



**MODULAR METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE
UYGULAMALARI**

Emine KILINÇ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emine KILINÇ

08/02/2021

MODULAR METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE
UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

Emine KILINÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2021

ÖZET

Modular metrik uzay kavramı klasik metrik uzayın genelleştirilmiş bir halidir. Bu uzayda tanımlanan yakınsaklık gibi kavramlar klasik metrik uzaylardan daha zayıf olduğu için bu uzayda elde edilen sonuçlar daha geniş kapsamlıdır. Modular metrik uzayların verilme amacı daha zayıf topolojik yapı üzerinde daha genel sonuçlar elde etmek olmuştur. Bu tezde modular metrik uzay yapısı üzerinde durulmuştur. Modular metrik uzayın temel özellikleri hatırlatılarak metrik uzaylarla ilişkisi ifade edilmiştir. Modular metrik uzaylarda verilen temel sabit nokta teoremleri esas alınarak bu uzaylarda sabit noktaya sahip olması beklenen dönüşümlerin yapısı ele alınmıştır. Çoğul değerli dönüşümler için önemli yeri olan Caristi tipi, Feng – Liu tipi ve ψ, φ tipi dönüşümlerin bu uzaylarda sabit noktalarının varlığı gösterilmiştir. Son olarak Caristi tipi dönüşümlerin fonksiyonel denklemler ve Feng – Liu tipi dönüşümlerin diferansiyel denklemler için birer uygulaması verilmiştir.

Bilim Kodu : 20405

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta teoremi, modular metrik, Caristi tipi, Feng- Liu tipi

Sayfa Adedi : 62

Danışman : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

FIXED POINT THEOREMS IN MODULAR METRIC SPACES AND THEIR
APPLICATIONS

(Ph. D. Thesis)

Emine KILINÇ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2021

ABSTRACT

The concept of modular metric space is a generalized form of classical metric space. Since concepts such as convergence defined in this space are weaker than classical metric spaces, the results obtained in this space are more comprehensive. The purpose of modular metric spaces has been to obtain more general results on a weaker topological structure. In this thesis, modular metric space structure is focused on. The basic properties of modular metric space are reminded and its relation with metric spaces is expressed. Based on the basic fixed point theorems given in modular metric spaces, the structure of the mappings expected to have fixed points in these spaces is discussed. The existence of fixed points of Caristi type, Feng- Liu type and ψ, φ type mappings, which have an important place for multivalued mappings, in these spaces are shown. Finally, an application of Caristi type mappings for functional equations and Feng- Liu type mappings for differential equations are given.

Science Code : 20405

Key Words : Fixed point theorem, modular metric, Caristi type, Feng – Liu type

Page Number : 62

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Doktora sürecim boyunca yardımlarını benden esirgemeyen, fikirleri ve deneyimi ile çalışmalarına ışık tutan, en zor zamanlarımda beni dinleyen, anlayışla karşılayan bir baba olarak gördüğüm değerli danışmanım sayın Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na çok teşekkür ederim. Kendisinin yönlendirmeleri ve sabrı sayesinde bu çalışma ortaya çıktı. Ayrıca değerli görüşleri ve değerlendirmeleriyle yol gösterici olan değerli Tez İzleme Komite üyeleri sayın Prof. Dr. Çetin VURAL ve sayın Doç. Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER' e çok teşekkür ederim. Tüm eğitim hayatım boyunca beni bugün olduğum kişi haline getiren hocalarıma, varlıklarıyla kendimi güvende hissetmemi sağlayan arkadaşlarıma teşekkür ederim. Beni daha iyi olmam için cesaretlendiren, bu süreçte yaşadığım zorluklarda sığındığım, hayatımın en değerli varlıkları kardeşim Elvan KILINÇ, annem Sabriye KILINÇ, babam Suat KILINÇ' a ve ikinci ailem olan sevgili Hoşgöl GÜRLER ve Ömer GÜRLER'e çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1.GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	5
2.1.Temel Tanımlar	5
2.2.Temel Teoremler	15
3. MODULAR METRİK UZAYLARDA BÜZÜLME PRENSİBİ	21
3.1. Modular Metrik Uzaylarda Banach Büzülme Prensibi	21
3.2. Modular Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Büzülme Prensibi	23
4. MODULAR METRİK UZAYLARDA ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMİ	29
4.1. Modular Metrik Uzaylarda Caristi Tipi Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremi.	29
4.2. Modular Metrik Uzaylarda Feng – Liu Tipi Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri	34
4.3. Modular Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin φ, ψ – Şartı.....	41
4.4. Uygulamalar.....	46
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$B(X)$	X kümesinin sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi
$C(X)$	X kümesinin kapalı bütün alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X in kapalı ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi
$K(X)$	X kümesinin kompakt bütün alt kümelerinin ailesi
$N(X)$	X kümesinin boştan farklı bütün alt kümelerinin ailesi
X_ρ	ρ tarafından oluşturulan modular uzay
X_w	w tarafından oluşturulan modüler metrik uzay
w_λ	Modular metrik
(X, d)	Metrik uzay
$(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$	T dönüşümü ile oluşturulmuş iterasyon dizisi
$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ dizisinin alt limiti
$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ dizisinin üst limiti

1. GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi”, 1912 yılında Brouwer ile başlamıştır [1]. Brouwer “ IR ’nin kapalı birim yuvarından yine aynı kapalı birim yuvarına tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün bir sabit noktasının varlığını” göstermiştir. Topolojik olarak verilen bu teoremden sonra 1922 yılında S. Banach, “Banach Sabit Nokta Teoremi (veya büzülme prensibi)” olarak bilinen teoremi ifade etmiştir [2].

İlk olarak büzülme dönüşümünün tanımı, daha sonra Banach Büzülme Prensibi ifade edilmiştir.

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad (1.1)$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \geq 0$ reel sayısı varsa, T dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Eğer $\alpha < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü denir.

Banach Büzülme Prensibi:

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olmak üzere T ’nin X ’de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca her $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Bu teorem, daha önce Euler ve Cauchy’nin 1844’teki “sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon için diferansiyel denklemin bir çözümünün varlığı ve tekliği” çalışmalarında kullanılmıştır. 1877 de Lipschitz, bu ispatı Lipschitz koşulunu kullanarak daha da basitleştirmiştir. Daha sonraki yıllarda pek çok yazar Banach’ın çalışmasını ele alarak pek çok genelleştirme yapmıştır [3 – 5].

Banach Büzülme Dönüşümü İlkesi çoğul değerli dönüşümlere ilk defa Nadler tarafından genişletilmiştir [6]. Nadler bunu şöyle ifade etmiştir: “ (X, d) tam

metrik uzay, $T: X \rightarrow CB(X)$ çoğul değerli büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T sabit noktaya sahiptir." Burada Nadler, X kümesinin kapalı ve sınırlı herhangi A ve B kümeleri ve her $a \in A$ için, bir $\varepsilon > 0$ alındığında

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon \quad (1.2)$$

sağlanacak biçimde bir $b \in B$ bulunur, sonucunu Hausdorff metriği için açıklamıştır. (Burada B kümesinin kompakt olması b elemanının varlığını garanti eder.) (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X kümesinin kapalı ve sınırlı alt kümeleri ailesi olmak üzere her $x, y \in CB(X)$ için

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\} \quad (1.3)$$

şeklinde verilen $H: CB(X) \times CB(X) \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümüne Hausdorff metriği denir. Bununla birlikte çoğul değerli büzülme dönüşümü Nadler tarafından $(X, d_1), (Y, d_2)$ iki metrik uzay, $T: X \rightarrow CB(Y)$ bir dönüşüm, $\alpha \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere,

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha d_1(x, y) \quad (1.4)$$

her $x, y \in X$ için sağlayan T dönüşümü olarak düşünülmüştür. Burada bu dönüşüme aynı zamanda çoğul değerli Lipschitz dönüşümü denir. α sayısı 1' den küçük ise bu durumda T dönüşümüne çoğul değerli büzülme dönüşümü denir. Hausdorff metriği yardımıyla verilen çoğul değerli dönüşüm için sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili teorem aşağıda verilmiştir:

(X, d) tam metrik uzay, $CB(X)$, X 'in kapalı ve sınırlı tüm alt kümelerinin ailesi ve H Hausdorff metriği olsun. $T: X \rightarrow CB(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm olmak üzere, her $x \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad (1.5)$$

olacak biçimde $k < 1$ sabiti var ise $x \in Tx$ olacak biçimde bir $x \in X$ noktası vardır. Bu teoremden iki noktaya dikkat çekilebilir. Birincisi, Banach Büzülme İlkesinin aksine, x sabit noktasının tek olmamasıdır, olmasına da gerek yoktur. İkincisi, X tam metrik uzaydır, $(CB(X), H)$ uzayı da tamdır.

Modular uzay kavramı ise Nakano tarafından 1950 yılında verilmiş [7], Koshi ve Shimogaki tarafından geliştirilmiştir [8]. 2008 yılında Chistyakov tarafından modular metrik uzay kavramı ifade edilmiş ve daha sonra bu uzay üzerinde sabit nokta çalışmaları ortaya çıkmıştır. 2014 yılında Abdou ve Khamsi bu uzaylarda çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremini vermiş ve sabit noktaya sahip olması gereken dönüşümlerin yapısını ortaya koymuştur [9, 10].

Modular metrik uzaylarda çoğul değerli dönüşümlerin incelendiği bu tez çalışması beş ana başlık altında toplanmıştır

İlk olarak modular metrik uzay tanımı ve bu uzayın temel özellikleri incelenmiş, genel metrik uzay ile olan ilişkisi gösteren teoremler ifade edilmiştir.

Modular metrik uzaylarda Banach büzülme prensibi açıklanmış, daha sonra çoğul değerli dönüşümler için verilen sabit nokta teoremi incelenmiştir. Sabit noktaya sahip dönüşümlerin davranışlarını inceleyen, iyi bilinen bazı sabit nokta teoremleri çoğul değerli dönüşümler için de ispatlanmıştır: Caristi, Feng-Liu tipleri ve ψ, φ tipi büzülme dönüşümleri

Burada Feng – Liu tipi dönüşümler, Hausdorff metriği kullanmadan diğer çalışmalardan çok farklı bir yönde sabit nokta sonuçlarının genişlemesi olması bakımından önemlidir.

Son olarak Caristi ve Feng – Liu tipi dönüşümler için uygulamalar verilerek konunun daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Modular uzay kavramı ilk olarak 1950 yılında Nakano tarafından verilmiş [7], Koshi ve Shimogaki gibi yazarlar tarafından geliştirilmiştir [8]. Bu teorilerin daha ileri genelleştirmeleri Musielak, Orlicz ve diğerleri tarafından incelenmiştir [11-13]. 1990 yılında Khamsi, Kozłowski ve Reich tarafından modular fonksiyon uzaylarında sabit nokta teorisi ilk kez ve detaylı olarak çalışılmıştır [14]. Bu çalışmaların ardından modular metrik yapısı da Chistyakov tarafından oluşturulmuştur [15, 16]. Modular metrik uzay kavramıyla birlikte bu uzaydaki sabit nokta çalışmaları da ilgi çekmiş ve çeşitli yazarlar tarafından geliştirilmiştir [17-25]. Bu çalışmaların temelini ise Abdou ve Khamsi oluşturmuş, modular metrik kavramını Chistyakov' dan farklı bir bakış açısıyla ele almışlardır [9, 10].

Bu bölümde ilk olarak modular uzay kavramını vereceğiz. Daha sonra bu uzayların bir genelleştirmesi olan modular metrik uzay kavramını ve bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca modular metrik uzay ile metrik uzay kavramları ile bu uzayların özelliklerini karşılaştırarak aralarındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

2.1. Temel Tanımlar

Aşağıdaki tanım Nakano tarafından verilmiştir [7].

