

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

**HAZİRAN 2022
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMLARI

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 / 05 / 2022

Tezin Savunma Tarihi : 17 / 06 / 2022

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER

İkinci Danışman Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK

Trabzon 2022

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans ve Doktora eğitimim boyunca bana örnek olan ve yol gösteren, çalışma sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan Sayın Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK ve bu çalışmanın hazırlanması sürecinde önerileri ve yönlendirmeleri ile katkı sağlayan Sayın Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER hocalarıma en içten duygularla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez süresince ilgi ve alakalarını esirgemeyen Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Uğur ŞEVİK hocalarıma da teşekkürlerimi arz ederim.

Son olarak, sevgili eşim Melek, oğlum Ali Mert ve tüm hayatım boyunca her anımda beni destekleyen, her adımda arkamda duran, bugünlerimin mimarı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin, bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

Trabzon 2022

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisi ve Uygulamaları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER ve ikinci danışmanım Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/06/2022

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER DİZİNİ	XI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Temel Tanım ve Teoremler	2
1.3. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Sabit Nokta Teoremi.....	9
1.4. Banach Sabit Nokta Teoreminin Yardımcı Fonksiyonlar Yardımı ile Elde Edilen Genellemeleri.....	22
1.4.1. Geraghty Daralma Dönüşümleri	22
1.4.2. İntegral Tipi Daralma Dönüşümleri	23
1.4.3. F – Daralma Dönüşümleri	24
1.4.4. C – Sınıfı Daralma Dönüşümleri	28
1.4.5. Θ –Daralma Dönüşümü	29
1.4.6. Simülasyon Fonksiyonlar	31
1.4.7. E –Daralma Dönüşümleri.....	35
1.4.8. G Fonksiyonu.....	37
1.5. Graf Teorisi	38
1.6. İntegral Denklemler.....	42
1.6.1. Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri.....	42
1.7. Homotopi Teorisi	46
1.8. Bazı Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar.....	47
1.8.1. b –Metrik Uzaylar	47
1.8.2. Branciari (Dikdörtgensel) Metrik Uzaylar	52
1.8.3. Branciari b –Metrik Uzaylar	54
1.8.4. Modüler Metrik Uzaylar.....	56

1.8.5.	Modüler b –Metrik Uzaylar.....	61
1.8.6.	Branciari Uzaklık Fonksiyonu ile Donatılmış Modüler b –Metrik Uzaylar	64
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR	69
2.1.	Modüler b –Metrik Uzaylarda Simülasyon Fonksiyon Yardımı ile Elde Edilen Suzuki Σ –Daralmalar İçin Sabit Nokta Teoremleri	69
2.1.1.	Suzuki Σ –Daralma Dönüşümlerinin Graf Teorisine Uygulanması	79
2.1.2.	Homotopi Teorisi Üzerine Uygulama	81
2.2.	C –Sınıfı Daralma Dönüşümleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri	88
2.2.1.	Graf Teorisine Uygulama.....	102
2.2.2.	İntegral Tipinde Daralmalara Uygulama.....	106
2.3.	Modüler b –Metrik Uzaylarda Çarpımsal Terimler İçeren Suzuki F –Daralmalar İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	116
2.3.1.	Modüler b –Metrik Uzaylarda Çarpımsal İfadeler İçeren Sabit Nokta Teoremleri	127
2.4.	Genelleştirilmiş Suzuki Berinde $\hat{Z}_{\Psi^*}^{\Theta}$ –Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri	146
2.4.1.	İntegral Denklemler Üzerine Bir Uygulama	169
2.5.	Genelleştirilmiş Simülasyon $\hat{\Theta}_E^{\beta}$ –Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Sonuçları.....	172
3.	SONUÇ VE ÖNERİLER	180
4.	KAYNAKLAR.....	182
	ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER

İkinci Danışman: Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK

2022, 189 Sayfa

Bu tez çalışmasında modüler b –metrik uzaylarda ve Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzaylarda tanımlanmış olan çeşitli daralma dönüşümlerinin ortak sabit noktasının varlığının ve tekliğinin bulunması amaçlanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçların graf teorisi, homotopi, integral denklemler gibi matematiğin çeşitli alanlarına uygulanabilirliği de gösterilmiştir.

Temel olarak bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde sabit nokta teorisinin gelişiminden, metrik uzay kavramı ve özelliklerinden, bazı temel tanım ve teoremlerden, sabit nokta kavramından, Banach sabit nokta teoreminin genişlemelerinden, graf teorisi ile bazı genelleştirilmiş metrik uzay yapılarından bahsedilmiştir. İkinci kısımda ise çeşitli yardımcı fonksiyonlar kullanılarak elde edilen Suzuki Σ –daralma, $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –daralma, çarpımsal ifadeler içeren genelleştirilmiş F –daralma, genelleştirilmiş Suzuki-Berinde $\hat{Z}_{\Psi}^{\Theta}$ –daralma ve genelleştirilmiş simülasyon $\hat{\Theta}_{\mathcal{C}}^{\beta}$ –daralma dönüşümleri gibi yeni kavramlar tanıtılmıştır. Bu yeni kavramlardan elde edilen ortak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bu sonuçlar çeşitli örnekler ve matematiksel uygulamalarla desteklenmiştir. Ayrıca, Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzay ve bu uzayların sahip olduğu bazı özellikler literatüre kazandırılarak bu uzay üzerinde sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teorisi, Modüler b –metrik, Simülasyon fonksiyon, $\mathcal{C}$ –sınıfı fonksiyonlar, F –daralma dönüşümleri, E –daralmalar, Suzuki-Berinde daralma dönüşümleri, Graf teorisi, Homotopi, İntegral denklemler, İntegral tip daralma dönüşümleri

PhD. Thesis

SUMMARY

FIXED POINT THEORY AND APPLICATION IN MODULAR METRIC SPACES

Abdurrahman BÜYÜKKAYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
Second Supervisor: Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK
2022, 189 Pages

In this thesis, it is aimed to find the existence and uniqueness of the common fixed point of various contraction mappings defined in modular b –metric spaces and modular b –metric spaces endow with Branciari distance function. In addition, the applicability of the obtained results to various fields of mathematics such as graph theory, homotopy, integral equations is also shown.

Basically, this study consists of two main parts. In the first chapter, the development of fixed point theory, the concept of metric space and its properties, some basic definitions and theorems, the concept of fixed point, extensions of Banach fixed point theorem, graph theory and some generalized metric space structures are mentioned. In the second part, by using various auxiliary functions, the new concepts such as Suzuki Σ –contraction, $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –contraction, generalized F –contraction involving quadratics terms, generalized Suzuki-Berinde $Z^{\Theta}_{\Psi^*}$ –contraction and generalized simulation $\widehat{\Theta}_E^{\beta}$ –contraction mappings are introduced. The common fixed point theorems obtained from these new concepts have been proved. These results are supported by various examples and mathematical applications. Also, the modular b –metric space equipped with the Branciari distance function and some properties of these spaces have been brought to the literature and the fixed point theorem on this space has been proved.

Key Words: Fixed point theory, Modular b –metric, Simulation functions, $\mathcal{C}$ –class function, F –contraction mappings, E –contraction, Suzuki-Berinde contraction mappings, Graph theory, Homotopi, Integral equation, Integral type contraction mappings

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. $\sin(x^2 + \pi x - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları	10
Şekil 2. $Qx = \ln(x) + 1$ ve $Kx = x^2$ dönüşümlerinin ortak sabit noktaları.....	20
Şekil 3. G grafinin düğümleri	39
Şekil 4. Pregel nehri için graf	40



TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Simölasyon fonksiyonlar.....	31
---------------------------------------	----



SEMBOLLER DİZİNİ

$(\mathcal{S}, \mathcal{B})$	: Branciari metrik uzay
$(\mathcal{S}, \mathcal{B}_b)$	: Branciari b –metrik uzay
$\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$	: Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzay
$(\mathcal{S}, \varrho)$	: b –metrik uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$(\mathcal{S}, d)$	: Metrik uzay
$\mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$	: Modüler metrik uzay
$\mathcal{S}_{\xi}$	: Modüler b –metrik uzay
$\ \cdot\ $	: Normlu uzay
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{C}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$	: Reel değerli sürekli fonksiyonlar
$(\mathcal{S}, \tau)$	: Topolojik uzay
$Fix(Q)$	: Q dönüşümünün sabit noktaları kümesi
$\mathcal{C}_{Fix}\{Q, \mathcal{K}\}$	: Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

$\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme olmak üzere $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümü verildiğinde $Q\omega = \omega$ olan $\omega \in \mathcal{S}$ varsa bu noktalara Q dönüşümün sabit noktaları denir. Yani, Q altında değişmeyen noktalar Q dönüşümünün sabit noktalarıdır.

Bu tanımdan yola çıkılarak sabit nokta teorisi $Q\omega = \omega$ denkleminin çözümünü bulma problemine dönüşür. Sabit nokta teorisinin; genel topoloji, fonksiyonel analiz, lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori, diferansiyel denklemler, mühendislik, biyoloji, istatistik ve oyun teorisi gibi birçok alanda uygulamaları mevcuttur.

Sabit nokta teorisindeki topolojik sabit nokta çalışmaları normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler üzerinedir ve bu çalışmalara Brouwer öncülük etmiştir. 1912 yılında Brouwer [1], $\mathbb{R}^n$ kümesinin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının var olduğunu göstermiştir ve elde edilen sonuçları n –boyutlu Öklid uzayına genelleştirir. Matematiksel olarak Brouwer teoremi

“ $C, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar ve $Q: C \rightarrow C$ sürekli bir dönüşüm ise Q nun C de bir sabit noktası vardır”

şeklinde ifade edilmiştir. Daha sonra bu teoremden “ $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir Banach uzayı alınabilir mi?” sorusunun cevabı araştırılmıştır. Fakat, Kakutani [2] bu teoremin Banach uzaylarında geçerli olmadığını gösteren bir örnek vermiştir. Fakat, 1930 da Schauder [3] tarafından sonsuz boyutlu uzaylara bazı ek koşullar eklenerek aşağıdaki şekliyle genelleştirilmiştir:

“ $\mathcal{S}$ bir Banach uzayı, $C, \mathcal{S}$ nin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere her sürekli ve kompakt $Q: C \rightarrow C$ dönüşümünün C de en az bir sabit noktası vardır.”

