



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MODİFİYE KLEİN-GORDON DENKLEMİ İLE PARÇACIKLARIN
TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Yasemin EDRES

Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Ekrem AYDINER**

Aralık, 2022

İSTANBUL

Bu çalışma 28.12.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziğı Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Ekrem AYDINER (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Osman Teoman TURGUT
Boğaziçi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Suat ÖZKORUCUKLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Proje Destekleri**

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Bu tez numaralı proje ile tarafından desteklenmiştir.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

□

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimlerini benden esirgemyen eğitimimin her aşamasında anlayışını, vaktini, desteğini cömertçe sunan, bu zor süreçte bana yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Ekrem AYDINER'e

Bilgi ve tecrübeleriyle, yüksek lisans tez yazma süresince bana yardımını sunan ve tezimin yazımı ve hesaplamalarında çok önemli katkılarda bulunan Dr. Özgür ÖKCÜ'ye,

Çocukluğumdan beri güzel bir geleceğe sahip olmam için elinden geleni yapan, fedakarlık eden ve her zaman sevgi veren annem ve babama,

Beni her koşulda destekleyen, hayalimden vazgeçmeme izin vermeyen ve bana tekrar yüksek lisans yapmam için tavsiyede bulunan kardeşlerim Mohammed ve Rama'ya, yanımda duran ve yüksek lisans sürecinde her yolda destek veren kardeşim Majd'a, beni her zaman seven sevimli kardeşlerim Ömer, Abdullah ve Meryam'a,

Sıkıntılarımın çözümüne yol gösteren ve dertlerimi dinleyen doktora öğrencisi arkadaşım Güneş OKTAY'a,

Ve son olarak değerli hocamlarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Aralık, 2022

Yasemin EDRES

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	3
2.1. KLEİN-GORDON DENKLEMİ	3
2.1.1. Klein-Gordon Denkleminin Çözümleri	5
2.2. DİRAC DENKLEMİ	9
2.2.1. Dirac Denkleminin Çözümleri	10
3. MALZEME VE YÖNTEM	13
3.1. KLEİN-GORDON VE DİRAC DENKLEMLERİ İÇİN TERMODİNAMİK ÖZELLİKLER	13
3.1.1. Klein-Gordon Denklemi	13
3.1.2. Dirac Denklemi	15
4. BULGULAR	23
4.1. MODİFİYE DİSPERSİYON İLİŞKİSİ İÇİN KLEİN-GORDON DENKLEMİ	23
4.2. TEK BOYUTTA KLEİN-GORDON SALINCI DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ .	24
4.3. MODİFİYE DİSPERSİYON İLİŞKİNİN KLEİN-GORDON SALINCISININ TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİ	27
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	37

ŞEKİL LİSTESİ

	Page No
Şekil 3.1: $\ln Z$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.....	16
Şekil 3.2: $\tilde{F}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.	16
Şekil 3.3: $\tilde{U}$ 'nun $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.	17
Şekil 3.4: $\tilde{S}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.	17
Şekil 3.5: $\tilde{C}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.	18
Şekil 3.6: $\tilde{F}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi. Sürekli eğri $a = 1$, kesikli eğri $a = 0.5$ ve noktalı eğri $a = 0.1$ değerlerine karşı gelmektedir.	21
Şekil 3.7: $\tilde{U}$ 'nun $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi. Sürekli eğri $a = 1$, kesikli eğri $a = 0.5$ ve noktalı eğri $a = 0.1$ değerlerine karşı gelmektedir.	22
Şekil 3.8: $\tilde{C}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi. Sürekli eğri $a = 1$, kesikli eğri $a = 0.5$ ve noktalı eğri $a = 0.1$ değerlerine karşı gelmektedir.	22
Şekil 4.1: Bölüşüm fonksiyonunun kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.	29
Şekil 4.2: İç enerjinin kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.	29
Şekil 4.3: Serbest enerjinin kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.	30
Şekil 4.4: Entropinin kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.	31
Şekil 4.5: Isı sığasının kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.	31

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\hbar$	: İndirgenmiş Planck Sabiti
k_B	: Boltzmann Sabiti
S	: Entropi
C	: Isı sığsı
ℓ_P	: Planck Uzunluğu
F	: Serbest Enerji
k^μ	: 4-lü dalga vektörü
$\vec{k}$	: 3-lü dalaga vehtörü
w	: Dalagan frekansı
σ_i	: Pauli matrisleri
$Z(\beta)$	: Bölüşüm fonksiyonu
$\square$	: d'Alambertian operatörü

Kısaltmalar	Açıklama
KKT	: Kuantum KütleÇekim Teorisi
KK	: kuantum kütleçekimi

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODİFİYE KLEİN-GORDON DENKLEMİ İLE PARÇACIKLARIN TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Yasemin EDRES

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Bu tez çalışmasında kuantum kütleçekim etkilerine temsil eden modifiye dispersiyon ilişkisi kullanılarak Klein-Gordon denkleminin çözümleri harmonik salıncı potansiyeli için elde edilmiştir. Elde edilen modifiye çözümler yardımıyla enerji seviyeleri elde edilmiştir. Daha sonra kanonik kümede bölüşüm fonksiyonu elde edilmiştir. Düşük sıcaklık limitinde iç enerji, Helmholtz serbest enerjisi, entropi ve ısı sığası gibi termodinamik nicelikler modifiye dispersiyon ilişkisinden gelen katkıyı içerecek şekilde elde edilmiştir. Elde edilen termodinamik niceliklerin hem modifiye hem de standart durumlar için kütleye göre grafikleri çizilerek sonuçlar detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Aralık 2022, 45 sayfa.

Anahtar kelimeler: Klein-Gordon denklemi, modifiye dispersiyon ilişkisi, termodinamik özellikler.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

INVESTGATION OF THE THERMODYNAMICS PROPERTIES OF PARTICLES VIA MODIFIED KLEIN-GORDON EQUATION

Yasemin EDRES

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Enstitue

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

In this research, the solutions of the Klein-Gordon equations are obtained for harmonic oscillation by using the modified dispersion that represent the effects of quantum gravity. Then, modified energy levels are obtained with the help of the modified solutions. After that, the partition function in the canonical ensemble is obtained. Thermodynamic quantities such as internal energy, Helmholtz free energy, entropy and heat capacity for low temperature limit are obtained from the modified dispersion relation. The obtained thermodynamic quantities are analyzed in details by plotting the graphs with respect to the mass for both the modified and standard cases.

December 2022, 45 pages.

Keywords: Klein-Gordon equation, modified disperison relation, thermodynamics properties

1. GİRİŞ

Fiziksel sistemler mekaniğin dört ana kolu içerisinde incelenebilir. Günlük yaşamda tecrübe edilen olaylar klasik mekanik ile açıklanabilmektedir. Hızların ışık hızıyla kıyaslanabilir olduğu durumlarda özel görelilik devreye girmektedir. Fakat ışın içine kütleçekimi dahil edildiğinde özel görelilik yerini genel göreliliğe bırakır. Atom gibi küçük nesneler durumunda ise kuantum mekaniği devreye girmektedir. Işık hızıyla kıyaslanabilir ve küçük sistemler için özel göreliliğin ve kuantum mekaniğinin birleşimi olan kuantum alanlar kuramı etkin bir rol oynamaktadır. Öte yanında ışık hızıyla kıyaslanabilir hızlara sahip ve oldukça küçük olan temel tanecikler kuantum alanlar kuramı içerisinde değerlendirilir. Burada dört ana koldan kısaca bahsedilmiştir.¹

Mekaniğin bu kolları ilgilendikleri olayları açıklamada başarılı olmalarına rağmen, genel görelilik ile kuantum mekaniğinin başarılı bir şekilde bir araya nasıl getirileceği hala tam olarak bilinmemektedir. Kuantum kütleçekim teorisi (KKT) olarak isimlendirilen bu birleşme modern fiziğin en önemli problemlerinden birisidir. Bu alanda sicim kuramı ve kuantum ilmek kütleçekimi iki güçlü aday olarak ortaya çıkmaktadır [1–4]. Bunların dışında çeşitli yaklaşımlar da söz konusudur [5].

KKT'nin farklı yaklaşımları içerisinde enerji-momentum dispersion ilişkisinin modifikasyonu yapılmıştır. Örneğin; kuantum ilmek kütleçekiminde, komütatif olmayan uzaya dayalı bazı modellerde ve genelleştirilmiş belirsizlik ilkesinde dispersiyon ilişkisinin modifikasyonu kullanılmıştır [6–10]. Benzer şekilde modifiye dispersion ilişkisini kara deliklerin termodinamik özellikleri ve kozmoloji kapsamında ele alan çok sayıda çalışma literatürde mevcuttur [11–21, 45].

Bu tezde modifiye dispersiyon ilişkisi etkileri kullanılarak rölativistik denklemler modifiye edilecek ve parçacıkların termodinamik özellikleri incelenecektir. Tezin organizasyonu aşağıda ayrıntılarıyla belirtildiği gibidir: İkinci bölümde Klein-Gordon ve Dirac denklemleri tanıtılacaktır. Her iki denklemin elde edilme yöntemleri kısaca ele alınacak ve denklemlerin daha iyi anlaşılmasını sağlamak için çözümleri verilecektir. Üçüncü bölümde

¹ Özel ve genel görelilikler, göreliliğin iki alt kolu gibi düşünülebilir.

Lorentz vektörü ve Lorentz skaler kısımları bulunan bir potansiyel için Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin termodinamik özellikleri incelenecektir [37]. Dördüncü bölümde modifiye dispersiyon ilişkisi kullanılarak Klein-Gordon denklemi elde edilecektir. Ayrıca harmonik salıncı potansiyeli için Klein-Gordon denkleminin tek boyutta çözümleri elde edilip enerji seviyeleri belirlenecektir. Elde edilen enerji seviyeleri modifiye dispersion ilişkisinden gelen katkıyı içerdiğinden modifiye termodinamik özellikler elde edilecek ve ayrıntılı olarak incelenecektir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenip tartışılacaktır.



2. GENEL KISIMLAR

2.1. KLEİN-GORDON DENKLEMİ

Rölativistik dalga denklemi 1926 yılında Klein [22], Gordon [23], Kudar [24], Fock [25, 26], de Donder ve Van den Dungen [27] tarafından önerilmiştir. Klein-Gordon denklemi Schrödinger denkleminin rölativistik genelleştirmesi olarak tanımlanabilir. Schrödinger denklemindekine benzer şekilde Klein-Gordon denklemi türetilir. Klasik mekanikteki gözlemlerler kuantum mekaniksel operatör temsilleriyle değiştirilerek yeni bir formoline elde edilebilir. Bunu göstermek için ilk olarak aşağıdaki gibi verilen klasik eşitliği düşünelim [28, 29]:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E. \quad (2.1)$$

Eğer $\hat{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ ve $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ atanırsa Schrödinger denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Şimdi aynı süreci (2.1) denkleminin rölativistik genelleştirmesi olan

$$-E^2 + \mathbf{p}^2 = -m^2 \quad (2.3)$$

enerji-momentum disperison ilişkisi için ele alalım. Bu durumda yukarıdaki ifadeyi

$$p^\mu p_\mu + m^2 = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada p^μ dördümlü momentum vektörünün bileşenleridir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Bu tezde ışık hızı $c = 1$ alınmıştır):

$$p^\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.5)$$

∂_μ ise

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır. (2.5) ifadesi (2.4) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi + \frac{m^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (2.7)$$

olarak serbest parçacık için Klein-Gordon denklemini elde ederiz. Denklem (2.7)'deki Klein-Gordon denklemini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\left(\square - \frac{m^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0. \quad (2.8)$$

Burada $\square$ sembolü:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (2.9)$$

şeklinde verilir. $\square$ d'Alembert operatörü olarak bilinir.

