923	1.271551	0.881199	1.751459	1.207521	0.805579
(Karta ve Kutluay,2022:17)	12.5	1.77242	1.27829	0.88646	1.76948	1.25325	0.87593
(Başhan ve ark., 2021)	12.5	1.77245	1.27798	0.88576	1.77186	1.24218	0.85136

Tablo 27'de $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ 'nün değişik değerleri için problem 3'teki (Maxwellian) I_1 , I_2 ve I_3 değişmezlerinin durumu verildi. Tablo 27'de görüldüğü üzere B-A-B şeması ile elde ettiğimiz sonuçlar literatürde (Karta ve Kutluay,2022:17) ve (Başhan ve ark., 2021)'in yapmış olduğu çalışmalarla uyum içindedir.



Şekil 3.6. Problem 3'ün $t = 12.5$ zamandaki farklı μ değerleri için maxwellian başlangıç koşulu

Şekil 6.6'da $t = 12.5$, $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$, $x_0 = 10$ ve $-20 \leq x \leq 20$ parametreleri için problem 3'ün (Maxwellian) farklı μ değerleri için incelendi. Şekil 3.6'dan görüldüğü üzere μ değerleri azaldıkça dalga sayısı artmaktadır.

Tablo 28. Problem 1'in $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalga'nın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.266821	0.232207
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.528151	0.469801
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.778775	0.702005
	20	0.785398	0.166667	0.005208	1.014000	0.918402
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1052)	5	0.7850300	0.1666259	0.0052058	1.276445	0.681926
	10	0.7850300	0.1666259	0.0052058	1.319189	0.748057
	15	0.7850300	0.1666259	0.0052058	1.385979	0.828043
	20	0.7850300	0.1666259	0.0052058	1.471099	0.897036
(Esen ve Kutluay, 2008)	5	0.7853976	0.1664731	0.0052083	0.682986	0.610149
	10	0.7853984	0.1664732	0.0052083	1.362867	1.255591
	15	0.7853976	0.1664733	0.0052083	2.036756	1.916829
	20	0.7853977	0.1664736	0.0052083	2.701647	2.576377
(Evans ve Raslan, 2005)	5	0.7853712	0.1666095	0.0052078	0.473145	0.418872
	10	0.7853424	0.1665994	0.0052072	0.990390	0.840128
	15	0.7853751	0.1665922	0.0052067	1.499677	1.212955
	20	0.7852864	0.1665818	0.0052061	2.021476	1.569539
(Başhan ve ark., 2009)	5	0.7854014	0.1666672	0.0052084	0.011570	0.006221
	10	0.7854008	0.1666668	0.0052084	0.010404	0.005784
	15	0.7854038	0.1666680	0.0052084	0.022265	0.014353
	20	0.7854013	0.1666670	0.0052084	0.011493	0.007664

Tablo 28'de problem 1'in $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ ve $t = 5, 10, 15$ ve 20 değerleri için tek solitary dalga'nın korunum sabitleri ile L_2 , L_∞ hata normları verildi. Tablo 28'de görüldüğü üzere I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri, literatürdeki (Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1052), (Esen ve Kutluay, 2008), (Evans ve Raslan, 2005) ve (Başhan ve ark., 2009) çalışmalarıyla uyum içindedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarımız, (Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1052), (Esen ve Kutluay, 2008) ve (Evans ve Raslan, 2005)'in çalışmalarından daha küçük iken (Başhan ve ark., 2009)'un çalışmasından büyüktür. Tablo 28'de görülen başka bir sonuç ise zaman ilerledikçe L_2 ve L_∞ hata normlarımız büyümektedir. (Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1052) çalışmasında da kübik trigonometrik B-spline ile birlikte bir lineerleştirme tekniği kullanılmasına

rağmen bizim kullandığımız operatör splitting yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar genel olarak daha iyidir.