Diğer yandan bir dönüşümün sabit noktasının varlığının garanti edilmesinin yanı sıra sabit noktanın tekliğinin bulunmasına yönelik de bir çözüm sunan ve metrik uzay yapısı üzerindeki sabit nokta çalışmalarının temelini oluşturan teorem 1922 yılında Banach tarafından verilen “Banach daralma dönüşüm prensibi” olarak da bilinen “Banach sabit nokta teoremi” dir. Bu teorem metrik sabit nokta çalışmalarındaki ana figür olmuştur. Günümüzde de birçok sabit nokta teoremi Banach sabit nokta teoremi ile ilişkilendirilmektedir.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1. [4] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı, reel değerli, negatif olmayan bir $d: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(d_1) \quad d(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp,$$

$$(d_2) \quad d(\omega, \wp) = d(\wp, \omega), \text{ (simetri özelliği)}$$

$$(d_3) \quad d(\omega, \wp) \leq d(\omega, \nu) + d(\nu, \wp), \text{ (üçgen eşitsizliği).}$$

Bu durumda d fonksiyonuna $\mathcal{S}$ uzayında bir metrik, $(\mathcal{S}, d)$ ikilisine ise bir metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.2.2. [4] $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ ve $d: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ olmak üzere her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(\omega, \wp) = |\omega - \wp|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik (mutlak değer, doğal, salt değer) ve $(\mathbb{R}, d)$ ikilisine alışılmış metrik uzay denir.

Örnek 1.2.3. [5] $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ ve $d_1, d_2: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ olmak üzere her $\omega = (\omega_1, \omega_2), \wp = (\wp_1, \wp_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_1(\omega, \wp) = \sqrt{(\omega_1 - \wp_1)^2 + (\omega_2 - \wp_2)^2}$$

$$d_2(\omega, \wp) = \max \{|\omega_1 - \wp_1|, |\omega_2 - \wp_2|\}$$

fonksiyonları bir metriktir. Bu metrikler $\mathbb{R}^2$ üzerinde sırasıyla Euclid metriği (veya Pisagor metriği) ve maksimum metriği (veya Chebyshev metriği, Tchebychev uzaklığı) olarak isimlendirilir.

Örnek 1.2.4. [6] $\mathcal{S} \neq \emptyset$ keyfi bir küme ve $d: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall \omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(\omega, \wp) = \begin{cases} 0, & \omega = \wp \\ 1, & \omega \neq \wp \end{cases}$$

ile tanımlansın. $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzaydır ve bu uzaya ayrık (diskre, trivial) metrik uzay denir.

Örnek 1.2.5. [4] $\mathcal{S} = \ell_\infty = \left\{ \{\omega_n\} \subseteq \mathbb{R} \text{ (veya } \mathbb{C}) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega_n| < \infty \right\}$ sınırlı diziler uzayı

ve her $\omega = \{\omega_n\}, \wp = \{\wp_n\} \in \mathcal{S}$ için

$$d_\infty(\omega, \wp) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\omega_n - \wp_n|$$

ile tanımlı $d_\infty: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ üzerinde bir metrik fonksiyonudur.

Örnek 1.2.6. [6] $[a, b], \mathbb{R}$ üzerinde kapalı aralık ve

$$\mathcal{S} = C[a, b] := \{\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $d_\infty: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$$d_\infty(\omega, \wp) = \sup_{t \in [a, b]} |\omega(t) - \wp(t)|$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathcal{S}, d_\infty)$ bir metrik uzaydır ve d_∞ metriğine $C[a, b]$ üzerinde supremum metriği veya düzgün metrik adı verilir.

Örnek 1.2.7. [5] $[a, b], \mathbb{R}$ üzerinde kapalı aralık, $1 \leq p < \infty$ sabit reel sayı ve

$$\mathcal{S} = C[a, b] := \{\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $d_p: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$$d_p(\omega, \wp) = \left(\int_a^b |\omega(t) - \wp(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathcal{S}, d_p)$ bir metrik uzaydır.

Metrik uzaya ait bazı topolojik kavramlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.2.8. [6,7] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun.

- Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > n_0$ için $d(\omega_n, \omega^*) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var ise $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\omega^* \in \mathcal{S}$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega^*$ veya $\omega_n \rightarrow \omega^* (n \rightarrow \infty)$ ile ifade edilir, ω^* noktasına dizinin limiti adı verilir.
- Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n \geq N$ olan bütün m ve n pozitif tamsayıları için $d(\omega_n, \omega_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.
- $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise $(\mathcal{S}, d)$ uzayına tam metrik uzay adı verilir.

Uyarı 1.2.9. [4,7] Metrik uzaylarda aşağıdaki koşullar geçerlidir.

- Yakınsak bir dizinin limiti tektir. Ayrıca, bir dizinin yakınsaklığı uzayda tanımlanan metriğe ve içinde bulunduğu uzaya bağlı olarak değişir.
- Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir, fakat tersi her zaman doğru değildir.
- Yakınsak bir dizinin herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır.
- Tam metrik uzayların her alt uzayının tam olması gerekmez. Gerçekten, $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam uzaydır, fakat $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre tam değildir. Tam metrik uzayların kapalı her alt uzayı tamdır.

Örnek 1.2.10. [4] Örnek 1.2.5 de tanımlanmış olan (ℓ_∞, d_∞) dizi uzayı ve Örnek 1.2.6 da tanımlanan $(C[a, b], d_\infty)$ fonksiyon uzayı tam uzaylardır.

Tanım 1.2.11. [6] $(\mathcal{S}, d)$ ve $(\mathcal{M}, m)$ iki metrik uzay ve $Q: (\mathcal{S}, d) \rightarrow (\mathcal{M}, m)$ bir fonksiyon olsun.

- Q fonksiyonu $\omega_0 \in \mathcal{S}$ noktasında sürekli $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ ve $\omega \in \mathcal{S}$ için $d(\omega, \omega_0) < \delta$ iken $m(Q(\omega), Q(\omega_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon, \omega) > 0$ vardır.
- Q fonksiyonu $\omega_0 \in \mathcal{S}$ noktasında alttan yarı sürekli $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ ve $\omega \in \mathcal{S}$ için $d(\omega_0, \omega) < \delta$ iken $Q(\omega_0) - \varepsilon < Q(\omega)$ olan en az bir $\delta > 0$ vardır.
- Q fonksiyonu $\omega_0 \in \mathcal{S}$ noktasında üstten yarı sürekli $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ ve $\omega \in \mathcal{S}$ için $d(\omega_0, \omega) < \delta$ iken $Q(\omega) < Q(\omega_0) + \varepsilon$ olan en az bir $\delta > 0$ vardır.
- Q fonksiyonu ω_0 noktasında düzgün sürekli $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ için $d(\omega, \omega_0) < \delta$ olduğunda $m(Q\omega, Q\omega_0) < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.
- Q fonksiyonunun bir $\omega_0 \in \mathcal{S}$ noktasında dizisel sürekli $\Leftrightarrow \omega_n \rightarrow \omega_0 \Rightarrow Q(\omega_n) \rightarrow Q(\omega_0), (n \rightarrow \infty)$ dir. Yani, $\omega_0 \in \mathcal{S}$ noktasına yakınsayan her $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için $\{Q(\omega_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de $Q(\omega_0)$ noktasına yakınsar.

Metrik uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik tanımları birbirine denktir. Ayrıca, sürekli bir fonksiyon için $Q(\omega_n) \rightarrow Q(\omega_0)$ iken $\omega_n \rightarrow \omega_0$ ifadesi her zaman doğru değildir. Örneğin, $Q: (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ fonksiyonu $Q(\omega) = \omega^2$ ve $\omega_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ ise $Q(\omega_n) = 1 \rightarrow Q(1), (n \rightarrow \infty)$, fakat $(\omega_n) \nrightarrow 1$ olur [8].

Örnek 1.2.12. $\mathbb{R}$ de $d(\omega, \wp) = |\omega - \wp|$ alışılmış metriği için

- $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $Q\omega = \sin\omega$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli $\Leftrightarrow$,
- $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $Q\omega = \omega^3$ fonksiyonu sürekli $\Leftrightarrow$, fakat düzgün sürekli değildir.

Tanım 1.2.13. [6] $\mathcal{S} \neq \emptyset$ bir küme ve $\tau, \mathcal{S}$ nin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

- (i) $\mathcal{S}, \emptyset \in \tau$,
- (ii) τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi yine τ ya ait,
- (iii) τ daki herhangi sayıda kümenin birleşimi yine τ ya ait

olma şartları sağlanıyorsa τ ailesine $\mathcal{S}$ için bir topoloji ve $(\mathcal{S}, \tau)$ ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 1.2.14. [6] $(\mathcal{S}, \tau)$ topolojik uzay ve $\omega \in \mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S}$ kümesinin bir K_ω alt kümesi, U_ω topolojinin elemanı olmak üzere $\omega \in U_\omega \subseteq K_\omega$ olacak biçimde varsa ω

noktasının bir komşuluğu adını alır. ω noktasının bir açık komşuluğu ise bu noktayı içine alan bir açık kümeden ibarettir.

Tanım 1.2.15. [6] $(\mathcal{S}, \tau)$ topolojik uzayında τ nun elemanlarına açık kümeler denir. $A \subseteq \mathcal{S}$ için $\mathcal{S} \setminus A$ kümesi açık ise A kümesine kapalı küme denir. A kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine A kümesinin içi denir ve A° ile ya da $\text{int}A$ ile gösterilir. $A \subseteq \mathcal{S}$ kümesini içeren tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Eğer $A = \bar{A}$ ise $A \subseteq \mathcal{S}$ kümesi kapalı kümedir.

