

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine KILINÇ

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı : TOPOLOJİ

MANİSA 2014

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine KILINÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.07.2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 11.08.2014

Tez Danışmanı : Yrd. Doç . Dr. Cihangir ALACA

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İsmet KARACA

Doç. Dr. Ali MUTLU

MANİSA 2014

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
GİRİŞ.....	vi
1. BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. Metrik Uzaylar Üzerine Bazı Temel Kavramlar.....	1
1.2. Sabit Nokta Teorisinde Bazı Temel Kavramlar.....	4
2. BÖLÜM	
MODÜLER METRİK UZAYLAR	8
2.1. Modüler Uzay Kavramı.....	9
2.2. Metrik Modüler Kavramı.....	12
2.3. Modüler Uzaylar ve Modüler Metrik Uzay Kavramı.....	15
2.4. Modüler Metrik Uzaylarda Dizi ve Yakınsaklık Kavramları.....	21
3. BÖLÜM	
MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	27
4. BÖLÜM	
BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN MODÜLER METRİK VERSİYONLARI.....	41
SONUÇ VE BULGULAR.....	61
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	65

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
d_w^*	: Konveks metrik
X_w	: Modüler metrik uzay
X_w^*	: Konveks modüler metrik uzay
w_λ	: Metrik modüler
w_λ^*	: Konveks metrik modüler
ρ	: Modüler
(x_n)	: Dizi
$\{T^n x\}_{n=0}^\infty$	: İterasyon dizisi

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarım ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, fikirleri ve deneyimleriyle çalışmalarım ışıltı tutan, gerek bilgisi gerek manevi desteğiyle her zaman yanımda olan değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Cihangir ALACA'ya ve öğrenimim boyunca bana emeği geçen tüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve güvenden dolayı sevgili aileme sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Emine KILINÇ
MANİSA 2014

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Chistyakov [10,11,12] tarafından verilen modüler metrik uzay kavramının temel tanımları ve bu uzayın metrik özellikleri incelenmiştir. Chistyakov [13], Mongkolkeha, Sintunavarad, Kumam [30] ve Cho, Saadati, Sadeghi [14] makaleleri yardımıyla bazı temel sabit nokta teoremleri verilmiştir. İlk olarak modüler metrik uzaylarda Kılınç ve Alaca [25] tarafından verilen yerel büzülme, (ε, k) -düzgün yerel büzülme, ε -zincirlenebilme ve zayıf büzülme dönüşümü kavramlarını tanımlanmış ve tam modüler metrik uzaylarda bu kavramlar için bir sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca, Kılınç ve Alaca [27] tarafından Ćirić tipi genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi ispatlanmış ve tam modüler metrik uzaylarda genelleştirilmiş büzülme dönüşüm sınıfının bir ortak sabit noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Sonra, bu uzaylar üzerinde Meir ve Keeler [29] tipindeki büzülebilme şartı için bazı sabit nokta sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlar Ćirić [15,16], Meir ve Keeler [29] ve Reich [33] sonuçlarının modüler metrik versiyonudur ve Kılınç ve Alaca [25] sonuçlarının genelleştirmeleridir. Son olarak, modüler metrik uzaylarda değişmeli dönüşümler için iki ana teorem ispatlanmıştır. Bu sonuçlar Jungck [20] ve Fisher [19]'in sonuçlarının modüler metrik versiyonudur.

ABSTRACT

In this thesis, fundamental definitions of modular metric space concept and metric properties of this space which was given by Chistyakov [10,11,12] are investigated. Some basic fixed point theorems are given with the help of Chistyakov [13], Mongkolkeha, Sintunavarad, Kumam [14] and Cho, Saadati, Sadeghi [30] papers. Firstly, locally contraction, (ε, k) -uniformly locally contractive mappings, ε -chinable, weak contraction mapping concepts are defined and a fixed point theorem for these concepts is proved in complete modular metric spaces which was given by Kılınç and Alaca [25]. Further, by Kılınç and Alaca [27] some fixed point theorems for Ćirić type, the generalized contraction mappings are proved and the existence and uniqueness of common fixed point of a class of generalized contraction mappings are shown in these spaces. Later, some fixed point results for Meir and Keeler [29] type contractive condition on these spaces are given. These results are modular metric versions of the Ćirić [15,16], Meir and Keeler [29] and Reich's [33] results and the generalizations of earlier results of Kılınç and Alaca [25]. Finally, two main fixed point theorems for commuting mappings in modular metric spaces are proved. These results are modular metric versions of results of Jungck [20] and Fisher [19].

1.0 GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi”, 1912 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer“ in kapalı birim yuvarından, yine aynı kapalı birim yuvarı üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün bir sabit noktasının varlığını” göstermiştir. 1922’de Stefan Banach “Banach Sabit Nokta Teoremi (veya büzülme dönüşüm prensibi) olarak bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir.

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca, her bir $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.”

Bu teorem, daha önce Euler ve Cauchy’nin 1844’deki “sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon için verilen diferansiyel denklemin bir çözümünün varlığı ve tekliği” çalışmalarında kullanılmıştır. 1877’de Lipschitz, Cauchy’nin ispatını Lipschitz koşulunu kullanarak daha da basitleştirmiştir. 1890’da Picard iterasyon metodunu kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfına uygulamış ve en son olarak Banach yukarıda verilen teoremi bir formül altında toplamıştır. Daha sonraki yıllarda Banach’ın bu çalışması esas alınarak bu alanda birçok genelleme yapılmıştır. Bunlardan bazıları Ciric, Fisher, Meir ve Keeler gibi matematikçilerin çalışmalarıdır [15,16,17,19,29]. Bu çalışmaların dışında Jungck tam metrik uzaylarda değişmeli dönüşümler için sabit nokta teoremlerini incelemiş ve Jungck’un çalışmaları Fisher ve diğer matematikçiler tarafından geliştirilmiştir [19,20,21,22].

Günümüzde “sabit nokta teorisi” çalışmaları matematikte diferansiyel denklemler ve integral denklemler gibi denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliğini göstermede kullanılmaktadır. Bunun yanında bu teori matematik dışında fizik, mühendislik, tıp, haberleşme ve ekonomi gibi farklı disiplinlerde kendine bazı uygulama alanları bulmuştur.

Modüler uzay kavramı ise, Nakano [31] tarafından 1950 yılında verilmiş ve Koshi ve Shimogaki [28] tarafından geliştirilmiştir. Bu uzayın teoride yetersiz kalması sonucu 2008 de Chistyakov [11] F-modüler tarafından oluşturulan modüler metrik uzay kavramını tanıtmıştır. Bu düşünce ile birlikte herhangi bir küme üzerinde bir modülerin nasıl tanımlanacağını göstermiştir. 2010 yılında ise modüler tarafından oluşturulan metrik uzayların teorisini geliştirmiştir [11,12]. Daha sonra, 2012 yılında bu uzaylar için bir sabit nokta teoremi vermiştir [13]. Son yıllarda, Mongkolkeha ve Sintunavarad [30] ve Cho, Saadati ve Sadeghi [14] modüler metrik uzaylarda bazı dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlamıştır. Bu gelişmeyle birlikte pek çok yazar metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremlerinin modüler metrik uzaylarda karşılığını araştırmıştır [1,8,25,26,27,30,35,36,37,38,39].

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle “**metrik uzay**” kavramı ve bu uzayın sabit nokta teorisi için bilinmesi gereken bazı özelliklerinin verilmesi amaçlanmıştır. Daha sonra “**sabit nokta teorisi**” için bazı temel tanım ve kavramlar verilmeye çalışılmıştır.

1.1. METRİK UZAYLAR ÜZERİNE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Metrik veya metrik uzay kavramı klasik analizden modern analize geçişte çok önemli bir köprüdür. Çünkü reel veya kompleks uzaylardaki işlemleri herhangi bir uzaya taşımamıza olanak sağlar. Şimdi, metrik uzay kavramını vererek başlayalım. Bu bölümde yoğun olarak C. Yıldız’ın “Genel Topoloji” [41] kitabından yararlanılmıştır.

Tanım 1.1.1. X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlarsa, d ye X üzerinde bir **metrik**, (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir:

$\forall x, y, z \in X$ için,

$$m_1) d(x, y) \geq 0,$$

$$m_2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$m_3) d(x, y) = d(y, x),$$

$$m_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

d fonksiyonu $m_1), m_3)$ ve $m_4)$ aksiyomları ile birlikte

$$(m_2^*) x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$$

şartını sağlıyorsa d ye **metrikimsi** (pseodo metric), (X, d) ikilisine de **metrikimsi uzay** denir. (X, d) metrik uzayı kısaca X metrik uzayı olarak ifade edilir. Metrik uzaylar için verilecek birçok sonuç metrikimsi uzaylar içinde doğrudur.

Her $(x, y) \in X \times X$ ikilisinin d fonksiyonu altındaki $d(x, y)$ görüntüsüne x ile y arasındaki uzaklık denir. Böylece, $m_1)$ aksiyomu iki nokta arasındaki uzaklığın negatif olamayacağını, $m_2)$ aksiyomu bir noktanın kendisine olan uzaklığının sıfır olduğunu, $m_3)$ aksiyomu x in y ye uzaklığının y nin x e uzaklığına eşit olduğunu ifade eder. Üçgen eşitsizliği olarak bilinen son aksiyom aynı doğrultuda olmayan üç farklı noktanın bir üçgen belirttiğini ve bu üçgende iki kenar toplamının üçüncü kenardan daima büyük olduğunu ifade eder. Eşitlik ise bu üç nokta doğrusal olduğunda görülür.

Herhangi bir küme üzerinde birçok metrik tanımlanabilir. Bunları içinde en bilinenlerinin başında $| \cdot |$ simgesi reel ekseninde mutlak değer fonksiyonunu göstermek üzere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ' den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanan

$$d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$$

mutlak değer metriği ya da kısaca mutlak metrik gelir. Bu metrik iki reel sayı arasındaki uzaklığı vermektedir. Bu metrik aynı zamanda $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış metriği olarak da adlandırılır.

Bunun dışında Öklid metriği, maksimum metrik, aşık ar metrik, diskret (ayrık) metrik gibi çok sayıda metrik tanımlanabilir.

Şimdi metrik uzayların bazı temel özelliklerini incelemeye çalışacağız. Bir metrik uzay üzerindeki bir fonksiyonun sürekliliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.1.2. (X, d) ve (Y, d') metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı pozitif bir δ sayısı varsa, f fonksiyonuna x_0 **noktasında sürekli** denir.

Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X **uzayında sürekli** denir.

Tanım 1.1.3. (X, d) metrik uzay, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ ' den X ' e tanımlanan her fonksiyona, X **uzayı üzerinde bir dizidir** denir ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ veya (x_n) ile gösterilir. Diğer bir deyimle X metrik uzayında bir dizi, elemanları doğal sayılar tarafından indislenmiş X in bir alt kümesidir, yani

$$(x_n) = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tanım 1.1.4. (X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ varsa (x_n) dizisine x **noktasına yakınsaktır** denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

(X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Eğer (X, d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir.

Aşağıda, Cauchy dizisi ile yakınsaklık arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Teorem 1.1.5. (X, d) metrik uzay ve (x_n) bu uzay üzerinde yakınsak herhangi bir dizi olsun. Bu takdirde (x_n) bir Cauchy dizisidir.

İspat: (x_n) , (X, d) de yakınsak bir dizi ise $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. Dolayısıyla aynı n_0 doğal sayısı için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

buluruz. Böylece, (x_n) bir Cauchy dizisi olur. $\square$

Uyarı 1.1.6. Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani her Cauchy dizisi yakınsak değildir.

Örneğin $X = (0,1)$ kümesi üzerinde alışılmış metriğin olduğunu kabul edersek $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi X metrik uzayında bir Cauchy dizisidir, ancak bu dizi X metrik uzayında yakınsak değildir.

Aşağıda bir Cauchy dizisinin yakınsaklığı ile ilgili bir özellik vereceğiz.

Teorem 1.1.7. (X, d) bir metrik uzay, (x_n) bir Cauchy dizisi ve (x_{n_i}) bu dizinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_i}) yakınsak ise (x_n) dizisi de yakınsaktır.

İspat: $(x_{n_i}) \rightarrow a$ olsun. O halde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x_{n_i}, a) < \varepsilon$ olacak biçimde bir m_0 doğal sayısı vardır. Ayrıca (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. $N = \max\{n_0, m_0\}$ olarak seçilirse, her $n \geq N$ için

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, a) < 2\varepsilon$$

elde edilir. Yani $(x_n) \rightarrow a$ olur. $\square$

Uyarı 1.1.8. Bu özelliğin sadece Cauchy dizileri için geçerli olduğuna herhangi bir dizi için geçerli olmadığına dikkat edelim. Gerçekten $(x_n) = (-1)^n$ dizisi için $(x_{2n}) \rightarrow 1$ ve $(x_{2n+1}) \rightarrow -1$ olmasına karşılık (x_n) dizisi yakınsak değildir.

1.2. SABİT NOKTA TEORİSİNDE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde önce sabit nokta kavramını incelemeye çalışacağız. Daha sonra “Banach Büzülme Prensibi” olarak bilinen büzülme dönüşümü kavramını ve bu kavramla büzülebilir,

genişlemeyen ve Lipschitz koşulunu sağlayan dönüşümler arasındaki ilişkiyi vermeye çalışacağız.

Tanım 1.2.1. X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere, $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu $x \in X$ noktasına T dönüşümünün bir **sabit noktası** denir.

Bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktası olmayabilir, birden fazla olabilir, tek olabilir veya sonsuz sayıda olabilir. Aşağıda bu durumlarla ilgili örnekler incelenmiştir.

Örnekler 1.2.2. $X = [0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere

$$a) \quad T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün verilen aralıklar için X ' de sabit noktası yoktur.

b) $T(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ olmak üzere X ' de iki farklı sabit noktası vardır.

c) $T(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $x = 1$ olmak üzere X ' de bir tek sabit noktası vardır.

d) $T(x) = x$ dönüşümünün ise X ' de sonsuz tane sabit noktası vardır. Bu dönüşüme özdeşlik dönüşümü denir.

Tanım 1.2.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \geq 0$ reel sayısı varsa, T dönüşümü **Lipschitz koşulunu sağlıyor** denir.

Eğer $\alpha < 1$ ise T 'ye **büzülme (contraction) dönüşümü**, $\alpha = 1$ ise T 'ye **genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm** denir. Eğer her $x, y \in X$ için, $(x \neq y)$

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa T 'ye **büzülebilir (contractive) dönüşüm** denir.

Not 1.2.4. Hiçbir uzayda özdeşlik dönüşümü bir büzülme dönüşümü olamaz. Çünkü $T(x) = x$ özdeşlik dönüşümü için, her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y) \neq \alpha \cdot d(x, y) .$$

elde edilir. Böylece T büzülme dönüşümü olmaz.

Not 1.2.5. Bu dönüşümler arasındaki ilişkiyi verecek olursak;

Büzülme Dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir Dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen Dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz Koşulunu Sağlıyor.

Teorem 1.2.6. Her büzülme dönüşümü düzgün süreklidir.