Tablo 29. Problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101349	0.091670
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1052)	20	0.7850300	0.1666259	0.0052058	0.146806	0.089667
(Esen ve Kutluay, 2008)	20	0.7853977	0.1664735	0.0052083	0.269281	0.256997
(Esen, 2006)	20	0.7853898	0.1667614	0.0052082	0.079694	0.046552
(Çelikkaya, 2019)	20	0.7853982	0.1666666	0.0052083	0.175081	0.176288
(Essa, 2016)	20	0.7853965	0.1666638	0.0052081	0.005208	0.005456
(Geyikli ve Karakoç, 2015)	20	0.7853967	0.1666664	0.0052083	0.051873	0.032113
(Karakoç ve Geyikli, 2013)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.051774	0.032114
(Geyikli ve Karakoç, 2012)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.080146	0.046121
(Karakoç ve Geyikli, 2012)	20	0.7853967	0.1666663	0.0052083	0.080098	0.046061
(Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	0.7853966	0.1666662	0.0052083	0.175277	0.176465
(Karakoç, Uçar ve Yağmurlu, 2012)	20	0.7853966	0.1666662	0.0052083	0.175270	0.176459
(Evans ve Raslan, 2005)	20	0.7849545	0.1664765	0.0051995	0.290516	0.249892
(Başhan ve ark., 2009)	20	0.7853979	0.1666671	0.0052084	0.001653	0.0052084

Tablo 29'da problem 1'in $\Delta t = 0.05$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için $t = 20$ 'de hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Tablo 29'da görüldüğü üzere I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri, literatürdeki çalışmalarla uyum içindedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarımız, bazı çalışmalarda bulunan sonuçlardan küçük iken bazı çalışmalarda hesaplanan sonuçlardan büyüktür.

Tablo 30. Problem 1'in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.01$, $A = 0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0 , $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ ve $t = 20$ için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

A	Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.25	A-B	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.001013	0.000917
	B-A	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.001013	0.000917
	A-B-A	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.001013	0.000917
	B-A-B	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.001013	0.000915
	(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053)	20	0.7853945	0.1666663	0.0052083	0.0014686	0.0009014
	(Esen ve Kutluay, 2008)	20	0.7853963	0.1666644	0.0052083	0.0026985	0.0026867
	Analitik	20	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
0.50	A-B	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.004230	0.002670
	B-A	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.004230	0.002671
	A-B-A	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.004229	0.002670
	B-A-B	20	1.570796	0.666667	0.083333	0.004157	0.002641
	(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053)	20	1.5707889	0.6666650	0.0833329	0.0057187	0.0038677
	(Esen ve Kutluay, 2008)	20	1.5707920	0.6666588	0.0833333	0.0186465	0.0150972
	Analitik	20	1.5707963	0.6666667	0.0833333		
0.75	A-B	20	2.356194	1.500000	0.421875	0.009005	0.006466
	B-A	20	2.356194	1.500000	0.421875	0.009164	0.006558
	A-B-A	20	2.356194	1.500000	0.421875	0.009000	0.006463
	B-A-B	20	2.356194	1.500000	0.421875	0.005852	0.003708
	(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053)	20	2.3561834	1.4999963	0.4218729	0.0229900	0.0149503
	(Esen ve Kutluay, 2008)	20	2.3561860	1.4999790	0.4218745	0.0519345	0.0366739
	Analitik	20	2.3561945	1.5000000	0.4218750		
1.0	A-B	20	3.141591	2.666664	1.333330	0.052852	0.034693
	B-A	20	3.141588	2.666661	1.333328	0.057356	0.037103
	A-B-A	20	3.141591	2.666664	1.333330	0.052836	0.034684
	B-A-B	20	3.141592	2.666666	1.333333	0.018817	0.013218
	(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053)	20	3.1415779	2.6666660	1.3333267	0.1010366	0.0626081
	(Esen ve Kutluay, 2008)	20	3.1415790	2.6666350	1.333330	0.1494558	0.0987068
	Analitik	20	3.1415927	2.6666667	1.3333333		

Tablo 30’da problem 1’in $\Delta t = 0.01$, $h = 0.01$, $A = 0.25, 0.50, 0.75$ ve 1.0 , $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ ve $t = 20$ ’de hesaplanan korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablo 30’da görüldüğü üzere, Lie-Trotter A-B, B-A ve Strang A-B-A, B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri birbirleriyle ve literatürde bulunan diğer çalışmalarla uyum içindedir. Hata normlarımız L_2 ve L_∞ en küçük değerini A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemaları arasında Strang B-A-B’de almaktadır. Ayrıca tablo 30’da görülüyor ki A artıkça hata normlarımızda artmaktadır. Bunlara ek olarak, A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları (Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053) ve (Esen ve Kutluay, 2008) çalışmalarında hesaplanan hata normlarından genel olarak daha düşüktür.