2.1.1. Tanım

$X, \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $\rho: X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli X in keyfi x, y elemanları için aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyonel bir modular olarak adlandırılır:

- i. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $|a| = 1$ olan her a skaleri için $\rho(ax) = \rho(x)$
- iii. $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Eğer (iii) yerine

- iv. $\alpha, \beta \geq 0, s \in (0, 1]$ ile birlikte $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$$

yazılabiliyorsa ρ, s – *konveks* olarak adlandırılır, eğer $s = 1$ ise ρ bir konveks modularıdır. ρ, X üzerinde bir modular ise

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho(\lambda x) = 0 \right\} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan küme bir modular uzay olarak adlandırılır. X_ρ, X in bir vektör alt uzayıdır ve

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \lambda, x \in X_\rho \right\}$$

ile tanımlanan bir F-norm ile donatılmıştır. Böylece $\|\cdot\|_\rho : X_\rho \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(F_1) \quad x \in X_\rho \text{ için } \|x\|_\rho = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(F_2) \quad \text{Her } x \in X_\rho \text{ için } \|-x\|_\rho = \|x\|_\rho$$

$$(F_3) \quad \text{Her } x, y \in X_\rho \text{ için } \|x + y\|_\rho \leq \|x\|_\rho + \|y\|_\rho$$

$$(F_4) \quad c_n, c \in \mathbb{R}; \quad x_n, x \in X_\rho \text{ ve } n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\rho = 0 \text{ ise o zaman } \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n x_n - cx\|_\rho = 0$$

Eğer ρ konveks ise X_ρ modular uzayı $X_\rho^* = \{x \in X : \exists \lambda = \lambda(x) \ni \rho(\lambda x) < \infty\}$ uzayı ile çakışır ve

$$\|x\|_\rho^* = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

fonksiyoneli X_ρ^* in bir normu olur. Bu norm $\|x\|_\rho$ normuna denktir.

Şimdi modular metrik uzayı tanımlamak için bu uzayın fiziksel yorumunu inceleyelim. Bunun için ilk olarak bilinen en genel anlamıyla metrik tanımını vererek başlayalım.

2.1.2. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanırsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir:

$\forall x, y, z \in X$ için

$$m_1) d(x, y) \geq 0$$

$$m_2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$m_3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$m_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Chistyakov' a göre küme üzerindeki metrik fonksiyonu, kümenin herhangi iki noktası arasındaki sonlu uzaklığı ifade ederken bir küme üzerindeki modular fonksiyonu negatif olmayan (sonsuz değerli olabilen) hızların bölgesini ifade eder. Her λ zamanı için $w_\lambda(x, y)$ ortalama hızı x den y ye hareket boyunca aldığı λ zamanı ve x ile y noktaları arasındaki yolla bağlantılıdır [26]. Bu durumu bir örnek üzerinden yorumlayalım:

$d(x, y)$ uzaklık ve λ zaman olarak alınırsa

$$w_\lambda(x, y) = \frac{d(x, y)}{\lambda} \quad (2.2)$$

değeri $d(x, y)$ uzaklığını kat etmek için λ zamanda x den y ye hareket için gereken ortalama hızdır. Eş.2.2 ile verilen fonksiyonun tanımını verelim. Fakat önce notasyon sadeliği için X boştan farklı bir küme olmak üzere her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $w_\lambda(x, y) = w(\lambda, x, y)$ eşitliği ile yazılabilir. Aşağıdaki tanım Chistyakov tarafından verilmiştir [27].

2.1.3. Tanım

$X \neq \emptyset$ olsun. Her $\forall x, y, z \in X$ için $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlaması durumunda bir modular metrik olarak adlandırılır:

- i. Verilen her $x, y \in X$ ve her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x)$
- iii. Her $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için $w_{\lambda+\mu}(x, z) \leq w_\lambda(x, y) + w_\mu(y, z)$
- iv. Her $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için w , i ve ii ile birlikte aşağıdaki şartı sağlarsa X üzerinde bir konveks modular metrik olarak adlandırılır:

$$w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} w_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} w_\mu(x, z)$$

2.1.4. Uyarı

Bir X kümesi üzerindeki bir modular metriğin temel özelliği $x, y \in X$ için $0 < \lambda \rightarrow w_\lambda(x, y) \in [0, \infty]$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında artmayandır. Gerçekten de eğer $0 < \mu < \lambda$ ise o zaman i, ii ve iii özelliğinden

$$w_\lambda(x, y) \leq w_{\lambda-\mu}(x, x) + w_\mu(x, y) = w_\mu(x, y) \quad (2.3)$$

sağlanır. Buradan her $\lambda > 0$ noktasında $w_{\lambda+0}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_{\lambda+\varepsilon}(x, y)$ sağdan limiti ve $w_{\lambda-0}(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_{\lambda-\varepsilon}(x, y)$ soldan limiti vardır ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$w_{\lambda+0}(x, y) \leq w_\lambda(x, y) \leq w_{\lambda-0}(x, y) \quad (2.4)$$

Tanım 2.1.3' de verilen özellikleri sağlayan aşağıdaki fonksiyonu inceleyelim.

$$w_\lambda(x, y) = \begin{cases} 0, & \lambda > d(x, y) \Rightarrow w_\lambda(x, y) = 0 \\ \infty, & \lambda < d(x, y) \Rightarrow w_\lambda(x, y) = \infty \end{cases} \quad (2.5)$$

Burada $\lambda > d(x, y) \Rightarrow w_\lambda(x, y) = 0$ olması durumu λ zamanında $d(x, y)$ uzaklığını kat etmenin mümkün olmadığını, $\lambda < d(x, y) \Rightarrow w_\lambda(x, y) = \infty$ durumu ise $d(x, y)$ uzaklığının λ zamanda kat etmek için çok kısa olduğunu ifade eder. Şimdi bu fonksiyonun bazı özel durumlarını veren tanımları ifade edelim.

2.1.5. Tanım

Her $x, y \in X$ için w_λ fonksiyonu x ve y ye bağlı ise yani x ve y ye bağlı λ sayısı için

$$w_\lambda(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \quad (2.6)$$

şartı sağlanırsa w_λ fonksiyonuna X üzerinde bir katı (strict) modular denir [27].

Aşağıda verilen örnekler ile modular metrik kavramının daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır [15].

Örnekler

Aşağıda indislenmiş w fonksiyonları bir X kümesi üzerindeki modular metriklere basit örneklerdir. $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ olsun;

$$a) \quad w_{\lambda}^a(x, y) = \begin{cases} \infty, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Eğer bir d metriğiyle birlikte X bir metrik uzay ise aşağıdaki fonksiyonların modular olduğu görülebilir.

b) $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ azalmayan fonksiyon olmak üzere

$$w_{\lambda}^b(x, y) = \frac{d(x, y)}{\varphi(\lambda)}$$

$$c) \quad w_{\lambda}^c(x, y) = \begin{cases} \infty, & \lambda \leq d(x, y) \\ 0, & \lambda > d(x, y) \end{cases}$$

Şimdi modular metrik fonksiyonu ile oluşturulan modular küme tanımını inceleyelim. Bunun için w, X üzerinde bir modular metrik olmak üzere $x, y \in X$ için

$$x \stackrel{w}{\sim} y \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x, y) = 0 \quad (2.7)$$

ile tanımlanan $\stackrel{w}{\sim}$ bağıntısını göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

2.1.6. Önerme

$x \stackrel{w}{\sim} y \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x, y) = 0$ ile tanımlanan $\stackrel{w}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [15].

İspat

$\stackrel{w}{\sim}$ bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermek yeterlidir. w fonksiyonu Tanım 2.1.3.(i) özelliğini sağladığından $w_{\lambda}(x, x) = 0$ elde edilir. Yani

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x) = 0$$

ve $x \overset{w}{\sim} x$ olur. Diğer taraftan (ii) özelliğinden

$$x \overset{w}{\sim} y \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(y, x) = 0 \Leftrightarrow y \overset{w}{\sim} x$$

olup $\overset{w}{\sim}$ bağıntısı simetri özelliğini sağlar. Geçişme özelliğini görmek için $x \overset{w}{\sim} y$ ve $y \overset{w}{\sim} z$ olsun. Buna göre $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x, y) = 0$ ve $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(y, z) = 0$ yazılabilir. (iii) özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, z) &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x, y) + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(y, z) \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, z) &= 0 \Leftrightarrow x \overset{w}{\sim} z \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. Böylece $\overset{w}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $\overset{w}{\sim}$ bağıntısına göre $x \in X$ in denklik sınıfları

$$X_w^\circ(x) = \{y \in X : y \overset{w}{\sim} x\}$$

ile gösterilir. X_w° denklik sınıfları yardımıyla tanımlanan $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere

$$X_w = X_w(x_0) = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x_0) = 0 \right\}$$

kümesi modular uzay olarak adlandırılır.

2.1.7. Tanım

$X \neq \emptyset$, w, X üzerinde tanımlı modular metrik olsun. Her $x \in X$ ve $\lambda = \lambda((x_n), x) > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0 \quad (2.9)$$

oluyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X_w$ dizisi modular yakınsaktır denir. Burada $x, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin

modular limitidir denir [27].

Şimdi sabit nokta teoremlerini ispat ederken kullanacağımız modular diziler ile ilgili bazı tanımları verelim. Aşağıdaki tanım Abdou ve Khamsi tarafından verilmiştir [9, 10].

2.1.8. Tanım

X_w, X uzayı üzerinde tanımlı w modular metriği ile oluşturulmuş bir modular metrik uzay olmak üzere bir $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$$

sağlanıyorken her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$$

sağlanıyorsa w modular metriği Δ_2 koşulunu sağlıyor denir.

2.1.9. Tanım

X üzerindeki bir w modular metriği için

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_m, x_n) = 0$$

olacak şekilde bir $\lambda = \lambda((x_n)) > 0$ sayısı varsa $(x_n) \subset X_w$ dizisine modular Cauchy (veya w -Cauchy dizisi) dizisi denir, yani

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \ni \forall n \geq n_0(\varepsilon), m \geq n_0(\varepsilon) : w_\lambda(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

şartını sağlayan diziye modular Cauchy dizisi denir [27].

2.1.10. Önerme

Modular yakınsak her dizi aynı zamanda bir modular Cauchy dizisidir [27].

İspat

$x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ olsun. Böylece her bir $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. (iii) özelliğinden $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için (x_n) dizisinin modular Cauchy olmasını sağlayan

$$w_\lambda(x_n, x_m) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_m) \leq \varepsilon \quad (2.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

2.1.11. Tanım

X üzerindeki bir w modular metriği için X_w modular uzay olmak üzere X_w deki her bir modular Cauchy dizisi modular yakınsak ise yani $(x_n) \subset X_w$ ve $\lambda = \lambda((x_n)) > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X_w$ varsa $(x_n) \subset X_w$ dizisi modular tamdır (veya – tamdır) denir [27].

2.1.12. Tanım

X_w deki $x \in X_w$ ye w -yakınsak her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için,

$$w_\lambda(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, y)$$

şartı sağlanırsa w , Fatou Özelliğini sağlar denir [9].

Aşağıdaki teorem Chistyakov tarafından verilmiştir [26].

2.1.13. Teorem

w, X üzerinde bir modular metrik ise, X_w modular kümesi

$$d_w^0(x, y) = \inf\{\lambda > 0: \forall x, y \in X_w \text{ için } w_\lambda(x, y) \leq \lambda\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

İspat

$x, y \in X_w$ için $d_w^0(x, y) \in \mathbb{R}^+$ değeri anlamlı ve iyi tanımlıdır. Gerçekten $x \stackrel{w}{\sim} y$ olduğundan Eş. 2.7 ye göre her $\lambda > \lambda_0$ için $w_\lambda(x, y) \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda_0 > 0$ vardır. Böylece $\lambda_1 = \max\{1, \lambda_0\}$ olarak $w_{\lambda_1}(x, y) \leq 1 \leq \lambda_1$ elde edilir. Bu ise $d_w^0(x, y)$ nin tanımıyla birlikte $d_w^0(x, y) \leq \lambda_1 \leq \infty$ durumunu verir. Şimdi $d_w^0(x, y)$ nin metrik özelliklerini sağladığını gösterelim.

m₁) $d_w^0(x, y)$ nin tanımından açıktır.

m₂) (i) özelliğinin yeter şartından her $x \in X_w$ ve $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, x) = 0$ olur, böylece $d_w^0(x, x) = 0$ eşitliği elde edilir. w , (ii) şartını sağlasın. $x, y \in X_w$ ve $d_w^0(x, y) = 0$ olsun. O zaman $w_\mu(x, y)$, her $\mu > 0$ değeri için μ yü aşmaz. Böylece her $\lambda > 0$ ve $0 < \mu < \lambda$ için Uyarı 2.1.4'ten $w_\lambda(x, y) \leq w_\mu(x, y) \leq \mu$ olur. Buradan $\lim_{\mu \rightarrow 0} w_\mu(x, y) = 0$ elde edilir.