Schrödinger denkleminin aksine, serbest parçacık için Klein-Gordon denklemleri Lorentz dönüşümleri altında invarianttır. Klein-Gordon denklemi spini sıfır olan skaler parçacıklara uygulanabilir. Klein-Gordon denklemi Schrödinger denkleminden farklı olarak zamana göre ikinci mertebeden türevi içermektedir. Bu nedenle Born'un istatistiksel yorumuyla uyuşmaz.

Şimdi aşağıdaki gibi verilen Klein-Gordon denklemini için [30] çözüm elde edelim:

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu - \frac{m^2}{\hbar^2} \right) \Phi = 0. \quad (2.10)$$

Yukarıdaki denklem için düzlem dalga formunda bir çözüm arayabiliriz:

$$\Phi(x) = \Phi(k) e^{ik \cdot x} = \Phi(k) e^{-ik^\mu x_\mu} = \Phi(w, k) e^{iwt - i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (2.11)$$

Burada 4-lü dalga vektörü

$$k^\mu = (w, \vec{k}) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca w dalgaının frekansıdır. Eğer (2.11) ifadesi (2.10)'da verilen Klein-Gordon denkleminde yerine yazılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi(x) = \Phi(k) \partial^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} \right) = \Phi(k) \partial \left(-ik_\mu e^{-ik_\mu x^\mu} \right) = -k^\mu k_\mu \Phi(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.13)$$

Böylece Klein-Gordon denklemi fiziksel parametreler cinsinden

$$\left(k^\mu k_\mu + \frac{m^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = \left(k^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem $k^2 = -m^2/\hbar^2$ için çözülebilir. Bu şart sağlandığında parçacığın kütle kabuğunun üzerinde ya da kısaca kabuk üzerinde olduğu söylenir. Kabuk üzerinde şartı sağlandığında çözümler

$$-w^2 + \vec{k}^2 = -m^2/\hbar^2 \quad \Rightarrow \quad w = \pm w_k = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2/\hbar^2} \quad (2.15)$$

şeklinde edilir. c sabitini de yukarıdaki ifade için yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{c^2} &= \vec{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \\ \hbar^2 w^2 &= \hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4, \\ E^2 &= \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Enerji dispersion ilişkisi dalga mekaniğinden elde edebilir.

2.1.1. Klein-Gordon Denkleminin Çözümleri

Burada Klein-Gordon denklemi bir ve üç boyutlu durumlarda sonsuz kuyu potansiyeli için ele alınacaktır [31]. İlk olarak ikinci mertebeden kısmi türevli Klein-Gordon denkleminde zamana göre birinci mertebe diferansiyel denklem elde etmemizi sağlayan Feshbach-Villars formalizmini ele alalım. Bu, φ ve χ gibi iki dalga fonksiyonun tanımlanmasıyla sağlanır. ψ dalga fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz [31–33]:

$$\psi = \varphi + \chi, \quad (2.17)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2(\varphi - \chi). \quad (2.18)$$

Şimdi iki bileşenli spinörü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Böylece serbest Klein-Gordon denklemi Schrödinger tipi bir denklem gibi yazılabilir:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (2.20)$$

burada Hamiltonian H

$$H = (\sigma_3 + i\sigma_2) \frac{\hat{p}^2}{2m} + m\sigma_3. \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada σ_k ($k = 1, 2, 3$) Pauli matrisleridir ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

(2.21) numaralı denklemdeki Hamiltonian rölativistik olmayan formdadır. (2.20) ifadesi hem φ hem de χ için

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m}(\varphi + \chi) + m\varphi, \quad (2.23)$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{\hat{p}^2}{2m}(\varphi + \chi) - m\chi \quad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir. (2.17), (2.18), (2.23) ve (2.24) denklemlerinden serbest Klein-Gordon denklemi (2.7) elde edilir. Sonuç olarak FVF’de serbest Klein-Gordon denkleminin çözümü aşağıdaki gibi verilir:

$$\psi_p^\pm(\vec{x}, t) = A_\pm \begin{pmatrix} \varphi_0^\pm(\vec{p}) \\ \chi_0^\pm(\vec{p}) \end{pmatrix} \exp i(\mp E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar \equiv A_\pm \psi_0^\pm(\vec{p}) \exp i(\mp E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar. \quad (2.25)$$

Burada $A_\pm$ normalizasyon sabitleridir. $E = \pm E_p$ ise Klein-Gordon denkleminin negatif ve

pozitif enerji çözümlerini ifade eder. Ayrıca $\varphi_0^\pm(\vec{p})$ ve $\chi_0^\pm(\vec{p})$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}\varphi_0^\pm(\vec{p}) &= \frac{\pm E_p + m}{2\sqrt{mE_p}} \\ \chi_0^\pm(\vec{p}) &= \frac{m \mp E_p}{2\sqrt{mE_p}}\end{aligned}\quad (2.26)$$

olarak verilir. Bu fonksiyonlar arasındaki ilişki $[\varphi_0^\pm(\vec{p})]^2 + [\chi_0^\pm(p)]^2 = \pm 1$ şeklindedir. Sonsuz kare kuyu potansiyelli Klein-Gordon denklemini çözmek için parçacıkların çok büyük bir dış potansiyele maruz kalması durumunda rölativistik kuantum mekaniğinde tek bir parçacık tanımlamasından ortaya çıkan problemle uğraşmak gerekir. Bu problem bir düzlem dalganın bir vektör potansiyel bariyeri boyunca geçişinin hesaplanması ile ortaya çıkan Klein paradoksudur. 0 ve 1/2 spinli parçacıklar için farklı formlarda ortaya çıkar. Fakat her iki durumda da güçlü bir vektör potansiyeli klasik olarak yasaklı bölgeye sıfır olmayan bir geçiş olasılığı verir. Bu parçacık/antiparçacık çift üretimiyle ilişkilidir. Bu paradokstan kaçınmak ve Klein-Gordon denkleminin çözümleri olan dalga fonksiyonlu sıfır spinli parçacıkların kuantum mekaniksel tanımlamasını elde etmek için, tek boyutlu bir potansiyeli düşünmek gerekir. Bu potansiyel, tek boyutlu ve L uzunluklu ($\mathbb{L} \equiv \{0 \leq x \leq L\}$) bir kutuda Lorentz dönüşümleri altında potansiyel bir invaryant olarak, yani konuma bağlı bir kütle terimiyle aşağıdaki gibi tanımlanabilir [34]:

$$m_{(x)} = \begin{cases} m & , \quad x \in \mathbb{L} \\ M \rightarrow \infty & , \quad x \notin \mathbb{L} \end{cases} . \quad (2.27)$$

FVF'de Klein-Gordon denkleminin zamandan bağımsız çözümleri

$$H\tilde{\psi}(\vec{x}) = E\tilde{\psi}(\vec{x}), \quad \psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt/\hbar}\tilde{\psi}(\vec{x}) \quad (2.28)$$

şeklindedir. (2.25) numaralı denklemden bir boyutlu kutu için zamandan bağımsız pozitif enerjili genel çözüm aşağıdaki gibi verilir ($p > 0$):

$$\psi_B(x) = \begin{cases} A\psi_0^+(p)e^{ipx/\hbar} + B\psi_0^-(p)e^{-ipx/\hbar} & , \quad x \in \mathbb{L} \\ 0 & , \quad x \notin \mathbb{L} \end{cases} \quad (2.29)$$

Kutunun sınırlarında dalga fonksiyonun sürekliliği kutu sınır koşullarını verir, yani $\psi_B(0) =$

$0 = \psi_B(L) \cdot \int_{\mathbb{L}} \rho dx = 1$ normalizasyonu düşünürsek, kutunun içindeki dalga fonksiyonu

$$\psi_B(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \psi_0^+(p) \sin(px/\hbar), \quad pL = n\pi\hbar, \quad n = 1, \dots \quad (2.30)$$

olarak elde edilir. Bu çözüm ise kuantize enerji seviyelerini aşağıdaki gibi verir:

$$E_B(n) = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{L^2} + m^2} \approx m + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} + \dots \quad (2.31)$$

Yukarıdan görüleceği gibi $p \ll m$ durumunda (2.31) ifadesi seriye açılırsa klasik durum elde edilir. Serinin ikinci terimi ise Schrödinger denkleminde elde edilir. İlk terim ise durgun enerji terimidir. Son olarak (2.17) ve (2.18) denklemlerinden φ ve χ ifadeleri

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{L}} \varphi_0^+(p_n) e^{-iE_B(n)t/\hbar} \sin(p_n x/\hbar), \quad (2.32)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{L}} \chi_0^+(p_n) e^{-iE_B(n)t/\hbar} \sin(p_n x/\hbar) \quad (2.33)$$

olarak bulunur.

Şimdi üç boyutlu durumu ele alınırsa ($\mathbb{V} \equiv \{0 \leq x_i \leq L_i\}$, $i = 1, 2, 3$). Skaler sonsuz kuyu potansiyeli aşağıdaki gibi verilir:

$$m(\vec{x}) = \begin{cases} m & , \vec{x} \in \mathbb{V} \\ M \rightarrow \infty & , \vec{x} \notin \mathbb{V} \end{cases} . \quad (2.34)$$

Bu potansiyel tek boyutlu durumdaki gibi ayrı ayrı yazılabilir:

$$m(\vec{x}) = m + (M - m) \prod_{i=1}^3 [\theta(x_i - L_i) + \theta(-x_i)]. \quad (2.35)$$

Burada $\theta(x)$ Heaviside fonksiyonudur. Bu dalga fonksiyonunun konuma bağlı kısmının tek boyutlu düzlem dalgaların lineer kombinasyonları olarak yazılabileceği anlamına gelir:

$$e^{i \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i p_i x_i / \hbar}, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \quad (2.36)$$

$(\pm p_1, \pm p_2, \pm p_3)$ düzlem dalgalarının momentum büyüklükleri aynı olduğundan, zamandan

bağımsız genel pozitif enerji çözümleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi_B(\vec{x}) = \begin{cases} \psi_0^+(\vec{p}) \sum_{\vec{\varepsilon}} A_{\vec{\varepsilon}} e^{i \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i p_i x_i / \hbar} & , \vec{x} \in \mathbb{V} \\ 0 & , \vec{x} \notin \mathbb{V} \end{cases} . \quad (2.37)$$

Burada $\vec{\varepsilon}$ ifadesi $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 'nün değerlerini ifade etmektedir. $A_{\vec{\varepsilon}}$ ise her bir düzlem dalga için genlikleri ifade eder. Sınır koşulları ve normalizasyon ise

$$\psi_B(0, 0, 0) = 0 = \psi_B(L_1, x_2, x_3) = \psi_B(x_1, L_2, x_3) = \psi_B(x_1, x_2, L_3), \quad (2.38)$$

$$\int_{\mathbb{V}} \rho d^3 \vec{x} = 1 \quad (2.39)$$

olarak tanımlanır. Bu şartlar kuyu içindeki dalga fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlarlar:

$$\psi_B(\vec{x}) = \sqrt{\frac{2^3}{V}} \psi_0^+(\vec{p}) \prod_{i=1}^3 \sin(p_i x_i / \hbar). \quad (2.40)$$

Burada $V = L_1 L_2 L_3$ kuyunun hacmidir ve $p_i L_i / \hbar = n_i \pi$ ($n_i = 1, \dots$ ve $i = 1, 2, 3$) şeklinde verilir. Bu dalga fonksiyonu için kuantize enerji ise aşağıdaki gibi verilir:

$$E_B(\vec{n}) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2 \pi^2 \hbar^2 c^2}{L_i^2} + m^2 c^4} \approx mc^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L_i^2} + \dots \quad (2.41)$$

Dalga fonksiyonunun φ ve χ bileşenleri ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2^3}{V}} \varphi_0^+(\vec{p}(\vec{n})) e^{-i E_B(\vec{n}) t / \hbar} \prod_{i=1}^3 \sin(p_i(\vec{n}) x_i / \hbar), \quad (2.42)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{2^3}{V}} \chi_0^+(\vec{p}(\vec{n})) e^{-i E_B(\vec{n}) t / \hbar} \prod_{i=1}^3 \sin(p_i(\vec{n}) x_i / \hbar). \quad (2.43)$$

2.2. DİRAC DENKLEMİ

Klein-Gordon denklemi E^2 ifadesinden çıkarıldığından zamana ve konuma göre ikinci mertebeden türevleri ihtiva eder. Dirac ise zamana ve konuma göre birinci mertebeden türevleri içeren bir denklem bulmaya çalışmıştır [35]. Dirac zamana göre ikinci mertebeden türevleri içeren bir denklemin olasılık yorumundaki problemi ilk defa fark eden kişi Dirac'tır.