Tablo 31. Problem 2’nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$ $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Yöntem B-A-B				(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053)		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
10	4.710810	3.331225	1.414562	4.710180	3.331961	1.415419
20	4.709231	3.329079	1.412455	4.710180	3.331341	1.414833
30	4.707843	3.326807	1.410539	4.710181	3.329523	1.413184
40	4.707245	3.326063	1.409862	4.710181	3.329690	1.413358
50	4.705768	3.324454	1.407937	4.710180	3.330105	1.413629
60	4.704197	3.322411	1.405850	4.710180	3.329600	1.413079
70	4.702629	3.320343	1.403769	4.710180	3.329056	1.412516
80	4.701068	3.318260	1.401699	4.710180	3.328490	1.411954
Yöntem (Esen ve Kutluay, 2008)				(Evans ve Raslan, 2005)		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
10	4.712389	3.328927	1.416103	4.712022	3.324678	1.400768
20	4.712387	3.328361	1.415523	4.711697	3.324210	1.401182
30	4.712388	3.327818	1.413882	4.711242	3.346583	1.424847
40	4.712385	3.327112	1.414050	4.711017	3.321250	1.398239
50	4.712388	3.326632	1.414330	4.710804	3.320956	1.398729
60	4.712388	3.326228	1.413785			
70	4.712388	3.325891	1.413228			
80	4.712389	3.325434	1.412671			

Tablo 31’de problem 2’nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitleri verildi. B-A-B şeması ile hesapladığımız korunum sabitleri (Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1053), (Esen ve Kutluay, 2008) ve (Evans ve Raslan, 2005)’in yapmış olduğu çalışmalarla ile uyum içinde olduğu Tablo 31’den açıkça görülmektedir.

Tablo 32. Problem 3’ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ ’nün farklı değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin $t = 12.5$ zamanında bazı çalışmalarla karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$\mu = 0.5$					$\mu = 0.1$		
B-A-B	12.5	1.772453	1.879987	0.886226	1.772422	1.377778	0.886181
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1056)	12.5	1.77235	1.87971	0.88597	1.77244	1.37783	0.88619
(Çelikkaya, 2019)	12.5	1.77245	1.88008	0.88623	1.77249	1.37774	0.88627
$\mu = 0.05$					$\mu = 0.02$		
B-A-B	12.5	1.772269	1.314050	0.885803	1.770923	1.271551	0.881199
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1056)	12.5	1.77246	1.31444	0.88644	1.77256	1.27424	0.88660
(Çelikkaya, 2019)	12.5	1.77254	1.31431	0.88639	1.77275	1.27458	0.88717
$\mu = 0.005$					$\mu = 0.0025$		
B-A-B	12.5	1.751459	1.207521	0.805579	1.722111	1.249152	0.717593
(Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1056)	12.5	1.77311	1.23603	0.86783	1.76963	1.19626	0.81240
(Çelikkaya, 2019)	12.5	1.77465	1.25032	0.89902	1.77868	1.24930	0.92893

Tablo 32’de, $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$, $x_0 = 10$, $-20 \leq x \leq 20$ parametreleri için problem 3’ün farklı μ değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin birkaç çalışma ile karşılaştırılması verildi. B-A-B şemasıyla hesaplanan nümerik sonuçlar (Yağmurlu ve Karakaş, 2021:1056) ve (Çelikkaya, 2019) çalışmalarında verilen sonuçlar ile iyi uyum içinde olduğu Tablo 32’den görülmektedir.