Tanım 1.2.16. [6] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\tau_d = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S} \mid \mathcal{U} \text{ kümesi } (\mathcal{S}, d) \text{ uzayında açık}\}$$

ailesi $\mathcal{S}$ üzerinde bir topolojidir ve τ_d topolojisine metrik topoloji veya d metriğinin ürettiği topoloji denir.

Tanım 1.2.17. [6] $(\mathcal{S}, \tau)$ topolojik uzay olsun. $\mathcal{S}$ uzayında farklı her nokta çiftini içeren ayrık açık kümeler varsa $(\mathcal{S}, \tau)$ ikilisine Hausdorff uzayı veya T_2 -uzayıdır denir.

Tanım 1.2.18. [6] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart bu uzayda her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır. Ayrıca, bir metrik uzayın kompakt alt kümeleri kapalı ve sınırlıdır.

Tanım 1.2.19. [6] $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{M}$ boştan farklı iki küme ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\omega < \wp$ iken $Q(\omega) \geq Q(\wp)$ ($Q(\omega) \leq Q(\wp)$) ise Q fonksiyonuna $\mathcal{S}$ kümesinde artmayan (nonincreasing), (azalmayan(nondecreasing)) fonksiyon denir.

Tanım 1.2.20. [6] $\mathcal{S}$ boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ve $\cdot: \mathbb{F} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall \omega, \wp, z \in \mathcal{S}$ için

- (i) $\omega + \wp = \wp + \omega$,
- (ii) $\omega + (\wp + z) = (\omega + \wp) + z$,
- (iii) $\forall \omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\omega + e = e + \omega = \omega$ olan bir $e \in \mathcal{S}$ vardır,
- (iv) $\forall \omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\omega + (-\omega) = (-\omega) + \omega = e$ olan bir $(-\omega) \in \mathcal{S}$ vardır,
- (v) $1. \omega = \omega$,
- (vi) $\alpha. (\omega + \wp) = \alpha. \omega + \alpha. \wp$,
- (vii) $(\alpha + \beta). \omega = \alpha. \omega + \beta. \omega$,
- (viii) $(\alpha. \beta). \omega = \alpha. (\beta. \omega)$,

şartlarını sağlıyorsa $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) adı verilir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise $\mathcal{S}$ ye reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise $\mathcal{S}$ kompleks vektör uzayıdır.

Tanım 1.2.21. [6] $\mathcal{S}$, $\mathbb{F}$ cismi ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall \omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlarsa $\mathcal{S}$ üzerinde bir norm ve $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

- (i) $\|\omega\| = 0 \Leftrightarrow \omega = \theta$,
- (ii) $\|a\omega\| = |a|\|\omega\|$,
- (iii) $\|\omega + \wp\| \leq \|\omega\| + \|\wp\|$.

Örnek 1.2.22. [6] Normlu uzaylar için aşağıdaki örnekler verilebilir.

(1) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ olsun. $\omega \in \mathbb{R}$ için $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\|\omega\| = |\omega|$ ile tanımlandığında $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm belirtir.

(2) $1 \leq p < \infty$ için

$$\mathcal{S} = \ell_p = \left\{ \omega = (\omega_n): \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p < \infty \right\}$$

uzayı verilsin. $\omega = (\omega_n) \in \ell_p$ için

$$\|\omega\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p \right)^{1/p}$$

ile tanımlandığında $\|\cdot\|$ fonksiyonu ℓ_p üzerinde bir norm belirtir.

$\mathcal{S}$ üzerindeki bir norm, $\mathcal{S}$ üzerinde $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ olmak üzere $d(\omega, \wp) = \|\omega - \wp\|$ ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Bir vektör uzayı üzerindeki her metrik bir normdan indirgenmez. $\mathcal{S}$ uzayı (tüm sınırlı veya sınırsız kompleks terimli diziler uzayı) bir vektör uzayıdır. $\omega = (x_j)$ ve $\wp = (y_j)$ olmak üzere

$$d(\omega, \wp) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

ile tanımlanan metrik, normdan elde edilemez. Bir normdan elde edilen d metriği $\forall \omega, \wp, \alpha \in \mathcal{S}$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

- $d(\omega + \alpha, \wp + \alpha) = d(\omega, \wp)$, (öteleme değişmezliği)
- $d(\alpha\omega, \alpha\wp) = |\alpha|d(\omega, \wp)$, (homojenize)

özelliklerini gerçekler [7].

Tanım 1.2.23. [6] Bir normlu lineer uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Örnek 1.2.24. [6] Banach uzayları için aşağıdaki örnekler verilebilir.

(1) $1 \leq p < \infty$ için $\{\omega = (\omega_n): \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p < \infty\}$ uzayı $\omega = (\omega_n) \in \ell_p$ için

$$\|\omega\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p \right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

(2) Sınırlı diziler uzayı $\ell_{\infty} = \{\omega = (\omega_n): \sup |\omega_n| < \infty\}$ üzerindeki

$$\|\omega\| = \sup_n |\omega_n|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.2.25. [4] $\mathcal{S}, \mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı olsun ve $\mathcal{S}$ üzerinde bir topoloji τ ile verilsin. $(\mathcal{S}, \tau)$ topolojik uzayına göre lineer uzay işlemleri sürekli ise yani $\alpha \in \mathbb{F}$ ve her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

(i) skalerle çarpma işlemi, yani $(\alpha, \omega) \rightarrow \alpha \cdot \omega$ sürekli,

(ii) vektörlerin toplama işlemi, yani $(\omega, \wp) \rightarrow \omega + \wp$ sürekli

ise $\mathcal{S}$ uzayına bir topolojik vektör uzayı ya da lineer topolojik uzay adı verilir.

1.3. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Sabit Nokta Teoremi

Tanım 1.3.1. [9] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir fonksiyon olsun.

$$Q\omega = \omega$$

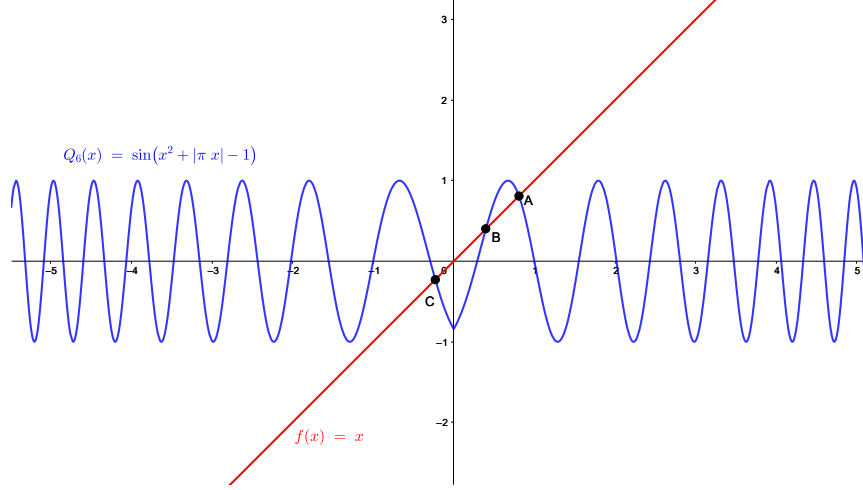
eşitliğini sağlayan $\omega \in \mathcal{S}$ noktasına Q fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

$$F(Q) = \text{Fix}(Q) = \{\omega \in \mathcal{S} : Q\omega = \omega\}$$

kümesi de Q dönüşümünün sabit noktaları kümesini temsil eder.

Örnek 1.3.2. [5] $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $Q_i: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

- $Q_1(\omega) = \sqrt{\omega^2 - 8\omega + 40} \Rightarrow \text{Fix}(Q) = \{5\}$ dir.
- $Q_2(\omega) = \omega^2 - 6 \Rightarrow \text{Fix}(Q) = \{-2, 3\}$ dir,
- $Q_3(\omega) = \omega^5 - 4\omega^3 + \omega^2 + \omega - 4 \Rightarrow \text{Fix}(Q) = \{-2, -1, 2\}$ dir.
- $Q_4(\omega) = e^{\omega+1} \Rightarrow \text{Fix}(Q) = \emptyset$ dir.
- $Q_5(\omega) = \omega \Rightarrow \text{Fix}(Q) = \mathbb{R}$ dir.
- $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Q_6(x) = \sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi, yani fonksiyonun $y = f(x) = x$ doğrusu ile kesim noktaları aşağıdaki grafikte belirtilen A , B ve C noktalarından oluşur.



Şekil 1. $\sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları

Tanım 1.3.3. $[9,10]$ $\mathcal{S}$ boş kümeden farklı bir küme ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $\omega \in \mathcal{S}$ için

$$Q^{n+1}(\omega) = Q(Q^n(\omega))$$

ile tanımlanan $Q^n(\omega)$ dönüşümüne Q altındaki ω nın n . iterasyonu denir.

$Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

- (i) $Fix(Q) \subset Fix(Q^n)$ dir.
- (ii) Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $Fix(Q^n) = \{\omega\}$ ise $Fix(Q) = \{\omega\}$ dır.

Tanım 1.3.4. $[10]$ Q^n ($n \geq 1$), dönüşümü Q dönüşümünün n . iterasyonu olsun. Herhangi bir $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için

$$\omega_n = Q\omega_{n-1} = Q^n\omega_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitliği ile tanımlanan $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ dizisine ω_0 başlangıç noktası ile en iyi yaklaşım dizisi veya Picard iterasyon dizisi denir. Bu yöntem Picard iterasyonu olarak da bilinir.

Tanım 1.3.5. $[9]$ $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq kd(\omega, \wp)$$

eşitsizliği $k \geq 0$ sabiti için sağlanırsa Q dönüşümüne $\mathcal{S}$ üzerinde bir Lipschitzian dönüşüm adı verilir. Ayrıca bu eşitsizlik Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti adı verilir.

Örnek 1.3.6. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, $d(\omega, \wp) = |\omega - \wp|$ ve $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q\omega = 3\omega$ olsun. Bu durumda

$$d(Q\omega, Q\wp) = |3\omega - 3\wp| = 3|\omega - \wp| = 3d(\omega, \wp)$$

olduğundan $k \geq 3$ için Q dönüşümü Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 1.3.7. [9] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq kd(\omega, \wp)$$

ifadesini sağlayan $k \in [0,1)$ sabiti varsa $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümüne “daralma (Banach daralma)” dönüşümü adı verilir.