Zamana göre birinci mertebeden türev içeren bir denklemin bulunması konusunda ısrarcıydı. Ayrıca görelilik nedeniyle konuma göre türev de birinci mertebeden olmalıydı. Bu durumda yazılabilecek denklemin formu aşağıdaki gibi olmalıdır [36]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = [c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta] \psi. \quad (2.44)$$

Denklem içerisinde yer alan $\vec{\alpha}$ ve β parametrelerini ileride tanımlayacağız. Dirac ayrıca bu denklemin Klein-Gordon denklemi gibi standart dispersion ilişkisini vermesi gerektiğini düşünmüştür. Yukarıdaki ifade için

$$H^2 \psi = [\alpha^i \alpha^j p^i p^j + m(\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) p^i + m^2 \beta^2] \psi \quad (2.45)$$

yazılabilir. Sağ tarafın $\vec{p}^2 + m^2$ ifadesini vermesi için H Hamiltonian olmak üzere

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \quad (2.46)$$

ifadelerinin sağlanması gerekir. Yukarıdaki eşitlikler, α^i ve β ifadelerinin (4×4) boyutlu matris olması halinde sağlanır. Bu matrisler için Dirac'ın önerdiği çözüm ise

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

şeklinde. Burada σ^i , (2.22) ifadesinde verilen Pauli matrisleridir ve $\mathbf{1}$ ise birim matrislerdir. ψ dalga fonksiyonu da dört bileşenli bir sütun vektöre karşılık gelir.

2.2.1. Dirac Denkleminin Çözümleri

Şimdi yukarıda verdiğimiz matrislerler birlikte (2.44) ifadesindeki Dirac denklemi için çözümlere bakalım [36]. $\psi = u(p)e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)/\hbar}$ düzlem dalga çözümü için denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} u(p) = Eu(p). \quad (2.48)$$

$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \sigma^i \sigma^j p^i p^j = \frac{1}{2} \{\sigma^i, \sigma^j\} p^i p^j = \sigma^j p^i p^j = \delta^{ij} p^i p^j = \vec{p}^2$ olduğundan dolayı $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ matrisinin özdeğerleri $\pm |\vec{p}|$ şeklindedir. $\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ şeklinde

kutupsal koordinatlar kullanılırsa

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = |\vec{p}| \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

buluruz. Özvektörler ise

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_+(\vec{p}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = |\vec{p}| \chi_+(\vec{p}), \quad (2.50)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_-(\vec{p}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -|\vec{p}| \chi_-(\vec{p}) \quad (2.51)$$

olarak verilir. $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ ise $\pm |\vec{p}|$ özdeğerleri ile değiştirilir ve geri kalanı ise (2.48) ifadesinde verilen matrisin köşegenleştirilmesidir. Nihayet iki adet özvektör elde ederiz:

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_+(\vec{p}) \\ \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \chi_+(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad u_-(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_-(\vec{p}) \\ -\sqrt{\frac{E-m}{2m}} \chi_-(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Rölativistik olmayan limitde $E \rightarrow m$ sadece alt bileşenler kaybolur. Bu nedenle üst bileşenler büyük bileşenler olarak adlandırılırken, alt bileşenler ise küçük bileşenler olarak adlandırılır.

Dirac denkleminin ilginç özelliklerinden birisi de aynı momentum ve enerjiye sahip iki çözüm önermesidir. Bunlar iki spin durumuna karşılık gelmektedir. Dalga denklemi 1/2 spinli bir parçacık tanımlar.

Dirac dalga denklemi ψ dört adet bileşene sahip olmasına rağmen biz sadece iki adet elde ettik. Bunlara ek iki adet çözüm vardır. Bu çözümler negatif enerjili durumlara karşı gelmektedir. $\psi = v(p)e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)/\hbar}$ olarak yazarsak, (2.48) eşitliği gibi fakat kütle terimleri zıt işaretli olacak şekilde

$$\begin{pmatrix} -m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m \end{pmatrix} v(p) = Ev(p) \quad (2.53)$$

yazılır. Benzer şekilde çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \chi_+(\vec{p}) \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_+(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E-m}{2m}} \chi_-(\vec{p}) \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_-(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. KLEİN-GORDON VE DİRAC DENKLEMLERİ İÇİN TERMODİNAMİK ÖZELLİKLER

Bu bölümde Lorentz vektörü ve Lorentz skaler kısımlarından oluşan bir potansiyel için Klein-Gordon ve Dirac denklemleri çözülecektir ve termodinamik özellikleri gözden geçirilecektir [37].

3.1.1. Klein-Gordon Denklemleri

m kütleli bir parçacık için $V_1(x)$ vektör ve $V_2(x)$ skaler potansiyelleri varlığında Klein-Gordon denklemleri aşağıdaki gibi verilir [38]:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + Q^2 \left[(E - V_2(x))^2 - (\mu - V_1(x))^2 \right] \psi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Burada $Q^2 = 1/\hbar^2 c^2$ ve $\mu = mc^2$ olarak verilmiştir. Sırasıyla vektör ve skaler potansiyelleri $\hbar c a_2 |x|$ ve $\hbar c a_1 |x|$ olarak alırsak, yukarıdaki denklemleri Schrödinger denklemleri gibi yazabiliriz:

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + Q^2 \left(\frac{1}{2} k_1 x^2 + k_2 |x| + \varepsilon \right) \right] \psi(x) = 0. \quad (3.2)$$

bu denklemde yer alan parametreler

$$k_1 = \frac{a_1^2}{\mu Q^2} (1 - a^2), \quad k_2 = \frac{a_1}{\mu \sqrt{Q^2}} (Ea - \mu), \quad \varepsilon = \frac{\mu^2 - E^2}{2\mu}, \quad a = a_2/a_1 \quad (3.3)$$

ile verilir. Şimdi $a_1^2 \neq a_2^2$ durumunu düşünelim. $y = |x| + k_2/k_1$ değişken tanımlamasıyla (3.2) denklemleri aşağıdaki haliyle verilir:

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dy^2} + Q^2 \left(\frac{1}{2} k_1 y^2 - \varepsilon_1 \right) \right] \psi(y) = 0. \quad (3.4)$$

denklemden yer alan ε_1 parametresi $\varepsilon_1 = -\varepsilon + k_2^2/2k_1$ ile verilmiştir. Yukarıdaki denklem için enerji özdeğeri ise

$$E = a\mu \pm \sqrt{(1-a^2)\mu\hbar w(2n+1)}. \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.5)'de yer alan frekans $w = \sqrt{k_1 c^2/\mu}$ ile verilir.

Bir kanonik küme için bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E-E_0)} = e^{\mu\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}. \quad (3.6)$$

Ters sıcaklık parametresi $\beta = 1/k_B T$ ile verilir. Bölüşüm fonksiyonunu kullanarak serbest enerji F , iç enerji U , entropi S ve ısı sığası C gibi termodinamik nicelikler:

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta), U(\beta) = -\frac{\partial Z(\beta)}{\partial \beta}, S(\beta) = k_B \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta}, C(\beta) = -k_B \beta^2 \frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta}. \quad (3.7)$$

şeklinde verilir.

Yukarıdaki bölüşüm fonksiyonunun yakınsaklığını integral formülüyle kontrol edebiliriz [39]. Bölüşüm fonksiyonu:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{\beta'n+\beta''}} dn = \frac{2}{\beta'\beta^2} (1 + \beta\sqrt{\beta''}) e^{-\beta\sqrt{\beta''}}, \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabildiğinden dolayı yakınsaktır. Bölüşüm fonksiyonunu Euler-MacLaurin formülünü kullanarak hesaplayabiliriz:

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(m) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} B_{2i} f^{(2i-1)}(0). \quad (3.9)$$

Burada B_{2i} Bernoulli sayılarıdır ($B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, \dots$). Bu durumda (3.8) ve (3.9) ifadeleri (3.6) içinde kullanılırsa bölüşüm fonksiyonu

$$Z(\tilde{\mu}) = \frac{1}{2} + \tilde{\mu}(\tilde{\mu} + 1) + \frac{1}{240\tilde{\mu}^3} (19\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu} - 1) \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{\mu} = 1/\mu\beta$ ile tanımlanmıştır. Bu durumda boyutsuz

termodinamik nicelikler aşağıdaki gibi verilir:

$$\tilde{F} = \frac{F}{\mu} = -\tilde{\mu} \ln Z(\tilde{\mu}), \quad (3.11)$$

$$\tilde{U} = \frac{U}{\mu} = \frac{3\tilde{\mu}(1+2\tilde{\mu}-19\tilde{\mu}^2+240\tilde{\mu}^4+480\tilde{\mu}^5)}{-1-3\tilde{\mu}+57\tilde{\mu}^2+360\tilde{\mu}^3+720\tilde{\mu}^4(1+\tilde{\mu})}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{S} = \frac{S}{k_B} = \frac{3(1+2\tilde{\mu}-19\tilde{\mu}^2+240\tilde{\mu}^4+480\tilde{\mu}^5)}{-1-3\tilde{\mu}+57\tilde{\mu}^2+360\tilde{\mu}^3+720\tilde{\mu}^4(1+\tilde{\mu})} + \ln Z(\tilde{\mu}), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C} = \frac{C}{k_B} = & \frac{1}{(-1-3\tilde{\mu}+57\tilde{\mu}^2+360\tilde{\mu}^3+720\tilde{\mu}^4(1+\tilde{\mu}))^2} \\ & \times (-1-4\tilde{\mu}-6\tilde{\mu}^2-606\tilde{\mu}^3-5163\tilde{\mu}^4-11520\tilde{\mu}^5+43200\tilde{\mu}^6+309600\tilde{\mu}^7+691200\tilde{\mu}^8(1+\tilde{\mu}) \\ & +345600\tilde{\mu}^{10}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