Tablo 33. Problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitlerinin ve hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
B-A-B	1	0.785398	0.166667	0.005208	0.535222	0.454440
	2	0.785398	0.166667	0.005208	1.069999	0.909134
	3	0.785398	0.166667	0.005208	1.603888	1.359654
	4	0.785398	0.166667	0.005208	2.136445	1.839842
	5	0.785398	0.166667	0.005208	2.667233	2.319161
(Raslan ve Amien, 2020:109)	1	0.785341	0.124984	0.00520711	2.52462	2.13768
	2	0.785283	0.124968	0.0052059	5.06155	4.30664
	3	0.785226	0.124951	0.0052046	7.61246	5.51776
	4	0.785168	0.124935	0.0052034	10.1790	8.74257
	5	0.785111	0.124919	0.00520225	12.7629	9.78617

Tablo 33'te problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.1$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ ve $t = 1, 2, 3, 4$ ve 5 zamanlarındaki tek solitary dalganın korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablo 33'te görüldüğü üzere I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri (Raslan ve Amien, 2020:109) ile uyum içindedir. Ayrıca B-A-B şemasıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları tüm zamanlarda (Raslan ve Amien, 2020:109)'da verilen sonuçlardan daha küçük olduğu Tablo 33'den açıkça görülmektedir. Tablo 33'te görülen başka bir sonuç ise zaman ilerledikçe L_2 ve L_∞ normları da büyümektedir.

Tablo 34. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $A_1 = \sqrt{1/16}$, $A_2 = \sqrt{1/32}$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Yöntem	B-A-B				(Raslan ve Amien, 2020:109)		
	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
	1	1.340758	0.250000	0.006510	1.34069	0.187483	0.00650914
	2	1.340758	0.250000	0.006510	1.34062	0.187465	0.00650785
	3	1.340758	0.250000	0.006510	1.34056	0.187447	0.00650655
	4	1.340758	0.250000	0.006510	1.34049	0.187429	0.00650526
	5	1.340758	0.250000	0.006510	1.34042	0.187411	0.00650397

Tablo 34'te problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $A_1 = \sqrt{1/16}$, $A_2 = \sqrt{1/32}$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitleri verildi. Tablo 34'te görüldüğü üzere B-A-B şeması ile elde edilen nümerik sonuçlar (Raslan ve Amien, 2020:109)'de verilen sonuçlar ile uyum içindedir.

Tablo 35. Problem 1'in $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için tek solitary dalganın $t = 5, 10, 15$ ve 20 zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

Yöntem	t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
B-A-B	5	0.785398	0.166667	0.005208	0.026682	0.023221
	10	0.785398	0.166667	0.005208	0.052815	0.046980
	15	0.785398	0.166667	0.005208	0.077877	0.070201
	20	0.785398	0.166667	0.005208	0.101400	0.091840
(Raslan, 2006:39, 43)	5	0.7852153	0.1666081	0.0052046	0.04630645	0.04704297
	10	0.7850325	0.1665501	0.0052011	0.09651154	0.09432438
	15	0.7848501	0.1664920	0.0051974	0.14590470	0.13549630
	20	0.7846676	0.1664340	0.0051938	0.19588780	0.17443300

Tablo 35'te problem 1'in $\Delta t = 0.1$, $h = 0.2$, $A = 0.25$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 5, 10, 15$ ve 20 değerleri için tek solitary dalganın korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablo 35'te görüldüğü üzere B-A-B şemasıyla hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri (Raslan, 2006:39, 43) ile uyum içinde olup zaman ilerledikçe neredeyse değişmemektedir. Ayrıca B-A-B şemasıyla hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları (Raslan, 2006:39, 43) çalışmasında bulunan sonuçlara göre oldukça iyidir. Tablo 35'te görülen başka bir sonuç ise zaman ilerledikçe L_2 ve L_∞ hata normları da büyümektedir.

Tablo 36. Problem 2'nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalganın girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitlerinin karşılaştırılması.