Böylece her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) = 0$ olur. Buradan (i) aksiyomu $x = y$ şartını sağlar.

m₃) (ii) aksiyomundan dolayı açıktır.

m₄) Her $x, y, z \in X_w$ için $d_w^0(x, y) \leq d_w^0(x, z) + d_w^0(z, y)$ olduğunu gösterelim. d_w^0 nin tanımından her $\lambda > d_w^0(x, z)$ ve $\mu > d_w^0(z, y)$ için $w_\lambda(x, z) \leq \lambda$ ve $w_\mu(z, y) \leq \mu$ bulunur. Böylece (iii) özelliği $w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq w_\lambda(x, z) + w_\mu(z, y) \leq \lambda + \mu$ eşitsizliğini sağlar. d_w^0 nin tanımından $d_w^0(x, y) \leq \lambda + \mu$ bulunur. $\lambda \rightarrow d_w^0(x, z)$ ve $\mu \rightarrow d_w^0(z, y)$ limiti alındığında istenen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Bu durumda eğer w, X üzerinde bir modular metrik ise X_w kümesine modular metrik uzay denir

2.1.14. Tanım

$x \in X$ ve $r > 0$ olsun. $B(x, r) = \{y \in X: d_w^0(x, y) < r\}$ ile tanımlanan küme, x merkezli r yarıçaplı bir açık kümedir. Ayrıca her $x \in X$ için $B(x, r) \subset U$ olacak şekilde $r > 0$ varsa $U \subset X$ kümesi açıktır denir.

2.1.15. Tanım

$\lambda, \mu > 0$ ve $x \in X_w$ olsun. λ ve μ ye bağlı w -açık küme, x in w -civarı ile tanımlanan kümedir. Buna göre w -açık küme tanımı

$$B_{\lambda, \mu}^w(x) = \{y \in X_w : w_\lambda(x, y) \leq \mu\}$$

olarak verilir. Bununla birlikte her $\lambda > 0$ ve $x \in X$ için $B_{\lambda, \mu}(x) \subset U$ olacak şekilde $\mu > 0$ varsa $U \subset X$ kümesi w -açıktır denir. Eğer $\tau(w)$, X_w üzerindeki tüm w -açık kümelerin bir ailesi ise $\tau(w)$, X_w üzerinde bir modular topolojidir denir.

2.1.16. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere

$$T(x) = x \quad (2.12)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu $x \in X$ noktasına T dönüşümünün bir sabit noktası denir. Bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktası olmayabilir, birden fazla olabilir, tek olabilir veya sonsuz sayıda olabilir. Aşağıda bu durumlarla ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

Örnekler

$X = [0, 1]$ ve $T: X \rightarrow X$ dönüşüm olmak üzere

$$a. \quad T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan dönüşümün X de sabit noktası yoktur.

b. $T(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ olmak üzere X de iki farklı sabit noktası vardır.

c. $T(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $x = 1$ olmak üzere X de bir tek sabit noktası vardır.

d. $T(x) = x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün X de sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

2.1.17. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \geq 0$ reel sayısı varsa, T dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Eğer $\alpha < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü, $\alpha = 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir. Eğer her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

2.2. Temel Teoremler

Bu bölümde modular metrik uzaylarda Chistyakov tarafından verilmiş temel teoremleri ifade edeceğiz. İlk olarak $d_w^0(x, y)$ ve $w_\lambda(x, y)$ arasındaki ilişkiyi inceleyen teoremi ispatsız olarak ifade edelim [15].

2.2.1. Teorem

w, X üzerinde bir modular metrik olsun. O zaman $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

a) $d_w^0(x, y) < \lambda$ ise $w_\lambda(x, y) \leq d_w^0(x, y) < \lambda$

b) $w_\lambda(x, y) = \lambda$ ise $d_w^0(x, y) = \lambda$

c) $\lambda = d_w^0(x, y) > 0$ ise $w_{\lambda+0}(x, y) \leq \lambda \leq w_{\lambda-0}(x, y)$

Eğer $\mu \rightarrow w_\mu(x, y)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da sağdan sürekli ise (a) – (c) ile birlikte;

d) $d_w^0(x, y) \leq \lambda \Leftrightarrow w_\lambda(x, y) \leq \lambda$

e) $d_w^0(x, y) < \lambda \Leftrightarrow w_\lambda(x, y) < \lambda$

Eğer $\mu \rightarrow w_\mu(x, y)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da sürekli ise (a) – (e) ile birlikte

f) $d_w^0(x, y) = \lambda \Leftrightarrow w_\lambda(x, y) = \lambda$

durumları vardır.

Şimdi bir d_w^0 metriğine göre metrik yakınsaklığın modular yakınsaklıkla ilişkisini veren teoremi ifade edeceğiz [15].

2.2.2. Teorem

w, X üzerinde bir modular metrik, X_w bir modular metrik uzay olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X_w$ dizisi ve $x \in X_w$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_w^0(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$$

ifadesi vardır. Benzer durum Cauchy dizisi için de vardır.

İspat

$(\Leftarrow)$ $\varepsilon > 0$ keyfi sayısı için, kabulden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\varepsilon(x_n, x) = 0$$

olur ve böylece her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_\varepsilon(x_n, x) \leq \varepsilon \tag{2.13}$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. Bundan dolayı her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$d_w^0(x, y) \leq \varepsilon \tag{2.14}$$

elde edilir.

$(\Rightarrow)$ Keyfi $\lambda > 0$ sayısını seçelim. Burada, her biri $\varepsilon > 0$ için iki farklı durum vardır. Bunlar

a) $0 < \varepsilon < \lambda$ ya da **b)** $\varepsilon \geq \lambda$ durumlarıdır. **(a)** durumunda, kabulden her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$d_w^0(x_n, x) < \varepsilon \tag{2.15}$$

olacak şekilde bir $\lambda_0(\varepsilon)$ sayısı vardır ve böylece her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_\varepsilon(x_n, x) < \varepsilon \tag{2.16}$$

elde edilir. $\varepsilon < \lambda$ olduğundan her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_\lambda(x_n, x) \leq w_\varepsilon(x_n, x) < \varepsilon \quad (2.17)$$

bulunur. **(b)** durumunda ise, $n_1(\varepsilon) = n_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ alınırsa modular metriğin azalanlığından ve (a) durumundan her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_\lambda(x_n, x) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) < \frac{\lambda}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (2.18)$$

elde edilir. Böylece her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$$

olur.

2.2.3. Teorem

X_w modular metrik uzay ve w , X üzerinde bir modular metrik olsun. O zaman

- X_w modular uzayı modular yakınsamaya göre kapalıdır, yani $(x_n) \subset X_w$, $x \in X$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ise o zaman $x \in X_w$
- w , X üzerinde bir katı (strict) modular metrikse, (varsa) modular limit tek olarak tanımlıdır [27].

İspat

a) $(x_n) \subset X_w$, $x \in X$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. İlk olarak $x_n \xrightarrow{w} x$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x) = 0$$

olacak şekilde bir $\lambda_0 = \lambda_0((x_n), x) > 0$ vardır. Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. $w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır. $x_{n_0} \in X_w = X_w(x_0)$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x_0) = 0$$

elde edilir. Böylece $w_{\lambda_1}(x_{n_0}, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 0$ vardır. Bu durumda Tanım. 2.1.3. (ii) ve (iii) özellikleri ile

$$w_{\lambda_0 + \lambda_1}(x, x_0) \leq w_{\lambda_0}(x, x_{n_0}) + w_{\lambda_1}(x_{n_0}, x_0) \quad (2.19)$$

eşitsizliği sağlanır. $\lambda \rightarrow w_\lambda(x, x_0)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da artmayan fonksiyon olduğundan her $\lambda \geq \lambda_0 + \lambda_1$ için

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x_0) &\leq w_{\lambda_0 + \lambda_1}(x, x_0) \leq \varepsilon \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

olur ve $x \in X_w$ elde edilir.

b) $(x_n) \in X_w; x, y \in X_w; x_n \xrightarrow{w} x$ ve $x_n \xrightarrow{w} y$ olsun. Modüler yakınsaklığın tanımından $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\mu(x_n, y) = 0$ olacak şekilde $\lambda = \lambda((x_n), x) > 0$ ve $\mu = \mu((x_n), y) > 0$ vardır. Tanım 2.1.3. ün (iii) ve (ii) özelliklerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda + \mu}(x, y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) + \lim_{n \rightarrow \infty} w_\mu(x_n, y) \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda + \mu}(x, y) = 0 \quad (2.22)$$

olur ve böylece Tanım 2.1.2(i) özelliğinden $x = y$ olduğu gösterilir. Böylece ispat tamamlanır.

2.2.4. Teorem

X üzerindeki bir w modüler metriği için X_w üzerindeki d_w^0 ye göre metrik yakınsaklığın modüler yakınsaklıkla çakışması için gerek ve yeter şart w modüler metriğinin Δ_2 -şartını sağlamasıdır [27].

2.2.5. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Buna göre, T dönüşümü $T(x_*) = x_*$ olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir. Dahası bir x_0 başlangıç noktası alınarak oluşturulan (x_n) iterasyon dizisi için $x_n = T(x_{n-1})$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_*) = 0$ elde edilir.





3. MODULAR METRİK UZAYLARDA BÜZÜLME PRENSİBİ

Bu bölümde modular metrik uzaylarda verilmiş temel sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz. İlk kısımda tekil değerli dönüşümler için Banach büzülme prensibini ikinci kısımda ise çoğul değerli dönüşümler için büzülme prensibini vereceğiz.

3.1. Modular Metrik Uzaylarda Banach Büzülme Prensibi

Bu bölümde tekil değerli dönüşümler için temel oluşturan Banach büzülme prensibini inceleyeceğiz. Aşağıdaki teorem Chistyakov tarafından verilmiştir [27].

3.1.1. Teorem

X boştan farklı bir küme, w, X üzerinde bir konveks modular metrik ve $k > 0$ olsun. Her $x, y \in X_w^*$ ve $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü için

$$d_w^*(Tx, Ty) \leq kd_w^*(x, y) \quad (3.1)$$

şartı aşağıdaki ifadeye denktir:

Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) \leq 1$ olacak şekilde $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leq 1$ vardır.

Aşağıdaki tanım Chistyakov tarafından verilmiştir [27].

3.1.2. Tanım

X boştan farklı bir küme ve w, X üzerinde bir modular metrik olmak üzere her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X_w$ için

$$w_{k\lambda}(Tx, Ty) \leq w_\lambda(x, y) \quad (3.2)$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ sayısı varsa $T: X_w \rightarrow X_w$ dönüşümüne modular büzülme (veya w – büzülme) denir.

Şimdi modular metrik uzaylarda Banach büzülme prensibini ifade edelim. Aşağıdaki teorem 2011 yılında Mongkolkeha ve diğerleri tarafından ifade ve ispat edilmiştir [23].

3.1.3. Teorem

w , X_w üzerinde bir modular metrik ve X_w, w tarafından oluşturulan bir tam modular metrik uzay olsun. $T: X_w \rightarrow X_w$ bir büzülme dönüşümü ise, o zaman her $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ için T, X_w de bir tek sabit noktaya sahiptir. Dahası her $x \in X_w$ ve $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat

x_0, X_w de keyfi bir nokta ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0$ olsun. O zaman her $\lambda > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_{n+1}, x_n) &= w_\lambda(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kw_\lambda(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 w_\lambda(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\dots \\ &\leq k^n w_\lambda(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$w_\lambda(x_{n+1}, x_n) \leq k^n w_\lambda(x_1, x_0)$$

$$k \in (0, 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$$

olup buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_{n+1}, x_n) = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Böylece her bir $\lambda > 0$ için bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki bu $\varepsilon > 0$ sayısı için $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$ olacak şekilde her $n > n_0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmadan $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ kabul edelim. $\frac{\lambda}{m-n} > 0$ için bir $n_{\frac{\lambda}{m-n}} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_{\frac{\lambda}{m-n}}$ için

$$w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{m-n} \quad (3.4)$$

olur. Şimdi Tanım 2.1.4'teki (iii) özelliğini kullanarak her $m, n > n_{\frac{\lambda}{m-n}}$ için

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) &\leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{m-1}, x_m) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{m-n} + \frac{\varepsilon}{m-n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{m-n} \\
 &\quad m-n \text{ sayıda} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{m-n}(m-n) \\
 &\leq \varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

olup $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir. X_w nin tamlığından bu dizi bir $x_* \in X_w$ noktasına yakınsar. Modular metrik tanımından ve T nin büzülme dönüşümü olmasından her $\lambda > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda}(Tx_*, x_*) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_*, Tx_n) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_n, x_*) \\
 &\leq kw_{\frac{\lambda}{2}}(x_*, x_n) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n+1}, x_*) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_*, x_n) &< \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n+1}, x_*) < \frac{\varepsilon}{2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(Tx_*, x_*) &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(Tx_*, x_*) &= 0 \Leftrightarrow Tx_* = x_*
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. Böylece x_* , T nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğini göstermek için aksini kabul edelim, yani y_* , T nin bir başka sabit noktası olsun. O zaman her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda}(x_*, y_*) &= w_{\lambda}(Tx_*, Ty_*) \\
 &\leq kw_{\lambda}(x_*, y_*) \\
 w_{\lambda}(x_*, y_*) - kw_{\lambda}(x_*, y_*) &\leq 0 \\
 (1 - k) w_{\lambda}(x_*, y_*) &\leq 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

olur. w_{λ} modular metrik olduğundan pozitif tanımlıdır. Böylece $(1 - k) \neq 0$ olduğundan $w_{\lambda}(x_*, y_*) = 0$ ve (i) özelliğinden $x_* = y_*$ elde edilir. Böylece istenen gösterilir.