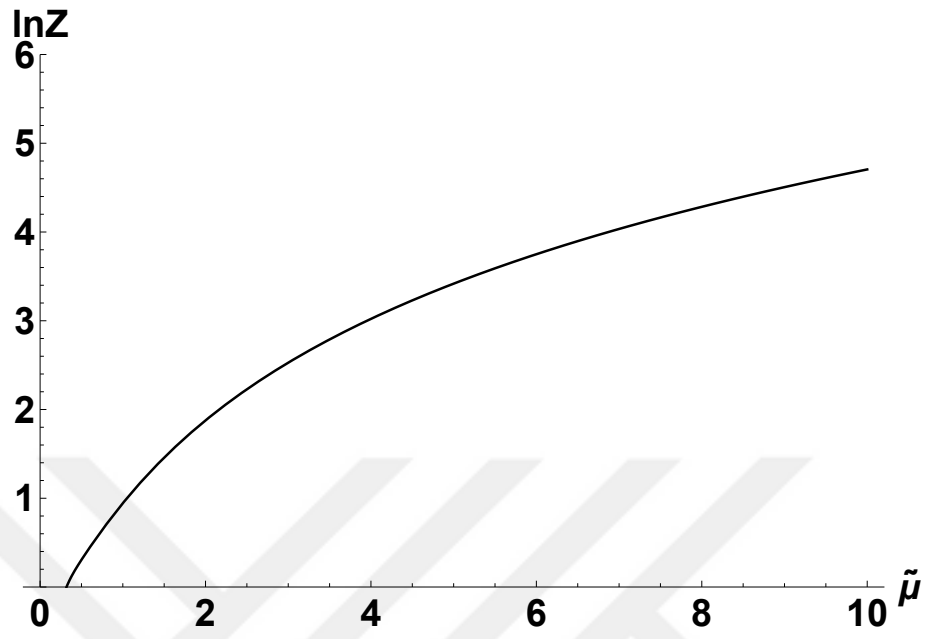
Yüksek sıcaklık limitinde yani $\beta \ll 1$ durumunda $Z \sim \tilde{\mu}^2$, $U \sim 2\tilde{\mu}$ ve $C \sim 2$ şeklinde elde edilir. Bölüşüm fonksiyonunun, serbest enerjinin, iç enerjinin, entropinin ve ısı sığasının $\tilde{\mu}$ 'ya ($Mc^2/\hbar\omega = 1$, $k_B = 1$) göre grafikleri sırasıyla **Şekil 3.1:**, **Şekil 3.2:**, **Şekil 3.3:**, **Şekil 3.4:** ve **Şekil 3.5:**'de verilmiştir. **Şekil 3.1:**, **Şekil 3.3:** ve **Şekil 3.4:** şekillerden görüleceği gibi $\ln Z(\tilde{\mu})$, iç enerji ve entropi sıcaklıkla artmaktadır. **Şekil 3.2:** den görüleceği gibi serbest enerji sıcaklıkla azalmaktadır. Sistemin entropisi $\mu \sim 0,5$ civarında dönüm noktasına sahiptir. Yani bu değerden küçük değerler rölativistik olmayan bölgeye karşılık gelmektedir [40]. **Şekil 3.5:**'den görüleceği gibi ısı sığası için bir üst limit söz konusudur. Zaten yüksek sıcaklık limitinde $C \sim 2$ olmaktadır.

3.1.2. Dirac Denklemi

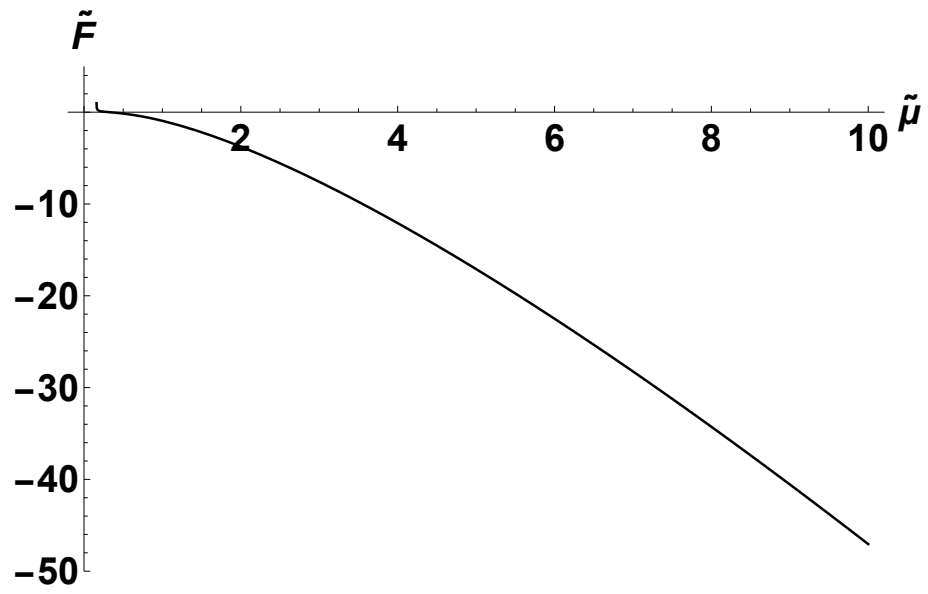
Dirac denklemi zamandan bağımsız Lorentz skaleri $V_1(x)$ ve Lorentz vektörü $V_2(x)$ potansiyelleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir [41]:

$$[c\alpha\hat{p} + \beta(mc^2 + V_1(x) + V_2(x))] \psi(x) = E\psi(x). \quad (3.15)$$

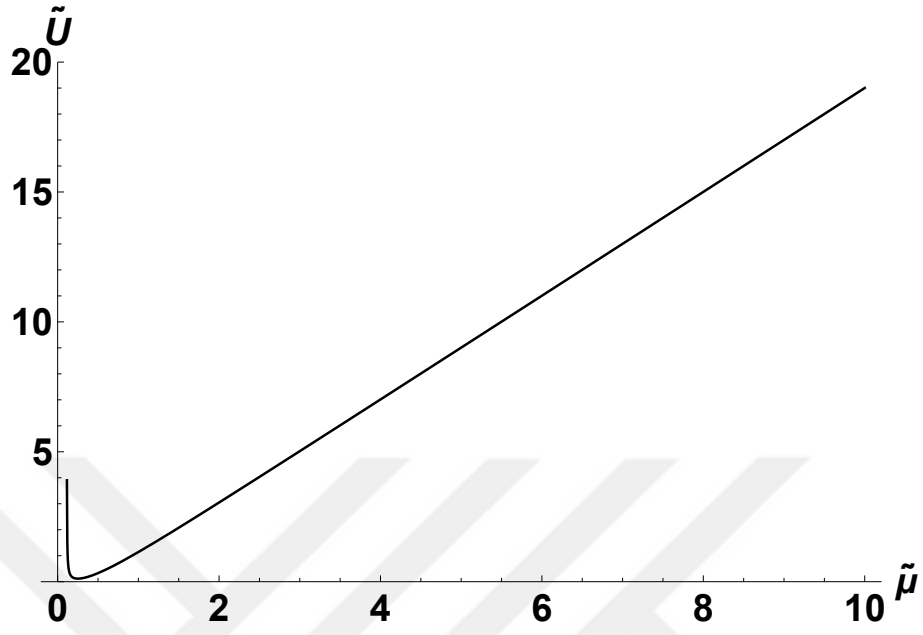
Burada E , m kütleli fermiyonun enerjisidir. α ve β , $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ ve $\{\alpha, \beta\} = 0$ şartlarını sağlayan izsiz matrislerdir. Bunları $\alpha = \sigma_2$ ve $\beta = \sigma_1$ olacak şekilde Pauli matrisi olarak



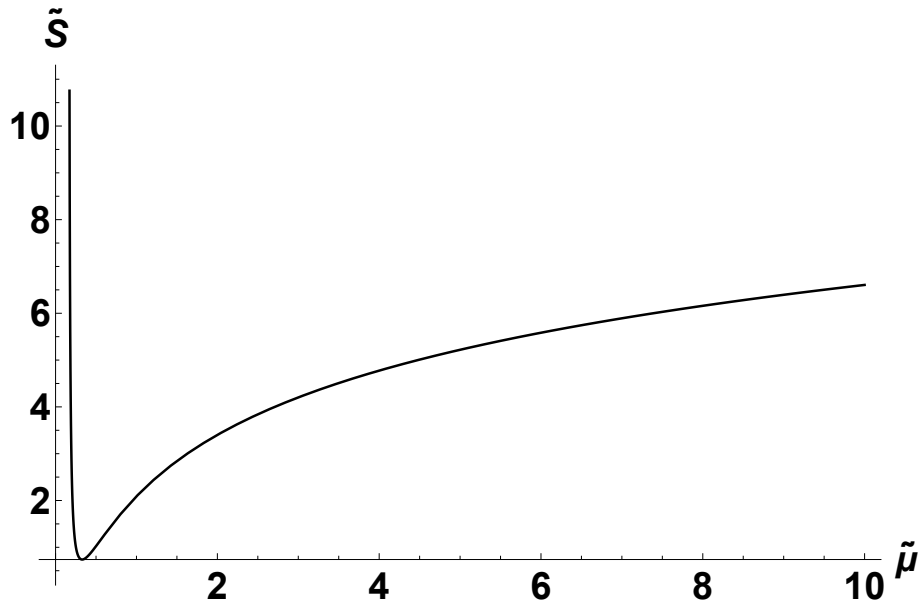
Şekil 3.1: $\ln Z$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.



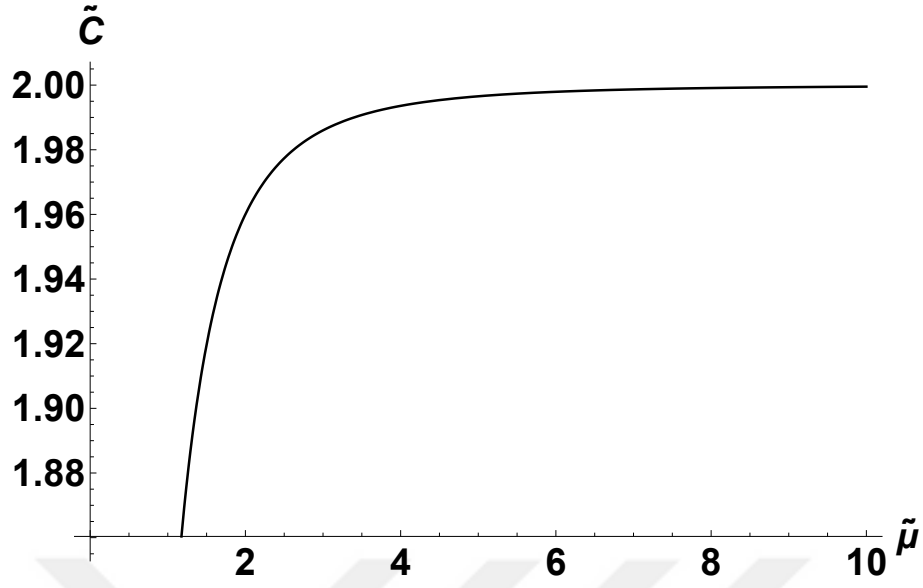
Şekil 3.2: $\tilde{F}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.



Şekil 3.3: $\tilde{U}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.



Şekil 3.4: $\tilde{S}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.