Yöntem	B-A-B			(Raslan, 2006:43)		
t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
10	4.710810	3.331225	1.414562	4.711840	3.325420	1.400544
20	4.709231	3.329079	1.412455	4.711287	3.324732	1.400790
30	4.707843	3.326807	1.410539	4.710739	3.347490	1.425064
40	4.707245	3.326063	1.409862	4.710196	3.321484	1.397725
50	4.705768	3.324454	1.407937	4.709644	3.320617	1.397663
55	4.704982	3.323436	1.406893	4.709384	3.323082	1.397898

Tablo 36’da problem 2’nin $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ değerleri için iki solitary dalgaının girişiminin farklı t zamanlarındaki korunum sabitleri verildi. B-A-B şeması ile elde edilen korunum sabitleri (Raslan, 2006:43)’te hesaplanan nümerik sonuçlar ile iyi uyum içindedir.

Tablo 37. Problem 3’ün $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$ ve μ ’nün farklı değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri ve (Raslan, 2006:44) ile karşılaştırılması.

Yöntem	B-A-B				(Raslan, 2006:44)		
	t	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
$\mu = 1$	2	1.772454	2.506561	0.886228	1.768387	2.504679	0.8836254
	4	1.772454	2.506649	0.886227	1.764327	2.493188	0.8756451
	6	1.772454	2.506861	0.886226	1.760276	2.488919	0.8716457
	8	1.772454	2.506915	0.886226	1.756237	2.481024	0.8657346
	10	1.772453	2.506883	0.886226	1.752205	2.473140	0.8601468
	12	1.772453	2.506852	0.886226	1.748187	2.464779	0.8543011
$\mu = 0.5$	4	1.772454	1.879923	0.886227	1.768674	1.875203	0.8811186
	6	1.772453	1.880010	0.886226	1.766786	1.872365	0.8783270
	8	1.772453	1.879998	0.886226	1.764899	1.869414	0.8755135
	10	1.772453	1.879990	0.886226	1.763016	1.866456	0.8727161
	12	1.772453	1.879987	0.886226	1.761135	1.863499	0.8699278
$\mu = 0.1$	2	1.772154	1.377893	0.886259	1.772126	1.378570	0.8863239
	4	1.772148	1.377923	0.886243	1.771797	1.377109	0.8854665
	6	1.772442	1.377894	0.886228	1.771463	1.377593	0.8851116
	8	1.772436	1.377855	0.886214	1.771133	1.377252	0.8846973
	10	1.772430	1.377814	0.886199	1.770803	1.375728	0.8840076
$\mu = 0.05$	2	1.772448	1.314656	0.886329	1.772329	1.315760	0.8870159
	4	1.772415	1.314472	0.886231	1.772197	1.315128	0.8866955
	6	1.772383	1.314263	0.886133	1.772062	1.314740	0.8864768
	8	1.772347	1.314195	0.886032	1.771926	1.314421	0.8862712
	10	1.772312	1.314140	0.885930	1.771790	1.313917	0.8860141
$\mu = 0.02$	2	1.772360	1.275389	0.886511	1.772541	1.277516	0.8890076
	4	1.772097	1.274244	0.885550	1.772590	1.276696	0.8890191
	6	1.771827	1.273453	0.884530	1.772633	1.276432	0.8890834
	8	1.771545	1.272862	0.883501	1.772664	1.276383	0.8891109
	10	1.771268	1.272286	0.882475	1.772698	1.276307	0.8891600

Tablo 37’de $\Delta t = 0.01$, $h = 0.05$, $x_0 = 10$, $-20 \leq x \leq 20$, $t = 2, 4, 6, 8, 10$ ve 12 parametreleri için problem 3’ün farklı μ değerleri için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitleri verildi. Tablo 37’de görüldüğü üzere B-A-B şeması ile hesapladığımız sonuçlar (Raslan, 2006:44) ile uyum içindedir. Ayrıca, B-A-B şeması ile hesaplanan korunum sabitleri zaman ilerledikçe daha iyi korunmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu bölümde, tezin asıl kısmını oluşturan üçüncü bölümünde yer alan modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin (MEW) A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan nümerik çözümlerin genel bir değerlendirmesine yer verildi.