Örnek 1.3.8. [5] $(\mathcal{S}, d)$ alışılmış metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\omega \in \mathcal{S}$ için

- $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ olmak üzere $Q(\omega) = \frac{\omega}{2}$,
- $\mathcal{S} = [0,100]$ olmak üzere $Q(\omega) = \sqrt{\omega^2 - 8\omega + 40}$,
- $\mathcal{S} = [0,10]$ ve $k \in [0,1)$ olmak üzere $Q(\omega) = \text{sech}(k\omega)$,
- $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ olmak üzere $Q(\omega) = \cos(\cos\omega)$,
- $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ olmak üzere $Q(\omega) = e^{-e^{-\omega}}$,

fonksiyonları birer daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.3.9. [5] d Euclid metriği, $\mathcal{S} = [0,100] \times [-2,2]$ kümesi üzerinde tanımlansın. Ayrıca, her $(a, b) \in \mathcal{S}$ için $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu

$$Q(a, b) = \left(2 + \sqrt{a^2 - 8a + 40}, \tan^{-1} \frac{b}{2} \right)$$

olsun. Bu durumda Q bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.3.10. [5] d maksimum metriği $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde tanımlansın. Her $\omega \in \mathcal{S}$ için

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & -0.2 & 1.1 \end{pmatrix} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Q(\omega) = \omega - A\omega + b$$

ile tanımlı $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir daralma dönüşümüdür.

Daralma dönüşümleri düzgün sürekli dönüşümlerdir. Dolayısıyla herhangi bir Q dönüşümü sürekli değilse bir daralma dönüşümü de olamaz. Buna karşın Q daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir N için Q^N daralma dönüşümü olabilir. Bu durum için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 1.3.11. $Q: [0,2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$Q\omega = \begin{cases} 0, & \omega \in [0,1] \\ 1, & \omega \in (1,2] \end{cases}$$

biçiminde verilmiş olsun. Q dönüşümü $\omega = 1$ noktasında süreksizdir. Bu nedenle daralma dönüşümü değildir. Diğer taraftan, $Q^2: [0,1] \rightarrow \{0\}$, $Q^2\omega = 0$ olup Q^2 bir daralma dönüşümüdür. Ayrıca $\omega = 0$, Q^2 dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

1922 yılında Polonyalı matematikçi Stefan Banach ın doktora tezinde ortaya koyduğu “Banach Daralma Prensibi (BCP)” olarak da adlandırılan sabit nokta teoremi ile metrik sabit nokta teorisinin temelleri atılmıştır.

Teorem 1.3.12. (Banach Sabit Nokta Teoremi) [11] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi her $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için Q dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Örnek 1.3.8, Örnek 1.3.9 ve Örnek 1.3.10 da tanımlanan Q daralma dönüşümleri Banach sabit nokta teoremi gereğince tam metrik uzay üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Diğer yandan her daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez. Ya da bir dönüşümün bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Ayrıca, tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daralma dönüşümlerinin sabit noktaya sahip olması da gerekmez. Örneğin; $\mathcal{S} = (0,1]$ kümesi mutlak değer metriği ile donatılsın. Bu durumda $Q\omega = \frac{\omega}{3}$ ile tanımlı $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir daralma dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

1968 yılında Bryant [11] Banach sabit nokta teoreminin bir genişlemesi olan aşağıdaki sonucu vermiştir.

Teorem 1.3.13. (Bryant Sabit Nokta Teoremi) [11] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Bazı $N \in \mathbb{N}$ için Q^N bir daralma dönüşümü ise Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi her $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için Q dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Tanım 1.3.14. [9] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $\omega \neq \wp$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) < d(\omega, \wp)$$

ise Q dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşümü denir.

Örnek 1.3.15. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ ve $d(\omega, \wp) = |\omega - \wp|$ alışılmış metriği verilsin. Bu durumda

$$Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow Q\omega = 1 + \ln(1 + e^\omega)$$

ile tanımlanan dönüşüm kesin daralma olup daralma değildir.

Edelstein [12] tam metrik uzaylarda $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ kesin daralma dönüşümünün sabit noktasının varlığının gerekli olmadığını gözlemlemiştir. Bunun yanında mevcut uzaya bazı koşullar ekleyerek kesin daralma dönüşümünün de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki teoremlerle ispatlamıştır.

Teorem 1.3.16. (Edelstein Sabit Nokta Teoremi) [12] $(\mathcal{S}, d)$ kompakt metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ kesin daralan bir dönüşüm olsun. Bu durumda Q bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 1.3.17. [9] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq d(\omega, \wp)$$

ise Q dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 1.3.18. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde d alışılmış metriği tanımlansın ve

$$Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow Q\omega = \frac{x}{2} - k, (k \neq 0)$$

olsun. Her $\omega, \wp \in \mathbb{R}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) = \left| \frac{x}{2} - k - \frac{\wp}{2} + k \right| = \frac{|x - \wp|}{2} = \frac{d(\omega, \wp)}{2} \leq d(\omega, \wp)$$

sağlandığından Q dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür.

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç yazılabilir [8].

Q daralma $\Rightarrow Q$ kesin daralma $\Rightarrow Q$ genişlemeyen $\Rightarrow Q$ Lipschitzian.

Fakat ters gerektirmeler her zaman doğru değildir.

Tanım 1.3.19. [9] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $\alpha > 1$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \geq \alpha d(\omega, \wp)$$

ise Q dönüşümüne genişleyen (expansive) dönüşüm denir.

Daralma dönüşümlerinin sürekli bir dönüşüm olduğundan bahsedilmişti. Şimdi süreklilik şartını gerektirmeyen daralma dönüşümleri için 1968 yılında Kannan aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.3.20. (Kannan Sabit Nokta Teoremi) [13] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq k [d(\omega, Q\omega) + d(\wp, Q\wp)]$$

olacak şekilde bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti varsa Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi her $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için Q dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Kannan sabit nokta teoremi Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi değildir. Ancak bu sonuç üzerinde çalışılan metrik uzayın tamlığını da sağladığından oldukça önemlidir. Subrahmanyam [14], Kannan daralma dönüşümünün metriğin tamlığına da karakterize ettiğini ispatlamıştır. Diğer bir değişle, $\mathcal{S}$ metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ üzerindeki her Kannan dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır. Bu özelliğe Banach daralma dönüşümleri sahip değildir.

1972 yılında Bianchini [15], Kannan daralma dönüşümünün bir genellemesini aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Teorem 1.3.21. (Bianchini Sabit Nokta Teoremi) [15] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq k \max\{d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp)\}$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sabiti varsa $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sabit nokta teorisinin gelişiminde yer alan önemli teoremlerden bazıları aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.3.22. (Chatterjea Sabit Nokta Teoremi) [16] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq k [d(\omega, Q\wp) + d(\wp, Q\omega)]$$

olan bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti varsa, Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.3.23. (Reich Sabit Nokta Teoremi) [17] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay üzerinde her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq k_1 d(\omega, \wp) + k_2 d(\omega, Q\omega) + k_3 d(\wp, Q\wp)$$

şartını sağlayan $k_1 + k_2 + k_3 < 1$ özelliğindeki $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ sabitleri varsa $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.3.24. (Hardy-Rogers Sabit Nokta Teoremi) [18] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq k_1 d(\omega, \wp) + k_2 d(\omega, Q\omega) + k_3 d(\wp, Q\wp) \\ + k_4 d(\omega, Q\wp) + k_5 d(\wp, Q\omega)$$

olan $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 < 1$ özellikli $k_i, i = 1, \dots, 5 \in \mathbb{R}^+$ sabitleri varsa Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.3.25. (Ciric Sabit Nokta Teoremi) [19] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \alpha \max \left\{ d(\omega, \wp), d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp), \frac{d(\omega, Q\wp) + d(\wp, Q\omega)}{2} \right\}$$

olan $\alpha \in [0, 1)$ sabiti varsa Q dönüşümüne Ciric daralma dönüşümü adı verilir ve bu dönüşüm $\mathcal{S}$ üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

2003 yılında Berinde tarafından hemen hemen (almost) daralma olarak adlandırılan yeni bir daralma dönüşümü aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Tanım 1.3.26. [20] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \delta d(\omega, \wp) + Ld(\wp, Q\omega) \quad (1.1)$$

olacak şekilde $\delta \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri varsa Q dönüşümüne hemen hemen daralma dönüşümü adı verilir.

Uyarı 1.3.27. [10] (1.1) ile verilen hemen hemen daralma şartı simetrik değildir. Fakat, uzaklık kavramının simetrik olmasından dolayı (1.1) şartı her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \delta d(\omega, \wp) + Ld(\omega, Q\wp) \quad (1.2)$$

ile belirtilen bir eşitsizliği de içerir. Sonuç olarak Q dönüşümünün hemen hemen daralma dönüşümü olduğu kontrol edilirken (1.1) ve (1.2) şartının her ikisi de incelenmelidir.

Önerme 1.3.28. [10] Kannan daralma dönüşümleri bir hemen hemen daralmadır. Gerçekten, üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(Q\omega, Q\wp) &\leq k [d(\omega, Q\omega) + d(\wp, Q\wp)] \\ &\leq k \{[d(\omega, \wp) + d(\wp, Q\omega)] + [d(\wp, Q\omega) + d(Q\omega, Q\wp)]\} \end{aligned}$$

dir. Buradan $(1 - k)d(Q\omega, Q\wp) \leq kd(\omega, \wp) + 2kd(\wp, Q\omega)$ olur ve her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \frac{k}{1-k}d(\omega, \wp) + \frac{2k}{1-k}d(\omega, Q\wp)$$

hemen hemen daralma şartı $k \in (0, \frac{1}{2})$ için $\delta = \frac{k}{1-k}$ ve $L = \frac{2k}{1-k}$ ile sağlar. Ayrıca, Kannan daralma şartı simetrik olduğundan (1.2) şartını da sağlar. Böylece her Kannan daralma dönüşümü bir hemen hemen daralmadır.