3.2. Modular Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Büzülme Prensibi

Bu bölümde Abdou ve Khamsi tarafından verilen çoğul değerli dönüşümler için büzülme prensibini inceleyeceğiz [9]. Bunun için ilk olarak teoremlerin ifade ve ispatında kullanılacak bazı tanımları vereceğiz. Aşağıdaki tanım Chaipunya ve diğerleri tarafından verilmiştir [19].

3.2.1. Tanım

$CB(X_w)$, X_w nin tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini ve $C(X_w)$, X_w nin tüm boştan farklı kapalı alt kümelerinin ailesini gösterebilir. A , X_w modular metrik uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. $x \in X_w$ için

$$w_\lambda(x, A) = \inf_{y \in A} w_\lambda(x, y)$$

olarak tanımlanır. $A, B \in CB(X_w)$ için

$$w_\lambda(A, B) = \sup_{x \in A} w_\lambda(x, B) = \sup_{x \in A} \left\{ \inf_{y \in B} w_\lambda(x, y) \right\}$$

olarak ve Hausdorff modular metriği

$$H_w(A, B) = \max\{w_\lambda(A, B), w_\lambda(B, A)\}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki tanım Khamsi ve Abdou tarafından verilmiştir [9].

3.2.2. Tanım

X_w bir tam modular metrik uzay, M , X_w nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in M$ için

$$H_w(T(x), T(y)) \leq kw_1(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa $T: M \rightarrow CB(M)$ çoğul değerli dönüşümüne *Lipschitz koşulunu sağlıyor* denir. $x \in T(x)$ oluyorsa x noktasına T nin sabit noktasıdır denir. Eğer $k \in [0, 1)$ ise T dönüşümüne w –büzülme dönüşümüdür denir.

3.2.3. Lemma

X_w bir tam modular metrik uzay, M, X_w nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$A, B \in CB(X_w)$ olsun. O zaman $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için

$$w_1(x, y) \leq H_w(A, B) + \varepsilon \quad (3.8)$$

olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. Dahası B, w –kompakt ve Fatou özelliğini sağlıyor ise o zaman $x \in A$ için

$$w_1(x, y) \leq H_w(A, B) \quad (3.9)$$

olacak şekilde bir $y \in B$ vardır [9].

İspat

$a \in A$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. $w_1(a, B) = \inf_{b \in B} w_1(a, b)$ olduğundan $w_1(a, B) + \varepsilon$ sayısının, $\{w_1(a, b): b \in B\}$ kümesinin alttan sınırı olmadığı görülebilir. Böylece $w_1(a, b_\varepsilon) \leq w_1(a, B) + \varepsilon$ olacak şekilde $b_\varepsilon \in B$ vardır. Bu durumda

$$w_1(a, b_\varepsilon) \leq H_w(A, B) + \varepsilon$$

elde edilir. İkinci kısım için B, w –kompakt ve Fatou özelliğini sağlasın. $a \in A$ olsun. O zaman herhangi bir $n \geq 1$ için $w_1(x, y_n) \leq H_w(A, B) + \frac{1}{n}$ olacak şekilde $y_n \in B$ vardır. B, w –kompakt olduğundan (y_n) bir $y \in B$ noktasına yakınsar. $B, Fatou özelliğini sağladığından$

$$w_1(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} w_1(x, y_n) \leq H_w(A, B) \quad (3.10)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Nadler tarafından verilen çoğul değerli dönüşümler için büzülme prensibinin modular metrik uzaylardaki karşılığını verelim. Aşağıdaki teorem Abdou ve Khamsi tarafından ifade edilmiştir [9].

3.2.4. Teorem

X_w bir modular metrik uzay, w , Δ_2 -şartını sağlayan bir konveks regüler modular metrik olsun. M , X_w nin boştan farklı tam alt kümesi olsun. $T: M \rightarrow CB(M)$ dönüşümü bir modular büzülme dönüşümü ise T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

T bir modular büzülme dönüşümü olduğundan her $x, y \in M$ için

$$H_w(Tx, Ty) \leq kw_1(x, y) \quad (3.11)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabiti vardır. $x_0 \in M$ keyfi ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Bu durumda Lemma 3.2.3 den

$$w_1(x_1, x_2) \leq H_w(Tx_0, Tx_1) + k^2 \quad (3.12)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Benzer şekilde Eş. 3.12 yardımıyla

$$w_1(x_2, x_3) \leq H_w(Tx_1, Tx_2) + k^4$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu iterasyona devam ederek

$$w_1(x_{n+1}, x_n) \leq H_w(Tx_n, Tx_{n-1}) + k^{2n} \quad (3.13)$$

ve $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde her $n \geq 0$ için bir (x_n) dizisi oluşturulabilir. T büzülme olduğundan her $n \geq 0$ için

$$w_1(x_{n+1}, x_n) \leq kw_1(x_n, x_{n-1}) + k^{2n} \quad (3.14)$$

elde edilir. Böylece her $n \geq 0$ için

$$w_1(x_{n+1}, x_n) \leq k^n \left(w_1(x_1, x_0) + \frac{1}{1-k} \right) \quad (3.15)$$

bulunur. Bu durumda (x_n) dizisi Cauchy dizisi olur. M, w – tam olduğundan (x_n) dizisi bir $x_* \in M$ noktasına yakınsar. $H_w(Tx_n, Tx_*) \leq kw_1(x_n, x_*)$ olup

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H_w(Tx_n, Tx_*) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_*, Tx_*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Böylece $x_* \in Tx_*$ bulunur. Bu durumda x_*, T nin bir sabit noktasıdır. Bu ispatı tamamlar.



4. MODULAR METRİK UZAYLARDA ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMİ

Çoğul değerli dönüşümler uygulamalı ve teorik matematikte birçok uygulama alanına sahiptir. Bu alanlara örnek olarak çoğul değerli dönüşümler, kontrol teorisi, konveks optimizasyon, diferansiyel içerme topoloji, reel değerli fonksiyonlar teorisi, doğrusal olmayan fonksiyonel analiz, oyun teorisi gibi alanlar gösterilebilir. Bu alanların dışında ekonomi, matematiksel ekonomi vb. matematiğin dışındaki alanlar da eklenebilir.

Nadler' in teoreminin en bilinen genelleştirmelerinden birisi Caristi tipi dönüşümler için verilen sabit nokta sonuçlarıdır [28]. Caristi tipi dönüşümler Ekeland tarafından verilen sonuçların bir düzenlemesidir [29]. Bu sonuçların genelleştirmeleri incelenmiş ve çeşitli uygulamalar verilmiştir [30].

Feng – Liu tipi dönüşümler Caristi tipi dönüşümlerin Hausdorff metrik kullanmadan verilen bir genelleştirmesidir. Feng – Liu tipi dönüşümler de çok sayıda yazar tarafından araştırılmış ve sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bu dönüşümlerin uygulamaları da verilmiştir [31-33].

Nadler tarafından ifade edilen çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoreminin bir başka genelleştirmesi ψ , φ tipi dönüşümler için verilen sonuçlardır. Bu sonuçlarla birlikte sabit nokta teorisi daha da genişlemiştir [34-36]

Bu bölümde sabit nokta teorisinde önemli yeri olan bu teoremlerin modular metrik uzaylardaki karşılıkları araştırılmıştır. İlk olarak Caristi tipi dönüşümler için bulunan sonuçlar ifade edilmiş, sonrasında Feng – Liu tipi dönüşümler için sabit nokta sonuçları ortaya koyulmuştur. Üçüncü bölümde tipi dönüşümler için sabit nokta sonuçları verilmiş ve son bölümde Caristi ve Feng- Liu tipi dönüşümler için bulunan sonuçların birer uygulaması verilerek konunun daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır.

4.1. Modular Metrik Uzaylarda Caristi Tipi Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremi

Bu bölümde modular metrik uzaylarda Caristi tipi dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerini vereceğiz.

4.1.1 Teorem

X_w bir tam modular metrik uzay, $T: X_w \rightarrow CB(X_w)$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun öyle ki her bir $x \in X_w$ ve her $y \in Tx$ için

$$w_\lambda(x, y) \leq \frac{1}{\lambda}(\varphi_w(x, y) - \varphi_\lambda(y, z)) \quad (4.1)$$

olacak şekilde bir $z \in Ty$ vardır. Özel olarak $\lambda = 1$ için

$$w_1(x, y) \leq \varphi_w(x, y) - \varphi_w(y, z) \quad (4.2)$$

yazabiliriz. Burada $\varphi: X_w \times X_w \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu ilk değişkene göre alttan sürekli fonksiyondur. Bu durumda $w_1(x_n, x_{n+1}) < \infty$ için T bir sabit noktaya sahiptir [37].

İspat:

$x_0 \in X_w$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $x_1 = x_0$ ise o zaman x_0 , T nin bir sabit noktasıdır ve teorem sağlanır. Bu durumda $x_1 \neq x_0$ olsun. Kabulümüzden

$$w_1(x_0, x_1) \leq \varphi_w(x_0, x_1) - \varphi_w(x_1, x_2) \quad (4.3)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Bu iterasyona devam ederek $x_n \neq x_{n-1}$ olacak şekildeki $x_n \in Tx_{n-1}$ için

$$0 < w_1(x_{n-1}, x_n) \leq \varphi_w(x_{n-1}, x_n) - \varphi_w(x_n, x_{n+1}) \quad (4.4)$$

olacak şekilde $x_{n+1} \in Tx_n$ bulunabilir. Bu durumda $(\varphi_w(x_{n-1}, x_n))_n$ azalmayan bir dizidir. Gerçekten de

$$\begin{aligned} 0 < w_1(x_{n-1}, x_n) + \varphi_w(x_n, x_{n+1}) &\leq \varphi_w(x_{n-1}, x_n) \\ 0 < \varphi_w(x_n, x_{n+1}) &\leq \varphi_w(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ayrıca $(\varphi_w(x_{n-1}, x_n))_n$ dizisi alttan sınırlıdır bu yüzden bir $r \geq 0$ noktasına yakınsar.