Tezin üçüncü bölümünde, MEW denklemi biri lineer ve diğeri lineer olmayan iki alt denkleme split edilerek kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi uygulandı. Split sonucunda ortaya çıkan her bir denkleme konum yönünde kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların düğüm noktalarındaki değerleri yazılarak adi diferansiyel denklem sistemleri elde edildi. Daha sonra, her bir adi diferansiyel denklem sistemine Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları uygulanarak iki tane cebirsel denklem sistemi elde edildi. Ana denklemin nümerik çözümlerini hesaplamak için Lie-Trotter A-B, B-A ve Strang A-B-A, B-A-B operatör splitting şemaları kullanıldı. MEW denkleminin split edilmesi ile meydana çıkan iki alt denkleme kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yönteminin uygulanmasıyla bulunan her bir cebirsel denklem sisteminin kararlılık analizi Von Neumann yöntemiyle araştırıldı. Bunun sonucunda her bir sistemin kararlı olduğu görüldü. Ayrıca, Lie-Trotter ve Strang şemalarının da kararlı olduğu durumlar gösterildi. MEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için çeşitli başlangıç ve sınır koşulları altında üç farklı model problem göz önüne alındı. Her bir model problem için A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla hesaplanan I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin yanı sıra L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Hesaplanan nümerik sonuçlar hem kendi içinde hem de literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. MEW denkleminin A-B, B-A, A-B-A ve B-A-B şemalarıyla elde edilen nümerik çözümleri farklı h , Δt ve genlik değerleri için literatürde bulunan bazı çalışmalarla karşılaştırıldı. Literatürde Δt zaman adım uzunluğu eşit alınarak yapılan karşılaştırmaların çoğunda sonuçlarımız çok daha iyi veya uyum içindedir. Benzer şekilde h konu adım uzunluğu sabit tutularak yapılan karşılaştırmaların çoğunda sonuçlarımız çok iyi veya uyum içinde olduğu görüldü. Tablolara bakıldığında her üç model problem için B-A-B şemasıyla hesaplanan hata normları A-B, B-A ve A-B-A şemalarıyla hesaplanan hata normlarından daha küçük olduğu gözlemlendi. Her üç model problem için farklı h ve Δt değerlerinde verilen tablolar incelendiğinde h ve Δt küçüldükçe elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü açıktır. Her üç model problemin grafikleri B-A-B şeması ile hesaplanan sonuçlar kullanılarak çizildi.

Sonuç olarak, bu tezde kullanılan kübik trigonometrik B-spline kollokasyon operatör splitting yönteminin kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde etkili bir yöntem olduğu görüldü. Ayrıca bu tezde kullanılan yöntem, daha birçok karmaşık yapıya sahip olan kısmi veya adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmak için uygulanabilir, kolay, etkili ve güçlü bir yöntemdir.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014, The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems, *Applied Mathematics and Computation*, 239, 74-88.
- Argyris, J. H., 1964, Recent advances in matrix methods of structural analysis, *Progr. Aeron. Sci.*, 4.
- Başhan, A., Yağmurlu, N. M., Uçar, Y., and Esen, A., 2009, Finite difference method combined with differential quadrature method for numerical computation of the modified equal width wave equation, *Numer. Methods Partial Differ. Equations.*, 37, 690-706.
- Başhan, A., Yağmurlu, N. M., Uçar, Y., and Esen, A., 2021, A new perspective for the numerical solution of the Modified Equal Width wave equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 44, 8925–8939.
- Cheng, R. J., Liew, K. M., 2012, Analyzing modified equal width (MEW) wave equation using the improved element-free Galerkin method, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 36 (2012), 1322-1330.
- Cloung, R.W., 1960, The finite element in plane stress analysis, *Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronik Computation, Pittsburgh, Pa.*, 345-378.
- Çelikkaya, İ., 2018, Operatör splitting B-spline kollokasyon yöntemi ile bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri, *Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Malatya.
- Çelikkaya, İ., 2019, Operator splitting method for numerical solution of modified equal width equation, *Tbilisi Mathematical Journal*, 12(3), 51-67.
- Davies, A.J., 1986, *The Finite Element Method: A First Approach*, Oxford University Press, Oxford.
- Dereli, Y., 2010, Radial basis functions method for numerical solution of the modified equal width equation, *Int J Comp Math.*, 87(7), 1569-1577.
- Esen, A. and S. Kutluay, 2008, Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation, *Commun. Non linear Sci. Numer. Simul.* 13 (3), 1538-1546.
- Esen, A., 2006, A lumped Galerkin method for the numerical solution of the modified equal-width wave equation using quadratic B-splines, *Int. J. Comput. Math.*, 83(5-6), 449–459.
- Essa, Y. M. A., 2016, Multigrid method for the numerical solution of the modified equal width wave equation, *Appl. Math.*, 7, 1140–1147.