Önerme 1.3.29. [10] Teorem 1.3.22 de verilen Chatterjea daralma dönüşümleri de bir hemen hemen daralmadır.

Önerme 1.3.30. [10] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq k_1 d(\omega, \wp) + k_2 [d(\omega, Q\omega) + d(\wp, Q\wp)]$$

olan $k_1 + 2k_2 < 1$ özelliğini gerçekleyen $k_1, k_2 \geq 0$ sabitleri varsa $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümüne Ciric-Reich-Rus daralma dönüşümü adı verilir ve bu daralma aynı zamanda bir hemen hemen daralmadır.

Önerme 1.3.31. [10] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq hM(\omega, \wp),$$

$$M(\omega, \wp) = \max\{d(\omega, \wp), d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp), d(\omega, Q\wp), d(\wp, Q\omega)\}$$

olan $h \in [0, 1)$ sabiti varsa Q dönüşümüne quasi daralma dönüşümü adı verilir ve $0 < h < \frac{1}{2}$ ise quasi daralmalar bir hemen hemen daralmadır. Diğer yandan $h < \frac{1}{2}$ olması gerekli bir

şart değildir. Yani $h \geq \frac{1}{2}$ olduğu durumda da hemen hemen daralma olan quazi daralmalar vardır.

Örnek 1.3.32. [10] $\mathcal{S} = [0,1]$ ve $(\mathcal{S}, d)$ alışılmış metrik uzay olsun. $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu

$$Q\omega = \begin{cases} \frac{2\omega}{3}, & \text{eğer } 0 \leq \omega < \frac{1}{2} \\ \frac{2\omega + 1}{3}, & \text{eğer } \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Q dönüşümü için aşağıdaki koşullar sağlanır.

- (a) $\delta = \frac{2}{3}$ ve $L = 6$ sabitleri ile Q bir hemen hemen daralmadır ve $Fix(Q) = \{0,1\}$ dir.
- (b) Q bir Banach, Kannan, Chatterjea ve quazi daralma dönüşümü de değildir.

2003 yılında Berinde hemen hemen daralma dönüşümleri için aşağıdaki sabit nokta teoremini ifade etmiştir.

Teorem 1.3.33. [20] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ hemen hemen daralma dönüşümü olsun. Bu durumda Q dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Hemen hemen daralma dönüşümlerinin bir tek sabit noktaya sahip olması gerekmez. Eğer (1.1) ve (1.2) koşulları $L_1 \geq 0$ için

- $d(Q\omega, Q\wp) \leq \delta d(\omega, \wp) + L_1 d(\omega, Q\omega),$
- $d(Q\omega, Q\wp) \leq \delta d(\omega, \wp) + L_1 d(\wp, Q\wp),$

şartları ile değiştirilirse hemen hemen daralma dönüşümlerinin sabit noktasının tekliği garanti edilmiş olur.

Babu ve ark. [21] Berinde tarafından tanımlanan hemen hemen daralma dönüşümlerini genelleyen yeni bir daralma dönüşümünü aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

Tanım 1.3.34. [21] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \kappa d(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp),$$

$$N(\omega, \wp) = \min\{d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp), d(\omega, Q\wp), d(\wp, Q\omega)\}$$

olan $k \in [0,1)$ ve $p \geq 0$ sabitleri varsa Q dönüşümüne genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.3.35. [21] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü olsun. Bu durumda Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

2008 yılında Suzuki [22] aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.3.36. (Suzuki Sabit Nokta Teoremi) [22] $(\mathcal{S}, d)$ kompakt metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Artmayan bir $\theta: [0,1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ fonksiyonu

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } 0 \leq r \leq (\sqrt{5} - 1)/2 \\ (1 - r) \cdot r^{-2}, & \text{eğer } (\sqrt{5} - 1)/2 \leq r \leq 1/\sqrt{2} \\ (1 + r)^{-1}, & \text{eğer } 1/\sqrt{2} \leq r < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$\theta(r)d(\omega, Q\omega) \leq d(\omega, \wp) \Rightarrow d(Q\omega, Q\wp) \leq rd(\omega, \wp)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ sabiti varsa Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Suzuki 2009 yılında ise Edelstein sabit nokta teoreminin bir genişlemesi olan ve daha sonraki sabit nokta çalışmalarında Suzuki daralma olarak öncü kabul edilebilecek aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.3.37. [23] $(\mathcal{S}, d)$ kompakt metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için,

$$\frac{1}{2}d(\omega, Q\omega) < d(\omega, \wp) \Rightarrow d(Q\omega, Q\wp) < d(\omega, \wp)$$

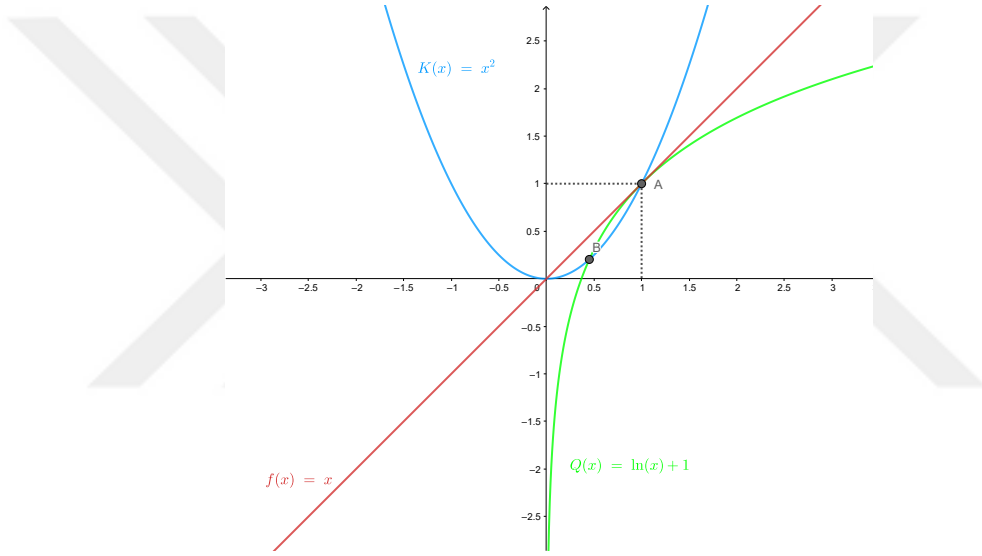
eşitsizliği sağlanıyorsa Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Metrik sabit nokta teorisinde tek dönüşüm için elde edilen sabit nokta teoremlerinin yanı sıra birden fazla dönüşüm kullanılarak da elde edilen ortak sabit nokta çalışmaları mevcuttur. Bu çalışmalar Banach sabit nokta teoreminin iki veya daha fazla dönüşüm kullanılarak elde edilen genelleştirmelerini de içermektedir.

Tanım 1.3.38. [24] $\mathcal{S} \neq \emptyset$ bir küme ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ iki dönüşüm olsun. Her $\omega \in \mathcal{S}$ için $Q\omega = \mathcal{K}\omega = \omega$ eşitliği sağlanırsa ω noktasına Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir ve bu dönüşümlerin ortak sabit noktaları kümesi $\mathcal{C}_{Fix}\{Q, \mathcal{K}\} = \{\omega \in \mathcal{S} \mid Q\omega = \mathcal{K}\omega = \omega\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.39. [24] $\mathcal{S} \neq \emptyset$ bir küme ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tanımlı iki dönüşüm olsun. $Q\omega = \mathcal{K}\omega = c$ olan $\omega, c \in \mathcal{S}$ noktaları varsa ω noktasına Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin çakışma noktası (coincidence point) ve $c \in \mathcal{S}$ noktasına ise çakışılan nokta denir.

Örnek 1.3.40. $\mathcal{S} = [0, 2]$ olmak üzere Şekil 2 de tanımlanan fonksiyonların grafiğinde A noktası ortak sabit nokta ve B noktası ise çakışma noktasıdır.



Şekil 2. $Q(x) = \ln(x) + 1$ ve $\mathcal{K}(x) = x^2$ dönüşümlerinin ortak sabit noktaları

Tanım 1.3.41. [25] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ iki dönüşüm olsun. Her $\omega \in \mathcal{S}$ için $d(Q\mathcal{K}\omega, \mathcal{K}Q\omega) = 0$ ise Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine değişmeli (commuting) dönüşümler denir.

Tanım 1.3.42 [26] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzayında tanımlanan $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümleri her $\omega \in \mathcal{S}$ için $d(Q\mathcal{K}\omega, \mathcal{K}Q\omega) \leq d(\mathcal{K}\omega, Q\omega)$ koşulunu sağlarsa bu dönüşümlere zayıf değişmeli (weakly commuting) dönüşümler adı verilir.

Tanım 1.3.43. [24] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ iki dönüşüm olsun. $\mathcal{S}$ uzayında bazı $t \in \mathcal{S}$ noktaları için $\lim_{n \rightarrow \infty} Q\omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}\omega_n = t$ şartını sağlayan (ω_n) dizisi için

$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q\mathcal{K}\omega_n, \mathcal{K}Q\omega_n) = 0$ ise Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine uyumlu (compatible) dönüşümler denir.

Tanım 1.3.44. [24] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ iki dönüşüm olsun. Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri çakışma noktalarında değişmeli ise bu dönüşümlere zayıf uyumlu (weakly compatible) dönüşümler denir. Yani, $Qu = \mathcal{K}u$ iken $Q\mathcal{K}u = \mathcal{K}Qu$ olan $u \in \mathcal{S}$ noktaları vardır.

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında iki dönüşüm için aşağıdaki çıkarım yapılabilir:

Değişmeli dönüşümler $\Rightarrow$ Zayıf değişmeli dönüşümler $\Rightarrow$ Uyumlu dönüşümler.