Eş.4.2’de her iki tarafın limitlerini aldığımızda

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{n-1}, x_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_w(x_{n-1}, x_n) - \varphi_w(x_n, x_{n+1})) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{n-1}, x_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_w(x_{n-1}, x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_w(x_n, x_{n+1}) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{n-1}, x_n) &\leq r - r \\
\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{n-1}, x_n) &= 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde ederiz. Şimdi (x_n) in Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliğinden $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$w_1(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^m w_{\frac{1}{m-n}}(x_{i-1}, x_i) \tag{4.7}$$

olur. Diğer taraftan modular metriğin artmayan olmasından

$$w_1(x_{n-1}, x_n) \leq w_{\frac{1}{m-n}}(x_{n-1}, x_n) \tag{4.8}$$

ve hipotezden

$$w_{\frac{1}{m-n}}(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{1}{(m-n)} \varphi_w(x_{n-1}, x_n) \tag{4.9}$$

bulunur. Bu ifade Eş.4.7’de yazıldığında

$$\begin{aligned}
w_1(x_n, x_m) &\leq \frac{1}{(m-n)} (\varphi_w(x_n, x_{n+1}) - \dots - \varphi_w(x_{m-1}, x_m)) \\
w_1(x_n, x_m) &\leq \frac{1}{(m-n)} (\varphi_w(x_n, x_{n+1}) - \varphi_w(x_{m-1}, x_m))
\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. Eş.4.10’da her iki tarafın limsupunu aldığımızda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{w_1(x_n, x_m) : m > n\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \frac{1}{(m-n)} (\varphi_w(x_n, x_{n+1}) - \varphi_w(x_{m-1}, x_m)))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{w_1(x_n, x_m): m > n\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \frac{1}{(m-n)} (r-r))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{w_1(x_n, x_m): m > n\}) = 0$$

Böylece (x_n) bir Cauchy dizisi olur. X_w tam uzay olduğundan $T, u \in X_w$ noktasına yakınsar. Şimdi u nun, T nin sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} w_1(u, Tu) &\leq w_{\frac{1}{2}}(u, x_{n+1}) + w_{\frac{1}{2}}(x_{n+1}, Tu) \\ &\leq w_{\frac{1}{2}}(u, x_{n+1}) + H_w(Tu, Tx_n) \\ &\leq w_{\frac{1}{2}}(u, x_{n+1}) + w_{\frac{1}{2}}(u, x_n) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Eş.4.11’de her iki tarafın limitini aldığımızda

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(u, Tu) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{1}{2}}(u, x_{n+1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{1}{2}}(x_{n+1}, Tu) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(u, Tu) &\leq w_{\frac{1}{2}}(u, u) + w_{\frac{1}{2}}(u, u) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(u, Tu) &= 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Böylece $u \in Tu$ elde edilir. Bu durumda u, T nin sabit noktası olur. Şimdi yukarıdaki teoremin bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi verelim [37].

4.1.2. Teorem

X_w bir tam modular metrik uzay ve $T: X_w \rightarrow CB(X_w)$ bir çoğul değerli dönüşüm olsun öyle ki her $x, y \in X_w$ için

$$H_w(Tx, Ty) \leq \eta(w_1(x, y)) \tag{4.13}$$

şartı sağlanır. Burada $\eta: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $t \in [0, \infty]$ için $\eta(t) < t$ olacak şekilde alttan sürekli dönüşüm ve $\frac{\eta(t)}{t}$ azalmayandır.

Yukarıdaki şartlar altında T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x \in X_w$ ve $y \in Tx$ olsun. Eğer $x = y$ ise o zaman T bir sabit noktaya sahip olur ve ispat tamamlanır. $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. $\theta(t)$ fonksiyonunu her $t \in [0, \infty]$ için

$$\theta(t) = \frac{\eta(t) + t}{2}$$

olarak tanımlayalım. Hipotezden

$$H_w(Tx, Ty) \leq \eta(w_1(x, y)) \quad (4.14)$$

eşitsizliği vardır. η fonksiyonu azalmayan fonksiyon ve $\eta(t) < t$ olduğundan

$$\begin{aligned} \eta(t) < t &\Leftrightarrow \eta(w_1(x, y)) < w_1(x, y) \\ \theta(w_1(x, y)) &= \frac{\eta(w_1(x, y)) + w_1(x, y)}{2} \leq w_1(x, y) \\ \theta(w_1(x, y)) &= \frac{\eta(w_1(x, y)) + w_1(x, y)}{2} \geq \eta(w_1(x, y)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda Eş.4.13 yeniden düzenlendiğinde

$$H_w(Tx, Ty) \leq \eta(w_1(x, y)) \leq \theta(w_1(x, y)) \leq w_1(x, y) \quad (4.16)$$

bulunur. Bu durumda

$$\theta(w_1(x, y)) = H_w(Tx, Ty) + \varepsilon_0 \quad (4.17)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır. Böylece $z \in Ty$ için

$$w_1(y, z) \leq H_w(Tx, Ty) + \varepsilon_0 = \theta(w_1(x, y)) \leq w_1(x, y) \quad (4.18)$$

yazılabilir. Tekrar $y \neq z$ kabul edelim. O zaman

$$w_1(x, y) - \theta(w_1(x, y)) \leq w_1(x, y) - w_1(y, z) \quad (4.19)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş.4.19 tekrar düzenlendiğinde

$$w_1(x, y) \leq \frac{w_1(x, y)}{1 - \frac{\theta(w_1(x, y))}{w_1(x, y)}} - \frac{w_1(y, z)}{1 - \frac{\theta(w_1(y, z))}{w_1(y, z)}} \quad (4.20)$$

elde edilir. $\frac{\theta(t)}{t}$ azalmayan fonksiyon ve $w_1(y, z) < w_1(x, y)$ olduğundan Eş.4.20

$$w_1(x, y) \leq \frac{w_1(x, y)}{1 - \frac{\theta(w_1(x, y))}{w_1(x, y)}} - \frac{w_1(y, z)}{1 - \frac{\theta(w_1(y, z))}{w_1(y, z)}} \quad (4.21)$$

olarak tekrar düzenlenebilir. Şimdi

$$\phi_w(x, y) = \begin{cases} \frac{w_1(x, y)}{1 - \frac{\theta(w_1(x, y))}{w_1(x, y)}}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

olacak şekilde $\phi_w: X_w \times X_w \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda Eş.4.20 ile verilen eşitsizlik

$$w_1(x, y) \leq \phi_w(x, y) - \phi_w(y, z) \quad (4.22)$$

olarak yazılır. Böylece T dönüşümü Teorem 4.1.1'deki şartları sağlar ve $u \in X_w$ şeklinde bir sabit noktası vardır.

4.2. Modular Metrik Uzaylarda Feng – Liu Tipi Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde Feng – Liu tipi dönüşümler için bir sabit nokta teoremi vereceğiz. İlk olarak teoremi ifade etmek için aşağıdaki tanımı verelim [38].

4.2.1. Tanım

w bir modular metrik, X_w bir modular metrik uzay ve $T: X_w \rightarrow N(X_w)$ bir çoğul değerli dönüşüm olsun. $f_\lambda: X_w \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $f_\lambda(x) = \inf w_\lambda(x, Tx)$ olarak tanımlansın. $I_b^x \subset X_w$ kümesi $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ ve bir $b \in (0, \infty)$ pozitif sabit sayısı için

$$I_b^x = \{y \in Tx : bw_\lambda(x, y) \leq w_\lambda(x, Tx)\} \quad (4.23)$$

olarak tanımlanır. Burada $N(X_w)$, X_w nin boştan farklı tüm alt kümelerini ifade eder.

4.2.2. Uyarı

I_b^x kümesinin boştan farklı olduğuna dikkat edelim. Gerçekten

1- a) $x \in Tx$ ve $y = x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} bw_\lambda(x, y) &= bw_\lambda(x, x) \leq w_\lambda(x, Tx) \\ 0 &\leq w_\lambda(x, Tx) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Böylece her $b \in (0,1)$ için Eş.4.23 sağlanır ve $y \in I_b^x$ olur.

1- b) $x, y \in Tx$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda

$$0 < bw_\lambda(x, y) \leq w_\lambda(x, Tx) = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir. Fakat bu bir çelişkidir. O zaman kabulümüz yanlıştır. Bu durumda eğer $x \in Tx$ ise I_b^x kümesi $I_b^x = \{x\}$ ile ifade edilir.

2) $x \notin Tx$ olsun. O zaman bir $y \neq x$ için $y \in Tx$ vardır. Modular uzaklık tanımını kullanarak bir $\varepsilon > 0$ için

$$w_\lambda(x, y) \leq w_\lambda(x, Tx) + \varepsilon \quad (4.26)$$

elde edilir. $\varepsilon = (1 - b)w_\lambda(x, y)$ olarak seçildiğinde

$$\begin{aligned} w_\lambda(x, y) &\leq w_\lambda(x, Tx) + (1 - b)w_\lambda(x, y) \\ bw_\lambda(x, y) &\leq w_\lambda(x, Tx) \end{aligned} \quad (4.27)$$

bulunur. Böylece $y \in I_b^x$ ve $I_b^x \neq \emptyset$ olur. Şimdi teoremi ifade ve ispat edelim [38].

4.2.3. Teorem

X_w , w tarafından oluşturulan bir tam modular metrik uzay, $T: X_w \rightarrow C(X_w)$ bir çoğul değerli dönüşüm olsun. $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ eşitsizliği ve w için Δ_2 -şartı sağlansın. Eğer

$$w_\lambda(y, Ty) \leq cw_\lambda(x, y) \quad (4.28)$$

şartını sağlayan her $x \in X_w$ için $y \in I_b^x$ olacak şekilde bir $c \in (0,1)$ sabit sayısı varsa $c < b$ ve f_λ alttan yarı sürekli olmak şartı ile T nin X_w de bir sabit noktası vardır.

İspat:

Herhangi bir $x \in X_w$ için $Tx \in C(X_w)$ olduğundan herhangi bir $b \in (0,1)$ için I_b^x boştan farklıdır. Bir $x_0 \in X_w$ başlangıç noktası ve $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_1, Tx_1) \leq cw_\lambda(x_0, x_1) \quad (4.29)$$

olacak şekilde $x_1 \in I_b^{x_0}$ vardır. Benzer şekilde $x_1 \in X_w$ ve $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_2, Tx_2) \leq cw_\lambda(x_1, x_2) \quad (4.30)$$

olacak şekilde $x_2 \in I_b^{x_1}$ vardır. Bu iterasyona devam ederek $\lambda > 0$ ve $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ için

$$w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq cw_\lambda(x_n, x_{n+1}) ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

olacak şekilde bir (x_n) dizisi elde edilir. Diğer taraftan $\lambda > 0$ ve $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ için

$$bw_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq w_\lambda(x_n, Tx_n) ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

sağlanır. Eş.4.31 ve Eş. 4. 32 yardımıyla bir $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq \frac{c}{b} w_\lambda(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^2 w_\lambda(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \quad (4.33)$$

ve

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{1}{b} w_\lambda(x_n, Tx_n) \leq \frac{c}{b} w_\lambda(x_{n-1}, x_n) \\ w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{c}{b} w_\lambda(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \quad (4.34)$$

bulunur. $\lambda > 0$ için Eş.4.33 ardışık olarak kullanarak

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \\ \leq \frac{c}{b} w_\lambda(x_{n-1}, x_n) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^2 w_\lambda(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n w_\lambda(x_0, x_1); n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.35)$$

ve Eş.4.32 ardışık olarak kullanarak

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\ \leq \frac{c}{b} w_\lambda(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^2 w_\lambda(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \leq \dots \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n w_\lambda(x_0, Tx_0); n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir. Diğer yandan $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için modular metriğin üçgen eşitsizliği özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_n, x_m) \\ \leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{m-1}, x_m) \\ \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) + \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1} w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) + \dots + \left(\frac{c}{b}\right)^{m-1} w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (4.37)$$

yazılabilir. $c < b$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{b}\right)^n = 0$ ve $0 < w_\lambda(x_n, x_{n+1}) < \infty$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{b}\right)^n w_\lambda(x_0, x_1) = 0 \quad (4.38)$$

olur. w, Δ_2 -şartını sağladığından $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (4.39)$$

ifadesi sağlanır. Bu şekilde devam ederek bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2^k}}(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (4.40)$$

elde edilir. $k \in \mathbb{N}$ yi $2^k < m - n$ olacak şekilde seçersek metrik modular fonksiyonunun temel özelliğinden bir $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (4.41)$$

olur. Eş.4.37nin $n \rightarrow \infty$ için limiti alındığında

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_n, x_m) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^n}{1 - \left(\frac{c}{b}\right)} w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_n, x_m) &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur ki bu (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ifade eder. w, Δ_2 -şartını sağladığından X_w tam uzaydır ve (x_n) dizisinin yakınsadığı bir $x \in X_w$ noktası vardır. Diğer taraftan

$$\{f_{\lambda}(x_n)\}_{n=0}^{\infty} = \{w_{\lambda}(x_n, Tx_n)\}_{n=0}^{\infty}$$

fonksiyon dizisi azalandır. Gerçekten de bir $\lambda > 0$ için

$$f_{\lambda}(x_n) = w_{\lambda}(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{b}\right) w_{\lambda}(x_{n-1}, Tx_{n-1}) = \left(\frac{c}{b}\right) f_{\lambda}(x_{n-1}) \quad (4.43)$$

olur ve $\frac{c}{b} < 1$ olduğundan $\{f_{\lambda}(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ azalandır. Ayrıca $f_{\lambda}(x_n) = w_{\lambda}(x_n, Tx_n)$ pozitif olduğundan $\{f_{\lambda}(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon dizisi 0 a yakınsar. f_{λ} alttan yarı-sürekliliğinden

$$0 \leq f_{\lambda}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\lambda}(x_n) = 0 \quad (4.44)$$

elde edilir. Böylece $f_{\lambda}(x) = 0$ olur. Bu durumda Tx in kapalılığından $x \in Tx$ olur ve ispat tamamlanır. Şimdi bu teoremin bazı sonuçlarını verelim.