İspat : (X, d) ve (Y, d_1) metrik uzaylar, $T : (X, d) \rightarrow (Y, d_1)$ büzülme dönüşümü olsun. Buna göre,

$$d_1(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) \leq d(x, y)$$

olacak şekilde $0 < \alpha < 1$ sayısı vardır. $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ olarak alınırsa, $d_1(T(x), T(y)) < \varepsilon$

olur. Sonuçta, T dönüşümü düzgün süreklidir. $\square$

Şimdi “Banach Büzülme Dönüşüm Prensibi” olarak bilinen ve 1922’de Banach tarafından verilen teoremi inceleyebiliriz.

Teorem 1.2.7. (Banach Sabit Nokta Teoremi) [9]: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Buna göre, T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (veya $T(x) = x$ dönüşümünün (denkleminin) bir tek çözümü vardır.)

İspat: $x_0 \in X$ keyfi olsun. (x_n) iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), x_3 = T(x_2), \dots, x_n = T(x_{n-1}), \dots$$

olarak seçelim (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $T : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(T(x_1), T(x_0)) \leq \alpha d(x_1, x_0) = d(T(x_0), x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(T(x_2), T(x_1)) \leq \alpha d(x_2, x_1) \leq \alpha^2 d(T(x_0), x_0) \\ &\vdots \\ d(x_{n+1}, x_n) &\leq \alpha^n d(T(x_0), x_0) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan m, n pozitif sayılarını $m > n$ olarak alalım. Üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\
&= \alpha^n (\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \cdots + 1) d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < \alpha < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$.

Yani, (x_n) X kümesi üzerinde bir Cauchy dizisidir.

X uzayı tam metrik uzay olduğundan (x_n) dizisinin bu uzayda yakınsadığı bir nokta vardır. Yani, $\exists x_0 \in X$ var $\ni x_n \rightarrow x_0$.

Şimdi, $T(x_0) = x_0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
d(T(x_0), x_0) &\leq d(T(x_0), x_n) + d(x_n, x_0) \\
&= d(T(x_0), T(x_{n-1})) + d(x_n, x_0) \\
&\leq \alpha d(x_0, x_{n-1}) + d(x_n, x_0)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$d(x_n, x_0) \rightarrow 0, d(x_0, x_{n-1}) \rightarrow 0$$

olduğundan,

$$d(T(x_0), x_0) \leq \alpha d(x_0, x_{n-1}) + d(x_n, x_0) \rightarrow 0.$$

elde edilir. Buradan;

$$d(T(x_0), x_0) = 0.$$

olur. Yani, $T(x_0) = x_0$ bulunur.

Şimdi bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. Bunun için x_0 ' dan farklı bir başka sabit nokta $y_0 \in X$ olsun. Buna göre, $T(y_0) = y_0$ ' dır. Buradan,

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq \alpha d(x_0, y_0)$$

$0 < \alpha < 1$ olduğundan, $d(x_0, y_0) = 0$. Yani, $x_0 = y_0$.

Yani, T dönüşümünün sabit noktası tektir. Sonuç olarak, $T(x) = x$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Yukarıda verilen teorem daha çok diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliğini incelemek için kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra büzülme dönüşüm prensibinin çeşitli genelleştirmeleri verilmiştir. Bunlar arasında en bilinenleri Ćirić [15,16],

Edelstein [18], Rakotch [32], Reich [33] ve Kannan [23] gibi matematikçilerin yaptığı çalışmalardır.

2. BÖLÜM

MODÜLER METRİK UZAYLAR

Metrik uzayların bir genelleştirmesi olan “**modüler uzay**” kavramı ilk olarak 1950 yılında Nakano [31] tarafından verilmiş ve Koshi ve Shimogaki [28] ve diğerleri tarafından geliştirilmiştir. Bu teorilerin daha ileri ve tam genelleştirmeleri Luxemburg, Musielak, Orlicz, Mazur, Turpin ve çalışma arkadaşları tarafından incelenmiştir. Günümüzde modülerler ve modüler uzaylar teorisi özellikle geniş uygulamalar içeren çeşitli Orlicz uzaylarının çalışmalarında kapsamlı olarak uygulanmaktadır.

“**Modüler metrik uzay**” tanımını ilk olarak 2008’de Chistyakov [11], F-modülerler tarafından oluşturulan modüler metrik uzaylar için vermiş ve bu uzayların tanımını genişletmiştir. Aynı düşünceyle Chistyakov [12] keyfi bir küme üzerinde bir modüler tanımını vermiş ve 2010’da modüler metrik uzay olarak adlandırılan, modülerler tarafından oluşturulan metrik uzay teorisini geliştirmiştir.

Bu bölüme ilk olarak bir $\rho(x)$ modülleri tarafından oluşturulan modüler uzayların temel tanım ve özelliklerini vermeye çalışacağız. İkinci kısımda bu uzayların bir genelleştirmesi olan modüler metrik uzay kavramını ve bu uzayın bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz.

2.1. MODÜLER UZAY KAVRAMI

Aşağıdaki tanım Orlicz tarafından 1961 yılında verilmiştir.

Tanım 2.1.1. $X, \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli eğer X in keyfi x, y elemanları için aşağıdaki üç şartı sağlarsa bir **modüler** olarak adlandırılır:

$$(A.1) \quad \rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(A.2) \quad |\alpha| < 1 \text{ olan her } \alpha \text{ skaleri için, } \rho(\alpha x) = \rho(x),$$

$$(A.3) \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{ve} \quad \alpha + \beta = 1 \text{ için } \rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y).$$

Eğer (A.3) yerine,

$$(A.4) \quad \alpha, \beta \geq 0, \text{ bir } s \in (0, 1] \text{ ile birlikte } \alpha^s + \beta^s = 1 \text{ için}$$

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$$

yazılabiliyorsa, ρ, s – konveks olarak adlandırılır, eğer $s = 1$ ise ρ bir **konveks modülerdir**.

ρ, X üzerinde bir modülerse,

$$X_\rho = \{x \in X : \lambda \rightarrow 0^+ \text{ iken } \rho(\lambda x) \rightarrow 0\} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan küme bir modüler uzay olarak adlandırılır. X_ρ, X in bir vektör alt uzayıdır ve

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left(\frac{x}{\lambda} \right) \leq \lambda \right\}, x \in X_\rho \quad (2.2)$$

olarak tanımlanan bir F – $norm$ ile donatılmıştır.

Böylece $\|\cdot\|_\rho : X_\rho \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(F_1) \quad x \in X_\rho \text{ için } \|x\|_\rho = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(F_2) \quad \text{Her } x \in X_\rho \text{ için } \|-x\|_\rho = \|x\|_\rho,$$

$$(F_3) \quad \text{Her } x, y \in X_\rho \text{ için } \|x + y\|_\rho \leq \|x\|_\rho + \|y\|_\rho,$$

$$(F_4) \quad c_n, c \in \mathbb{R}, x_n, x \in X_\rho \text{ ve } n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\rho = 0 \text{ ise o zaman}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n x_n - cx\|_\rho = 0.$$

Eğer ρ konveks ise, X_ρ modüler uzayı

$$X_\rho^* = \{x \in X : \exists \lambda = \lambda(x) > 0 \ni \rho(\lambda x) < \infty\} \quad (2.3)$$

uzayı ile çakışır ve

$$\|x\|_\rho^* = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left(\frac{x}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

fonksiyoneli X_ρ^* in bir normudur. Bu norm $\|x\|_\rho$ normuna denktir.

Bugün birçok genelleştirmesi olan modüler lineer (veya hemen hemen lineer) uzaylar teorisi iyi bilinen ve gelişmiş bir teodir. Ayrıca bununla ilgili konu ve tarihsel yorumları üzerine kapsamlı kaynakça içeren teori ve uygulamalara bağı kitaplar bulunabilir. Fakat, analizin küme-değerli problemleri ile ilgili üzerine bir cebirsel yapı konulmuş X kümesi için verilmiş modülerlik tanımı çok sınırlıdır ve lineer uzaylardaki modülerlik teorisi yetersiz kalır. Bu durumun giderildiği modüler metrik uzaylar teorisini vereceğiz ve klasik tanımla birlikte anlaşılır hale gelen keyfi bir X kümesi üzerinde bir modülerin yeni bir tanımlarını inceleyeceğiz.

2.2. METRİK MODÜLER KAVRAMI

Şimdi modüler uzayı tanımlamak için bu uzayın fiziksel yorumunu vermeye çalışalım. Bir küme üzerindeki bir metrik fonksiyonu, kümenin herhangi iki noktası arasındaki negatif olmayan sonlu uzaklığı gösterirken küme üzerindeki bir modüler fonksiyonu, negatif olmayan (muhtemelen sonsuz değerli olabilen) “hızların bir bölgesini” gösterir. Her λ zamanı için (mutlak değer) $w_\lambda(x, y)$ ortalama hızı, x den y ye hareket boyunca aldığı λ zamanı, x ve y noktaları arasındaki uzaklığın alındığı yolla bağlantılıdır. Şimdi uygun bir örnek vererek daha detaylı bir yorum yapmaya çalışalım:

Eğer $d(x, y)$, x den y ye uzaklık ve $\lambda > 0$ sayısı zaman olarak alınırsa,

$$w_\lambda(x, y) = \frac{d(x, y)}{\lambda} \quad (2.4)$$

değeri $d(x, y)$ uzaklığını kat etmek için λ süresince x den y ye hareket edilen ortalama hızdır. (2.4) deki eşitliğin aşağıdaki özellikleri sağlaması beklenir.

X boştan farklı bir küme, $\lambda \in (0, \infty)$ alındığında ispatlarda notasyonların sadeliği için her $\lambda > 0$ ve $\forall x, y \in X$ için $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$, $w_\lambda(x, y) = w(\lambda, x, y)$ eşitliği ile yazılabilen bir fonksiyon olur.

Tanım 2.2.1. [12]: X boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlaması durumunda bir **metrik modülerdir** denir:

(i) Verilen her $x, y \in X$ ve her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (2.5)$$

(ii) Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x)$, (2.6)

(iii) Her $\lambda, \mu > 0$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

$$w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \max \{w_\lambda(x, z), w_\mu(z, y)\} \leq w_\lambda(x, z) + w_\mu(z, y). \quad (2.7)$$

(i) X deki x ve y noktaları çakışır (ve $d(x, y) = 0$) ancak ve ancak her $\lambda > 0$ zamanında $w_\lambda(x, y) = 0$ hızıyla x den y ye hareket eder. (yani her λ zamanında hareketsizlik gereklidir.)

(ii) Uzaklık fonksiyonunun simetrik olduğunu bildiğimizden yani $d(x, y) = d(y, x)$ ise buradan her $\lambda > 0$ zamanı için x den y ye hareket boyunca ortalama hız, ters yönde hareket boyunca oluşan ortalama hızla aynıdır.

(iii) (2.4) deki eşitlikle verilen metrik modülerin üçüncü özelliği üçgen eşitsizliğinin bir emsali olan (hızlar için) en önemli özelliğidir. Kabul edelim ki x den y ye hareket iki farklı yolla yapılsın. Bu hareket için oluşan süre

a) üçüncü bir $z \in X$ noktasından geçerek ulaşıldığında,

b) x den y ye direkt ulaşıldığında,

hep aynı olsun. Eğer λ , x den z ye ve μ , z den y ye gitmek için gereken zamansa, o zaman bunlara karşılık gelen ortalama hızlar $w_\lambda(x, z)$ ve $w_\mu(z, y)$ dir.

(a) durumundaki hareket için oluşan toplam zaman $\lambda + \mu$ dür. Yani x den y ye hareket için oluşan ortalama hız, (b) durumu için $w_{\lambda+\mu}(x, y)$ ye eşittir. $d(x, y)$ uzaklığı $d(x, z) + d(z, y)$ uzaklığını aşmadığında fiziksel yorumdan açıktır ki $w_{\lambda+\mu}(x, y)$ hızı $w_\lambda(x, z)$ veya $w_\mu(z, y)$ hızlardan en az birini aşmaz.

Eğer (i) şartı yerine sadece;

(i.) Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, x) = 0$ şartını alırsak böylece w bir yarı (metrik) modüler olur. Eğer w , (i.) ve

(i.) Her $x, y \in X$ için $w_\lambda(x, y) = 0$ olacak şekilde muhtemelen x ve y ye bağlı bir $\lambda > 0$ sayısı varsa o zaman $x = y$ olur.

şartını sağlıyorsa w , X üzerinde bir **mutlak modüler** olarak adlandırılır.

Bir X kümesi üzerindeki bir w (yarı) modülerin temel özelliği verilen $x, y \in X$ için $0 < \lambda \rightarrow w_\lambda(x, y) \in [0, \infty]$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da artmayandır.

Gerçekten eğer $0 < \mu < \lambda$ ise o zaman (iii), (i_{*}) ve (ii)

$$w_\lambda(x, y) \leq w_{\lambda-\mu}(x, x) + w_\mu(x, y) = w_\mu(x, y) \quad (2.8)$$

özelliğini sağlar. Buradan her $\lambda > 0$ noktasında $[0, \infty]$ da $w_{\lambda+0}(x, y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w_{\lambda+0}(x, y)$

sağdan limiti ve $w_{\lambda-0}(x, y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w_{\lambda-0}(x, y)$ soldan limiti vardır ve böylece aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$w_{\lambda+0}(x, y) \leq w_\lambda(x, y) \leq w_{\lambda-0}(x, y) \quad (2.9)$$

(2.5), (2.6), (2.7) özelliklerini sağlayan hızların uç bir örneği,

$$\lambda < d(x, y) \Rightarrow w_\lambda(x, y) = \infty, \quad \lambda > d(x, y) \Rightarrow w_\lambda(x, y) = 0$$

olması durumudur. Fiziksel olarak mümkün olmayan bu durum matematiksel olarak mümkündür. Böylece aralığımız $[0, \infty]$ olarak bulunur.

Tanım 2.2.2. [12]: X boştan farklı bir küme olmak üzere $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu eğer her $\lambda, \mu > 0$ ve $x, y, z \in X$ için (i) ve (ii) ile birlikte aşağıdaki şartı sağlarsa X üzerinde bir **konveks (metrik) modüler** olarak adlandırılır:

$$(iv) \quad w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} w_\lambda(x, z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} w_\mu(z, y)$$

(i) yerine sadece (i_{*}) şartı varsa w bir konveks (metrik) yarı modüler olarak adlandırılır.

Örnekler 2.2.3. [12]: Aşağıdaki indislenmiş w nesneleri, bir X kümesi üzerindeki (pseudo) modüllerle basit örneklerdir. $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ olsun;

$$a) \quad w_{\lambda}^a(x, y) = \begin{cases} \infty & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Eğer bir d -(pseudo) metriğiyle birlikte bir (pseudo) metrik uzay ise ayrıca

$$b) \quad \varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \text{ azalmayan fonksiyon olmak üzere}$$

$$w_{\lambda}^b(x, y) = \frac{d(x, y)}{\varphi(\lambda)}$$

$$c) \quad w_{\lambda}^c(x, y) = \begin{cases} \infty & , \lambda \leq d(x, y) \\ 0 & , \lambda > d(x, y) \end{cases}$$

$$d) \quad w_{\lambda}^d(x, y) = \begin{cases} \infty & , \lambda < d(x, y) \\ 0 & , \lambda \geq d(x, y) \end{cases}$$

2.3. MODÜLER UZAYLAR VE MODÜLER METRİK UZAY KAVRAMI

w , X üzerinde bir (pseudo) modüler olsun. X üzerindeki $\sim^w$ bağıntısı $x, y \in X$ için

$$x \sim^w y \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x, y) = 0 \quad (2.10)$$

ile tanımlanan ve (i') , (ii) , (iii) aksiyomlarıyla birlikte bir denklik bağıntısıdır. Yansıma ve simetri şartları metrik modülerin sırasıyla **Tanım 2.2.1** deki (i,) ve (ii) özelliklerinden gelir.