Şekil 3.5: $\tilde{C}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi.

seçersek ve üst ve alt bileşenler için spinörü dikkate alırsak

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

olur. Vektör potansiyelin olmadığı durumda (3.15) ifadesinden iki adet denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(mc^2 + V_1(x))g(x) - \hbar c \frac{dg(x)}{dx} = E f(x), \quad (3.17)$$

$$(mc^2 + V_1(x))f(x) + \hbar c \frac{df(x)}{dx} = E g(x). \quad (3.18)$$

Burada $Q = 1/\hbar c$ ve $\mu = mc^2$ ile verilir. İkinci mertebeden diferensiyel denklemler

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + Q^2(\mu^2 - E^2) + 2Q^2\mu V_1(x) + Q^2V_1^2(x) - Q\frac{dV_1(x)}{dx} \right\} f(x) = 0, \quad (3.19)$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + Q^2(\mu^2 - E^2) + 2Q^2\mu V_1(x) + Q^2V_1^2(x) + Q\frac{dV_1(x)}{dx} \right\} g(x) = 0 \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $V_1(x) = -\hbar c A/|x|$ şeklinde skaler bir potansiyeli ve A boyutsuz çiftlenim sabitini yukarıdaki ifadelerde yerine yazarsak

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + Q^2(\mu^2 - E^2) - \frac{2Q\mu A}{|x|} + \frac{\xi^{(f,g)}}{x^2} \right\} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

buluruz. (f, g) indisleri ξ sabiti için $\xi^f = A(A-1)$ ve $\xi^g = A(A+1)$ olarak ifade edilebilir. $y = 2\sqrt{Q^2(\mu^2 - E^2)}|x|$ değişken dönüşümü ile yukarıdaki denklemden üst bileşeni

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{4} + \frac{\mu A / \sqrt{\mu^2 - E^2}}{y} - \frac{\xi^{(f,g)}}{y^2} \right\} f(y) = 0 \quad (3.22)$$

olarak ifade edebiliriz. Eğer $f(y) = e^{-y/2} y^B h(y)$ şeklinde seçilirse, (3.22) denklemi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\left\{ y \frac{d^2}{dy^2} + (2B - y) \frac{d}{dy} - \left(B - \frac{\mu A}{\sqrt{\mu^2 - E^2}} \right) \right\} h(y) = 0. \quad (3.23)$$

Bu denklemin çözümü birleşik hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir:

$$h(y) \sim M \left(B - \frac{\mu A}{\sqrt{\mu^2 - E^2}}, 2B, y \right). \quad (3.24)$$

$f(y)$ ve $g(y)$ bileşenleri ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir [38]:

$$f(y) = N_1 y^A e^{-y/2} L_n^{2A-1}(y), \quad (3.25)$$

$$g(y) = N_2 y^{A+1} e^{-y/2} L_{n-1}^{2A+1}(y). \quad (3.26)$$

Burada $L_n^k(y)$ Laguerre polinomlarıdır. Enerji özdeğeri ise

$$E = \mp \mu \sqrt{1 - \frac{A^2}{(n+A)^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

olarak verilir.

Yukarıda enerji özdeğeri için bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{\mu}}. \quad (3.28)$$

Bölüşüm fonksiyonunu analitik olarak elde etmek için:

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_C y^{-t} \Gamma(t) dt. \quad (3.29)$$

integral dönüşümü kullanabilir [42–44].

Burada $\Gamma(t)$ Euler Gamma fonksiyonudur. (3.29) numaralı denklem ve Riemann Zeta fonksiyonu $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^t$ yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{2an}}{\mu}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \tilde{\mu}^t (2a)^{-t/2} \zeta(t/2) \Gamma(t) dt \quad (3.30)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a = 1/A$ olarak tanımlıdır. Yukarıdaki ifade için $t = 0$ ve $t = 2$ olmak üzere iki adet kutup vardır. Rezidü teoremini uygularsak

$$Z(\tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\mu}^2}{2a} + \frac{1}{2} \quad (3.31)$$

şeklinde bölüşüm fonksiyonu elde edilir. Önceki bölümdekine benzer şekilde indirgenmiş termodinamik nicelikler aşağıdaki gibi verilebilir:

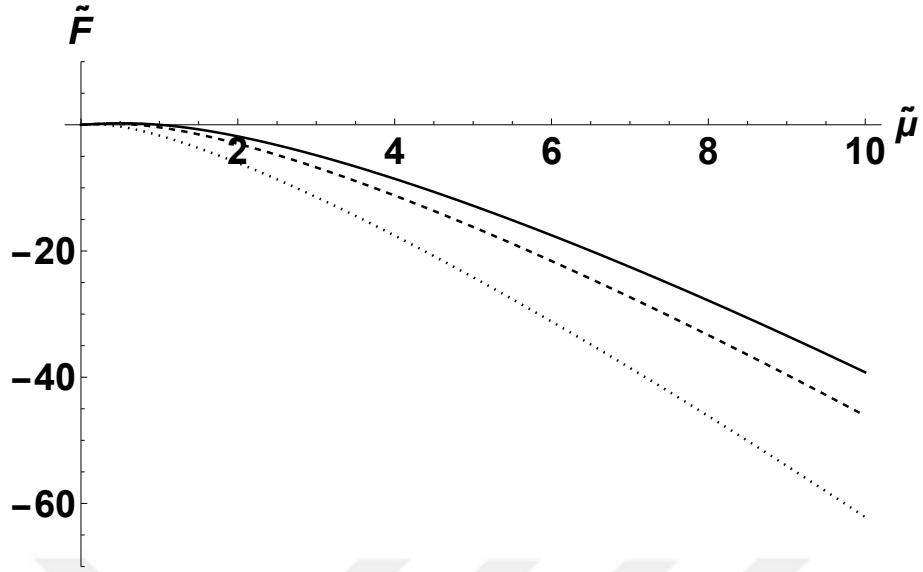
$$\tilde{F}(\tilde{\mu}) = \frac{F}{\mu} = -\tilde{\mu} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2 + a}{2a} \right), \quad (3.32)$$

$$\tilde{U}(\tilde{\mu}) = \frac{U}{\mu} = \frac{2\tilde{\mu}^3}{\tilde{\mu}^2 + a}, \quad (3.33)$$

$$\tilde{C}(\tilde{\mu}) = \frac{C}{k_B} = \frac{2\tilde{\mu}^2(\tilde{\mu}^2 + 3a)}{(\tilde{\mu}^2 + a)^2}. \quad (3.34)$$

Yüksek sıcaklık limitinde $\beta \ll 1$, $Z \sim \tilde{\mu}^2/2a$, $U \sim 4\tilde{\mu}$ ve $C \sim 2$ şeklinde bulunur. Yüksek sıcaklık limitinde bölüşüm fonksiyonu a 'ya bağılıyken, iç enerji ve ısı sığası bağılı değildir.

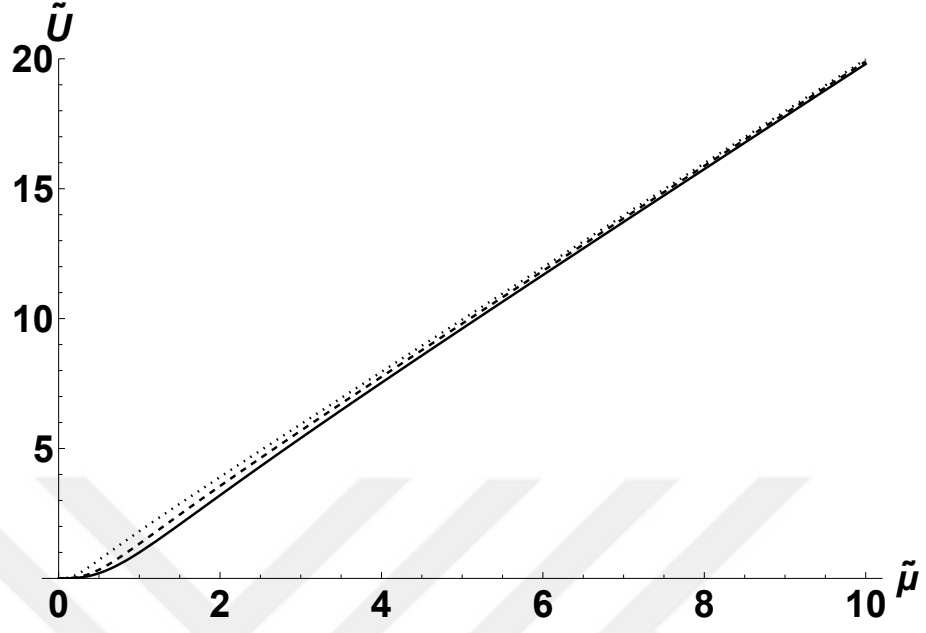
Yukarıda elde ettiğimiz termodinamik nicelikler çiftlenim parametresi a 'ya bağılı olarak değişmektedir. **Şekil 3.6:**, **Şekil 3.7:** ve **Şekil 3.8:**' de serbest enerjinin, iç enerjinin ve ısı



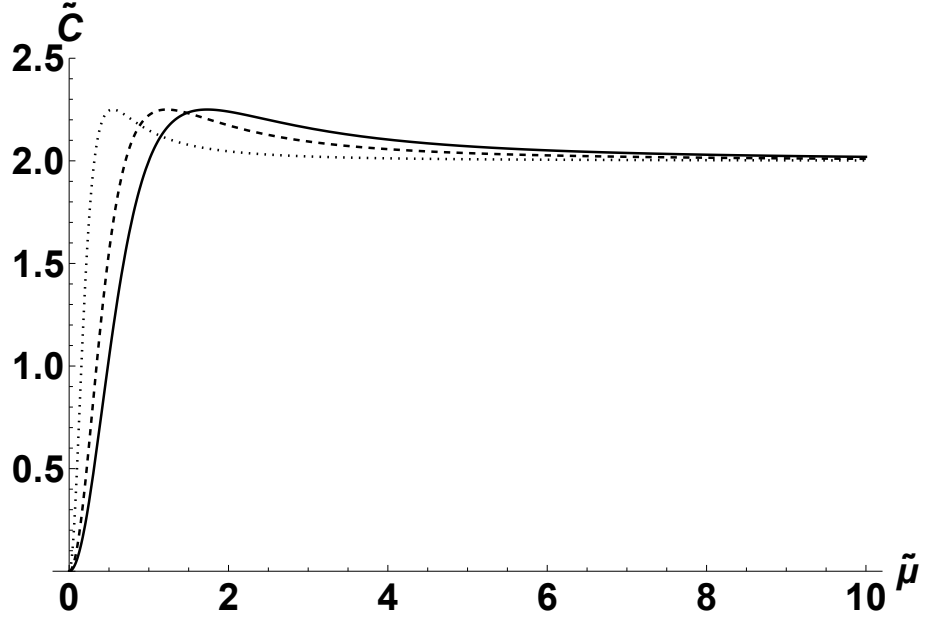
Şekil 3.6: $\tilde{F}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi. Sürekli eğri $a = 1$, kesikli eğri $a = 0.5$ ve noktali eğri $a = 0.1$ değerlerine karşı gelmektedir.

sığasının $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi üç farklı a değeri için verilmiştir. **Şekil 3.6:**'de serbest enerjinin değerinin a ile arttığı görülebilir. **Şekil 3.7:**'de ise a 'nın etkisi düşük sıcaklık değerlerinde daha belirgindir. Yüksek sıcaklık durumunda a 'nın eğriler üzerindeki etkisi kaybolmaktadır. Isı sığasının $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi **Şekil 3.8:**'de verilmiştir. Isı sığasının bir üst limite sahip olduğu görülebilir. Dikkat edilirse a 'nın etkisi düşük sıcaklık değerlerinde daha belirliken, bu etki yüksek sıcaklık değerlerinde kaybolmaktadır.