4.2.4. Sonuç

Teorem 4.2.1, Chaipunya ve diğerleri tarafından verilen teoremin bir genelleştirmesidir [19].

1) Gerçekten de eğer T , da verilen şartları sağlarsa o zaman T nin çoğul değerli büzülme dönüşümü olması sebebiyle üstten yarı sürekli olmasından f fonksiyonu alttan yarı sürekli ve her $x \in X_w, y \in Tx$ ve $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(y, Ty) \leq H_w(Tx, Ty) \leq cw_\lambda(x, y) \quad (4.45)$$

olur. Böylece T , Teorem 4.2.1 in şartlarını sağlar ve bir sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiş olur.

2) Aşağıda verilen örnek Teorem 4.2.1 in Chaipunya ve diğerleri tarafından verilen teoremin bir genişlemesi olduğunu gösterir.

$$X_w = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\} \cup \{0, 1\}, \text{ her } \lambda > 0 \text{ ve } x, y \in X_w \text{ için } w_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda} |x - y|$$

olsun. Özel olarak $\lambda = 1$ için

$$w_1(x, y) = |x - y|$$

ve bir X_w tam modular metrik uzay olsun. $T: X_w \rightarrow C(X_w)$ dönüşümünü

$$T(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2^{n+1}}, 1 \right\}; & x = \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, \dots \\ \{0, 1\} & ; x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. T nin Chaipunya tarafından verilen teoreme göre bir büzülebilir dönüşüm olmadığı görülebilir. Gerçekten de

$$H_w(T(\frac{1}{2^n}), T(0)) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n} = w_1(\frac{1}{2^n}, 0), n = 0, 1, 2, \dots$$

Fakat

$$f(x) = w_1(x, Tx) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} ; & x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots \\ 0 ; & x = 0, 1 \end{cases}$$

ve f süreklidir. Dahası her $x \in X_w$ için $y \in I_{0,5}^x$ vardır ve

$$w_1(y, Ty) = \frac{1}{2} w_1(x, y)$$

olur.

4.2.5. Sonuç

Teorem 4.2.1, sabit noktanın tekliğini garanti etmez. Bu durumu görmek için Sonuç 4.2.4'te verilen örneğe bakılabilir.

4.2.6. Önerme

X_w bir tam modular metrik uzay, $T: X_w \rightarrow C(X_w)$ bir çoğul değerli dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir $x \in X_w, y \in Tx$ ve her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(y, Ty) \leq c w_\lambda(x, y) \tag{4.46}$$

olacak şekilde bir $c \in (0, 1)$ sabit sayısı varsa o zaman $f = w_\lambda(x, Tx)$ alttan yarı sürekli olmak şartıyla T, X_w de bir sabit noktaya sahiptir.

4.2.7. Sonuç

Burada $f(x)$ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması önemli rol oynamaktadır. $f(x)$ fonksiyonunun alttan yarı sürekli kabulü olmadığı takdirde diğer bütün şartlar sağlansa bile T nin, X_w de bir sabit noktaya sahip olduğu gösterilemez. Bu durumu bir örnekle gösterelim: X_w , Sonuç 4.2.3'teki uzay olmak üzere $T: X_w \rightarrow C(X_w)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}} \right\}, & x = \frac{1}{2^n}; n = 0, 1, 2, \dots \\ \{1\}, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $x, y \in X_w$ ve $\lambda = 1$ için $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ modular metriği

$$w_\lambda(x, y) = |x - y|$$

olarak ifade edilsin. Bu durumda $f(x) = w_1(x, Tx)$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & x = \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2, \dots \\ \{1\}, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun alttan yarı sürekli olmadığı ve diğer tüm şartları sağlamasına rağmen T nin X_w de bir sabit noktaya sahip olmadığı açıktır.

4.3. Modular Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli Dönüşümler İçin φ, ψ –Şartı

İlk olarak teoremimizde kullanacağımız aşağıdaki tanımı vererek başlayalım [39].

4.3.1. Tanım

Bir $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa değiştirilmiş uzaklık fonksiyonu olarak adlandırılır:

1. ψ monoton artan ve süreklidir.
2. $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Şimdi teoremi ifade ve ispat edelim [39].

4.3.2. Teorem

X_w bir tam modular metrik uzay, $\emptyset \neq M \subset X_w$ ve $T: M \rightarrow K(M)$ dönüşümü Fatou özelliği ile birlikte her $x, y \in M$ ve $x \neq y$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun:

$$\psi(H_w(Tx, Ty)) \leq \psi(M_w(x, y)) - \varphi(N_w(x, y)) \quad (4.47)$$

Burada;

$$M_w(x, y) = \max \left\{ w_1(x, y), w_1(x, Tx), w_1(y, Ty), \frac{1}{2} [w_2(x, Ty) + w_2(y, Tx)] \right\}$$

$$N_w(x, y) = \min \left\{ w_1(x, y), w_1(x, Tx), w_1(y, Ty), \frac{1}{2} [w_2(x, Ty) + w_2(y, Tx)] \right\}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca $\varphi(t): [0, \infty] \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu her $t > 0$ için yarı-süreklili ve $t = 0$ noktasında süreksiz; $\psi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$ ise değiştirilmiş uzaklık fonksiyonu olsun. O zaman $T, M \subset X_w$ de bir sabit noktaya sahiptir. Burada $x_0, x_1 \in X_w$ için $w_1(x_0, x_1) < \infty$ ve $H_w(A, B)$ modular Hausdorff metriktir.

İspat:

$x_0 \in M \subset X_w$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. O zaman

$$w_1(x_1, x_2) \leq H_w(Tx_0, Tx_1) \quad (4.48)$$

olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. ψ monoton artan olduğundan

$$\psi(w_1(x_1, x_2)) \leq \psi(H_w(Tx_0, Tx_1))$$

elde edilir. Bu durumu Eş.4.47’de yazarak

$$\psi(w_1(x_1, x_2)) \leq \psi(H_w(Tx_0, Tx_1)) \leq \psi(M_w(x_0, x_1)) - \varphi(N_w(x_0, x_1)) \quad (4.49)$$

bulunur. Eş.4.49’da x_0 yerine x_{2n} , x_1 yerine x_{2n+1} , x_2 yerine x_{2n+2} yazarak

$$\begin{aligned} & \psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \\ & \leq \psi(H_w(Tx_{2n}, Tx_{2n+1})) \leq \psi(M_w(x_{2n}, x_{2n+1})) - \varphi(N_w(x_{2n}, x_{2n+1})) \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir. Burada

$$M_w(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max \left\{ w_1(x_{2n}, x_{2n+1}), w_1(x_{2n}, Tx_{2n}), w_1(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{1}{2} [w_2(x_{2n}, Tx_{2n+1}) + w_2(x_{2n+1}, Tx_{2n})] \right\}$$

olur. δ_n 'ın tanımından kolayca

$$M_w(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max \left\{ w_1(x_{2n}, x_{2n+1}), w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{1}{2} [w_2(x_{2n}, x_{2n+2})] \right\}$$

$$M_w(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max \left\{ w_1(x_{2n}, x_{2n+1}), w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{1}{2} [w_1(x_{2n}, x_{2n+1}) + w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \right\}$$

$$M_w(x_{2n}, x_{2n+1}) = \max \{w_1(x_{2n}, x_{2n+1}), w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})\}$$

olduğu gösterilir. İlk olarak

$$M_w(x_{2n}, x_{2n+1}) = w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \quad (4.51)$$

olsun. O zaman Eş.4.49 yeniden düzenlendiğinde

$$\psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \leq \psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) - \varphi(N_w(x_{2n}, x_{2n+1})) \quad (4.52)$$

bulunur. $\varphi > 0$ olduğundan

$$\psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) < \psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) \quad (4.53)$$

olur. ψ monoton artan olduğundan

$$w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2}) < w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \quad (4.54)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda

$$M_w(x_{2n}, x_{2n+1}) = w_1(x_{2n}, x_{2n+1}) \quad (4.55)$$

olur. Böylece $\{w_1(x_{2n}, x_{2n+1})\}$ dizisi monoton azalan bir dizi olur. $K(M)$ kompakt olduğundan kapalı ve sınırlıdır. Yani bir $r > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{2n}, x_{2n+1}) = r \quad (4.56)$$

bulunur. Şimdi Eş.4.50 için $n \rightarrow \infty$ limiti alındığında

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(M_w(x_{2n}, x_{2n+1})) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(N_w(x_{2n}, x_{2n+1})) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(w_1(x_{2n}, x_{2n+1})) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(N_w(x_{2n}, x_{2n+1})) \\ \psi(\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{2n+1}, x_{2n+2})) &\leq \psi(\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{2n}, x_{2n+1})) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(N_w(x_{2n}, x_{2n+1})) \\ \psi(r) &\leq \psi(r) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(N_w(x_{2n}, x_{2n+1})) \end{aligned} \quad (4.57)$$

elde edilir. Burada φ nin tanımından

$$\psi(r) < \psi(r) \quad (4.58)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $r = 0$ olmalıdır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{2n}, x_{2n+1}) = 0 \quad (4.59)$$

elde edilir.

Şimdi (x_{2n}) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Aksini iddia edelim, yani (x_{2n}) Cauchy dizisi olmasın. O zaman $w_1(x_{2n}, x_{2m}) \geq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır ve x_{2n} ile x_{2m} bu eşitsizliği sağlayan ilk terimlerdir. Eş.4.47, x_{2n} ve x_{2m} için uygulandığında $x_{2n} \in Tx_{2n-1}$ ve $x_{2m} \in Tx_{2m-1}$ için

$$\begin{aligned} \psi(w_1(x_{2n}, x_{2m})) \\ \leq \psi(H_w(Tx_{2n-1}, Tx_{2m-1})) \leq \psi(M_w(x_{2n-1}, x_{2m-1})) - \varphi(N_w(x_{2n-1}, x_{2m-1})) \end{aligned} \quad (4.60)$$

elde edilir. Burada

$$M_w(x_{2n-1}, x_{2m-1}) = \max \left\{ w_1(x_{2n-1}, x_{2m-1}), w_1(x_{2n-1}, x_{2n}), w_1(x_{2m-1}, x_{2m}), \frac{1}{2} [w_2(x_{2n-1}, x_{2m}) + w_2(x_{2m-1}, x_{2n})] \right\}$$

olur. Tanım 2.1.3'te verilen (iii) şartından

$$w_1(x_{2n-1}, x_{2m-1}) \leq w_{\frac{1}{2}}(x_{2n-1}, x_{2n}) + w_{\frac{1}{2}}(x_{2n}, x_{2m-1}) \quad (4.61)$$

bulunur. Yine modular metriğin monoton azalan olmasından

$$w_{\frac{1}{2}}(x_{2n-1}, x_{2n}) < 2\varepsilon \quad (4.62)$$

olacak şekilde $2\varepsilon > 0$ vardır. $m, n \rightarrow \infty$ limiti alındığında

$$\begin{aligned} \lim_{m,n \rightarrow \infty} w_1(x_{2n-1}, x_{2m-1}) &\leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} w_{\frac{1}{2}}(x_{2n-1}, x_{2n}) + \lim_{m,n \rightarrow \infty} w_{\frac{1}{2}}(x_{2n}, x_{2m-1}) \\ \lim_{m,n \rightarrow \infty} w_1(x_{2n-1}, x_{2m-1}) &\leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad (4.63)$$

bulunur. Benzer bir hesaplamayla

$$w_2(x_{2m-1}, x_{2n}) \leq w_1(x_{2m-1}, x_{2n}) < \varepsilon \quad (4.64)$$

olup bu durumda

$$M_w(x_{2n-1}, x_{2m-1}) = \max\left\{2\varepsilon, 0, 0, \frac{1}{2}[2\varepsilon + \varepsilon]\right\} = 2\varepsilon$$

olarak hesaplanır. Böylece Eş.4.47

$$\psi(2\varepsilon) \leq \psi(2\varepsilon) - \varphi(N_w(x_{2n-1}, x_{2m-1})) \quad (4.65)$$