Geçişme özelliğini görmek için $x \sim^w y$ ve $y \sim^w z$ olsun. Buna göre tanımdan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x, y) = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(y, z) = 0$$

bulunur. Böylece **Tanım 2.2.1** deki (iii) özelliğini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x, z) = 0 \Leftrightarrow x \overset{w}{\sim} z$$

içermesi bulunur. $\overset{w}{\sim}$ bağıntısına göre X 'in bölüm kümeleri $X / \overset{w}{\sim}$, ve $X / \overset{w}{\sim}$ bölüm kümesinde $x \in X$ 'in denklik sınıfları $X_w^\circ(x) = \left\{ y \in X : y \overset{w}{\sim} x \right\}$ ile gösterilir. Şimdi $X_w^\circ(x)$ denklik sınıfları yardımıyla yeni bir uzay tanımlayacağız. Eğer $x_0 \in X$ keyfi ise

$$X_w = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x_0) = 0 \right\}$$

kümesi **modüler uzay** olarak adlandırılır.

Teorem 2.3.1. [12]: w, X üzerinde bir metrik (pseudo) modüler ise, X_w modüler kümesi

$$d_w^0(x, y) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \forall x, y \in X_w \text{ için } w_\lambda(x, y) \leq \lambda \right\}$$

(pseudo) metriğine göre bir (pseudo) metrik uzaydır

İspat: $x, y \in X_w$ için $d_w^0(x, y) \in \mathbb{R}^+$ değeri anlamlı ve iyi tanımlıdır: Gerçekten $x \overset{w}{\sim} y$ olduğundan (2.10) a göre her $\lambda > \lambda_0$ için $w_\lambda(x, y) \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda_0 > 0$ vardır. Böylece $\lambda_1 = \max \{1, \lambda_0\}$ alarak $w_{\lambda_1}(x, y) \leq 1 \leq \lambda_1$ elde edilir bu ise $d_w^0(x, y)$ nin tanımıyla birlikte $d_w^0(x, y) \leq \lambda_1 < \infty$ durumunu verir.

$x \in X_w$ için (i.) her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, x) = 0$ şartını sağlar, böylece $d_w^0(x, x) = 0$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} w_\lambda(x, x) = 0 &\Leftrightarrow d_w^0(x, y) = \inf \left\{ \lambda > 0 : w_\lambda(x, y) \leq \lambda \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : w_\lambda(x, x) \leq 0 \right\} = 0 \end{aligned}$$

$w, (i)$ şartını sağlasın, $x, y \in X_w$ ve $d_w^0(x, y) = 0$ olsun. O zaman $w_\mu(x, y)$, her $\mu > 0$ değeri için μ yü aşmaz. Böylece her $\lambda > 0$ ve $0 < \mu < \lambda$ için modüler metriğin azalanlığından

$$w_\lambda(x, y) \leq w_\mu(x, y) \leq \mu$$

olur. Buradan

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} w_\mu(x, y) = 0$$

elde ederiz. Böylece her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) = 0$ olur. Buradan (i) aksiyomu $x = y$ şartını sağlar.

(ii) aksiyomundan dolayı her $x, y \in X_w$ için $d_w^0(x, y) = d_w^0(y, x)$ durumu açıktır.

Şimdi her $x, y, z \in X_w$ için $d_w^0(x, y) \leq d_w^0(x, z) + d_w^0(z, y)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten d_w^0 'nin tanımından her $\lambda > d_w^0(x, z)$ ve $\mu > d_w^0(z, y)$ için

$$w_\lambda(x, z) \leq \lambda \text{ ve } w_\mu(z, y) \leq \mu$$

buluruz. Böylece (iii) aksiyomu

$$w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq w_\lambda(x, z) + w_\mu(z, y) \leq \lambda + \mu$$

Eşitsizliğini sağlar. d_w^0 'nin tanımından $d_w^0(x, y) \leq \lambda + \mu$ bulunur. $\lambda \rightarrow d_w^0(x, z)$ ve $\mu \rightarrow d_w^0(z, y)$ limitlerini aldığımızda istenen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

d_w^0 metriği (2.2) deki $\|\cdot\|_\rho$ F-normuna karşılık gelir ve **Teorem 2.3.1** lineer uzaylar üzerindeki klasik modüllerler tarafından genelleştirilen F-normlar için bu sonuçları genelleştirir. Eğer w konveks ise X_w modüler kümesi

$$X_w^* = \{x \in X : \exists \lambda = \lambda(x) > 0 \ni w_\lambda(x, x_0) < \infty\}$$

kümesine eşittir. Böylece

$$d_w^*(x, y) = \inf \{ \lambda > 0 : \forall x, y \in X_w^* \text{ için } w_\lambda(x, y) \leq 1 \}$$

ile metrikleştirilebilir. Eğer X bir reel lineer uzay, $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ ve her $\lambda > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$w_\lambda(x, y) = \rho\left(\frac{x - y}{\lambda}\right) \quad (2.11)$$

ise ρ nun konveks olması için gerek ve yeter şart w nin X üzerinde (konveks) metrik modüler olmasıdır. Bir başka deyişle w

$$(a) \text{ Her } \lambda, \mu > 0 \text{ ve } x \in X \text{ için } w_\lambda(\mu x, 0) = w_{\frac{\lambda}{\mu}}(x, 0)$$

$$(b) \text{ Her } x, y, z \in X \text{ ve } \lambda > 0 \text{ için } w_\lambda(x + z, y + z) = w_\lambda(x, y)$$

şartlarını sağlarsa ve (2.11) den $\rho(x) = w_1(x, 0)$ alırsak o zaman $x \in X$ için

$$(i) X_p = X_w, X \text{ in bir lineer alt uzayıdır ve } \|x\|_p = d_w^\circ(x, 0), X \text{ üzerinde bir F-normdur.}$$

$$(ii) \text{ Eğer } w \text{ konveks ise } X_p^* = X_w^*(0) = X_p, X \text{ in bir lineer alt uzayıdır ve } \|x\|_p = d_w^*(x, 0), X_p^* \text{ üzerinde bir normdur.}$$

Eğer modüler yerine pseudo modüler alınırsa benzer özellikler sağlanır. Bu özellikle birlikte herhangi bir uzayda bir metrik modülerin tanımlanması için gerek ve yeter şart o uzay üzerinde bir modülerin var olmasıdır.

Şimdi bir metrikle (uzaklık fonksiyonu) bir modüler metrik arasındaki farkı vermeye çalışalım: Bir modüler metrik pozitif bir parametreyle ifade edilir ve sonsuz değer alabilir; **(iii)** özelliği $w_\lambda(x, y) = \infty$ hızıyla hareket edildiğinde, λ zamanında x den y ye hareketin imkânsız olduğu anlamına gelir. $w_\lambda(x, y)$ hızı $\lambda > 0$ zamanının bir fonksiyonu olarak artmayandır. Her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $w_\lambda(x, y)$ ortalama hızının bilinmesi x ve y arasındaki $d(x, y)$ uzaklığının bilinmesinden bize daha fazla bilgi verir. $d(x, y)$ uzaklığı aşağıdaki formül aracılığıyla tekrar düzenlenebilir:

$$d(x, y) = \inf \{ \lambda > 0 : w_\lambda(x, y) \leq 1 \}$$

V.V. Chistyakov tarafından 2010’de verilen aşağıdaki teorem, **Teorem 2.3.1** de tanımlanan metrik ile denk bir metrik tanımlar. Dolayısıyla ispatı **Teorem 2.3.1** ile benzerlik gösterir. Bu yüzden ispatsız olarak bu teoremi vereceğiz.

Teorem 2.3.2. [12]: w, X üzerinde bir metrik (pseudo) modüler olsun.

$$d_w^1(x, y) = \inf_{\lambda > 0} (\lambda + w_\lambda(x, y)), x, y \in X_w$$

alalım. O zaman d_w^1, X_w üzerinde bir (pseudo) metriktir ve $X_w \times X_w$ üzerinde

$$d_w^0(x, y) \leq d_w^1(x, y) \leq 2d_w^0(x, y)$$

eşitsizliği vardır.

Eğer w, X üzerinde metrik modüler ise X_w kümesine modüler metrik uzay denir. Şimdi $d_w^0(x, y)$ ve $w_\lambda(x, y)$ arasındaki özel ilişkileri inceleyeceğiz. Aşağıdaki teorem 2010 yılında Chistyakov [12] tarafından verilmiştir.

Teorem 2.3.3. [12]: X üzerindeki bir w (pseudo) modüleri, $x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

- a) $d_w^0(x, y) < \lambda$ ise $w_\lambda(x, y) \leq d_w^0(x, y) < \lambda$
- b) $w_\lambda(x, y) = \lambda$ ise $d_w^0(x, y) = \lambda$
- c) $\lambda = d_w^0(x, y) > 0$ ise $w_{\lambda+0}(x, y) \leq \lambda \leq w_{\lambda-0}(x, y)$

Eğer $\mu \rightarrow w_\mu(x, y)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da sağdan sürekli ise (a)-(c) ile birlikte;

- d) $d_w^0(x, y) \leq \lambda \Leftrightarrow w_\lambda(x, y) \leq \lambda$
- e) $d_w^0(x, y) < \lambda \Leftrightarrow w_\lambda(x, y) < \lambda$

Eğer $\mu \rightarrow w_\mu(x, y)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ da sürekli ise (a)-(e) ile birlikte;

- f) $d_w^0(x, y) = \lambda \Leftrightarrow w_\lambda(x, y) = \lambda$

durumları vardır.

İspat: (a) $d_w^0(x, y) < \mu < \lambda$ olacak şekilde her $\mu > 0$ için d_w^0 nin tanımı ve modüler metriğin azalanlığını kullanarak $w_\mu(x, y) \leq \mu$ ve elde $w_\lambda(x, y) \leq w_\mu(x, y) \leq \mu < \lambda$ elde edilir. Buradan $\mu \rightarrow d_w^0(x, y)$ limitini aldığımızda

$$\begin{aligned} w_\lambda(x, y) &\leq w_\mu(x, y) \leq d_w^0(x, y) < \lambda \\ w_\lambda(x, y) &\leq d_w^0(x, y) < \lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Tanımdan $d_w^0(x, y) \leq \lambda$ ve (a) dan

$$\begin{aligned} w_\lambda(x, y) &\leq d_w^0(x, y) \leq \lambda \\ \lambda &\leq d_w^0(x, y) \leq \lambda \Leftrightarrow d_w^0(x, y) = \lambda \end{aligned}$$

(c) Her $\mu > \lambda = d_w^0(x, y)$ için d_w^0 nin tanımı $w_\mu(x, y) \leq \mu$ durumunu sağlar ve böylece $w_{\lambda+0}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} w_\mu(x, y) \leq \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} \mu = \lambda$

Her $0 < \mu < \lambda$ için $w_\mu(x, y) > \mu$ (aksi taktirde d_w^0 nin tanımından $\mu \geq d_w^0(x, y) = \lambda$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.) elde edilir ve böylece $w_{\lambda-0}(x, y) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} w_\mu(x, y) \geq \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} \mu = \lambda$ bulunur.

(d) ($\Leftarrow$) durumu $d_w^0(x, y)$ nin tanımından gelir.

Şimdi ($\Rightarrow$) durumunu gösterelim. $d_w^0(x, y) < \lambda$ ise **(a)** dan $w_\lambda(x, y) < \lambda$ ve $d_w^0(x, y) = \lambda$ ise $w_\lambda(x, y) = w_{\lambda+0}(x, y) \leq \lambda$ olur ki bu, $\mu \rightarrow w_\mu(x, y)$ fonksiyonunun sağdan sürekliliğinin ve **(c)** nin bir sonucudur.

(e) ($\Rightarrow$) **(a)** dan dolayı $d_w^0(x, y) < \lambda \Rightarrow w_\lambda(x, y) < \lambda$ eşitsizliği vardır.

($\Leftarrow$) durumunu gösterelim. d_w^0 nin tanımı $d_w^0(x, y) \leq \lambda$ eşitsizliğini verir.

$$d_w^0(x, y) = \inf \{ \lambda > 0 : w_\lambda(x, y) \leq \lambda \}$$

Aksi durumda ise **(c)** den kabulde çelişen $w_\lambda(x, y) = w_{\lambda-0}(x, y) \geq \lambda$ elde edilir. Yani $w_\lambda(x, y) < \lambda$ iken $d_w^0(x, y) > \lambda$ olsun. **(c)** den $\lambda = d_w^0(x, y)$ iken

$$\begin{aligned} w_{\lambda+0}(x, y) &\leq \lambda \leq w_{\lambda-0}(x, y) \\ w_{\lambda+0}(x, y) &\leq d_w^0(x, y) \leq w_{\lambda-0}(x, y) \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir.

(f) (b) den $w_\lambda(x, y) = \lambda \Rightarrow d_w^0(x, y) = \lambda$ şartı sağlanır. Ters gerektirme için **(c)** den $d_w^0(x, y) = \lambda$ ise $w_\lambda(x, y) \leq \lambda \leq w_\lambda(x, y)$ olup $w_\lambda(x, y) = \lambda$ olur. $\square$

2.4. MODÜLER METRİK UZAYLARDA DİZİ VE YAKINSAKLIK KAVRAMLARI

Tanım 2.4.1. [13]: X_w modüler metrik uzayında her $\lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $w_\lambda(x_n, x) \rightarrow 0$ oluyorsa X_w deki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in X_w$ noktasına yakınsar (daha özel olarak bu dizi w -yakınsaktır) denir.

Şimdi bir d_w^0 metriğine göre metrik yakınsaklığın modüler yakınsaklığı sağladığını göstereceğiz.

Teorem 2.4.2. X_w bir modüler metrik uzay ve w, X üzerinde bir (pseudo) modüler olsun.

$$(x_n)_{n=1}^\infty \subset X_w \text{ dizisi ve } x \in X_w \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} d_w^0(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \text{her } \lambda > 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$$

ifadesi vardır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $\varepsilon > 0$ keyfi sayısı için, kabulümüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\varepsilon(x_n, x) = 0$ olur ve böylece

her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $w_\varepsilon(x_n, x) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. Bundan dolayı her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_w^0(x, y) \leq \varepsilon$ elde edilir.

($\Rightarrow$) Keyfi $\lambda > 0$ sayısını seçelim. Burada, her biri $\varepsilon > 0$ için iki farklı durum vardır. Bunlar **(a)** $0 < \varepsilon < \lambda$ ya da **(b)** $\varepsilon \geq \lambda$ durumlarıdır. **(a)** durumunda, kabulden her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d_w^0(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\lambda_0(\varepsilon)$ sayısı vardır ve böylece **Teorem 2.3.3 (a)** dan her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $w_\varepsilon(x_n, x) < \varepsilon$ elde ederiz. $\varepsilon < \lambda$ olduğunda her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $w_\lambda(x_n, x) \leq w_\varepsilon(x_n, x) < \varepsilon$ buluruz. **(b)** durumunda ise, $n_1(\varepsilon) = n_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ alalım. Modüler metriğin azalanlığından ve **(a)** durumundan her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_\lambda(x_n, x) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) < \frac{\lambda}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece her $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ olur. $\square$

Yukarıdaki teoreme göre bir (X, d) metrik uzayı ve üzerindeki **(2.4)** modülleri için X üzerinde metrik yakınsaklık ve modüler yakınsaklığın çakıştığı açıktır. Bununla birlikte modüler yakınsaklık metrik yakınsaklıktan çok daha zayıftır. Chistyakov'un verdiği aşağıdaki teoremden, modüler ve metrik yakınsamaların modüler metrik uzaylardaki ilişkileri incelenmiştir.