Örnek 1.3.45. [27] $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ üzerinde $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümleri $Q(\omega) = \frac{\omega}{3}$ ve $\mathcal{K}(\omega) = \omega^2$ ile tanımlansın. Bu durumda $\omega = 0$ ve $\omega = \frac{1}{3}$ noktaları birer çakışma noktalarıdır. Ayrıca

$$Q\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}Q(0) = 0$$

olduğundan 0 noktasında değişmelidirler. Dolayısıyla bu noktada zayıf uyumludur. Fakat

$$Q\mathcal{K}\left(\frac{1}{3}\right) = Q\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{27} \text{ ve } \mathcal{K}Q\left(\frac{1}{3}\right) = \mathcal{K}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$$

olduğundan $\omega = \frac{1}{3}$ noktasında değişmeli olmadığı ve sonuç olarak zayıf uyumlu olmadıkları da açıktır.

Ciric ve ark. [28] aşağıdaki sabit nokta teoremini iki dönüşüm için ispatlamışlardır.

Teorem 1.3.46. [28] $(\mathcal{S}, d)$ bir tam metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ iki dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \hbar \max \left\{ d(\omega, \wp), d(\omega, Q\omega), d(\wp, \mathcal{K}\wp), \frac{d(\omega, \mathcal{K}\wp) + d(\wp, Q\omega)}{2} \right\} \\ + p \min \{ d(\omega, Q\omega), d(\wp, \mathcal{K}\wp), d(\omega, \mathcal{K}\wp), d(\wp, Q\omega) \}$$

ifadesini sağlayan $\hbar \in [0, 1)$ ve $p \geq 0$ sabitleri varsa Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

1.4. Banach Sabit Nokta Teoreminin Yardımcı Fonksiyonlar Yardımı ile Elde Edilen Genellemeleri

Bu çalışmanın ikinci bölümünü oluşturan “yapılan çalışmalar” kısmında kullanılacak olan bazı yardımcı fonksiyon sınıflarına ve bunların özellikleri ile çeşitli örneklere yer verilecektir.

1.4.1. Geraghty Daralma Dönüşümleri

Geraghty daralma dönüşümleri 1973 yılında Geraghty tarafından tanımlanmıştır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\iota_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = 0$ özelliğine sahip $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ fonksiyonların sınıfı B olsun [29].

Teorem 1.4.1. [29] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \beta(d(\omega, \wp))d(\omega, \wp)$$

olan $\beta \in B$ fonksiyonu varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

[30] da Geraghty daralma dönüşümlerinin bir genellemesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$\tau \geq 1$ bir reel sayı ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\tau}\right)$ fonksiyonların sınıfı B_τ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\iota_n) = \frac{1}{\tau}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = 0$ dir.

Örnek 1.4.2. [30] Aşağıdaki gibi tanımlanan $\beta: [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\tau}\right)$ fonksiyonlar B_τ sınıfına aittir.

(i) Bazı $\tau \geq 1$ için $\beta(\iota) = \frac{\exp(-\tau)}{\iota}$ dir.

(ii) $\beta(\iota) = \frac{1}{\tau(1+\iota^2)}$ dir.

1.4.2. İntegral Tipi Daralma Dönüşümleri

Banach daralma dönüşümünün genelleştirmelerinden birisi de integral tipindeki daralma dönüşümleridir. İlk olarak Branciari [31] 2002 yılında tam metrik uzaylarda integral tipindeki daralma dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığını ve tekliğini ispat eden bir teoremi aşağıdaki fonksiyon sınıfını kullanarak ifade etmiştir.

Tanım 1.4.3. [31] $\mathcal{I} = \{\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \mu \text{ Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon}\}$ sınıfı aşağıdaki koşulları sağlasın.

(μ_1) μ non-negatiftir,

(μ_2) $\mu, \mathbb{R}^+$ nin her kompakt alt kümesi üzerinde toplanabilirdir,

(μ_3) her bir $\varepsilon > 0$ için $\int_0^\varepsilon \mu(x)dx > 0$ dır.

Örnek 1.4.4. $\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

(i) $\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \rightarrow \mu(x) = 2x,$$

(ii) $\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \rightarrow \mu(x) = e^x.$$

Bu durumda $\mu \in \mathcal{I}$ dir.

Branciari [31] Banach sabit nokta teoremini integral tipindeki daralma dönüşümlerine genelleyen aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.4.5. [31] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$\int_0^{d(Q\omega, Q\wp)} \mu(x)dx \leq k \int_0^{d(\omega, \wp)} \mu(x)dx$$

ifadesini sağlayan $k \in (0,1)$ sabiti ve $\mu \in \mathcal{I}$ fonksiyonu varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Yukarıdaki teoremden $\mu(x) = 1$ alınırsa bu sonuç Banach sabit nokta teoremine indirgenir.

Lemma 1.4.6. [32] $\mu \in \mathcal{I}$ ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ω^* noktasına yakınsak pozitif değerli bir dizi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\omega_n} \mu(x) dx = \int_0^{\omega^*} \mu(x) dx$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega^* \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\omega_n} \mu(x) dx = 0$$

dır.

1.4.3. F – Daralma Dönüşümleri

2012 yılındaki bir çalışmada D. Wardowski [33] aşağıdaki özelliklere sahip olan bir fonksiyon kullanarak yeni bir daralma dönüşümü tanımlamıştır ve bu dönüşüm F –daralma dönüşümü olarak isimlendirilmiştir.

$\mathcal{F}$ aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların bir sınıfı olsun:

- (F_1) F kesin artandır, yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dır,
- (F_2) Pozitif sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = -\infty$ dır,
- (F_3) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olan bir $k \in (0,1)$ sabiti vardır.

Tanım 1.4.7. [33] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ şartını sağlayan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$\kappa + F(d(Q\omega, Q\wp)) \leq F(d(\omega, \wp)) \quad (1.3)$$

olan bir $\kappa > 0$ sayısı varsa Q dönüşümüne bir F –daralma dönüşümü adı verilir.

Aşağıda $\mathcal{F}$ ailesine ait bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla literatürde bulunan bazı daralma dönüşümlerinin bir F –daralma dönüşümü oldukları görülür.

Örnek 1.4.8. [33] $F_a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F_a(\alpha) = \ln \alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_a \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir F_a –daralma dönüşümü ise bu durumda $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ olan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $Q\omega \neq Q\wp$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq e^{-\kappa} d(\omega, \wp)$$

sağlanır. Aynı zamanda $Q\omega = Q\wp$ şartını sağlayan $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için de (1.3) eşitsizliği sağlanır. Q dönüşümü $\alpha = e^{-\kappa}$ olmak üzere bir Lipschitz dönüşümüdür. $A = e^{-\kappa} < 1$ olduğundan Q bir daralma dönüşümüdür. Dolayısıyla her daralma dönüşümü F_a –daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.4.9. [33] $F_b: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F_b(\alpha) = \ln \alpha + \alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_b \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ ise her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $Q\omega \neq Q\wp$ için

$$\frac{d(Q\omega, Q\wp)}{d(\omega, \wp)} e^{d(Q\omega, Q\wp) - d(\omega, \wp)} \leq e^{-\kappa}$$

ifadesi sağlanır. Bu durumda $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir F –daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.4.10. [33] $F_c: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F_c(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{\alpha}}$ olsun. $F_c \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ olan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $Q\omega \neq Q\wp$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \frac{1}{\left(1 + \kappa \sqrt{d(\omega, \wp)}\right)^2} d(\omega, \wp)$$

eşitsizliği sağlandığından $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir F –daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.4.11. [33] $F_d: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F_d(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$ olarak tanımlansın. $F_d \in \mathcal{F}$ dir. $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ olan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $Q\omega \neq Q\wp$ için

$$\frac{d(Q\omega, Q\wp)(d(Q\omega, Q\wp) + 1)}{d(\omega, \wp)(d(\omega, \wp) + 1)} \leq e^{-\kappa}$$

sağlandığından $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir F –daralmadır.

Not 1.4.12. [33] (F_1) ve (1.1) eşitsizliğinden her F –daralma dönüşümü, bir kesin daralma dönüşümüdür. Q bir F –daralma ise $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ şartını sağlayan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) < d(\omega, \wp)$$

olur. Böylece her F –daralma dönüşümü aynı zamanda sürekli dönüşümdür.

Not 1.4.13. [33] $F_u, F_v \in \mathcal{F}$ olsun. Her $\alpha > 0$ için $F_u(\alpha) \leq F_v(\alpha)$ ve $\wp = F_v - F_u$ azalmayan bir dönüşüm ise her F_u –daralma dönüşümü bir F_v –daralma dönüşümüdür. Gerçekten Not 1.4.12 den $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ şartını sağlayan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$, $Q\omega \neq Q\wp$ için

$$\wp(d(Q\omega, Q\wp)) \leq \wp(d(\omega, \wp))$$

olur. Böylece $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ şartını sağlayan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$, $Q\omega \neq Q\wp$ için

$$\begin{aligned} \kappa + F_v((Q\omega, Q\wp)) &= \kappa + F_u((Q\omega, Q\wp)) + \wp(d(Q\omega, Q\wp)) \\ &\leq F_u((\omega, \wp)) + \wp(d(\omega, \wp)) \\ &= F_v((\omega, \wp)) \end{aligned}$$

elde edilir.

2012 yılında D. Wardowski, F –daralma dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki teoremi ifade etmiştir.

Teorem 1.4.14. [33] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir F –daralma dönüşümü olsun. Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek $z \in \mathcal{S}$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her bir $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için $\{Q^n \omega_0\}$ Picard iterasyon dizisi $z \in \mathcal{S}$ noktasına yakınsar.

F –daralma dönüşümünün bir genelleştirmesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Tanım 1.4.15. [34] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir F –daralma dönüşümü olsun. $F \in \mathcal{F}$ ve $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ şartını sağlayan her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$M(\omega, \wp) = \max \left\{ d(\omega, \wp), d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp), \frac{1}{2} [d(\omega, Q\wp) + d(\wp, Q\omega)] \right\}$$

olmak üzere

$$\kappa + F(d(Q\omega, Q\wp)) \leq F(M(\omega, \wp))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\kappa > 0$ sabiti varsa Q dönüşümüne genelleştirilmiş Ciric F –daralma dönüşümü denir.