olur ki φ nin tanımından

$$\psi(2\varepsilon) < \psi(2\varepsilon) \quad (4.66)$$

elde edilir. Fakat bu bir çelişkidir. O zaman kabulümüz yanlıştır ve (x_{2n}) bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla (x_n) bir Cauchy dizisidir. Son olarak T nin bir sabit noktasının var olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim, yani $x_n \rightarrow x_*$ iken $Tx_* \neq x_*$ olsun. $K(M)$

kompakt olduğundan $x_* \in K(M) \subset X_w$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow x_*$ olur. Fatou özelliğinden

$$w_1(x_*, Tx_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} w_1(x_{n+1}, Tx_*) = \liminf_{n \rightarrow \infty} w_1(Tx_n, Tx_*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H_w(Tx_n, Tx_*) \quad (4.67)$$

$$\psi(w_1(x_*, Tx_*)) \leq \psi(H_w(Tx_n, Tx_*)) \leq \psi(M_w(x_n, x_*)) - \varphi(N_w(x_n, x_*)) \quad (4.68)$$

olur. Basit bir hesaplamayla

$$M_w(x_n, x_*) = \max \left\{ w_1(x_n, x_*), w_1(x_n, Tx_n), w_1(x_*, Tx_*), \frac{1}{2} [w_2(x_n, Tx_*) + w_2(x_n, Tx_n)] \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_w(x_n, x_*) = \max \left\{ 0, 0, w_1(x_*, Tx_*), \frac{1}{2} w_2(x_*, Tx_*) \right\}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_w(x_n, x_*) = w_1(x_*, Tx_*) \quad (4.69)$$

olur. Bu durumda

$$\psi(w_1(x_*, Tx_*)) \leq \psi(w_1(x_*, Tx_*)) - \varphi(N_w(x_n, x_*)) \quad (4.70)$$

elde edilir. Buradan

$$\psi(w_1(x_*, Tx_*)) < \psi(w_1(x_*, Tx_*)) \quad (4.71)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Yani kabulümüz yanlıştır ve x_* , T nin sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

4.4. Uygulamalar

Sabit nokta teorisi matematiğin pek çok alanında kullanılmaktadır. Bu alanlardan birisi de matematiksel optimizasyondur. Dinamik programlama, matematiksel optimizasyon için oldukça kullanışlıdır ve bir fonksiyonel denklemin çözümüne dayanır. Bu bölümde Caristi

tipi dönüşümlerin

$$p(x) = \sup_{y \in T} \{f(x, y) + \mathfrak{I}(x, y, (p(\eta(x, y))))\}, x \in Z \quad (4.72)$$

olarak tanımlanan bir fonksiyonel denkleme uygulamasını vereceğiz. Burada M ve N Banach uzayı $Z \subset M$ ve $T \subset N$ olmak üzere η, f ve $\mathfrak{I}$ fonksiyonları sırasıyla $\eta: Z \times T \rightarrow Z$, $f: Z \times T \rightarrow IR$, $\mathfrak{I}: Z \times T \times IR \rightarrow IR$ olarak tanımlansın. Şimdi Eş. 4.72'nin çözümünün varlığını araştıralım.

$B(Z)$, Z üzerindeki tüm sınırlı reel değerli fonksiyonların kümesi olmak üzere $h \in B(Z)$ keyfi elemanı için $\|h\| = \sup_{x \in Z} |h(x)|$ normunu tanımlayalım. Bu durumda $(B(Z), \|\cdot\|)$ bir Banach uzayıdır ve her $h, k \in B(Z)$ için

$$w_\lambda(h, k) = \frac{1}{1 + \lambda} \sup_{x \in Z} |h(x) - k(x)| \quad (4.73)$$

modular metriği ile donatılmıştır. Özel olarak $\lambda = 1$ seçtiğimizde Eş.4.73

$$w_\lambda(h, k) = \frac{1}{2} \sup_{x \in Z} |h(x) - k(x)| \quad (4.74)$$

haline gelir. $B(Z)$ Banach uzayı olduğundan $w_1(h, k)$ modular metriğine göre bu uzaydaki yakınsama düzgündür, yani $B(Z)$ deki bir Cauchy dizisi bir $h_* \in B(Z)$ sınırlı fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Şimdi Eş. 4.72 ile ifade edilen fonksiyonel denklemin çözümünü veren teoremi ifade edelim.

İlk olarak aşağıda verilen şekilde bir operatör tanımlayalım:

Her $h \in B(Z)$ ve $x \in Z$ için

$$S(h)(x) = \sup_{y \in T} \{f(x, y) + \mathfrak{I}(x, y, (p(\eta(x, y))))\}, x \in Z \quad (4.75)$$

4.4.1. Teorem

$S: B(Z) \rightarrow B(Z)$, Eş.4.75 ile tanımlanmış üstten yarı sürekli bir operatör olsun.

- $f: Z \times T \rightarrow IR$ ve $\mathfrak{I}: Z \times T \times IR \rightarrow IR$ fonksiyonları sürekli ve sınırlı
- Her $h, k \in B(Z)$ ve $x \in Z, y \in T$ için

$$0 < w_1(h, k) < 1 \text{ için } \frac{1}{2} |\mathfrak{I}(x, y, h(\eta(x, y))) - \mathfrak{I}(x, y, k(\eta(x, y)))| \leq w_1^2(h, k)$$

$$w_1(h, k) \geq 1 \text{ için } \frac{1}{2} |\mathfrak{I}(x, y, h(\eta(x, y))) - \mathfrak{I}(x, y, k(\eta(x, y)))| \leq w_1(h, k)$$

durumları sağlansın. Bu durumda Eş. 4.72 ile verilen fonksiyonel denkleminin bir çözümü vardır. Ayrıca bu çözüm bir sınırlı fonksiyondur.

İspat

Açıkça $B(Z)$ bir tam modular metrik uzaydır. Keyfi $\mu > 0$ için $x \in Z$ ve $h_1, h_2 \in B(Z)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} S(h_1)(x) &< f(x, y_1) + \mathfrak{I}(x, y_1, (h_1(\eta(x, y_1)))) + \mu \\ S(h_2)(x) &< f(x, y_2) + \mathfrak{I}(x, y_2, (h_2(\eta(x, y_2)))) + \mu \\ S(h_1)(x) &\geq f(x, y_1) + \mathfrak{I}(x, y_1, (h_1(\eta(x, y_1)))) \\ S(h_2)(x) &\geq f(x, y_2) + \mathfrak{I}(x, y_2, (h_2(\eta(x, y_2)))) \end{aligned} \quad (4.76)$$

olacak şekilde $y_1, y_2 \in T$ vardır. $\varsigma: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunu

$$\varsigma(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ t, & t \geq 1 \end{cases} \quad (4.77)$$

olarak tanımlayalım. O zaman hipotezde verilen ifade her $h, k \in B(Z)$ için

$$\frac{1}{2} |\mathfrak{I}(x, y, h(\eta(x, y))) - \mathfrak{I}(x, y, k(\eta(x, y)))| \leq \varsigma(w_1(h, k)) \quad (4.78)$$

Açıkça her $t > 0$ için $\varsigma(t) \leq t$ olduğu ve $\frac{\varsigma(t)}{t}$ fonksiyonunun azalmayan olduğu açıktır.

Bu durumda Eş. 4.77'yi kullanarak

$$\frac{1}{2} (S(h_1)(x) - S(h_2)(x)) < \frac{1}{2} (\mathfrak{I}(x, y, h_1(\eta(x, y_1))) - \mathfrak{I}(x, y, h_2(\eta(x, y_2)))) + \mu$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(S(h_1)(x) - S(h_2)(x)) &< \frac{1}{2}|\mathfrak{I}(x, y, h_1(\eta(x, y_1))) - \mathfrak{I}(x, y, h_2(\eta(x, y_2)))| + \mu \\ &\leq \varsigma(w_1(h_1, h_2)) + \mu \end{aligned} \quad (4.79)$$

elde edilir. Bu durumda Eş.4.79

$$\frac{1}{2}(S(h_1)(x) - S(h_2)(x)) < \varsigma(w_1(h_1, h_2)) + \mu \quad (4.80)$$

haline dönüşür. Benzer şekilde

$$\frac{1}{2}(S(h_2)(x) - S(h_1)(x)) < \varsigma(w_1(h_1, h_2)) + \mu \quad (4.81)$$

eşitsizliği de yazılabilir. Eş. 4.80 ve Eş. 4.81 yardımıyla

$$\frac{1}{2}|S(h_2)(x) - S(h_1)(x)| < \varsigma(w_1(h_1, h_2)) + \mu \quad (4.82)$$

elde edilir. Eş.4.82 düzenlediğimizde

$$w_1(S(h_2)(x), S(h_1)(x)) < \varsigma(w_1(h_1, h_2)) + \mu \quad (4.83)$$

bulunur. Eş.4.83 ise

$$w_1(S(h_2)(x), S(h_1)(x)) \leq \varsigma(w_1(h_1, h_2)) \quad (4.84)$$

haline dönüşür. Böylece S bir ς –büzölme olur. S , Teorem 4.1.2’deki şartları sağlar ve $h_* \in B(Z)$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir. Bu sabit nokta ise Eş. 4.72 ile verilen fonksiyonel denklemin bir çözümüdür.

Borisut ve diğerleri [40] de sabit nokta teoremlerinin diferansiyel denklemlere uygulamalarını araştırmışlardır. Biz de bu sonuçların modular metrik uzaylarda Feng –Liu tipi dönüşümler için sağlandığını göstereceğiz. Borisut ve diğerleri [40] de bir homojen olmayan lineer parabolik kısmi diferansiyel denklem için başlangıç değer problemini $x \in \mathbb{R}$ için

$$f_t(x, t) = f_{xx}(x, t) + S(x, t, f(x, t), f_x(x, t)), -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T, f(x, 0) = \phi(x) \geq 0 \quad (4.85)$$

olarak vermişlerdir. Burada S sürekli ϕ ve ϕ' sınırlı olacak şekilde ϕ sürekli türevlenebilir. Bu problemin bir çözümü olan ve $I = [0, T]$ kapalı aralığı olmak üzere $\mathbb{R} \times I$ üzerinde tanımlanan $f = f(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar:

- $C(\mathbb{R} \times I)$ tüm sürekli reel değerli fonksiyonları ifade etmek üzere
 $f, f_t, f_x, f_{xx} \in C(\mathbb{R} \times I)$
- $f, f_x \in \mathbb{R} \times I$ fonksiyonları sınırlıdır
- $f_t(x, t) = f_{xx}(x, t) + S(x, t, f(x, t), f_x(x, t)), (x, t) \in \mathbb{R} \times I$
- Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x, 0) = \phi(x) \geq 0$

Yukarıda verilen diferansiyel denklem aşağıdaki integral denkleme denktir:

Her $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < t \leq T$ için

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t) \phi(\delta) d\delta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t - u) S(\delta, u, f(\delta, u), f_x(\delta, u)) d\delta du \quad (4.86)$$

Burada

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \quad (4.87)$$

olarak tanımlanır. Yukarıda Eş. 4.85 ile verilen başlangıç değer probleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart Eş. 4.86 ile verilen integral denklemin bir çözümünün olmasıdır. Şimdi B kümesi $B = \{f(x, t): f, f_x \in C(\mathbb{R} \times I), \|f\| < \infty\}$ ve

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in I} |f(x, t)| + \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in I} |f_x(x, t)|$$

olmak üzere B kümesi üzerindeki modular metriği

$$w_\lambda(f, g) = \frac{1}{\lambda} |f - g|$$

olarak tanımlayalım. Açıkça B_w, w –tam modular metrik uzaydır ve bu uzayı üreten elemanlardan bağımsızdır. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.4.2. Teorem

Başlangıç değer problemi

$$f_t(x, t) = f_{xx}(x, t) + S(x, t, f(x, t), f_x(x, t)); -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T \quad (4.88)$$

ve $f(x, 0) = \phi(x) \geq 0$ olsun. Kabul edelim ki aşağıdakiler sağlansın:

- $c > 0$ olmak üzere $|s| < c$ ve $|p| < c$ için $S(x, t, s, p)$ fonksiyonu $IR \times I$ nin her bir kompakt alt kümesi için x ve t de düzgün Hölder süreklidir.
- Her $(s_1, p_1), (s_2, p_2) \in IR \times IR$ için $s_1 \leq s_2$ ve $p_1 \leq p_2$ seçimiyle

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} [S(x, t, s_2, p_2) - S(x, t, s_1, p_1)]$$

$$0 \leq c_s \left[\frac{s_2 - s_1 + p_2 - p_1}{\lambda} \right]$$

olacak şekilde $q \in (0, 1)$ iken bir sabit $c_s \leq \left(T + 2\pi^{\frac{-1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \leq q$ vardır.