Teorem 2.4.3. [12]: X_w modüler metrik uzay ve w, X üzerinde bir pseudo modüler olsun. O zaman

(a) X_w ve X_w^* modüler uzayları, modüler yakınsamaya göre kapalıdır, yani eğer $(x_n) \subset X_w$

(veya $(x_n) \subset X_w^*$), $x \in X$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ise o zaman $x \in X_w$ (veya $x \in X_w^*$).

(b) w, X üzerinde bir mutlak modülerse, (eğer varsa) modüler limit tek olarak tanımlıdır.

İspat:

(a) $x_n \rightarrow x$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_0}(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 = \lambda_0((x_n), x) > 0$ vardır.

1. Önce $(x_n) \subset X_w$ olduğu durumu inceleyelim. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır. $x_{n_0} \in X_w = X_w(x_0)$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x_0) = 0$ elde edilir. Böylece $w_{\lambda_1}(x_{n_0}, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) > 0$ vardır. O zaman **Tanım 2.2.1** deki **(iii)** ve **(ii)** şartları

$$w_{\lambda_0 + \lambda_1}(x, x_0) \leq w_{\lambda_0}(x, x_{n_0}) + w_{\lambda_1}(x_{n_0}, x_0) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. $\lambda \rightarrow w_\lambda(x, x_0)$, $(0, \infty)$ da artmayan fonksiyondur ve böylece her $\lambda \geq \lambda_0 + \lambda_1$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x_0) \leq w_{\lambda_0 + \lambda_1}(x, x_0) \leq \varepsilon, \quad w_\lambda(x, x_0) \rightarrow 0$$

durumu sağlanır. Böylece, $x \in X_w$ elde edilir.

2. Şimdi $(x_n) \subset X_w^*$ olduğunu kabul edelim. O zaman $w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x) \leq 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $x_{n_0} \in X_w^* = X_w^*(x_0)$ olduğundan $w_{\lambda_1}(x_{n_0}, x_0) < \infty$ olacak şekilde bir $\lambda_1 > 0$ vardır. Şimdi, **(iii)** ve **(ii)** şartlarını kullanırsak,

$$w_{\lambda_0 + \lambda_1}(x, x_0) \leq w_{\lambda_0}(x, x_{n_0}) + w_{\lambda_1}(x_{n_0}, x_0) < \infty$$

bulunur. Böylece $x \in X_w^*$ olur.

(b) $(x_n) \subset X_w$ veya X_w^* ; $x, y \in X$; $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $x_n \xrightarrow{w} y$ olacak şekilde seçilsin. Modüler yakınsaklığın tanımından $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\mu(x_n, x) = 0$ olacak şekilde $\lambda = \lambda((x_n), x) > 0$ ve $\mu = \mu((x_n), y) > 0$ vardır. **(iii)** ve **(ii)** şartlarını kullanırsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda + \mu}(x, y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) + \lim_{n \rightarrow \infty} w_\mu(x_n, y)$$

elde edilir. Buradan $w_{\lambda + \mu}(x, y) = 0$ ve böylece **(i_s)** şartından $x = y$ elde edilir. **Teorem 2.4.2** de w, X üzerinde modülerse $(x_n) \subset X_w$ ve $x \in X_w$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_w(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0, \lambda > 0 \quad (2.12)$$

elde edileceğini ve böylece metrik yakınsaklığın modüler yakınsaklığı sağladığı fakat ters durumun ise her zaman sağlanmadığı gösterilmiştir. **Teorem 2.4.2** in ispatında verildiği gibi (2.12) ayrıca $(x_n) \subset X_w^*$ ve $x \in X_w^*$ için de doğrudur. $\square$

Yukarıdaki ifade konveks modüllerler için de sağlanır. Şimdi modüler yakınsaklık ve metrik yakınsaklık arasındaki ilişkiyi açıklamak için Chistyakov tarafından verilen bir tanımı ifade edelim.

Tanım 2.2.10. [13]: X_w^* boştan farklı bir modüler metrik uzay olmak üzere X üzerindeki bir w (pseudo) modülleri X_w^* üzerinde aşağıdaki şartı sağlarsa (dizisel) Δ_2 -şartını sağlar denir. Bu ifade, “Bir $(x_n) \subset X_w^*$ ve $x \in X_w^*$ için, (x_n) ve x e bağlı olabilen bir $\lambda > 0$ varsa ve bu λ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ ise o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$ bulunur” ile verilir.

Benzer bir tanım X_w^* yerine X_w alındığında da vardır. (X, d) bir metrik uzay olduğunda (2.4) modülleri açıkça Δ_2 -şartını sağlar.

Teorem 2.4.4. [13]: X üzerindeki bir w modülleri için X_w^* üzerindeki metrik yakınsaklık (herhangi bir w modülleri için d_w ’ye, w konveks modülleri için d_w^* ’ye göre) modüler yakınsaklıkla çakışması için gerek ve yeter şart w , X_w^* üzerinde Δ_2 -şartının sağlanmasıdır.

İspat: $(x_n) \subset X_w^*$ ve $x \in X_w^*$ verilsin. (2.12) den ve **Teorem 2.4.3** den x_n in x e metrik yakınsaklığı (w herhangi bir modülse d_w metriğine göre, w konveks modülse d_w^* metriğine göre) her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0 \quad (2.13)$$

durumu ile denktir.

($\Rightarrow$) X_w^* üzerindeki metrik yakınsaklıkla modüler yakınsaklığın çakıştığını kabul edelim. $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_0}(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 > 0$ varsa x_n, x e modüler yakınsaktır ve böylece x_n, x e d_w (veya d_w^*) metriğine göre yakınsaktır. Buradan (2.13) özel olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda_0}{2}}(x_n, x) = 0$ durumunu sağlar ve böylece w, Δ_2 -şartını elde edilir.

($\Leftarrow$) Öncelikle (2.13) den, X_w^* üzerindeki metrik yakınsaklık modüler yakınsaklığı sağlar, ve böylece tersine durumu göstermek yeterlidir, yani, $x_n \xrightarrow{w} x$ ise (2.13) sağlanır. Gerçekten $x_n \xrightarrow{w} x$ ise bir $\lambda_0 = \lambda_0((x_n), x) > 0$ sabiti için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_0}(x_n, x) = 0$ olur. Δ_2 -şartından $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda_0}{2}}(x_n, x) = 0$ durumu sağlanır ve böylece her $j \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda_0}{2^j}}(x_n, x) = 0$ olur. Şimdi $\lambda > 0$ için $\lambda > \frac{\lambda_0}{2^j} > 0$ olacak şekilde bir $j = j(\lambda) \in \mathbb{N}$ vardır. $\lambda \rightarrow w_\lambda(x_n, x)$ fonksiyonunun monoton azalanlığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda_0}{2^j}}(x_n, x) = 0$$

olur. $\lambda > 0$ keyfi olduğundan (2.13) sağlanır. $\square$

Tanım 2.4.5. [13] X üzerindeki bir w modüleri için eğer $\lim_{n, m \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0$ olacak şekilde bir $\lambda = \lambda((x_n)) > 0$ sayısı varsa $(x_n) \subset X_w^*$ dizisine **modüler Cauchy dizisi** denir (veya w -Cauchy dizisi) denir. Bu tanımları sembolik olarak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \ni \forall n \geq n_0(\varepsilon), m \geq n_0(\varepsilon) : w_\lambda(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Bu tanıma göre, **Teorem 2.4.4** deki ispatın 2. adımından ve **Tanım 2.4.5** den X_w^* deki d_w^0 (veya d_w) metriğine göre Cauchy olan bir dizi modüler Cauchy dizisi olur.

Önerme 2.4.6. Modüler yakınsak her dizi aynı zamanda bir modüler Cauchy dizisidir.

İspat: Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ olsun.

Böylece, her bir $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

Üçgen eşitsizliğini kullanırsak, $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için (x_n) in modüler Cauchy olduğunu sağlayan

$$w_\lambda(x_n, x_m) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x_m, x) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

Tanım 2.4.7. [13] X üzerindeki bir w modülleri için X_w^* modüler uzayı; eğer X_w^* deki her bir $(x_n) \subset X_w^*$ modüler Cauchy dizisi aşağıdaki durumda modüler yakınsaksa **modüler tamdır** (veya w -tamdır) denir: Eğer $(x_n) \subset X_w^*$ ve $\lim_{m, n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_m, x_n) = 0$ olacak şekilde bir $\lambda = \lambda((x_n)) > 0$ varsa $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_m, x_n) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X_w^*$ vardır.

Yukarıda verilen modüler yakınsaklık, modüler limit ve modüler tamlık kavramları (2.4) de özel olarak verilen durumda bir (X, d) metrik uzayı için metrik uzaydaki kavramlarla çakışır.

3. BÖLÜM

MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde modüler metrik uzaylar için verilen bazı sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz. Burada konveks modülerler merkezi rol oynadığından, öncelikle onlar üzerine yoğunlaşacağız. İlk olarak X_w^* üzerindeki d_w^* -Lipschitz dönüşümlerinin üretilmiş konveks modülerlerine göre bir karakterizasyonu başlayacağız. Daha sonra herhangi bir metrik modüler için verilen sabit nokta teoremlerini inceleyeceğiz.

Teorem 3.1. [13] X boştan farklı bir küme, w , X üzerinde bir konveks modüler ve $k > 0$ sabit olsun. $T : X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü ve her $x, y \in X_w^*$ için

$$d_w^*(Tx, Ty) \leq kd_w^*(x, y)$$

şartı aşağıdaki ifadeye denktir:

Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, y) \leq 1$ olacak şekilde $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leq 1$ vardır.

İspat: Önce $\varepsilon > 0$ için $\bar{w}_\lambda(x, y) = w_{c\lambda}(x, y)$, $\lambda > 0$,

$x, y \in X$ ile tanımlanan fonksiyonun X üzerinde bir konveks modüler ve

$$\begin{aligned} d_w^*(x, y) &= \inf \{ \lambda > 0 : w_{c\lambda}(x, y) \leq 1 \} = \inf \{ \mu/c > 0 : w_\mu(x, y) \leq 1 \} \\ &= \frac{1}{c} d_w^*(x, y), \quad x, y \in X_w^* \end{aligned} \quad (3.1)$$

olduğuna dikkat edelim.

($\Rightarrow$) $x \neq y$ olsun. $c > k$ için kabulümüzden,

$$d_w^*(Tx, Ty) \leq k d_w^*(x, y) \leq c d_w^*(x, y)$$

elde ederiz. Böylece

$$d_w^*(x, y)/c < d_w^*(x, y)$$

buluruz. Buradan $\lambda > 0$, $w_\lambda(x, y) \leq 1$ olacak şekilde bir sayı

ise $d_w^*(x, y) \leq \lambda$, (3.1) e göre

$$\lambda > \frac{1}{c} d_w^*(Tx, Ty) = \inf \{ \mu > 0 : w_{c\mu}(Tx, Ty) \leq 1 \}$$

durumunu sağlar ve böylece $w_{c\lambda}(Tx, Ty) \leq 1$ olur. $c \rightarrow k+0$ limitini aldığımızda istenen

$w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leq 1$ eşitsizliği elde edilir.

($\Leftarrow$) Kabulden, $\{ \lambda > 0 : w_\lambda(x, y) \leq 1 \}$ kümesi,

$$\{ \lambda > 0 : w_{k^+\lambda}(Tx, Ty) = w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leq 1 \}$$

kümesinin alt kümesidir ve böylece infimum aldığımızda (2.4), (5.1) ve $d_{w^+}^* = d_w^*$ eşitliğinden

T nin Lipschitz koşulunu k sabitiyle birlikte sağlayan

$$d_w^*(x, y) \geq \frac{1}{k} d_{w^+}^*(Tx, Ty) = \frac{1}{k} d_w^*(Tx, Ty)$$

eşitsizliği elde edilir. □

Tanım 3.2. [13] X boştan farklı bir küme olmak üzere bu uzay üzerindeki bir w (konveks) modülleri için bir $T : X_w \rightarrow X_w$ dönüşümüne, her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X_w$ için

$$w_{k\lambda}(Tx, Ty) \leq w_\lambda(x, y)$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ sayısı varsa, T **modüler büzülme (veya w -büzülme)** denir.

Şimdi modüler metrik uzaylarda Banach büzülme prensibini inceleyelim. Bu teorem 2011 yılında Mongkolkeha ve Sintunavarad [30] tarafından verilmiştir.

Teorem 3.3. [30] w , X üzerinde bir metrik modüler ve X_w , w tarafından oluşturulan bir tam modüler metrik uzay ve $T : X_w \rightarrow X_w$ bir büzülme dönüşümü ise, o zaman her $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ için T , X_w de bir tek sabit noktaya sahiptir. Dahası her $x \in X$ ve $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: x_0 , X_w de keyfi bir nokta ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0$ olsun. O zaman $\forall \lambda > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\leq kw_\lambda(x_{n-1}, x_n) \\ w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\leq k^2 w_\lambda(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\dots\dots\dots \\ w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &\leq k^n w_\lambda(x_0, x_1) \\ k \in [0, 1) &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0 \end{aligned}$$

olup buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_{n+1}, x_n) = 0$ bulunur. Böylece her bir $\lambda > 0$ için bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulabiliriz, öyle ki bu $\varepsilon > 0$ sayıları için $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$ olacak şekilde her $n > n_0$ için

bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmadan $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ kabul edelim. $\frac{\lambda}{m-n} > 0$ için bir $n_{\frac{\lambda}{m-n}} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_{\frac{\lambda}{m-n}}$ için

$$w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{m-n}$$

olur. Şimdi w nin (iii) özelliğini kullanarak her $m, n > n_{\frac{\lambda}{m-n}}$ için

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(x_m, x_n) &\leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_m, x_{m-1}) + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{m-n} + \frac{\varepsilon}{m-n} + \dots + \frac{\varepsilon}{m-n}}_{m-n \text{ sayıda}} \\ &< \frac{m-n}{m-n} \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

olup $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir. X_w nin tamlığından bu dizi bir $x \in X_w$ noktasına yakınsar. Metrik modüler tanımından ve T nin büzülme dönüşümü olmasından her $\lambda > 0$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(Tx, x) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx, Tx_n) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_n, x) \\ &\leq kw_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_n) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n+1}, x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) &< \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n+1}, x) < \varepsilon \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(Tx, x) &< \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(Tx, x) = 0 \Leftrightarrow Tx = x \end{aligned}$$

bulunur. Böylece x , T nin bir sabit noktasıdır. Şimdi x in bir tek sabit nokta olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki z, T nin bir başka sabit noktası olsun. O zaman her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
w_\lambda(x, z) &= w_\lambda(Tx, Tz) \\
&\leq kw_\lambda(x, z) \\
w_\lambda(x, z) - kw_\lambda(x, z) &\leq 0 \\
(1 - k)w_\lambda(x, z) &\leq 0
\end{aligned}$$

olur. w_λ metrik modüler olduğundan pozitif tanımlıdır. Böylece $(1 - k) \neq 0$ olduğundan $w_\lambda(x, z) = 0$ ve böylece (i) şartından $x = z$ bulunur. Yani T nin X_w deki sabit noktası tektir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4. [30] w , X üzerinde bir metrik modüler, X_w , w tarafından oluşturulan bir tam modüler metrik uzay ve $T : X_w \rightarrow X_w$ bir büzülme dönüşümü olmak koşuluyla $x^* \in X_w$, T nin bir sabit noktası, ε_n her $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ile tanımlanan bir dizi ve $\gamma_n \subset X_w$, $w_\lambda(\gamma_{n+1}, T\gamma_n) \leq \varepsilon_n$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = x^*$ olur.