Bu kısımda Klein-Gordon ve Dirac denklemleri için termodinamik nicelikleri gözden geçirilmiştir [37]. Termodinamik nicelikleri Euler-MacLaurin formülünü kullanarak Klein-Gordon denklemi ve Euler Gamma ile Riemann Zeta fonksiyonlarına dayanan yöntem aracılığıyla Dirac denklemi için elde edilmiştir.



Şekil 3.7: $\tilde{U}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi. Sürekli eğri $a = 1$, kesikli eğri $a = 0.5$ ve noktalı eğri $a = 0.1$ değerlerine karşı gelmektedir.



Şekil 3.8: $\tilde{C}$ 'nin $\tilde{\mu}$ 'ya göre değişimi. Sürekli eğri $a = 1$, kesikli eğri $a = 0.5$ ve noktalı eğri $a = 0.1$ değerlerine karşı gelmektedir.

4. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak modifiye dispersiyon ilişkisi kullanılarak Klein-Gordon denklemi elde edilecektir. Ayrıca harmonik salıncı potansiyeli için modifiye Klein-Gordon denkleminin tek boyutta çözümleri ve enerji seviyeleri elde edilecektir. Rölativistik parçacığın modifiye enerji seviyeleri kullanılarak termodinamik özellikleri incelenecektir.

4.1. MODİFİYE DISPERSİYON İLİŞKİSİ İÇİN KLEİN-GORDON DENKLEMİ

Aşağıdaki gibi verilen modifiye dispersiyon ilişkisini düşünelim:

$$p^2 = E^2 - \eta E^4 - m^2. \quad (4.1)$$

Burada $\eta = \tilde{\beta} \ell_p^2 / \hbar^2$ şeklinde tanımlıdır ve $\tilde{\beta}$ parametresinin değeri KKT modellerine bağlı olarak değişir [46, 47]. $\eta \rightarrow 0$ limitinde standart dispersiyon ilişkisi elde edilir. Yukarıdaki ifade

$$p^\mu p_\mu = p^2 - E^2 = -m^2 - \eta E^4 \quad (4.2)$$

şeklinde düzenlenebilir. Diğer yandan yukarıda verilen modifiye dispersion ilişkisi enerji için çözümlerse

$$E = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta(m^2 + p^2)}}{2\eta}} \quad (4.3)$$

elde edilir. (2.5) ve (4.3) ifadeleri (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \psi = - \left[\frac{1}{4\eta} \left(1 - \sqrt{1 - 4\eta(m^2 + p^2)} \right)^2 + m^2 \right] \psi. \quad (4.4)$$

Yukarıdaki ifadenin sağ tarafını küçük η değerleri için birinci mertebeden seriye açalım:

$$\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \psi = - [m^2 + \eta (m^4 + 2m^2 p^2 + p^4)] \psi. \quad (4.5)$$

Bu ifadeye $\hat{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ atamasını yaparsak

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \left[1 + \frac{2\eta m^2}{\hbar^2} \right] \Psi + \frac{m^2}{\hbar^2} (1 + \eta m^2) \Psi + \eta \hbar^2 \nabla^4 \Psi = 0 \quad (4.6)$$

modifiye Klein-Gordon denklemini elde ederiz. Bu ifade $\eta \rightarrow 0$ limitinde (2.7) ifadesinde verilen normal Klein-Gordon denklemine indirgenir. Modifiye Klein-Gordon denklemini aşağıdaki gibi verilen kompakt şekilde ifade edebiliriz:

$$\left(\tilde{\square} - \frac{\tilde{m}^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0. \quad (4.7)$$

Burada

$$\tilde{\square} = \square + \eta \nabla^2 \left(\frac{2m^2}{\hbar^2} - \hbar^2 \nabla^2 \right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + \eta \nabla^2 \left(\frac{2m^2}{\hbar^2} - \hbar^2 \nabla^2 \right), \quad (4.8)$$

$$\tilde{m}^2 = m^2 (1 + \eta m^2) \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır.

4.2. TEK BOYUTTA KLEİN-GORDON SALINCI DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

Harmonik salıncı problemi kuantum mekaniğinde önemli bir yere sahiptir. Bu problemin rölativistik durumlar için ele alınmasının ilginç sonuçları vardır. Rölativistik kuantum salıncılar bazı ilginç özelliklere sahip olabilirler. Literatürde rölativistik salıncılar geniş bir şekilde ele alınmaktadır [48–56]. Örneğin bir boyutta rölativistik harmonik salıncı için çalışmalar [48–52, 56] makalelerinde bulunabilir. Bunun dışında iki boyutta Dirac salıncısına [53], komütatif olmayan uzaylarda Klein-Gordon ve Dirac salıncılarına [54] ve (2+1) uzay-zamanda Dirac salıncısının özfonksiyonlarına [55] yönelik çeşitli çalışmalar literatürde mevcuttur.

Biz burada modifiye Klein-Gordon denklemini çözmek için Rao ve Kagali tarafından önerilen yöntemi [56] kullanacağız.

Bir boyutta modifiye Klein-Gordon denklemini (4.1) ifadesini kullanarak yazalım:

$$(p_x^2 - (E^2 - \eta E^4 - m^2)) \psi = 0. \quad (4.10)$$

Burada $p_x = -i\hbar d/dx$ ile verilir. Şimdi çiftlenim durumunda aşağıdaki atamaları yapalım [56]:

$$p_x \rightarrow p_x - imwx, \quad (4.11)$$

$$p_x^\dagger \rightarrow p_x + imwx. \quad (4.12)$$

p_x^2 operatörünü $\frac{1}{2}(p_x p_x^\dagger + p_x^\dagger p_x)$ simetrik operatörü ile değiştirelim. Bu durumda Klein-Gordon denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2 w^2 x^2}{\hbar^2} + \left\{ \frac{E^2 - \eta E^4 - m^2}{\hbar^2} \right\} \right] \psi = 0. \quad (4.13)$$

$\eta \rightarrow 0$ limitinde ve $m \gg \hbar w$ durumunda modifiye Klein-Gordon denklemi rölativistik olmayan harmonik salıncı denklemine indirgenir. Bu nedenle yukarıdaki denklemi Klein-Gordon salıncısı olarak düşünebiliriz.

Şimdi aşağıdaki tanımlamayı yapalım:

$$k^2 = \frac{E^2 - \eta E^4 - m^2}{\hbar^2}. \quad (4.14)$$

$\lambda = (mw/\hbar)$ tanımlamasıyla beraber, (4.13) denklemi aşağıdaki şekliyle verilebilir:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k^2 - \lambda^2 x^2) \psi = 0. \quad (4.15)$$

Bu ifadeyi $y = \lambda x^2$ değişken dönüşümü ve

$$\kappa = \frac{k^2}{2\lambda} = \frac{E^2 - \eta E^4 - m^2}{2\hbar m w} \quad (4.16)$$

tanımlamasını kullanarak

$$y \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dy} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{y}{4} \right) \psi = 0 \quad (4.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi $\psi(y) = \phi(y)e^{-\frac{y}{4}}$ şeklinde bir çözüm için bu denklemi çözeceğiz. Bu çözüm kullanarak modifiye Klein-Gordon denklemini Kummer diferansiyel denklemi

olarak yazabiliriz [57]:

$$y \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \left(\frac{1}{2} - y \right) \frac{d\phi}{dy} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} \right) \phi = 0. \quad (4.18)$$

Kummer diferansiyel denklemi

$$x \frac{d^2 \phi}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{d\phi}{dx} - \alpha \phi = 0 \quad (4.19)$$

için çözüm

$$\phi(x) = A_1 M(\alpha, \gamma, x) + A_2 x^{1-\gamma} M(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \quad (4.20)$$

şeklindedir. Burada M birleşik hipergeometrik fonksiyonlarıdır. (4.19) ile (4.18) karşılaştırılırsa, çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$\phi(y) = A_1 M\left(\alpha, \frac{1}{2}, y\right) + A_2 y^{1/2} M\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, y\right). \quad (4.21)$$

Burada

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2} \quad (4.22)$$

ile verilir. Enerji özdeğerleri (4.22) ifadesinden elde edilebilir. Çift durumlar için $\alpha = -n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) ve $A_2 = 0$ şartlarından

$$2\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{E^2 - \eta E^4 - m^2}{2\hbar m w} \quad (4.23)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$E_{2n} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta m(m + \hbar w + 4\hbar w n)}}{2\eta}} \quad (4.24)$$

şeklindedir. Bu ifadenin karesini alırsak ve küçük η değerleri için birinci mertebeden seriye açarsak

$$E_{2n}^2 = m^2 + 2\hbar w \left(2n + \frac{1}{2}\right) m + \eta m^2 \left[m + 2\hbar w \left(2n + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (4.25)$$

buluruz. Tek durumlar ise $\alpha + \frac{1}{2} = -n$ ve $A_1 = 0$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) durumları için belirlenebilir:

$$\frac{3}{2} + 2n = \frac{E^2 - \eta E^4 - m^2}{2\hbar m \omega} \quad (4.26)$$

denklemini çözülürse

$$E_{2n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta m (m + 2\hbar \omega (2n + \frac{3}{2}))}}{2\eta}} \quad (4.27)$$

bulunur. Tekrar bu ifade için de karesini alıp η 'nın küçük değerleri için seriye açarsak

$$E_{2n+1}^2 = m^2 + 2\hbar \omega \left(2n + \frac{3}{2}\right) m + \eta m^2 \left[m + 2\hbar \omega \left(2n + \frac{3}{2}\right)\right]^2 + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (4.28)$$

elde ederiz. (4.25) ve (4.28) ifadelerini çift ve tek durumları içerecek şekilde birleştirebiliriz:

$$E_n^2 = m^2 + 2\hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) m + \eta m^2 \left[m + 2\hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2. \quad (4.29)$$

4.3. MODİFİYE DİSPERSİYON İLİŞKİNİN KLEİN-GORDON SALINCISININ TERMODİNAMİK ÖZELLİKLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİ

Şimdi yukarıda elde ettiğimiz enerji seviyelerini kullanarak termodinamik nicelikleri hesaplayabiliriz. $n = 0$ durumunda temel enerji seviyesini

$$E_0 = \sqrt{m^2 + \hbar m \omega + m^2 (m + \hbar \omega)^2 \eta} = \sqrt{D_3} \quad (4.30)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada dikkat edilirse modifiye dispersion ilişkisinden gelen katkı nedeniyle ilave bir terim bulunmaktadır. $\eta \rightarrow 0$ limitinde sonuç [56] makalesindekiyle uyusmaktadır. (4.29) denklemini ise aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$E_n = \sqrt{D_1 n^2 + D_2 n + D_3}. \quad (4.31)$$

Burada

$$D_1 = 4\eta \hbar^2 \omega^2 m^2, \quad (4.32)$$

$$D_2 = 2\hbar m w [1 + 2\eta m(m + \hbar w)] \quad (4.33)$$

olarak tanımlanmıştır.