Hussain ve Salimi [35] F –daralma dönüşümlerini genelleştirmek için $\kappa > 0$ sabitini göz önüne alarak yeni bir fonksiyon ailesini aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$\Delta_{\mathfrak{I}}$ aşağıdaki $(\mathfrak{I})$ özelliğini sağlayan tüm $\mathfrak{I}: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun.

$(\mathfrak{I})$ Her $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}_+$ için $t_1 t_2 t_3 t_4 = 0 \Rightarrow \mathfrak{I}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \kappa$ olan $\kappa > 0$ vardır.

Örnek 1.4.16. [35] $\kappa > 0$ ve $P \in \mathbb{R}_+$ olsun. $i = 1, 2, 3$ için $\mathfrak{I}_i: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan fonksiyonları $\Delta_{\mathfrak{I}}$ sınıfına aittir.

- (i) $\mathfrak{I}_1(t_1, t_2, t_3, t_4) = P \min\{t_1, t_2, t_3, t_4\} + \kappa.$
- (ii) $\mathfrak{I}_2(t_1, t_2, t_3, t_4) = \kappa e^{P \min\{t_1, t_2, t_3, t_4\}}.$
- (iii) $\mathfrak{I}_3(t_1, t_2, t_3, t_4) = P \ln(\min\{t_1, t_2, t_3, t_4\} + 1) + \kappa.$

Ayrıca, Hussain ve Salimi [35] $\mathfrak{I}$ fonksiyonunu kullanarak $\alpha - \eta - \mathfrak{I}F$ –daralma dönüşümünü tanımlamış ve tam metrik uzayda aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmişlerdir.

Tanım 1.4.17. [35] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\alpha, \eta: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

- $\alpha(\omega, \wp) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Q\omega, Q\wp) \geq 1$ (α –geçişli (admissible)),
- $\alpha(\omega, \wp) \geq \eta(\omega, \wp) \Rightarrow \alpha(Q\omega, Q\wp) \geq \eta(Q\omega, Q\wp)$ (η fonksiyonuna göre α –geçişli),

koşullarını sağlasın. Bu durumda $\eta(\omega, Q\omega) \leq \alpha(\omega, \wp)$ ve $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ iken

$$\mathfrak{I}(d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp), d(\omega, Q\wp), d(\wp, Q\omega)) + F(d(Q\omega, Q\wp)) \leq F(d(\omega, \wp))$$

ifadesini sağlayan $\mathfrak{F} \in \Delta_{\mathfrak{F}}$ ve $F \in \mathcal{F}$ fonksiyonları varsa $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümüne $\alpha - \eta - \mathfrak{F}F$ -daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.4.18.[35] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay olsun ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

- (i) $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\alpha(\omega, \wp) \geq \eta(\omega, \wp)$ ise $\alpha(Q\omega, Q\wp) \geq \eta(Q\omega, Q\wp)$ dir,
- (ii) Q bir $\alpha - \eta - \mathfrak{F}F$ -daralma dönüşümüdür,
- (iii) $\alpha(\omega_0, Q\omega_0) \geq \eta(\omega_0, Q\omega_0)$ olacak şekilde $\omega_0 \in \mathcal{S}$ vardır,
- (iv) Q bir $\alpha - \eta$ -sürekli dönüşümdür.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, her $\omega, \wp \in \text{Fix}(Q)$ için $\alpha(\omega, \wp) \geq \eta(\omega, \omega)$ ise Q dönüşümünün sabit noktası tektir.

1.4.4. $\mathcal{C}$ – Sınıfı Daralma Dönüşümleri

$\mathcal{C}$ –sınıfı fonksiyonlar 2014 yılında A.H. Ansari [36] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.4.19. [36] $\mathcal{G}: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $p, q \in [0, \infty)$ için aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{C}$ –sınıfı fonksiyon olarak adlandırılır.

- $(\mathcal{G}_1)$ $\mathcal{G}(p, q) \leq p$ dir,
- $(\mathcal{G}_2)$ $\mathcal{G}(p, q) = p \Rightarrow p = 0$ veya $q = 0$ dır.

Tüm $\mathcal{C}$ –sınıfı fonksiyonlar $\mathcal{C}$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.4.20. [36] Aşağıdaki fonksiyonlar her $p, q \in [0, \infty)$ için $\mathcal{C}$ sınıfının elemanlarıdır.

- (i) $\mathcal{G}_1(p, q) = p - q$ dir,
- (ii) $0 < m < 1$ olmak üzere $\mathcal{G}_2(p, q) = mp$ dir,
- (iii) $\mathcal{G}_3(p, q) = \frac{p}{(1+q)^r}$, $r \in (0, \infty)$ dir,
- (iv) $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{G}_4(p, q) = p\beta(p)$ dir,
- (v) $\mathcal{G}_5(p, q) = \sqrt[n]{\ln(1 + p^n)}$ dir.

Ayrıca, $\mathcal{C}$ –sınıfı fonksiyonların uygulanmasında kullanılan bazı yardımcı fonksiyon sınıfları aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.4.21. [36] Ω sınıfı $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan tüm fonksiyonları temsil etsin.

(Φ_1) Φ sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur,

(Φ_2) $\Phi(\iota) = 0 \Leftrightarrow \iota = 0$ dır.

Bu durumda Φ fonksiyonuna uzaklık değıştiren (altering distance) fonksiyonu denir.

Tanım 1.4.22. [36] $\Pi, \vartheta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tanımlanan tüm fonksiyonların sınıfı olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan ϑ fonksiyonu ultra uzaklık değıştiren (ultra altering distance) fonksiyon olarak adlandırılır.

(ϑ_1) ϑ süreklidir,

(ϑ_2) her $\iota > 0$ için $\vartheta(\iota) > 0$ dır.

Son olarak Ansari aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmiştir.

Teorem 1.4.23. [36] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$\hbar(d(Q\omega, Q\wp)) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(d(\omega, \wp)), \vartheta(d(\omega, \wp))\right)$$

ifadesi sağlanacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$, ve $\vartheta \in \Pi$ fonksiyonları var olsun. Ayrıca, $\hbar: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $\hbar(\iota) \geq \iota$ sağlansın. Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

1.4.5. Θ –Daralma Dönüşümü

Jleli ve Samet [37] 2014 yılında Θ sınıfı adını verdikleri aşağıdaki özellikleri sağlayan yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlamışlardır.

Tanım 1.4.24. [37] $\Theta = \{\theta \mid \theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)\}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonların bir ailesi olsun.

(θ_1) θ azalmayandır,

(θ_2) her bir $\{\iota_n\} \subset (0, \infty)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\iota_n) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = 0^+$ dır,

(θ_3) $r \in (0,1)$ ve $l \in (0, \infty]$ için $\lim_{\iota \rightarrow 0^+} \frac{\theta(\iota)}{\iota^r} = l$ dir.

Θ sınıfı kullanılarak Banach daralma dönüşümünü genelleyen yeni bir sabit nokta teoremi elde edilmiş ve bu teoremdeki eşitsizlik θ –daralma şartı olarak adlandırılmıştır.

Teorem 1.4.25. [37] $(\mathcal{S}, d)$ tam genelleştirilmiş metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \neq 0 \Rightarrow \theta(d(Q\omega, Q\wp)) \leq [\theta(d(\omega, \wp))]^k$$

olan $\theta \in \Theta$ fonksiyonu ve $k \in (0,1)$ sabiti varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca (θ_3) koşulu yerine aşağıdaki koşul eklenerek yeni bir sınıf elde edilmiştir [38].

(θ_3') θ süreklidir.

(θ_1) , (θ_2) ve (θ_3') şartlarını sağlayan fonksiyonların sınıfı $\widehat{\Theta}$ ile gösterilsin.

Örnek 1.4.26. [38] $\chi > 0$ için aşağıda verilen γ fonksiyonları $\widehat{\Theta}$ sınıfındadır. Aynı zamanda $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Theta$ dır.

(i) $\gamma_1(\chi) = e^\chi$ dir,

(ii) $\gamma_2(\chi) = e^{\sqrt{\chi}}$ dir,

(iii) $\gamma_3(\chi) = e^{\sqrt{\chi e^\chi}}$ dir,

(iv) $\gamma_4(\chi) = \cosh \chi$ dir,

(v) $\gamma_5(\chi) = 1 + \ln(1 + \chi)$ dir,

(vi) $\gamma_6(\chi) = e^{\chi e^\chi}$ dir.

1.4.6. Simülasyon Fonksiyonlar

Simülasyon fonksiyonlar ilk olarak Khojasteh ve ark. [39] tarafından 2015 yılında tanımlanmıştır.

$\sigma(\iota) = 0 \Leftrightarrow \sigma = 0$ şartını sağlayan $\sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tanımlı tüm sürekli ve kesin artan fonksiyonların sınıfı Ψ olsun.

Tanım 1.4.27. $\mathcal{X}: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Her $a, b > 0$, $\lambda \geq 1$ ve $\sigma \in \Psi$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

$$(\mathcal{X}_1) \mathcal{X}(0,0) = 0 \text{ dır,}$$

$$(\mathcal{X}_2) \mathcal{X}(a, b) < b - a \text{ dır,}$$

$$(\mathcal{X}_2') \mathcal{X}(a, b) < \sigma(b) - \sigma(a) \text{ dır}$$

$$(\mathcal{X}_2'') \mathcal{X}(a, b) < \sigma(b) - \sigma(\tau^\lambda a) \text{ dır,}$$

$$(\mathcal{X}_3) \quad \{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, \infty) \quad \text{olmak} \quad \text{üzere} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0 \quad \text{iken}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}(a_n, b_n) < 0 \text{ dır,}$$

$$(\mathcal{X}_3') \quad \{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, \infty) \quad \text{olmak} \quad \text{üzere} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0 \quad \text{ve} \quad a_n \leq b_n \quad \text{iken}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}(a_n, b_n) < 0 \text{ dır.}$$

Aşağıdaki tabloda sağladığı koşullar altında isimlendirilen simülasyon fonksiyonlar ve tüm simülasyon fonksiyonların oluşturduğu sınıflar gösterilmiştir.