İspat: İlk olarak üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
w_\lambda(\gamma_{m+1}, x^*) &\leq \underbrace{w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, T^{m+1}x)}_1 + \underbrace{w_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m+1}x, x^*)}_2 \\
(1) \quad w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, T^{m+1}x) &= w_{\frac{\lambda \cdot m}{2m}}(T^{m+1}x, \gamma_{m+1}) \\
&\leq w_{\frac{\lambda(m-1)}{2m}}(T^{m+1}x, T\gamma_m) + w_{\frac{\lambda}{2m}}(T\gamma_m, \gamma_{m+1}) \\
&\leq kw_{\frac{\lambda(m-1)}{2m}}(T^m x, \gamma_m) + \varepsilon_m \\
&\leq kw_{\frac{\lambda(m-2)}{2m}}(T^m x, T\gamma_{m-1}) + kw_{\frac{\lambda}{2m}}(T\gamma_{m-1}, \gamma_m) + \varepsilon_m \\
&\leq k^2 w_{\frac{\lambda(m-2)}{2m}}(T^{m-1}x, \gamma_{m-1}) + k\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m \\
&\dots\dots\dots \\
&\leq \sum_{i=0}^m k^{m-i} \varepsilon_i, \quad k \in [0, 1)
\end{aligned}$$

durumunu elde ederiz. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $m > n$ için $\varepsilon_n < \varepsilon$ olur. Yani

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m k^{m-i} \varepsilon_i &= \sum_{i=0}^N k^{m-i} \varepsilon_i + \sum_{i=N+1}^m k^{m-i} \varepsilon_i \\ &\leq k^{m-N} \sum_{i=0}^N k^{N-i} \varepsilon_i + \varepsilon \sum_{i=N+1}^m k^{m-i} \end{aligned}$$

olur. $m \rightarrow \infty$ için bu ifade

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m k^{m-i} \varepsilon_i = 0$$

olarak bulunur.

(2) x^*, T nin sabit noktası olduğundan ve bir önceki teoremden $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$, x^* noktasına yakınsar. Böylece her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m+1}x, x^*) = 0$$

bulunur. Buradan her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, x^*) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, T^{m+1}x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m+1}x, x^*) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, x^*) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, T^{m+1}x) + \lim_{m \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(T^{m+1}x, x^*) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(\gamma_{m+1}, x^*) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{m+1} = x^*$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanır. □

Şimdi modüler metrik uzaylardaki “Banach Büzülme Prensipleri” nin bir genelleştirmesini inceleyeceğiz.

Teorem 3.5. [30] w, X üzerinde bir metrik modüler, X_w, w tarafından oluşturulan tam modüler metrik uzay ve $T : X_w \rightarrow X_w$, T^n bir pozitif n tamsayısı için büzülme dönüşümü olacak şekilde bir dönüşüm ise T, X_w de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: T^n bir büzülme dönüşümü ise o zaman **Teorem 3.3** den T^n bir tek $u \in X_w$ sabit noktasına sahiptir.

$$\begin{aligned} T^n(Tu) &= T^{n+1}u \\ &= T(T^n u) \\ &= Tu \end{aligned}$$

olup Tu, T^n in bir sabit noktasıdır. Fakat T^n bir tek sabit noktaya sahip olduğundan $Tu = u$ olur. Böylece u, T nin bir sabit noktasıdır. T nin sabit noktası T^n in de sabit noktası olacağından T, X_w de bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu durumda ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıda modüler metrik uzayın bir alt uzayı için bir sabit nokta teorisini inceleyelim.

Teorem 3.6. [30] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w, w tarafından oluşturulan bir modüler metrik uzay ve $x^* \in X_w$ için

$$B_w(x^*, \gamma) = \{x \in X_w : w_\lambda(x, x^*) \leq \gamma, \forall \lambda > 0\}$$

ile tanımlansın. Eğer $T : B_w(x^*, \gamma) \rightarrow X_w$ her $\lambda > 0$ ve $k \in [0, 1)$ için

$$w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx^*, x^*) \leq (1 - k)\gamma$$

ile birlikte bir büzülme dönüşümü ve $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ ise $T, B_w(x^*, \gamma)$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.3 den sadece $B_w(x^*, \gamma)$ nın tam olduğunu ve her $x \in B_w(x^*, \gamma)$ için $Tx \in B_w(x^*, \gamma)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\{x_n\}$, $B_w(x^*, \gamma)$ da bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $\{x_n\}$, X_w de bir Cauchy dizisidir. X_w tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X_w$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B_w(x^*, \gamma)$ olduğunda metrik modülerin (iii) özelliğini kullanarak her $\lambda > 0$ için

$$w_{\lambda}(x, x^*) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_n) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x^*)$$

$$w_{\lambda}(x, x^*) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_n) + \gamma$$

Ayrıca, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\frac{\lambda}{2}}(x_n, x) = 0$ olduğundan $w_{\lambda}(x, x^*) \leq \gamma$ olup $x \in B_w(x^*, \gamma)$ olur. Böylece,

$x_n, B_w(x^*, \gamma)$ da yakınsak bir dizidir. Yani $B_w(x^*, \gamma)$ tamdır.

Şimdi her $x \in B_w(x^*, \gamma)$ için $Tx \in B_w(x^*, \gamma)$ olduğunu gösterelim.

$w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx^*, x^*) \leq (1-k)\gamma$ olduğundan T nin büzülme özelliğini ve metrik modüler tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(x^*, Tx) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x^*, Tx^*) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx^*, Tx) \\ &\leq (1-k)\gamma + kw_{\frac{\lambda}{2}}(x^*, x) \\ &\leq (1-k)\gamma + k\gamma \\ &\leq \gamma \end{aligned}$$

olup $Tx \in B_w(x^*, \gamma)$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.7. [30] w , X üzerinde bir metrik modüler ve X_w , w tarafından oluşturulan bir modüler metrik uzay ve $T : X_w \rightarrow X_w$ olsun. Her $x, y \in X_w$, $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) \leq k(w_{2\lambda}(Tx, x) + w_{2\lambda}(Ty, y))$$

oluyorsa T , X_w de bir tek sabit noktaya sahiptir. Dahası her $x \in X_w$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: x_0 , X_w nin keyfi bir noktası ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 ; n \in \mathbb{N}$$

olsun. Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $Tx_{n_0} = Tx_{n_0-1}$ oluyorsa $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olup x_{n_0} , T nin sabit noktası

olur. Kabul edelim ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n \neq Tx_{n-1}$ olsun. $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ve $\forall \lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_{n+1}, x_n) &= w_\lambda(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq k(w_{2\lambda}(Tx_n, x_n) + w_{2\lambda}(Tx_{n-1}, x_{n-1})) \\ &\leq k(w_\lambda(x_{n+1}, x_n) + w_\lambda(x_n, x_{n-1})) \\ (1-k)w_\lambda(x_{n+1}, x_n) &\leq kw_\lambda(x_n, x_{n-1}) \\ w_\lambda(x_{n+1}, x_n) &\leq \frac{k}{1-k} w_\lambda(x_n, x_{n-1}) \end{aligned}$$

$\beta = \frac{k}{1-k}$ alırsak $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ iken $\beta \in [0, 1)$ olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_{n+1}, x_n) &\leq \beta w_\lambda(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \beta^2 w_\lambda(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\dots \\ &\leq \beta^n w_\lambda(x_1, x_0) \end{aligned}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = 0$ olacağından **Teorem 3.3** deki yöntemle $\{x_n\}$ in X_w de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz:

Her $\lambda > 0$ için bir $\varepsilon > 0$ bulabiliriz öyle ki $w_\lambda(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$

Şimdi $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ koşulu ile $\frac{\lambda}{m-n} > 0$ için bir $\frac{\varepsilon}{m-n} > 0$ vardır öyle ki

$$w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_n) < \frac{\varepsilon}{m-n}$$

$$w_\lambda(x_m, x_n) \leq \underbrace{w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_m, x_{m-1}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_n)}_{m-n \text{ sayıda}}$$

$$w_\lambda(x_m, x_n) \leq (m-n) \frac{\varepsilon}{m-n} = \varepsilon$$

olup $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla X_w tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olacak şekilde bir $x \in X_w$ vardır. Kabulden ve metrik modüler özelliğinden her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tx, x) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx, Tx_n) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_n, x) \\ &\leq k(w_\lambda(Tx, x) + w_\lambda(Tx_n, x_n)) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_n, x) \\ &\leq k\left(w_\lambda(Tx, x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_n, x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_n)\right) + w_{\frac{\lambda}{2}}(Tx_n, x) \\ &\leq k\left(w_\lambda(Tx, x) + \underbrace{w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n+1}, x)}_0 + \underbrace{w_{\frac{\lambda}{2}}(x, x_n)}_0\right) + \underbrace{w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n+1}, x)}_0 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için bu eşitsizlik

$$w_\lambda(Tx, x) \leq kw_\lambda(Tx, x)$$

olup $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $Tx = x$ bulunur. Böylece x , T nin sabit noktasıdır. Şimdi x in tekliğini gösterelim. z , T nin bir başka sabit noktası olsun. Her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
w_\lambda(x, z) &= w_\lambda(Tx, Tz) \\
&\leq k(w_{2\lambda}(Tx, x) + w_{2\lambda}(Tz, z)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$x = z$ sağlanır. Böylece x , T nin bir tek sabit noktasıdır. $\square$

Şimdi modüler metrik uzaylarda quasi-büzülmeleri inceleyelim. Önce metrik uzaylarda karşımıza çıkmayan fakat modüler metrik uzaylarda ortaya çıkan belirsizlikleri gidermek için verilen aşağıdaki özelliklerle başlayacağız.

Tanım 3.8. [14] *Eğer bir X_w modüler metrik uzayında, w metrik modülleri aşağıdaki özelliği sağlıyorsa **Fatou özelliğine** sahiptir denir:*

Her $y \in X_w$, $\lambda \in (0, \infty)$, $(x_n) \rightarrow x$ için $w_\lambda(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, y)$.

Tanım 3.9. [14] X_w bir modüler metrik uzay ve C , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$T: C \rightarrow C$ dönüşümü $0 < k < 1$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) \leq k \max\{w_\lambda(x, y), w_\lambda(x, Tx), w_\lambda(y, Ty), w_\lambda(x, Ty), w_\lambda(Tx, y)\}$$

şartını sağlıyorsa bir **modüler quasi-büzülme** olarak adlandırılır. Her $x \in C$ için orbit (yörünge)

$$O(x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

ve çap

$$\delta_w(x) = \text{diam}(O(x)) = \sup\{w_\lambda(T^m x, T^n x) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

ile tanımlanır.

Şimdi ilk olarak sabit noktanın varlığını göstermek için gereken aşağıdaki iki lemmayı inceleyelim. İlk lemma herhangi bir eleman için iterasyon dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. İkinci lemma Cauchy dizisinin yakınsadığı bir noktanın var olduğunu gösterir.

Lemma 3.9. [14] X_w bir modüler metrik uzay ve C, X in boş olmayan bir alt kümesi, $T : C \rightarrow C$ bir quasi-büzülebilir dönüşüm ve $x \in C, \delta_w(x) < \infty$ olacak şekilde seçelim. O zaman her $n \geq 1$ için

$$\delta_w(Tx) \leq k\delta_w(x)$$

ve her $m, n \geq 1, \lambda \in (0, \infty)$ için

$$w_\lambda(T^n x, T^{n+m} x) \leq k^n \delta_w(x)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Her bir $w_\lambda(T^n x, T^{n+m} x) \leq k^n \delta_w(x)$ için

$w_\lambda(T^n x, T^m y) \leq k \max \{w_\lambda(T^{n-1} x, T^{m-1} y), w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x), w_\lambda(T^{m-1} y, T^m y), w_\lambda(T^{n-1} x, T^m y), w_\lambda(T^n x, T^{m-1} y)\}$ olur. Buradan açıkça

$$\delta_w(Tx) = \sup \{w_\lambda(T^{n+1} x, T^{m+1} y)\} \leq k \sup \{w_\lambda(T^n x, T^m y)\} = k\delta_w(x)$$

olduğu görülebilir. Böylece her $n \geq 1$ için

$$\delta_w(T^n x) \leq k\delta_w(T^{n-1} x) \leq k^2\delta_w(T^{n-2} x) \leq \dots \leq k^n \delta_w(x)$$

bulunur. Ayrıca her $m, n \geq 1, \lambda \in (0, \infty)$ için

$$w_\lambda(T^n x, T^{n+m} x) \leq \delta_w(T^n x) \leq k^n \delta_w(x)$$

olur ve böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 3.10. [14] X_w bir modüler metrik uzay ve C, X in boş olmayan bir tam alt kümesi olsun. $T : C \rightarrow C$ quasi-büzülebilir dönüşüm ve $x \in C, \delta_w(x) < \infty$ olacak şekilde seçilsin. O zaman $(T^n x)$, bir $v \in C$ noktasına yakınsar. Ayrıca her $n \geq 1$ ve $\lambda \in (0, \infty)$ için

$$w_\lambda(T^n x, v) \leq k^n \delta_w(x)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Bir önceki lemmadan $(T^n x)$ in C de bir Cauchy dizisi olduğunu görebiliriz.

C tam olduğundan bir $v \in C$ vardır öyle ki $T^n x \rightarrow v$ durumu sağlanır.

$$w_\lambda(T^n x, T^{n+m} x) \leq k^n \delta_w(x)$$

olduğundan ve w nin Fatou özelliğini sağlamasından her $m, n \geq 1$ için ve $m \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(T^n x, v) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \{w_\lambda(T^n x, T^{n+m} x)\} \leq k^n \delta_w(x) \\ w_\lambda(T^n x, v) &\leq k^n \delta_w(x) \end{aligned}$$

olur ve böylece istenen gösterilir. □

Şimdi v nin, T nin bir sabit noktası olduğunu ve bu noktanın bazı ekstra kabullerle tek olduğunu gösterelim. Aşağıdaki teoremi 2012 yılında Cho, Saadati ve Sadeghi [14] vermiştir. Bu teoremin ilk hali metrik uzaylarda Ciric tarafından 1972 yılında verilmiştir.

Teorem 3.11. T, C, x **Lemma 3.10** da olduğu gibi kabul edilsin. Kabul edelim ki her $\lambda \in (0, \infty)$ için $w_\lambda(v, Tv) < \infty$ ve $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ olsun. O zaman $(T^n x)$ in limiti

T nin bir sabit noktasıdır, yani $Tv = v$. Dahası eğer her $\lambda \in (0, \infty)$ için v^*, T nin $w_\lambda(v, v^*) < \infty$ olacak şekilde bir sabit noktası ise $v = v^*$ dir.