- Evans, D. J. and Raslan, K. R., 2005, Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation, *Int. J. Comput. Math.*, 82 (4), 445-455.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1992, Solitary waves of the EWE equation, *J. Comput. Phys.*, 101 (1992), 218–223.
- Gazi Karakoç, S. B. and Zeybek, H., 2016, A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation, *Stat. Optim. Inf. Comput.*, 4, 30-41.
- Gazi Karakoç, S. B., Uçar, Y., Murat Yağmurlu, N., 2012, Different linearization techniques for the numerical solution of the mew equation, *Selçuk J. Appl. Math.*, 13 (2), 43-62.
- Geyikli, T. and Gazi Karakoç S. B., 2011, Septic b-spline collocation method for the numerical solution of the modified equal width wave equation, *Applied Mathematics*, 2 (2011), 739-749.
- Geyikli, T. and Gazi Karakoç, S. B., 2015, Subdomain finite element method with quartic b splines for the modified equal width wave equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 55 (3), 410-421.
- Geyikli, T., and Karakoç, S. B. G., 2012, Petrov–Galerkin method with cubic B-splines for solving the MEW equation, *Bull. Belg. Math. Soc., Simon Stevin*, 19, 215–227
- Gül Kaplan, A., Dereli, Y., 2017, Numerical solutions of the GEW equation using MLS collocation method, *Internat. J. Modern Phys. C*, 28 (1), 1750011 (23 pages).
- Hamdi, S., Enright W. H., Schiesserand, W. E., Gottlieb J. J., 2003, Exact solutions of the generalized equal width wave equation, *In Proceedings of the International Conference on Computational Science and its Applications*, 2668, 725-734.
- Hamid, N.N.A., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., 2010, Cubic trigonometric B-spline applied to linear two-point boundary value problems of order two, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 4(10), 1377-1382.
- Hundsdorfer, W., 2000, Numerical Solution of Advection-Diffusion-Reaction Equations, Lecture notes for PH.D. course, *Thomas Stieltjes Institute*, Amsterdam.
- Hundsdorfer, W., Verwer, J., 2003, Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations (First Edition), *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- Jin, L., 2009, Analytical Approach to the Modified Equal Width Equation, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 4 (23), 1113-1119.
- Karakoç, S. B. G., and Geyikli, T., 2012, Numerical solution of the modified equal width wave equation, *Int. J. Diff. Equations*, 1-15.
- Karakoç, S. B. G., and Geyikli, T., 2013, A numerical solution of the MEW equation using sextic B-splines, *J. Adv. Res. Appl. Math.*, 5, 51–65.