Sistemin bölüşüm fonksiyonunu

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(E_n - E_0)\beta} = e^{\sqrt{c}\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{D_1 n^2 + D_2 n + D_3}\beta} \quad (4.34)$$

olarak verebiliriz. $\beta \rightarrow \infty$ yani düşük sıcaklık limitinde ($T \rightarrow 0$), bölüşüm fonksiyonu yukarıdaki toplamın ilk birkaç terimiyle ifade edebiliriz. Bu durumda bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$Z(\beta) = 1 + e^{(\sqrt{D_3} - \sqrt{D_1 + D_2 + D_3})\beta} + \dots \quad (4.35)$$

(4.35) ifadesini kullanarak sırasıyla iç enerji, serbest enerji, entropi ve ısı sığası aşağıdaki gibi verilir:

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{(\sqrt{D_1 + D_2 + D_3} - \sqrt{D_3})}{1 + e^{(\sqrt{D_1 + D_2 + D_3} - \sqrt{D_3})\beta}}, \quad (4.36)$$

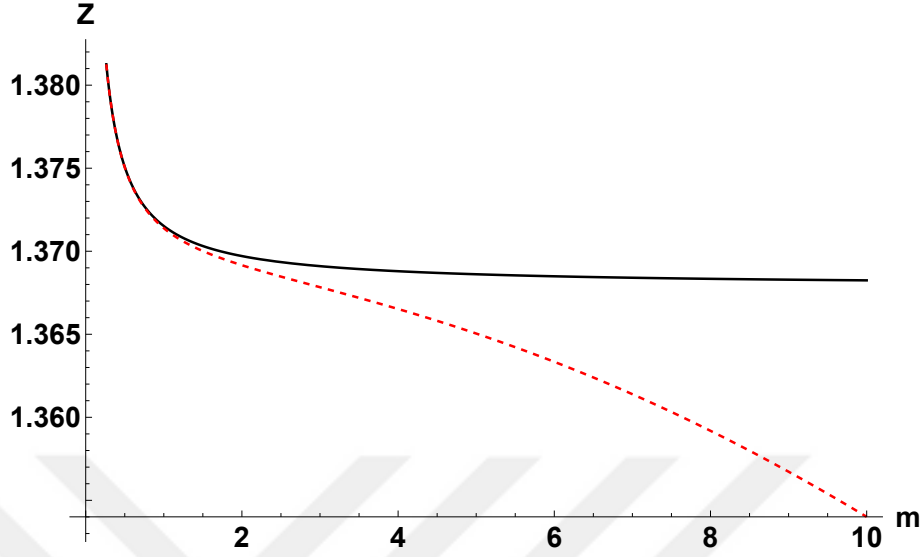
$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{1}{\beta} \ln \left[1 + e^{(\sqrt{D_3} - \sqrt{D_1 + D_2 + D_3})\beta} \right], \quad (4.37)$$

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \ln \left[1 + e^{(\sqrt{D_3} - \sqrt{D_1 + D_2 + D_3})\beta} \right] + \frac{\beta (\sqrt{D_1 + D_2 + D_3} - \sqrt{D_3})}{1 + e^{(\sqrt{D_1 + D_2 + D_3} - \sqrt{D_3})\beta}}, \quad (4.38)$$

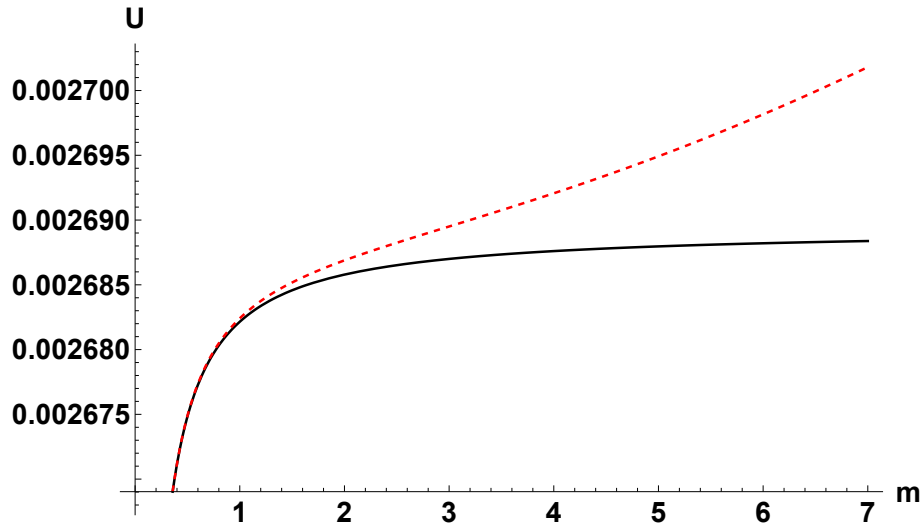
$$C = -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\beta^2 (\sqrt{D_3} - \sqrt{D_1 + D_2 + D_3})^2 e^{\beta(\sqrt{D_1 + D_2 + D_3} + \sqrt{D_3})}}{(e^{\beta\sqrt{D_1 + D_2 + D_3}} + e^{\beta\sqrt{D_3}})^2}. \quad (4.39)$$

Şekil 4.1:'de bölüşüm fonksiyonunun kütleye göre değişimi hem klasik durum hem de modifiye durumda gösterilmiştir. Artan kütle değerleri için iki durum arasında fark açıkça ortaya çıkmaktadır. Modifiye dispersion ilişkisi durumunda bölüşüm fonksiyonu büyük kütle değerlerinde daha hızlı azalmaktadır. Küçük kütle değerleri için her iki durumda bölüşüm fonksiyonu benzer bir davranış göstermektedir.

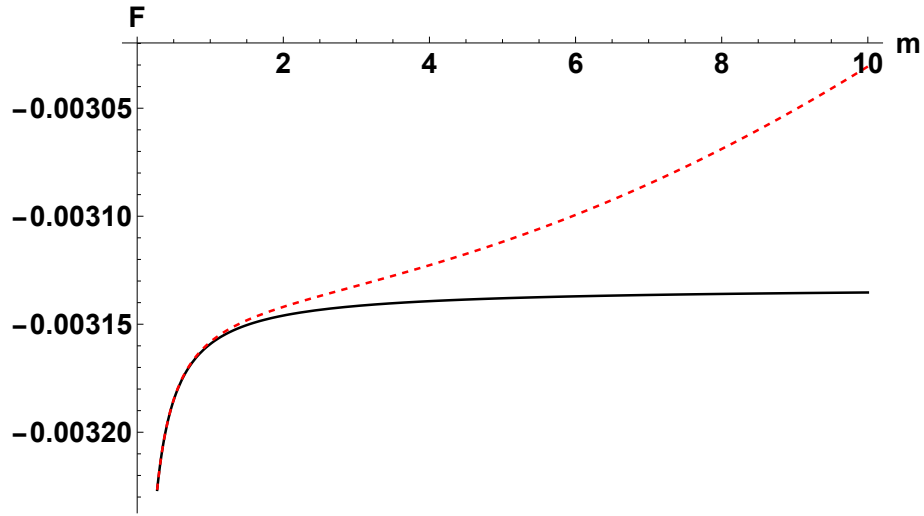
Şekil 4.2:'de iç enerjilerin kütleye göre değişimleri verilmiştir. Küçük kütle değerlerinde modifiye ve klasik durumlar arasında ciddi bir fark bulunmazken, büyük kütle değerlerinde bu fark ortaya çıkmaktadır. Modifiye durumdaki iç enerji büyük kütle değerlerinde daha büyük bir değere sahiptir.



Şekil 4.1: Bölüşüm fonksiyonunun kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.



Şekil 4.2: İç enerjinin kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.

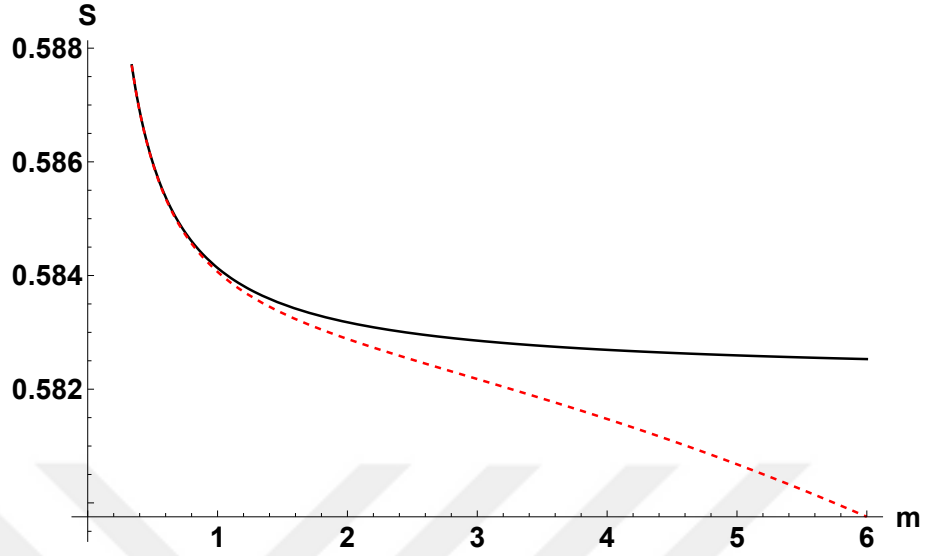


Şekil 4.3: Serbest enerjinin kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.

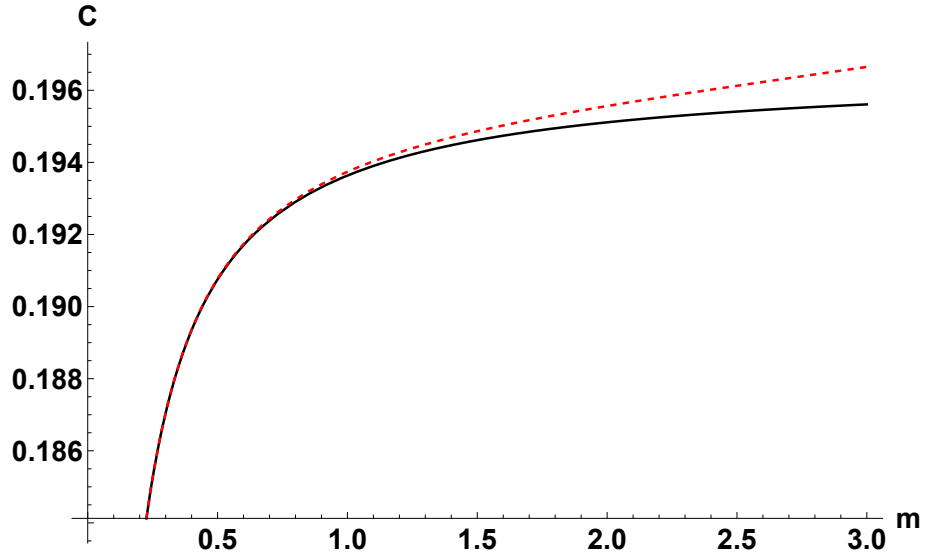
Şekil 4.3:'de serbest enerjilerin kütleyle göre değişimi verilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi büyük kütle değerlerinde modifiye dispersion ilişkisi için serbest enerji değeri daha büyüktür.

Şekil 4.4:'de entropinin kütleyle göre değişimi gösterilmiştir. Küçük kütle değerlerinde kayda değer bir fark söz konusu değilken, büyük kütle değerlerinde bu fark tekrar ortaya çıkmaktadır. Modifiye durumda entropi artan kütle değerlerine göre daha hızlı azalmaktadır.

Son olarak **Şekil 4.5:**'de ısı sığalarının kütleyle göre değişimi verilmiştir. Diğer durumlara benzer şekilde fark büyük kütle değerlerinde ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.4: Entropinin kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.