İspat: Her $n \geq 1$ ve $\lambda \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tx, Tv) &\leq \max\{w_\lambda(x, v), w_\lambda(x, Tx), w_\lambda(v, Tv), w_\lambda(x, Tv), w_\lambda(Tx, v)\} \\ w_\lambda(x, v) &\leq w_\lambda(x, T^m v) \leq k \delta_w(x) \\ w_\lambda(Tx, v) &\leq w_\lambda(Tx, T^m x) \leq k \delta_w(x) \\ w_\lambda(x, Tx) &\leq w_\lambda(x_n, Tx) = w_\lambda(T^n x, Tx) \leq k \delta_w(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_\lambda(Tx, Tv) &\leq k \max\{\delta_w(x), w_\lambda(v, Tv), w_\lambda(x, Tv)\} \\
w_\lambda(T^n x, Tv) &\leq k \max\{\delta_w(T^{n-1}x), w_\lambda(v, Tv), w_\lambda(T^{n-1}x, Tv)\} \\
w_\lambda(T^n x, Tv) &\leq \max\{k^n \delta_w(x), w_\lambda(v, Tv), w_\lambda(T^{n-1}x, Tv)\} \\
w_\lambda(T^{n+1}x, Tv) &\leq k \max\{k^n \delta_w(x), w_\lambda(v, Tv), w_\lambda(T^n x, Tv)\} \\
w_\lambda(T^{n+1}x, Tv) &\leq \max\{\underbrace{k^{n+1} \delta_w(x)}_0, kw_\lambda(v, Tv), \underbrace{k^{n+1} w_\lambda(x, Tv)}_0\} \\
w_\lambda(T^{n+1}x, Tv) &\leq kw_\lambda(v, Tv) < w_\lambda(v, Tv)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$w_\lambda(v, Tv) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(T^n x, Tv) \leq kw_\lambda(v, Tv)$$

buluruz. $k < 1$ olduğundan her $\lambda \in (0, \infty)$ için $w_\lambda(v, Tv) = 0$ olur ve böylece $Tv = v$ dir. u, T nin $w_\lambda(u, v) < \infty$ olacak şekilde bir başka sabit noktası olsun. Böylece

$$w_\lambda(u, v) = w_\lambda(Tu, Tv) \leq kw_\lambda(u, v)$$

buluruz. $k < 1$ olduğundan

$$w_\lambda(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

4. BÖLÜM

BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN MODÜLER METRİK VERSİYONLARI

Bu bölümde metrik uzaylardaki bilinen bazı genelleştirilmiş büzülmeleri ve bu büzülmeler için verilen sabit nokta teoremlerinin modüler uzaylardaki karşılıklarını incelemeye çalışacağız. Bu çalışmalar daha detaylı olarak [25,26,27] de verilmiştir. Bu çalışmalara dayanak olan metrik uzay çalışmaları [15,16,17,18,19,20,21,22,29, 32, 33] de verilmiştir. İlk olarak yerel büzülme tanımını vererek başlayacağız.

Tanım 4.1. [25] X_w boştan farklı bir modüler metrik uzay ve $T : X_w \rightarrow X_w$ olsun. Her $x \in X_w$ için x 'e bağlı olabilen

$$p, q \in S(x, \varepsilon) = \{y : w_\lambda(x, y) < \varepsilon\} \quad (4.1)$$

elemanları için

$$w_{\lambda}(Fp, Fq) \leq kw_{\lambda}(p, q)$$

şartını sağlayan ε ve k ($\varepsilon > 0, 0 \leq k < 1$) sayıları varsa X_w deki T dönüşümü **yerel büzülmedir** denir.

Eğer T yerel büzülme ve ε ve k , x 'e bağlı değilse T , (ε, k) -düzgün yerel büzülmedir.

Tanım 4.2. [25] Bir X_w modüler metrik uzayı her $a, b \in X_w$ için ε -zinciri, yani $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ şeklinde, $w_{\lambda}(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir noktalar kümesine sahipse (n , a ve / veya b 'ye bağlı olabilir) ε -**zincirlenebilirdir** denir.

Aşağıdaki teorem, Kılınç ve Alaca [25] tarafından 2014 yılında verilmiştir.

Teorem 4.3. [25] X_w bir tam modüler metrik ε -zincirlenebilir uzay, w , X üzerinde bir metrik modüler, T , X_w 'nin bir (ε, k) -düzgün yerel büzülmesi olsun. O zaman $Tx = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X_w$ vardır.

İspat: x , X_w nin bir keyfi noktası olsun. ε -zincirini $x = x_0, x_1, \dots, x_n = Tx$ olarak seçelim; üçgen eşitsizliğinden

$$w_{\lambda}(x, Tx) \leq \sum_{i=1}^n w_{\lambda}(x_{i-1}, x_i) < n\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $T(T^m x) = T^{m+1}x$ ($m = 1, 2, \dots$) alarak

$$w_{\lambda}(Tx_{i-1}, Tx_i) \leq kw_{\lambda}(x_{i-1}, x_i) < k\varepsilon$$

elde ederiz. Benzer yolla devam edersek,

$$w_{\lambda}(T^m x_{i-1}, T^m x_i) < kw_{\lambda}(T^{m-1} x_{i-1}, T^{m-1} x_i) < \dots < k^m w_{\lambda}(x_{i-1}, x_i) < k^m \varepsilon \quad (4.2)$$

buluruz. Son eşitsizlikten

$$w_{\lambda}(T^m x, T^{m+1} x) \leq \sum_{i=1}^m w_{\frac{\lambda}{m}}(T^m x_{i-1}, T^m x_i) \leq k^m n \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece $(T^m x)$ iterasyon dizisi bir Cauchy dizisidir. Gerçekten j ve t ($j < t$) pozitif tamsayılar

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(T^j x, T^t x) &\leq \sum_{i=j}^{t-1} w_{\frac{\lambda}{t-j}}(T^i x, T^{i+1} x) \\ &\leq n \varepsilon (k^j + k^{j+1} + \dots + k^{t-1}) \\ &\leq n \varepsilon \frac{k^j}{1-k} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

bulunur. X_w nin tamlığından bir $\lim_{i \rightarrow \infty} T^i x$ vardır. T nin sürekliliğinden

$$T\left(\lim_{i \rightarrow \infty} T^i x\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+1} x = \lim_{i \rightarrow \infty} T^i x$$

elde edilir. Böylece $\lim_{i \rightarrow \infty} T^i x$, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi $u = \lim_{i \rightarrow \infty} T^i x$ noktasının tekliğini gösterelim. $v = Tv$ olacak şekilde bir $v \neq u$ var olsun ve ε -zinciri, $u = x_0, x_1, \dots, x_n = v$ olarak seçilsin. (4.2) yi kullanarak

$$w_{\lambda}(Tu, Tv) \leq \sum_{i=1}^r w_{\frac{\lambda}{r}}(T^i x_{i-1}, T^i x_i) < k^i r \varepsilon, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} k^i r \varepsilon = 0$$

buluruz. (i) den dolayı çelişki elde edilir. Böylece $u = v$ elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Uyarı 4.4. Yukarıdaki teorem sabit noktanın varlığını garanti etmez. Gerçekten $T : X_w \rightarrow X_w$,

$Tx = x + \frac{1}{x}$ ile ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ iken $X_w = \mathbb{R}^n$ için

$$w_{\lambda}(x, y) = \max \{|x_i - y_i|\}$$

ile tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned}
w_\lambda(Tx, Ty) &= \max \left\{ \left| x_i + \frac{1}{x_i} - y_i - \frac{1}{y_i} \right| \right\} \\
&= \max \left\{ \left| (x_i - y_i) - \left(\frac{x_i - y_i}{x_i \cdot y_i} \right) \right| \right\} \\
&= \max \left\{ |x_i - y_i| \cdot \left| 1 - \frac{1}{x_i \cdot y_i} \right| \right\} \\
&= \underbrace{\max \{ |x_i - y_i| \}}_{w_\lambda(x, y)} \cdot \underbrace{\max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{x_i \cdot y_i} \right| \right\}}_{k(x, y)}, k(x, y) < 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat, $Tx = x$ olacak şekilde hiçbir $x \in X_w$ yoktur.

Yukarıdaki uyarıdan dolayı 1962’de Rakotch [32] tarafından metrik uzaylar için verilen teoremin modüler metrik uzaylardaki karşılığını incelemeye çalışacağız. İlk olarak Banach büzülme prensibinden daha genel bir dönüşüm tanımlayarak başlayacağız.

Tanım 4.5. Bir $k : (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, $\sup \{k(r) : 0 < p \leq r \leq q\} < 1$ dönüşümü ve

$$w_\lambda(Tx, Ty) \leq k[w_\lambda(x, y)]w_\lambda(x, y) \quad (4.3)$$

varsa $T : X_w \rightarrow X_w$ bir **zayıf büzülme dönüşümüdür**.

Teorem 4.6. [25] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w bir tam modüler metrik uzay olsun. $T : X_w \rightarrow X_w$ bir zayıf büzülme dönüşümü ise o zaman T, X_w ’de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x \in X_w$ keyfi olsun. $(T^n x)$ iterasyon dizisi seçilsin. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) = 0$ ise $TT^n x = T^n x$ olur. Böylece $T^n x, T$ nin bir sabit noktasıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) > 0$ olduğunu varsayalım. $k(r) < r$ olduğundan den $r > 0$ için T büzülmedir. Böylece

$$\begin{aligned}
w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) &= w_\lambda(TT^{n-1} x, TT^n x) \\
&\leq k \left[w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x) \right] w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x) \\
&< w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\{w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x)\}$ dizisi monoton azalan ve alttan “0” ile sınırlı olduğundan yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) = a$ olsun. O zaman

$$a < w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) \leq w_\lambda(x, Tx)$$

elde edilir.

Şimdi $a = 0$ olduğunu gösterelim. $a > 0$ olsun.

$$k = \sup \{k(r) : 0 < a \leq r \leq w_\lambda(x, Tx)\}$$

olarak seçilsin. O zaman

$$k \left[w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) \right] \leq k$$

$$0 < a < w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) \leq k w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x) \leq k^2 w_\lambda(T^{n-2} x, T^{n-1} x) \leq \dots \leq k^n w_\lambda(Tx, Tx)$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n w_\lambda(x, Tx) = 0$ olur. Fakat bu durum imkânsızdır. Böylece $a = 0$ elde edilir.

Şimdi $(T^n x)$ in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ ve

$0 < k(\varepsilon) = \sup \left\{ k(r) : \frac{\varepsilon}{2} \leq r \leq \varepsilon \right\}$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) = 0$ ve $1 - k(r) > 0$ olduğundan

her $n \geq n_0$ için

$$w_{\frac{\lambda}{2}}(T^n x, T^{n+1} x) < \frac{1 - k(\varepsilon)}{2} \cdot \varepsilon \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $m > n \geq n_0$ için

$$w_\lambda(T^n x, T^m x) < \varepsilon \quad (4.5)$$

olduğunu göstereceğiz. $m = n + 1$ için (4.5), (4.4)'den sağlanır. (4.4), $m > n + 1$ için sağlansın.

$w_\lambda(T^n x, T^m x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ise (4.3)'den

$$w_{\frac{\lambda}{2}}(TT^n x, TT^m x) \leq k \left[w_{\frac{\lambda}{2}}(T^n x, T^m x) \right] w_{\frac{\lambda}{2}}(T^n x, T^m x) < k(\varepsilon) \varepsilon$$

elde ederiz. Üçgen eşitsizliği ve (4.4) den

$$\begin{aligned} w_\lambda(T^n x, T^{m+1} x) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(T^n x, TT^n x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(TT^n x, TT^m x) \\ &< \frac{1-k(\varepsilon)}{2} \varepsilon + k(\varepsilon) \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. $w_\lambda(T^n x, T^m x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ise üçgen eşitsizliği ve (4.4)'den

$$\begin{aligned} w_\lambda(T^n x, T^{m+1} x) &\leq w_{\frac{\lambda}{2}}(T^n x, T^m x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(T^m x, T^{m+1} x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-k(\varepsilon)}{2} \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $w_\lambda(T^n x, T^{m+1} x) < \varepsilon$ olup (4.5) den $(T^n x)$ bir Cauchy dizisidir. X_w tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = u$ olacak şekilde bir $u \in X_w$ vardır. T nin sürekliliğinden

$$Tu = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = u$$

elde edilir. Böylece u , T nin sabit noktasıdır. Şimdi u nun tekliğini gösterelim. $v, u \neq v$ olacak şekilde T nin bir başka sabit noktası olsun. O zaman

$$\begin{aligned} w_\lambda(u, v) &\neq 0 \\ 0 &< w_\lambda(u, v) = w_\lambda(Tu, Tv) \leq k[w_\lambda(u, v)]w_\lambda(u, v) \\ (1 - k[w_\lambda(u, v)])w_\lambda(u, v) &\leq 0 \\ w_\lambda(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

olur. (i) den bunun imkânsız olduğu görülür. Böylece $u = v$ bulunur ve ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi 1971 yılında Reich [33] tarafından tam metrik uzaylar için verilen teoremin modüler metrik uzaylardaki karşılığını inceleyeceğiz. Aşağıdaki teorem 2014 yılında Kılınç ve Alaca [27] tarafından verilmiştir.

Teorem 4.7. [27] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w, w tarafından oluşturulan bir modüler metrik uzay olsun. $T : X_w \rightarrow X_w$ dönüşümü, α, β, γ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ ve $x, y \in X_w$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) \leq \alpha w_\lambda(x, y) + \beta w_\lambda(x, Tx) + \gamma w_\lambda(y, Ty) \quad (4.6)$$

şartını sağlasın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir ve $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ ise sabit nokta tektir.

İspat: $x \in X_w$ keyfi ve (x_n) Picard iterasyon dizisi $x_0 = x, \dots, x_{n+1} = Tx_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$ olarak göz önüne alınsın. (4.6) dan

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \beta w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \gamma w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq (\alpha + \beta) w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \gamma w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma) \max \{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq k \cdot \max \{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \}$$

elde edilir. $k < 1$ olduğundan

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq k w_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$

sağlanır. Benzer yolla devam edersek, her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq k w_\lambda(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 w_\lambda(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n w_\lambda(x, Tx) \quad (4.7)$$

$\varepsilon > 0$ için $n \rightarrow \infty$ limitini alırsak

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = \varepsilon$$

elde edilir. (4.7) ve üçgen eşitsizliğinden her $m > n$ için

$$w_{\lambda}(x_n, x_m) \leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{m-1}, x_m)$$

elde edilir. $\frac{\lambda}{m-n}$ için (4.7) yi göz önüne alırsak, genelliği bozmadan

$$w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{m-n}$$

kabul edebiliriz. Böylece

$$w_{\lambda}(x_n, x_m) \leq \left[\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{m-n} \right) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{m-n} \right)}_{m-n \text{ tane}} \right]$$

elde edilir. Buradan

$$w_{\lambda}(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

olup (x_n) bir Cauchy dizisidir. X_w tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X_w$ vardır. Şimdi u nun T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. (4.6) dan

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(Tu, Tx_n) &\leq \alpha w_{\lambda}(u, x_n) + \beta w_{\lambda}(u, Tu) + \gamma w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma) \max \{ w_{\lambda}(u, x_n), w_{\lambda}(u, Tu), w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \} \\ &\leq k \max \{ w_{\lambda}(u, x_n), w_{\lambda}(u, Tu), w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \} \end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ iken limit aldığımızda

$$w_{\lambda}(Tu, u) \leq k w_{\lambda}(u, Tu)$$

elde ederiz. $k < 1$ olduğundan $w_{\lambda}(u, Tu) = 0$ sağlanır. Böylece $Tu = u$ olur. Şimdi, $v \in X_w$, T nin bir başka sabit noktası olsun. O zaman her $\lambda > 0$ için $\alpha < 1$ iken

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(u, v) &= w_{\lambda}(Tu, Tv) \\ &\leq \alpha w_{\lambda}(u, v) + \beta w_{\lambda}(u, Tu) + \gamma w_{\lambda}(v, Tv) \\ &\leq \alpha w_{\lambda}(u, v) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$w_\lambda(u, v) \leq \alpha w_\lambda(u, v)$$

olduğu görülür. O zaman $u = v$ elde edilir. Bu sabit noktanın tekliğini garanti eder. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.8. [27] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w bir tam modüler metrik uzay olsun. X_w deki bir T self dönüşümü aşağıdaki şartı sağlasın: $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq w_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow w_\lambda(Tx, Ty) < \varepsilon \quad (4.8)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa T , bir tek sabit noktaya sahiptir. $w_\lambda(Tx, x) < \infty$ ise $u \in X_w$ sabit noktası tektir ve her bir $x \in X_w$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = u$ olur.