- Karakoç, S. B. G., Uçar Y., and Yağmurlu, N.M., 2012, Different linearization techniques for the numerical solution of the MEW equation, *Selçuk J. Appl., Math.*, 13(2), 43-62.
- Karakoç, S.B.G., 2011, Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri. Doktora Tezi, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Malatya, 218.
- Karta, M., and Kutluay, S., 2022, Numerical calculations of the new equation from a new perspective, *İnönü University*, 12(3), 51-67.
- Korteweg, D. J. and G. de Vries, 1895, On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.*, 39 (5), 422-443.
- Logan, D.L., 2007, A First course in the Finite Element Method (Fourth Edition), *Thomsan*.
- Lu, J., 2007, He's variational iteration method for the modified equal width equation, *Chaos, Solitons and Fractals.*, 39(5), 2102–2109.
- Marchuk, G.I., 1968, Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems, *Apl. mat.*, 13, 103-132.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 85, 143-159.
- Raslan, K. R. and Amien, G. Ibrahim, 2020, Numerical Solution of the Modified Equal Width Wave Equation Using B-Spline Method, *Numerical and Computational Methods in Sciences & Engineering, Al-Azhar University, Nasr-City, Cairo, Egypt*, 109.
- Raslan, K. R., 2006, Collocation method using cubic B-spline for the generalised equal width equation, *Int. J. Simulat. Process Model*, 2, 37-44.
- Raslan, K.R., Ramadan, M.A., and Amien, I.G., 2014, Finite difference approximations for the modified equal width wave (MEW) equation, *J. Math Comput Sci.*, 4(5), 940-957.
- Reddy, J.N., 2004, An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, *Oxford University Press Inc.*, New York.
- Roshan, T., 2011, A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width (GEW) equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 1641-1652.
- Rui, W., Xie, S., Long, Y., He, B., 2007, Integral bifurcation method and its application for solving the modified equal width wave equation and its variants, *Rostock. Math. Kolloq*, 62: 87-106.

- Saka, B., 2007, Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method, *Math. Comput. Modelling*, 45, 1096-1117.
- Schoenberg, I.J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, p.112-141.
- Schumaker, L.L., 2007, Spline functions: Basic theory, *Cambridge University Press*, 582.
- Seydaoğlu, M., Erdoğan, U., Öziş, T., 2016, Numerical solution of Burgers' equation with high order splitting methods, *J. Comput. Appl. Math.*, 291, 410-421.
- Stasa, F. L., 1985, Applied finite element Analysis for Engineers, *CBS College Publishing*, New York.
- Strang, G., 1968, On The Construction And Comparison Of Difference Schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, 5 (3), 506-517.
- Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Paghaleh, A.S. and Vahidi, J., 2012, Exact solutions of nonlinear evolution equations by using the modified simple equation method, *Ain Shams Eng J.*, 3 (2012), 321-325.
- Taha, W. M., Noorani, M. S. M., 2014, Application of the G'/G-expansion method for the generalized Fisher's equation and modified equal width equation, *J Assoc Arab Univ Basic Appl Sci.*, 2014; 15: 82-89.
- Trotter, H. F., 1959, On the product of semi-groups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10, 545-551.
- Von Neumann, J. and Richmyer, R. D., 1950, A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, *J. Appl. Phys.* 2, 232-237.
- Walz, G., 1997, Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, *BIT*, 37(1), 189-201.
- Wazwaz, A.M., 2006, The tanh and sine cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 11 (2), 148-160. with high order splitting methods, *J. Comput. Appl. Math.*, 291, 410-421.
- Yağmurlu, N.M. and Karakaş, A. S., 2021, A novel perspective for simulations of the MEW equation by trigonometric cubic B-spline collocation method based on Rubin-Graves type linearization, *Computational Methods for Differential Equations*, 1-14.
- Zaki, S. I., 2000, Solitary wave interactions for the modified equal width equation, *Comput. Phys. Comput. Phys. Commun.*, 126(3), 219-231.
- Zaki, S.I., 2000, A least-squares finite element scheme for the EW equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 189, 587-594.

Zeybek, H. and Gazi Karakoç, S. B., 2017, Application of the collocation method with b-splines to the gew equation, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 46, 71-88.

5. ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İBRAHİM HALİL TİCİ
Uyruğu : TÜRKİYE CUMHURİYETİ

EĞİTİM

Derece	Adı	Bitirme Yılı
Üniversite	DİCLE ÜNİVERSİTESİ	2009
Yüksek Lisans	BATMAN ÜNİVERSİTESİ	2024
Doktora		

İŞ DENEYİMLERİ

Kurum	Görevi	Yıl
ÖZEL	ÖĞRETMEN	2009-2014
MEB	ÖĞRETMEN	2014

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

YAYINLAR