Şekil 4.5: Isı sığasının kütleyle göre değişimi. Siyah eğri ($\eta = 0$) klasik duruma, kırmızı kesikli eğri ($\eta = 10^{-4}$) modifiye duruma karşı gelmektedir. $\hbar = k_B = 1, \beta = 100, w = 0.01$ alınmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde KK katkısını temsil eden modifiye dispersiyon ilişkisinden gelen katkı kullanılarak Klein-Gordon denklemi modifiye edilmiştir. Harmonik salıncı potansiyeli için modifiye Klein-Gordon denkleminin çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlere karşılık gelen enerji seviyeleri elde edilmiştir. (4.29) numaralı ifadeden görüleceği gibi enerji özdeğeri küçük η değerleri için standart durumda elde edilen enerji değeriyle uyuşmaktadır [56]. Ayrıca düşük sıcaklık limitinde iç enerji, Helmholtz serbest enerjisi, entropi ve ısı sığası gibi termodinamik nicelikler hesaplanmıştır.

Şekil 4.1:, **Şekil 4.2:**, **Şekil 4.3:**, **Şekil 4.4:** ve **Şekil 4.5:** numaralı şekillerden görüldüğü gibi sırasıyla bölüşüm fonksiyonunun, iç enerjinin, Helmholtz serbest enerjisinin, entropinin ve ısı sığasının grafikleri kütleye göre çizilmiştir. Grafiklerde hem KK katkısı hem de standart durum ($\eta = 0$) ele alınmıştır. Tüm grafiklerden görüleceği üzere küçük kütle değerleri için iki durum arasındaki farklar önemsizken, büyük kütle değerleri için bu fark kayda değerdir. Bölüşüm fonksiyonu ve entropi modifiye durumda büyük kütle değerleri için daha hızlı küçülmektedir. Diğer yandan iç enerji, Helmholtz serbest enerjisi ve ısı sığası modifiye durumda büyük kütle değerlerinde daha hızlı büyümektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Polchinski, J., 1998, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, 1st edn., Cambridge, UK: Univ. Pr.
- [2]. Polchinski, J., 1998, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, 1st edn., Cambridge, UK: Univ. Pr.
- [3]. Smolin, L., 2004, An invitation to loop quantum gravity, [*arXiv:hep-th/0408048 [hep-th]*], 1-57.
- [4]. Rovelli, C., Smolin, L., 1995, Discreteness of area and volume in quantum gravity, *Nuclear Physics B*, **442**(3), 593-619.
- [5]. Addazi, A. ve diğ., 2022, Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era—A review, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **125**, 103948.
- [6]. Gambini, R., Pullin, J., 1999, Nonstandard optics from quantum space-time, *Physical Review D*, **59**, 124021.
- [7]. Alfaro, J., Morales-Técotl, H. A., Urrutia, L. F., 2000, Quantum gravity corrections to neutrino propagation, *Physical Review Letters*, **84**, 2318-2321.
- [8]. Amelino-Camelia, G., Smolin, L., Starodubtsev, A., 2004, Quantum symmetry, the cosmological constant and Planck-scale phenomenology, *Classical and Quantum Gravity*, **21**, 3095.
- [9]. Lukierski, J., Ruegg, H., Zakrzewski, W. J., 1995, Classical and quantum mechanics of free κ -relativistic systems, *Annals of Physics*, **243**(1), 90-116.
- [10]. Majhi, B. R., Vagenas, E. C., 2013, Modified dispersion relation, photon's velocity, and Unruh effect, *Physics Letters B*, **725**, 477-480.
- [11]. Amelino-Camelia, G., Procaccini, A., 2004, A glimpse at the flat-spacetime limit of quantum gravity using the Bekenstein argument in reverse, *International Journal of Modern Physics D*, **13**(10), 2337-2343.
- [12]. Amelino-Camelia, G., Arzano, M., Ling, Y., Mandanici G., 2006, Classical and Quantum Gravity Black-hole thermodynamics with modified dispersion relations and generalized uncertainty principles, *Classical and Quantum Gravity*, **23**, 2585.
- [13]. Ling, Y., Hu, B., Li, X., 2006, Modified dispersion relations and black hole physics, *Physical Review D*, **73**, 087702.
- [14]. Han X., Li, H., Ling, Y., 2008, Modified dispersion relations and (A)dS Schwarzschild black holes, *Physics Letters B*, **666**(2), 121-124.

- [15]. Kamali, A. D., Aspoukeh, P., 2016, Corrections to the Hawking Tunneling Radiation from MDR, *International Journal of Theoretical Physics*, **55**, 4492–4500.
- [16]. Lobo, I. P., Bezerra, V. B., Graça, J. P. M., Santos, L. C. N., Ronco, M., 2020, Effects of Planck-scale-modified dispersion relations on the thermodynamics of charged black holes, *Physical Review D*, **101**, 084004.
- [17]. Sefiedgar, A.S., Nozari, K., Sepangi, H. R., 2011, Modified dispersion relations in extra dimensions, *Physics Letters B*, **696**(1-2), 119-123.
- [18]. Hamil, B., Lütfüoğlu, B., 2022, The effect of modified dispersion relations on the thermodynamics of Schwarzschild black hole surrounded by quintessence, *European Physical Journal Plus*, **137**, 1124.
- [19]. Rosati, G., Amelino-Camelia, G., Marciandò, A., Matassa, M., 2015, Planck-scale-modified dispersion relations in FRW spacetime, *Physical Review D*, **92**, 124042.
- [20]. Rinaldi, M., 2009, Modified dispersion relations and trans-Planckian physics, The Subnuclear Series Search for the “Totally Unexpected” in the LHC Era, 437-445.
- [21]. Gubitosi, G., Magueijo, J., 2019, Life of cosmological perturbations in modified dispersion relation models and the prospect of traveling primordial gravitational waves, *Physical Review D*, **100**, 123501.
- [22]. Klein, O., 1926, Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie, *Zeitschrift für Physik*, **37**(12), 895–906.
- [23]. Gordon, W., 1926, Der comptoneffekt nach der schrödingerschen theorie, *Zeitschrift für Physik*, **40**(1-2), 117-133.
- [24]. Kudar, J., 1926, Zur vierdimensionalen formulierung der undulatorischen mechanik, *Annalen der Physik*, **386**(22), 632–636.
- [25]. Fock, V., 1926, Über die invariante form der wellen-und der bewegungsgleichungen für einen geladenen massenpunkt, *Zeitschrift für Physik*, **39**(2-3), 226-232.
- [26]. Fock, V., 1926, Zur schrödingerschen wellenmechanik, *Zeitschrift für Physik*, **38**(3), 242-250.
- [27]. de Donder, T., van den Dungen, 1926, La quantification d’éduite de la gravifique einsteinienne, *Comptes Rendus*, **183**, 22-24.
- [28]. J. Griffiths, 2008, *Introduction to elementary Particles*, 2nd, Revised edn., Wiley.
- [29]. Semoradova, I., 2016, *Quantum mechanics of Klein-Gordon equation*, Czech Technical University in Prague Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering.
- [30]. Bacchetta, A., 2020, *Notes on QED*, University of Pavia, 1-167.
- [31]. Alberto, P., Das, S., Vagenas, E., C., 2017, Relativistic particle in a box: Klein-Gordon vs Dirac equations, *European Journal of Physics*, **39**, 025401.

- [32]. Greiner, W., 2000, *Relativistic quantum mechanics*, 3rd edn., Springer.
- [33]. Feshbach, H., Villars, F., 1958, Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin 1/2 particles, *Reviews of Modern Physics*, **30**, 24-45.
- [34]. Alberto, P., Fiolhais, C., Gil, V. M. S., 1996, Relativistic particle in a box, *European Journal of Physics*, **17**, 19-24.
- [35]. Dirac, P. A. M., 1928, The quantum theory of the electron, *Proceeding of the Royal Society of London*, **A 117**, 610.
- [36]. Murayama, H., 2005, Relativistic Quantum Mechanics, *221B Lecture Notes*, 1-26. <http://hitoshi.berkeley.edu/221B/Dirac.pdf>
- [37]. Arda, A., Tezcan, C., 2015, Sever, R., Klein-Gordon and Dirac equations with thermodynamics quantities, *Few-Body Systems*, **57**, 93-101.
- [38]. de Souza Dutra, A. S., Chen, G., 2006, On some classes of exactly solvable Klein-Gordon equations, *Physics Letters A*, **349**, 297-301.
- [39]. Pacheco, M. H., Landim, R. R., Almeida, C. A. S., 2003, One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath, *Physics Letters A*, **311**, 93-96.
- [40]. Boumali, A., 2015, One-dimensional thermal properties for the relativistic harmonic oscillators, *Electronic Journal of Theoretical Physics*, **12**, 1-9.
- [41]. Greniner, W., 1987, *Relativistic Quantum Mechanics*, 1st edn., Springer.
- [42]. Hassanabadi, S., Ghominejad, M., 2014, The statistical properties of spin-one DKP oscillator under an external magnetic field in noncommutative space, *Advances in High Energy Physics*, **2014**, 185169.
- [43]. Dong, S. H., Lozada-Cassou, M., Yu, J., Gimenez-Angeles, F., Rivera, A. L., 2007, Hidden symmetries and thermodynamic properties for a harmonic oscillator plus an inverse square potential, *International Journal of Quantum Chemistry*, **107**, 366.
- [44]. Dariescu, M. A., Dariescu, C., 2007, Finite temperature analysis of quantum Hall-type behavior of charged bosons, *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**, 776-781.
- [45]. Bianco, S., Friedhoff, V. N., Wilson-Ewing, E., 2018, Modified dispersion relations, inflation, and scale invariance, *Physical Review D*, **97**, 046006.
- [46]. Amelino-Camelia, G., Arzano, M., Procaccini, A., 2004, Severe constraints on the loop-quantum-gravity energy-momentum dispersion relation from the black-hole area-entropy law, *Physical Review D*, **70**, 107501.
- [47]. Tawfik, A. N., Diab, A. M., 2015, A review of the generalized uncertainty principle, *Reports on Progress in Physics*, **78**, 126001.
- [48]. Moreau, W., Easther, R., Neutze, R., 1994, Relativistic (an)harmonic oscillator, *American Journal of Physics*, **62**(6), 531.

- [49]. Lipas, P. O., 1970, Relativistic quantal oscillator, *American Journal of Physics*, **38**(1), 85.
- [50]. Bhargava, A., Sharma, L. K., 1984, Solution of the Klein–Gordon equation for the oscillator cum generalised anharmonic potential with application to particle spectroscopy, *Indian Journal of Pure and Applied Physics*, **22**, 387-392.
- [51]. Adame, F. D., 1992, A relativistic interaction without Klein paradox, *Physics Letters A*, **162**(1), 18-20.
- [52]. Moshinsky, M., Szczepaniak, A., 1989, The Dirac oscillator, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, L817.
- [53]. Rao, N. A., Kagali, B. A., 2004, Eigenfunctions of the two dimensional Moshinsky–Szczepzniak oscillator, *Modern Physics Letters A*, **19**(28), 2147-2153.
- [54]. Mirza, B., Mohadesi, M., 2004, Klein–Gordon and Dirac oscillators in a non-commutative space, *Communications in Theoretical Physics*, **42**(5), 664.
- [55]. Villalba, V. M., 1994, Exact solution of the 2D Dirac oscillator, *Physical Review A*, **49**, 586.
- [56]. Rao, N. A., Kagali, B. A., 2008, Energy profile of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator, *Physica Scripta*, **77**, 015003.
- [57]. Greiner, W., 2001, *Quantum mechanics an introduction*, 4th edn., Springer.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Yasemin EDRES
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Şam Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2010

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	