İspat: x keyfi olsun. $(T^n x)$ iterasyon dizisini göz önüne alalım. $w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) = 0$ durumu bir $n \in \mathbb{N}$ için sağlanırsa (i) den dolayı

$$T^{n+1} x = T(T^n x) = T^n x$$

elde edilir. $T^n x, T$ nin sabit noktasıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) > 0$ olsun. (4.8)'den açıktır ki T büzülmedir. T büzülme olduğundan $\{w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x)\}$ dizisi monoton azalandır. Gerçekten $w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) < w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x) < \dots < w_\lambda(x, Tx)$ olur. Buradan, bu dizinin bir ε limiti vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) > \varepsilon \quad (4.9)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ kabul edelim. O zaman hipotezden (4.8) 'i sağlayan uygun bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ vardır. ε un tanımından

$$\varepsilon \leq w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) < \varepsilon + \delta$$

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. (4.8)'den

$$w_\lambda(TT^n x, TT^{n+1} x) = w_\lambda(T^{n+1} x, T^{n+2} x) < \varepsilon$$

elde edilir. Fakat bu durum imkansızdır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(T^n x, T^{n+1} x) = 0 \quad (4.10)$$

elde ederiz. Şimdi $(T^n x)$ in Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Hipotezden (4.8) sağlanacak şekilde uygun bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ vardır. $\delta < \varepsilon$ kabul edilebilir. (4.10)'dan her $n \geq n_0$ ve $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(T^{n-1} x, T^n x) < \delta \quad (4.11)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi herhangi bir sabit $k \geq n_0$ için, her $p \in \mathbb{N}$ için

$$w_\lambda(T^k x, T^{k+p} x) < \varepsilon \quad (4.12)$$

olduğunu göstereceğiz. (4.8)'den her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(T^k x, T^{k+p} x) < \varepsilon$ olur. Böylece $p=1$ için (4.12) sağlanır. Şimdi (4.12)'nin $p=1, 2, \dots, n$ için sağlandığını kabul edelim ve $p=n+1$ için sağlanacağını gösterelim. Genelliği bozmadan $\frac{\lambda}{2} > 0$ için ε_1 ve δ_1 in var olduğunu kabul edelim. Üçgen eşitsizliğinden

$$w_\lambda(T^{k-1} x, T^{k+n} x) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(T^{k-1} x, T^k x) + w_{\frac{\lambda}{2}}(T^k x, T^{k+n} x)$$

elde ederiz. (4.11) ve kabulümüzden

$$w_\lambda(T^{k-1} x, T^{k+n} x) < \varepsilon_1 + \delta_1$$

$w_\lambda(T^{k-1} x, T^{k+n} x) \geq \varepsilon$ ise (4.12)'den

$$w_\lambda(T^k x, T^{k+n+1} x) = w_\lambda(TT^{k-1} x, TT^{k+n} x) < \varepsilon_1$$

elde ederiz. Bu teknikle (4.12)'nin sağlandığı görülür. (4.12)'nin $(T^n x)$ dizisinin Cauchy olduğunu sağladığı açıktır. X_w tam olduğundan bu dizi bir $u \in X_w$ limit noktasına sahiptir. T nin sürekliliğinden, u , T nin sabit noktasıdır. Gerçekten

$$T\left(\lim_{i \rightarrow \infty} T^i x\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+1} x = \lim_{i \rightarrow \infty} T^i x$$

olur. T nin bir başka $v \in X_w$, $v \neq u$ sabit noktası var olsun.

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq w_\lambda(u, v) < \varepsilon + \delta &\Rightarrow w_\lambda(Tu, Tv) < \varepsilon \\ \varepsilon \leq w_\lambda(u, v) < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu durum imkansızdır. Böylece $u = v$ bulunur ve T bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu ispatı tamamla. $\square$

Bu teorem aşağıda verilen daha genel şartlar altında da sağlanır.

Sonuç 4.9. [27] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w bir tam modüler metrik uzay olsun. T self dönüşümü X_w üzerinde aşağıdaki şartı sağlasın: $\varepsilon > 0$, her $x, y \in X_w$ ve $\lambda > 0$ için

$$\varepsilon < w_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow w_\lambda(Tx, Ty) \leq \varepsilon \quad (4.13)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

O zaman T bir sabit noktaya sahiptir. $w_\lambda(Tx, x) < \infty$ ise $u \in X_w$ sabit noktası tektir ve her bir $x \in X_w$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = u$ olur.

Ayrıca, aşağıdaki daha genel şartı da verebiliriz.

Sonuç 4.10. $\varepsilon > 0$, her $x, y \in X_w$ ve $\lambda > 0$ için

$$\varepsilon \leq w_\lambda(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow w_\lambda(Tx, Ty) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Şimdi 1971 yılında Ciric [15] tarafında metrik uzaylar için verilen teoremin modüler metrik uzaylardaki karşılığını verelim.

Teorem 4.11. [27] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w bir tam modüler metrik uzay olsun. $T : X_w \rightarrow X_w$ dönüşümü $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, her $\lambda > 0$ için

$$k = \sup \{ \alpha(x, y) + \beta(x, y) + \gamma(x, y) + 2\delta(x, y) \} < 1 \quad (4.14)$$

olacak şekilde $k : X_w \times X_w \rightarrow [0, 1)$ üzerine fonksiyon iken

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tx, Ty) &\leq \alpha(x, y)w_\lambda(x, y) + \beta(x, y)w_\lambda(x, Tx) + \gamma(x, y)w_\lambda(y, Ty) \\ &\quad + \delta(x, y)[w_{2\lambda}(x, Ty) + w_{2\lambda}(Tx, y)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

şartını sağlasın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir ve $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ ise $u \in X_w$ sabit noktası tektir.

İspat: $x \in X_w$ keyfi ve (x_n) Picard iterasyon dizisi $x_0 = x, x_1 = Tx_0, \dots, x_n = T^n x, (n = 0, 1, \dots)$ olarak seçilsin. (4.15)den her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) &= w_\lambda(T^{n-1}x, T^n x) = w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \beta w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \gamma w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \delta [w_{2\lambda}(x_n, x_n) + w_{2\lambda}(x_{n-1}, x_{n+1})] \\ &\leq (\alpha + \beta) w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + \gamma w_\lambda(x_n, x_{n+1}) + \delta w_{2\lambda}(x_{n-1}, x_{n+1}) \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma) \max \{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \} + \delta [w_\lambda(x_{n-1}, x_n) + w_\lambda(x_n, x_{n+1})] \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma + 2\delta) \max \{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \} \\ &\leq k \max \{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \} \end{aligned}$$

olup $k < 1$ olduğundan

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq k w_\lambda(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Böyle devam edersek,

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq k w_\lambda(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n w_\lambda(x, Tx)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) = \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Genelliği bozmadan $\frac{\lambda}{m-n}$ için

$$w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{m-n}$$

olduğunda bir $\frac{\varepsilon}{m-n} > 0$ in var olduğunu kabul edebiliriz. O zaman üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(x_n, x_m) &\leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left[\left(\frac{\varepsilon}{m-n} \right) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{m-n} \right) \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{m-n} (m-n) = \varepsilon \end{aligned}$$

buluruz. Buradan (x_n) bir Cauchy dizisidir. X_w tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X_w$ vardır.

Şimdi u nun, T nin bir sabit noktası olduğunu göstermeye çalışalım. (4.14) ve (4.15)den

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(Tu, Tx_n) &\leq \alpha w_{\lambda}(u, x_n) + \beta w_{\lambda}(u, Tu) + \gamma w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \delta [w_{2\lambda}(u, x_{n+1}) + w_{2\lambda}(x_n, Tu)] \\ &\leq (\alpha + \beta + \gamma) \max \{ w_{\lambda}(u, x_n), w_{\lambda}(u, Tu), w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \} \\ &\quad + 2\delta \max \{ w_{2\lambda}(u, x_{n+1}), w_{2\lambda}(x_n, Tu) \} \end{aligned}$$

bulunur. Metrik modülerin özelliğinden,

$$w_{2\lambda}(u, Tu) \leq w_{\lambda}(u, Tu)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(u, Tu) &\leq (\alpha + \beta + \gamma + 2\delta) w_{\lambda}(u, Tu) \\ &\leq k w_{\lambda}(u, Tu) \end{aligned}$$

elde edilir. $k < 1$ olduğundan $w_\lambda(u, Tu) = 0$ olur. Böylece $u = Tu$ olarak bulunur.

Şimdi u nun tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $v \in X_w$, T nin bir başka sabit noktası olsun. (4.15)den

$$\begin{aligned} w_\lambda(u, v) &= w_\lambda(Tu, Tv) \\ &\leq \alpha w_\lambda(u, v) + \beta w_\lambda(u, Tu) + \gamma w_\lambda(v, Tv) + \delta [w_{2\lambda}(u, Tv) + w_{2\lambda}(v, Tu)] \\ &\leq \alpha w_\lambda(u, v) + \delta w_{2\lambda}(u, v) + \delta w_{2\lambda}(u, v) \\ &\leq (\alpha + 2\delta) w_\lambda(u, v) \end{aligned}$$

$$w_\lambda(u, v) \leq k w_\lambda(u, v)$$

bulunur. Dolayısıyla $w_\lambda(u, v) = 0$ elde edilir. Buradan $u = v$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.12. [27] w, X üzerinde bir metrik modüler ve X_w bir tam modüler metrik uzay olsun. $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, X_w nin bir self dönüşüm ailesi ve I indis kümesi olsun. Her $\lambda > 0$ ve her bir $\alpha \in I$ için;

$$w_\lambda(T_\alpha x, T_\beta y) \leq k \max \left\{ w_\lambda(x, y), w_\lambda(x, T_\alpha x), w_\lambda(y, T_\beta y), \frac{1}{2} [w_{2\lambda}(x, T_\beta y) + w_{2\lambda}(y, T_\alpha x)] \right\} \quad (4.16)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ ve her $x, y \in X_w$ için bir sabit $\beta \in I$ varsa, tüm self dönüşümler bir sabit noktaya sahiptir; $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ ise her bir T_α , ($\alpha \in I$), bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\alpha \in I$ ve $x \in X_w$ keyfi olsun. İterasyon dizisini $x_0 = x, x_{2n+1} = T_\alpha x_{2n}, x_{2n+2} = T_\beta x_{2n+1}, n \geq 0$ olarak seçelim. (4.16)dan

$$\begin{aligned} w_\lambda(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= w_\lambda(T_\alpha x_{2n}, T_\beta x_{2n+1}) \\ &\leq k \max \left\{ w_\lambda(x_{2n}, x_{2n+1}), w_\lambda(x_{2n}, x_{2n+1}), w_\lambda(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{1}{2} [w_{2\lambda}(x_{2n}, x_{2n+2}) + w_{2\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+1})] \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [w_{2\lambda}(x_{2n}, x_{2n+2}) + w_{2\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+1})] &\leq \frac{1}{2} [w_{\lambda}(x_{2n}, x_{2n+1}) + w_{\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\ &\leq \max \{w_{\lambda}(x_{2n}, x_{2n+1}), w_{\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+2}),\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$w_{\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq k \max \{w_{\lambda}(x_{2n}, x_{2n+1}), w_{\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+2}),\}$$

elde ederiz. $k < 1$ olduğundan

$$w_{\lambda}(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq k w_{\lambda}(x_{2n}, x_{2n+1})$$

buluruz. Böylece her $n \geq 1$ için

$$w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \leq k w_{\lambda}(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq \dots \leq k^n w_{\lambda}(x_0, x_1).$$

$n \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda

$$w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Yani, $w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Buradan (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Gerçekten $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ ve $\lambda > 0$ için üçgen eşitsizliğinden

$$w_{\lambda}(x_m, x_n) \leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_m, x_{m-1}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_0, x_1)$$

bulunur. Genelliği bozmadan $\frac{\lambda}{m-n}$ için $w_{\frac{\lambda}{m-n}}(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{m-n}$ olduğunu kabul edebiliriz.

Böylece,

$$w_{\lambda}(x_n, x_m) \leq \left[\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{m-n} \right) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{m-n} \right)}_{m-n \text{ tane}} \right]$$

$$w_{\lambda}(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

olur. X_w tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X_w$ vardır. (4.16) dan,

$$\begin{aligned}
w_\lambda(T_\beta u, x_{2n+1}) &= w_\lambda(T_\beta u, T_\alpha x_{2n}) \\
&\leq k \max \left\{ w_\lambda(u, x_{2n}), w_\lambda(u, T_\beta u), w_\lambda(x_{2n}, x_{2n+1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} [w_{2\lambda}(u, x_{2n+1}) + w_{2\lambda}(x_{2n}, T_\beta u)] \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda

$$w_\lambda(T_\beta u, u) \leq k w_\lambda(u, T_\beta u)$$

bulunur. Böylece $w_\lambda(T_\beta u, u) = 0$ olur ve $T_\beta u = u$ elde edilir.

Şimdi $u \in X_w$ nin tüm $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ dönüşümlerinin bir sabit noktası olduğunu göstermeye çalışalım. $\alpha \in I$ keyfi olsun. (4.16)dan $x = y = T_\beta u$ ile birlikte

$$w_\lambda(u, T_\beta u) = w_\lambda(T_\alpha u, T_\beta u) \leq k \max \left\{ w_\lambda(u, T_\alpha u), \frac{1}{2} w_{2\lambda}(u, T_\alpha u) \right\}.$$

Buradan, tüm T_α lar bir ortak sabit noktaya sahiptir. $v \in X_w, T_\beta$ nin bir başka sabit noktası olsun. Buradan v , tüm $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ dönüşümlerinin de sabit noktasıdır. Böylece, (4.16)dan

$$w_\lambda(u, v) = w_\lambda(T_\beta u, T_\alpha u) \leq k w_\lambda(u, v)$$

olur. Böylece $u = v$ elde edilir. Bu da $u, (T_\alpha)_{\alpha \in I}$ ların bir tek ortak noktası olduğunu gösterir.

Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.13. [26] X_w bir tam modüler metrik uzay, I ve T, X_w üzerinde her $x, y \in X_w$ ve $\lambda > 0$ için $0 \leq k < 1$ iken,

$$w_\lambda(Tx, Ty) \leq k w_\lambda(Ix, Iy) \quad (4.17)$$

eşitsizliğini sağlayan değişmeli dönüşümler olsun. I fonksiyonunun değer kümesi, T fonksiyonunun değer kümesini kapsıyor ise, I sürekli ve $w_\lambda(x, Ix) < \infty$ olduğunda T ve I bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X_w$ keyfi olsun. Tx_0 ve Ix_0 iyi tanımlıdır. $Tx_0 \in I(X_w)$ olduğundan $Ix_1 = Tx_0$ olacak şekilde bir $x_1 \in X_w$ vardır. $Ix_2 = Tx_1$ olacak şekilde $x_2 \in X_w$ seçelim. Genel olarak x_n seçilmişse X_w deki x_{n+1} noktasını $Ix_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde seçebiliriz. (4.17)den

$$w_\lambda(Ix_n, Ix_{n+1}) = w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq kw_\lambda(Ix_{n-1}, Ix_n)$$

elde ederiz. Benzer yolla devam edersek

$$w_\lambda(Ix_n, Ix_{n+1}) \leq kw_\lambda(Ix_{n-1}, Ix_n) \leq k^2 w_\lambda(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) \leq \dots \leq k^n w_\lambda(Ix_0, Ix_1)$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$w_\lambda(Ix_n, Ix_{n+1}) \rightarrow 0.$$

Genelliği bozmadan $\frac{\lambda}{m-n} > 0$ için $w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Ix_n, Ix_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon}{m-n}$ olacak şekilde $\frac{\varepsilon}{m-n} > 0$ vardır.

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(Ix_n, Ix_m) &\leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Ix_n, Ix_{n+1}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Ix_{m-1}, Ix_m) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{m-n} + \dots + \frac{\varepsilon}{m-n} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (x_n) bir Cauchy dizisidir. X_w tam olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n-1} = u$$

olacak şekilde bir $u \in X_w$ vardır. I sürekli ve I ve T değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} Iu &= I\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} I^2 x_n \\ Iu &= I\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} ITx_n \end{aligned}$$

Buradan, (4.17) kullanırsak,

$$w_\lambda(TIx_n, Tu) \leq kw_\lambda(I^2 x_n, Iu).$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$w_{\lambda}(Iu, Tu) \leq kw_{\lambda}(Iu, Iu)$$

olur. Buradan $Iu = Tu$ elde edilir. Tekrar (4.17) den

$$w_{\lambda}(Tx_n, Tu) \leq kw_{\lambda}(Ix_n, Iu)$$

bulunur. Tekrar $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında

$$w_{\lambda}(u, Tu) \leq kw_{\lambda}(u, Iu) = kw_{\lambda}(u, Tu)$$

elde edilir. Böylece $Tu = u$ bulunur. u nun tekliğini göstermek için $Tv = Iv = v$ olacak şekilde bir $v \in X_w$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$w_{\lambda}(u, v) = w_{\lambda}(Iu, Tv) = w_{\lambda}(Tu, Tv) \leq kw_{\lambda}(Iu, Iv)$$

olup buradan $u = v$ sonucuna ulaşılır. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 4.14. [26] X_w bir tam modüler metrik uzay, S ile I değişmeli ve T ile J değişmeli dönüşümler olsun. Bu dönüşümler her $x, y \in X_w$ için $0 \leq k < 1$ iken

$$w_{\lambda}(Sx, Ty) \leq kw_{\lambda}(Ix, Jy) \quad (4.18)$$

şartını sağlasın. I ve J sürekli ve $w_{\lambda}(Ix_0, Jx_1) < \infty$ olsun. Bu takdirde tüm S, T, I, J dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X_w$ keyfi olsun. $Sx_0 \in J(X_w)$ olduğundan $x_1 \in X_w$ yi, $Jx_1 = Sx_0$ olacak şekilde seçelim. Ayrıca $Tx_1 \in I(X_w)$ olduğundan $x_2 \in X_w$ yi $Ix_2 = Tx_1$ olacak şekilde seçelim. Genel olarak $x_{2n+1} \in X_w$, $Jx_{2n+1} = Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2} \in X_w$, $Ix_{2n+2} = Tx_{2n+1}$, $(n = 0, 1, \dots)$ olarak seçilsin.

$$\begin{aligned} y_{2n} &= Jx_{2n+1} = Sx_{2n} \\ y_{2n+1} &= Ix_{2n+2} = Tx_{2n+1}, n \geq 0 \end{aligned}$$

olsun. Böylece (y_n) in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten (4.18) den

$$\begin{aligned}
w_{\lambda}(Jx_{2n+1}, Ix_{2n+2}) &= w_{\lambda}(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq kw_{\lambda}(Jx_{2n+1}, Ix_{2n}) \\
&\leq kw_{\lambda}(Sx_{2n}, Tx_{2n-1}) \leq k.kw_{\lambda}(Ix_{2n}, Jx_{2n-1}) \\
&\leq k^2w_{\lambda}(Ix_{2n}, Jx_{2n-1}) \\
&\leq k^4w_{\lambda}(Ix_{2n-2}, Jx_{2n-1}) \\
&\dots \\
&\leq k^{2n}w_{\lambda}(Jx_3, Ix_2) \\
&\leq k^{2n+2}w_{\lambda}(Jx_1, Ix_0)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda

$$w_{\lambda}(Jx_{2n+1}, Ix_{2n+2}) \rightarrow 0.$$

Buradan $w_{\lambda}(Jx_{2n+1}, Ix_{2n+2}) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Genelliği bozmadan $\frac{\lambda}{m-n} > 0$ için

$$w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Jx_{2n+1}, Ix_{2n+2}) \leq \frac{\varepsilon}{m-n}$$

olacak şekilde bir $\frac{\varepsilon}{m-n} > 0$ vardır. Böylece $m = 2k + 1$, $n = 2l + 2$, $k > 1$ seçerek ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
w_{\lambda}(y_m, y_n) &= w_{\lambda}(y_{2k+1}, y_{2l+2}) = w_{\lambda}(Ix_{2k}, Jx_{2l+1}) \\
&\leq w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Ix_{2k}, Jx_{2k+1}) + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Jx_{2k+1}, Ix_{2k-2}) + \dots + w_{\frac{\lambda}{m-n}}(Ix_{2l+2}, Jx_{2l+1}) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{m-n} + \dots + \frac{\varepsilon}{m-n} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (y_n) bir Cauchy dizisidir. $u \in X_w$ yi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Jx_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_{2n+2} = u$$

olacak şekilde seçelim. I sürekli ve I ile S değişmeli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^2x_{2n+2} = Iu, \lim_{n \rightarrow \infty} SIx_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} ISx_{2n} = Iu = u.$$

(4.18) kullanırsak,

$$w_{\lambda}(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq kw_{\lambda}(I^2x_{2n}, Jx_{2n+1}).$$

$n \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda

$$w_{\lambda}(Iu, u) \leq kw_{\lambda}(Iu, u)$$

olup $Iu = u$ bulunur. Benzer olarak J sürekli ve J ile T değişmeli olduğundan $Ju = u$ olur.

(4.18) den $Iu = u$ olduğundan

$$w_{\lambda}(Su, Tx_{2n+1}) \leq kw_{\lambda}(u, Jx_{2n+1}).$$

$n \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda

$$w_{\lambda}(Su, u) \leq kw_{\lambda}(u, u) = 0.$$

Buradan $Su = u$ elde edilir. Tekrar (4.18) den yukarıdaki sonuçları göz önüne alarak

$$w_{\lambda}(Su, Tu) = 0$$

olup $Su = Tu$ elde ederiz. Bu ise

$$Su = Tu = Iu = Ju = u$$

olması demektir. S, T, I, J dönüşümleri bir tek $u \in X_w$ ortak sabit noktasına sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. □

SONUÇLAR VE BULGULAR

Bu tez çalışmamızda, modüler metrik uzaylar incelenmiş ve bu uzaylarda yerel büzülme, (ε, k) –düzgün yerel büzülme, ε –zincirlenebilme ve zayıf büzülme dönüşümü kavramlarını tanımlanmış ve bu kavramları kullanıp metrik uzaylarda iyi bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin bu uzaylar için orijinal karşılıkları ispatlanmıştır. Metrik uzaylarda bilinen bazı temel sabit nokta teoremlerinin bu uzaylardaki karşılıkları araştırılmıştır. Böylece, yeni bir çalışma alanı olan bu uzaylarda yeni bir yaklaşım ortaya koyulmuştur. Araştırmacılar, vermiş olduğumuz bu kavramlar yardımıyla yeni sabit nokta teoremleri verebilir, ispatlanan teoremlerin genelleştirmelerini yapabilir ve tezdeki kullanılan mantık ve teknikler ile metrik uzaylardaki diğer temel teoremlerin bu uzaylarda karşılığı olup olmadığını araştırabilir. Ayrıca, daha önce yayınlanmış olan [2,3,4,5,6,7,34,40] makalelerinden faydalanarak farklı uzaylarda verilen sonuçların modüler metrik versiyonları çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Afrah A.N. Abdou, On asymptotic pointwise contractions in modular metric spaces, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, Article ID 501631, 7 pages.
- [2] C. Alaca, D. Türkoğlu, C. Yıldız, Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces, Chaos, Solitons & Fractals, 29(5) (2006), 1073-1078.
- [3] C. Alaca, Fixed point results for mappings satisfying a general contractive condition of operator type in dislocated fuzzy quasi-metric spaces, Journal of Computational Analysis & Applications 12 (1-b) (2010), 361-368.
- [4] C. Alaca, İ. Altun, D. Türkoğlu, On compatible mappings of type (I) and (II) in intuitionistic fuzzy metric spaces, Commun. Korean Math. Soc., 23 (3) (2008), 427-446.
- [5] C. Alaca, A related fixed point theorem on two metric spaces satisfying a general contractive condition of integral type, Journal of Computational Analysis & Applications, 11 (2) (2009), 263-270.
- [6] İ. Altun, F. Sola, H. Şimşek, Generalized contractions on partial metric spaces, Topology and its Applications, 157 (18) (2010), 2778-2785.
- [7] D. Akçay, C. Alaca, Coupled Fixed Point Theorems in Dislocated Quasi-metric Spaces, Journal of Advanced Studies in Topology, 4(1) (2013), 66-72.
- [8] B. Azadifar, Gh. Sadeghi, R. Saadati, C. Park, Integral type contractions in modular metric spaces, Journal of Inequalities and Applications, 2013 (2013):483. doi:10.1186/1029-242X-2013-483.
- [9] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales, Fund Math, 3 (1922), 133-181.
- [10] VV. Chistyakov, Metric modulars and their application, Dokl Math. 73(1) (2006), 32–35 doi:10.1134/S106456240601008X.
- [11] VV. Chistyakov, Modular metric spaces generated by F-modulars, Folia Math. 14 (2008), 3–25.
- [12] VV. Chistyakov, Modular metric spaces I basic concepts, Nonlinear Anal. 72 (2010), 1–14 doi:10.1016/j.na.2009.04.057.
- [13] VV. Chistyakov, Fixed points of modular contractive maps, Dokl. Math. 86 (2012), 515-518.
- [14] Y.J. Cho, R. Saadati, Gh. Sadeghi, Quasi-Contractive mappings in modular metric spaces, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics, 10.1155/2012/907951,(2012).
- [15] Lj.B. Ćirić, Generalized contractions and fixed point theorems, Publ. Inst. Math. 12 (1971), 19-26.
- [16] Lj.B. Ćirić, On a family of contractive maps and fixed points, Publ. Inst. Math. 17 (1974), 52-58.
- [17] Lj.B. Ćirić, A new fixed point theorem for contractive mappings, Publ. Inst. Math. 30(44) (1981), 25-27.

- [18] M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12(1) (1961), 7-10.
- [19] B. Fisher, Four mappings with a common fixed point, (Arabic summary), *J. Univ. Kuwait Sci.*, 8 (1981), 131-139.
- [20] G. Jungck, Commuting maps and fixed points, *Amer. Math. Monthly* 83 (1976), 261-263.
- [21] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, *Int J Math Math Sci.* 9 (1986), 771-779 doi:10.1155/S0161171286000935.
- [22] G. Jungck, B.E. Rhoades, Fixed points for set valued functions without continuity, *Indian J Pure Appl Math.* 29 (1998), 227-238.
- [23] R. Kannan, Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 60 (1968), 71-76.
- [24] R. Kannan, On certain sets and fixed point theorems, *Roum. Math. Pure Appl.* 14 (1969), 51- 54.
- [25] E. Kılınç, C. Alaca, A fixed point theorem in modular metric spaces, *Advances in Fixed Point Theory* 4(2) (2014), 199-206.
- [26] E. Kılınç, C. Alaca, Fixed point results for commuting mappings in modular metric spaces, Preprint.
- [27] E. Kılınç, C. Alaca, Some fixed point results in modular metric spaces, Preprint.
- [28] S. Koshi, T. Shimogaki, On F-norms of quasi-modular spaces, *J Fac Sci Hokkaido Univ., Ser I.* 15(3-4) (1961), 202-218.
- [29] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 28 (1969), 326-329.
- [30] C. Mongkolkeha, W. Sintunavarat, P. Kumam, Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2011/93 (2011).
- [31] H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, In *Tokyo Math Book Ser*, vol. 1, Maruzen Co. Tokyo (1950).
- [32] E. Rakotch, A note on contractive mappings, *Amer. Math. Soc.* 3 (1962), 459-465.
- [33] S. Reich, Kannan's fixed point theorem, *Boll. Un. Mat. Ital.* 4 (1971), 1-11.
- [34] S. Sedghi, C. Alaca, N. Shobe, On fixed points of weakly commuting mappings with property (E.A), *Journal of Advanced Studies in Topology*, 3(3) (2012), 11-17.
- [35] W. Sintunavarat, P. Kumam, Coincidence and common fixed points for hybrid strict contractions without the weakly commuting condition, *Appl Math Lett.* 22 (2009), 1877-1881 doi:10.1016/j.aml.2009.07.015.
- [36] W. Sintunavarat, P. Kumam, Weak condition for generalized multi-valued (f, α, β) -weak contraction mappings, *Appl Math Lett.* 24 (2011), 460-465. .
- [37] W. Sintunavarat, P. Kumam, Gregus type fixed points for a tangential multi-valued mappings satisfying contractive conditions of integral type, *J. Inequal Appl.*, 2011/3 (2011). doi:10.1186/1029-242X-2011-3.

- [38] W. Sintunavarat, P. Kumam, Common fixed point theorems for generalized J H-operator classes and invariant approximations, *J. Inequal Appl.*, 2011, 67 (2011). doi:10.1186/1029-242X-2011-67.
- [39] W. Sintunavarat, Y.J. Cho, P. Kumam, Common fixed point theorems for c-distance in ordered cone metric spaces, *Comput Math Appl.*, 62 (2011), 1969–1978.
- [40] D. Türkoğlu, M. Abuloha, Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26 (3) (2010), 489-496.
- [41] C. Yıldız, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, ISBN 975-8895-80X, Ağustos 2005, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Emine KILINÇ
DOĞUM TARİHİ : 07.07.1990
DOĞUM YERİ : İzmir

İlköğrenimini, İzmir Kiraz Atatürk İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Ödemiş Hulusi Uçaçelik Anadolu Lisesin de tamamladı. 2011-2012 Akademik yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2012-2013 Akademik yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı. Halen yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.