- Sınırlı s ve p için S sınırlıdır.

Bu durumda problem bir çözüme sahiptir.

İspat

$x \in B_w$ yi yukarıda verilen problemin bir çözümü olması için ancak ve ancak bu denkleme denk olan integral denklemin de çözümü olacak şekilde seçelim.

G grafi $V(G) = B_w$ olarak ve

$$E(G) = \{(z, v) \in B_w \times B_w: \text{her bir } (x, t) \in IR \times I \text{ için } z(x, t) \leq v(x, t) \text{ ve } z_x(x, t) \leq v_x(x, t)\}$$

olarak tanımlandığında $E(G)$ kısmi sıralıdır ve $(B_w, E(G)), (A)$ özelliğini sağlar.

(A) Özelliği: $V(G)$ den alınan herhangi bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ olduğunda her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x) \in E(G)$ oluyorsa $(V(G), G)$ ikilisine (A) özelliğine sahiptir denir.

Her $x \in IR$ için $F: B_w \rightarrow B_w$ dönüşümünü

$$F(f(x, t)) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t) \phi(\delta) d\delta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t - u) S(\delta, u, f(\delta, u), f_x(\delta, u)) d\delta du$$

olarak tanımlayalım. Problemi çözdüğümüzde çözüm bize F nin sabit noktasını verecektir. $(z, v), (z_x, v_x), (F(z), F(v)), (F(z_x), F(v_x)) \in E(G)$ olduğundan, F nin tanımından ve hipotezdeki 2. maddeden

$$\frac{1}{\lambda} |F(v(x, t)) - F(z(x, t))| \leq c_S w_\lambda(z, v) \quad (4.89)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} |F(v_x(x, t)) - F(z_x(x, t))| &\leq c_S w_\lambda(z, v) \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \delta, t) \phi(\delta) d\delta \\ &\leq 2\pi^{\frac{-1}{2}} T^{\frac{1}{2}} w_\lambda(z, v) \end{aligned} \quad (4.90)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} w_\lambda(F(z), F(v)) &\leq (T + 2\pi^{\frac{-1}{2}} T^{\frac{1}{2}}) c_S w_\lambda(z, v) \\ w_\lambda(F(z), F(v)) &\leq c w_\lambda(z, v); \quad c \in (0, 1) \\ \lambda |F(z) - F(v)| &\leq \lambda |z - v| \end{aligned} \quad (4.91)$$

bulunur. Eş.4.91 Feng – Liu anlamında göz önüne alınırsa $b \in (0, 1)$ için $b w_\lambda(z, v) \leq w_\lambda(z, F(z))$ olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda |v - F(v)| &\leq \lambda H_d(F(z), F(v)) \leq \lambda |z - v| \\ d(v, F(v)) &\leq H_d(F(z), F(v)) \leq d(z, v) \\ w_\lambda(v, F(v)) &\leq w_\lambda(z, v) \end{aligned} \quad (4.92)$$

bulunur. Buradan $F(z^*) = z^*$ olacak şekilde $z^* \in B_w$ vardır. Böylece problemimiz bir çözüme sahip olur





5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde tek ve çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve bu teoremin tarihsel gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde modular metrik uzay kavramı incelenmiş, bu uzayın temel tanım ve özellikleri ifade edilmiştir. Ayrıca modular metrik ve normal metrik arasındaki ilişki Chistyakov tarafından yapılan çalışmalar yardımıyla açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde modular metrik uzaylarda tek ve çoğul değerli büzülme dönüşümleri için verilen sabit nokta teoremleri hatırlatılmış, çoğul değerli dönüşümler için Abdou ve Khamsi tarafından verilen ve çalışmalarımızın temelini oluşturan tanımlar verilmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde Caristi ve Feng- Liu tipi dönüşümler ile ψ , φ şartını sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilmiş ve konunun daha iyi anlaşılabilmesi için Caristi tipi dönüşümler için fonksiyonel denklemlerin ve Feng- Liu tipi dönüşümler için diferansiyel problemlerin çözümünde uygulamaları incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, sabit nokta teorisinin daha genel metrik uzaylara genişletilmesi ve yeni uygulama alanları elde edilmesi amaçlanmıştır. Modular metrik uzay kavramı görece yeni bir kavram olmasına rağmen bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Genelleştirilmiş Modular Metrik Uzay, Modular G- Metrik uzay, Modular S- Metrik Uzay bunlardan sadece birkaçıdır. Bu durumda bu çalışmada verilen sonuçlar yeni ifade edilen bu tür genelleştirilmiş metrik uzaylar için temel teşkil edecektir. Bu sayede sabit nokta teorisi daha geniş bir alanda incelenebilir ve yeni sonuçlar elde edilerek literatüre kazandırılabilir.



KAYNAKLAR

1. Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische annalen*, 71(1), 97-115.
2. Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamental mathematics* 3(1), 133-181.
3. Rakotch, E. (1962). A note on contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 13(3), 459-465.
4. Reich, S. (1983). Some problems and results in fixed point theory. *Contemp. Math*, 21, 179-187.
5. Rhoades, B. E. (2001). Some theorems on weakly contractive maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 47(4), 2683-2693.
6. Nadler, S. B. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2), 475-488.
7. Nakano, H. (1950). *Modulare semi-ordered linear spaces*. Tokyo, Maruzen Company.
8. Koshi, S., Shimogaki, T. (1961). On F-norms of quasi-modular spaces. *Journal of the Faculty of Science Hokkaido University. Ser. 1 Mathematics*, 15(3-4), 202-218.
9. Abdou, A. A., Khamsi, M. A. (2014). Fixed points of multivalued contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014(1), 249.
10. Abdou, A. A., Khamsi, M. A. (2013). On the fixed points of nonexpansive mappings in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(1), 229.
11. Musielak, J. (1983). Orlicz spaces and modular spaces, *Lecture notes in Mathematics*, 1034, 1-216.
12. Musielak, J., Orlicz, W. (1959). On modular spaces. *Studia Mathematica*, 18(1), 49-65.
13. Yamamuro, S. (1959). On conjugate spaces of Nakano spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90(2), 291-311.
14. Khamsi, M. A., Kozłowski, W. M., and Reich, S. (1990). Fixed point theory in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 14(11), 935-953
15. Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces. I: basic concepts, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1), 1-14
16. Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces, II: application to superposition operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1), 15-30.
17. Azadifar, B., Maramaei, M., and Sadeghi, G. (2013). On the modular G-metric spaces and fixed point theorems. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 6(4), 293-304.

18. Chaipunya, P., Cho, Y. J., and Kumam, P. (2012). Geraghty-type theorems in modular metric spaces with an application to partial differential equation. *Advances in Difference Equations*, 2012(1), 1-12.
19. Chaipunya, P., Kumam, P. (2015). An observation on set-valued contraction mappings in modular metric spaces, *Thai Journal of Mathematics*, 13(1), 9-17.
20. Dehghan, H., Gordji, M. E., Ebadian, A. (2012). Comment on ‘Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*,
21. Ege, M. E., Alaca, C. (2016). Some properties of modular S-metric spaces and its fixed point results. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 20(1), 24-33.
22. Kilinc, E., Alaca, C. (2014). A fixed point theorem in modular metric spaces. *Advanced Fixed Point Theory*, 4(2), 199-206.
23. Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W., and Kumam, P. (2011). Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011(1), 1-9.
24. Padcharoen, A., Kumam, P. and Gopal, D. (2017). Coincidence and periodic point results in a modular metric spaces endowed with a graph and applications. *Creative Mathematics and Informatics*, 26, 95-104.
25. Turkoglu, D., Manav, N. (2018). Fixed point theorems in a new type of modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2018(1), 1-10.
26. Chistyakov, V. V. (2008). Modular metric spaces generated by F-modulars. *Folia Math*, 14(3).
27. Chistyakov, V. V. (2012). Fixed points of modular contractive maps. In *Doklady Mathematics* .86(1), 515-518.
28. Caristi, J. (1976). Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 215, 241-251
29. Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2), 324-353.
30. Khojasteh, F., Karapinar, E., and Khandani, H. (2016). Some applications of Caristi’s fixed point theorem in metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2016(1), 1-10.
31. Altun, I., Sahin, H., and Turkoglu, D. (2018). Fixed point results for multivalued mappings of Feng-Liu type on M-metric spaces. *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 7, 2018
32. Altun, I., Arifi, N.A., Jleli, M., Lashin, A. and Samet, B. (2016). Feng-Liu type fixed point results for multivalued mappings on JS-metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 3892-3897.

33. Turkoglu, D., Manav, N.(2019). Feng-Liu Type Fixed Point Results for Multivalued Mappings in GMMS. *Mathematics*, 7(1031).
34. Đorić, D. (2009). Common fixed point for generalized (ψ, ϕ) -weak contractions. *Applied Mathematics Letters*, 22(12), 1896-1900.
35. Hosseini, V. R. (2010). Common fixed point for generalized (ϕ, ψ) -weak contractions mappings condition of integral type. *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol 4, no. 31, 1534-1543
36. Zhang, Q., Song, Y. (2009). Fixed point theory for generalized ϕ -weak contractions. *Applied Mathematics Letters*, 22(1), 75-78.
37. Turkoglu, D., Kilinc, E. (2016). Some fixed point results for caristi type mappings in modular metric spaces with an application. *International Journal of Analysis and Applications*, 12(1), 15-21.
38. Turkoglu, D., Kilinc, E. (2020). Some Results for Feng-Liu type Mappings in Modular Metric Spaces. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 12-22.
39. Turkoglu, D., Kilinc, E. (2020). (ϕ, ψ) -Contraction Condition for Multivalued Mappings in Complete Modular Metric Spaces. *Asian Research Journal of Mathematics*, 16(11), 54-61.
40. Borisut, P., Khammahawong K., and Kumam, P.(2008). Fixed point theory approach to existence of solutions with differential equations. *Differential Equations: Theory and Current Research*, 1.
41. Abdou, A. A. (2016). Some fixed point theorems in modular metric spaces. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 4381-4387
42. Alfuraidan, M.R., Khamsi, M.A. and Manav, N. (2017). A Fixed Point Theorem for Uniformly Lipschitzian Mappings in Modular Vector Spaces. *Filomat*, 31, 5435-5444.
43. Almezal, S. Ansari, Q. H., and Khamsi, M. A. (Eds.). (2014). *Topics in fixed point theory* 5 Switzerland: Springer, 65-100.
44. Benavides, T.D., Khamsi, M.A. and Samadi, S. (2001). Uniformly Lipschitzian mappings in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 46, 267-278
45. Chistyakov, V.V. (2015). *Metric modular spaces: Theory and applications*. Switzerland Springer, 65-78.
46. Ćirić, L. (2009). Multi-valued nonlinear contraction mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(7-8), 2716-2723.
47. Ćiric, L. B., Ume, J. S. (2002). Common fixed point theorems for multi-valued non-self mappings. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, 60(3-4), 359-371.

48. Evako, A. V. (2017). Structure of a Parabolic Partial Differential Equation on Graphs and Digital spaces. Solution of PDE on Digital Spaces: a Klein Bottle, a Projective Plane, a 4D Sphere and a Moebius Band. *Applied Mathematics and Physics*, 5(1), 19-27.
49. Feng, Y., Liu, S. (2006). Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 317(1), 103-112.
50. Jleli, M., Samet, B. (2015). A Generalized Metric Space and Related Fixed Point Theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 61(14), 1-14.
51. Khamsi, M. A., Kirk, W. A. (2011). *An introduction to metric spaces and fixed point theory* (Vol. 53). Toronto, John Wiley & Sons 197-243.
52. Khamsi, M. A. (2009). Remarks on Caristi's fixed point theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(1-2), 227-231.
53. Khamsi, M.A., Kozłowski, W.M. (2010). On asymptotic pointwise contractions in modular function spaces. *Nonlinear Analysis*, 73, 2957-2967.
54. Mizoguchi, N., Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 141(1), 177-188.
55. Suzuki, T. (2008). Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 340, 752-755



GAZİ GELECEKTİR..