Tablo 1. Simülasyon fonksiyonlar

$\mathcal{X}: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağladığı koşullar	Simülasyon fonksiyonlar	Sınıf
$(\mathcal{X}_1), (\mathcal{X}_2), (\mathcal{X}_3)$	Khojasteh ve ark. [39] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyondur.	Z
$(\mathcal{X}_2), (\mathcal{X}_3)$	Argoubi ve ark. [40] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyondur.	Z_a
$(\mathcal{X}_1), (\mathcal{X}_2), (\mathcal{X}_3')$	Roldan Lopez de Hierro ve ark. [41] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyondur.	Z_r
$(\mathcal{X}_2'), (\mathcal{X}_3)$	Joonaghany ve ark. [42] tarafından tanımlanan Ψ –simülasyon fonksiyondur.	Z_j
$(\mathcal{X}_2''), (\mathcal{X}_3')$	Zoto ve ark. [43] tarafından tamamlanan Ψ_τ –simülasyon fonksiyondur.	Z_3

Örnek 1.4.28. [39,42,43] $\mathcal{X}_i: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a, b \in [0, \infty)$ olsun.

- (i) $\sigma(a) = \phi(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ve her $a > 0$ için $\sigma(a) < a \leq \phi(a)$ ifadesini sağlayan $\sigma, \phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. $\mathcal{X}_1(a, b) = \sigma(b) - \phi(a)$ fonksiyonu için $\mathcal{X}_1 \in Z$ dir.
- (ii) Her $a, b > 0$ için $f(a, b) > g(a, b)$ ifadesini sağlayan $f, g: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{X}_2(a, b) = b - \frac{f(a, b)}{g(a, b)}$ fonksiyonu Z sınıfına aittir.
- (iii) $\Gamma(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ifadesini sağlayan $\Gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\mathcal{X}_3(a, b) = b - \Gamma(b) - a$ ise $\mathcal{X}_3 \in Z$ dir.
- (iv) Her $a > 0$ için $h(a) < a$ ve $h(0) = 0$ olacak şekilde $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{X}_4(a, b) = b h(b) - a$ fonksiyonu Z sınıfındadır.
- (v) Her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^\varepsilon \ell(t) dt$ mevcut ve $\int_0^\varepsilon \ell(t) dt > \varepsilon$ ifadesini sağlayan $\ell: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$\mathcal{X}_5(a, b) = b - \int_0^a \ell(t) dt$$

fonksiyonu için $\mathcal{X}_5 \in Z$ olur.

- (vi) Her $b > 0$ için $\limsup_{a \rightarrow b} \phi(a) < 1$ ifadesini sağlayan $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{X}_6(a, b) = \phi(v)\sigma(b) - \sigma(a)$ ile tanımlanan $\mathcal{X}_6$ fonksiyonu Z_f sınıfına aittir.
- (vii) Her $b > 0$ için $\limsup_{a \rightarrow b} \phi(a) < 1$ olacak şekilde $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{X}_7(a, b) = \sigma(v) - \phi(v) - \sigma(t)$ fonksiyonu için $\mathcal{X}_7 \in Z_f$ dir.
- (viii) Her $b > 0$ için $\phi(b) < \sigma(b)$ eşitsizliğini sağlayan σ artan ve $\phi, \sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsun. $\mathcal{X}_8(a, b) = \phi(b) - \sigma(\tau^\lambda a)$ ile tanımlanan $\mathcal{X}_8$ fonksiyonu Z_3 sınıfındandır, yani $\mathcal{X}_8 \in Z_3$ dir.

Khojasteh ve ark. [39] tanımladıkları simülasyon fonksiyonlar sınıfını kullanarak Z –daralma dönüşümünü aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 1.4.29. [39] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay, $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm ve $\mathcal{X} \in Z$ olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$\mathcal{X}(d(Q\omega, Q\wp), d(\omega, \wp)) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa Q dönüşümüne Z –daralma dönüşümü adı verilir.

Eğer yukarıdaki tanımda her $\alpha, b \in [0, \infty)$ için $\mathcal{X} \in Z$ fonksiyonunu

$$\mathcal{X}(\alpha, b) = \lambda b - \alpha$$

olarak seçilirse Z –daralma dönüşümü Banach daralma dönüşümüne indirgenir.

Uyarı 1.4.30. [39] Metrik uzay üzerinde tanımlı simülasyon fonksiyonlar göz önüne alındığında her $\alpha \geq b > 0$ için $\mathcal{X}(\alpha, b) < 0$ olduğu açıktır. Q dönüşümü $\mathcal{X} \in Z$ olmak üzere Z –daralma dönüşümü ise

$$d(Q\omega, Q\wp) < d(\omega, \wp)$$

sağlanır. Buradan Z –daralma dönüşümü kesin daralma dönüşümüdür ve dolayısıyla süreklidir.

Teorem 1.4.31. [39] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir Z –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda Q bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca her $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için $\omega_n = Q\omega_{n-1}$ ile tanımlanan $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi Q dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Işık ve ark. [44] metrik uzaylarda Z –daralma ve hemen hemen daralma dönüşümlerini kullanarak hemen hemen Z –daralma dönüşümünü (almost Z –contraction) aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 1.4.32. [44] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay, $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm ve $\mathcal{X} \in Z$ olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$N(\omega, \wp) = \min\{d(\omega, Q\omega), d(\wp, Q\wp), d(\omega, Q\wp), d(\wp, Q\omega)\}$$

iken

$$\mathcal{X}(d(Q\omega, Q\wp), d(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)) \geq 0$$

ifadesini sağlayan $p \geq 0$ sabiti varsa Q dönüşümüne hemen hemen Z –daralma dönüşümü adı verilir.

Işık ve ark. [44] tam metrik uzaylarda hemen hemen Z –daralma dönüşümlerinin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamışlardır.

2017 yılında Mongkolkeha ve ark. [45] simülasyon fonksiyonları ve $k \geq 1$ reel sayısını göz önüne alarak $\mathcal{X}^*$ simülasyon fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 1.4.33. [45] $\mathcal{X}^*: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{X}^*$ fonksiyonuna $k \geq 1$ sabiti ile simülasyon fonksiyonu denir.

$$(\mathcal{X}_1^*) \mathcal{X}^*(0,0) = 0 \text{ dır,}$$

$$(\mathcal{X}_2^*) \mathcal{X}^*(ka, b) < b - ka \text{ dır,}$$

$$(\mathcal{X}_3^*) \{a_n\}, \{b_n\} \subset (0, \infty) \text{ olmak üzere } \lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0 \text{ ve } a_n \leq b_n \text{ iken}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}^*(a_n, b_n) < 0 \text{ dır.}$$

2018 yılında S. H. Cho [46] simülasyon fonksiyonların sınıfını genişletecek olan yeni bir simülasyon fonksiyon sınıfı tanımlamıştır ve bu sınıfa $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon adı verilmiştir.

Tanım 1.4.34. [46] $\zeta: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\zeta \in \mathcal{Z}$ fonksiyonuna $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon adı verilir.

$$(\zeta_1) \zeta(1,1) = 1 \text{ dir,}$$

$$(\zeta_2) \text{ Her } a, b > 1 \text{ için } \zeta(a, b) < \frac{b}{a} \text{ dır,}$$

$$(\zeta_3) \{a_n\}, \{b_n\} \subset (1, \infty) \text{ dizileri için } a_n \leq b_n, (\forall n = 1, 2, 3, \dots) \text{ iken}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(a_n, b_n) < 1 \text{ dir.}$$

$$\text{Ayrıca, } \forall a > 1 \text{ için } \zeta(a, a) < 1 \text{ dir.}$$

Tüm $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyonların ailesi $\mathcal{Z}$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.35. [46] Aşağıdaki gibi tanımlanan $(\zeta_1), (\zeta_2), (\zeta_3): [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathcal{Z}$ sınıfına aittir.

- (i) Her $a, b \geq 1$ ve $k \in (0,1)$ için $\zeta_1(a, b) < \frac{b^k}{a}$ dır,
- (ii) $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ azalmayan ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $\phi^{-1}(\{1\}) = 1$ olsun. Her $a, b \geq 1$ için $\zeta_2(a, b) < \frac{b}{a\phi(b)}$ dir.
- (iii) $\forall a, b \geq 1$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\zeta_3(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \zeta(a, b) = 1 \\ \frac{b}{2a} & \text{eğer } b < a \\ \frac{b^\lambda}{2a} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dir.

1.4.7. E –Daralma Dönüşümleri

İlk olarak 2017 yılında A. Fulga ve A. M. Proca [47] tarafından Geraghty daralma dönüşümlerini genelleyen aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 1.4.36. [47] $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$E(\omega, \wp) = d(\omega, \wp) + |d(\omega, Q\omega) - d(\wp, Q\wp)|$$

olmak üzere

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \varphi(E(\omega, \wp))E(\omega, \wp)$$

eşitsizliğini sağlayan $\varphi \in B$ fonksiyonu var ise Q dönüşümüne φ_E –daralma dönüşümü adı verilir. $E(\omega, \wp)$ ifadesi literatüre E –daralma olarak geçmiştir.

Teorem 1.4.37. [47] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir φ_E –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aynı yıl Fulga ve Proca [48] E –daralma dönüşümünü ve aşağıdaki gibi tanımladıkları $F \in \mathcal{F}_E$ sınıfını göz önüne alarak bir sabit nokta teoremi ispatlamışlardır.

Fulga ve Proca [48] $F \in \mathcal{F}$ sınıfını aşağıdaki koşulları göz önüne alarak daha genel bir $\mathcal{F}_E$ sınıfını elde etmiştir.

$\mathcal{F}_E$ aşağıdaki koşulları sağlayan $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun.

(F_E1) F kesin artandır, yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dır.

(F_E2) Her $t_0 > 0$ için $\kappa + \liminf_{t \rightarrow t_0} F(t) \leq \limsup_{t \rightarrow t_0} F(t)$ olacak şekilde $\kappa > 0$ vardır.

Teorem 1.4.38. [48] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$E(\omega, \wp) = d(\omega, \wp) + |d(\omega, Q\omega) - d(\wp, Q\wp)|$$

iken

$$\tau + F(d(Q\omega, Q\wp)) \leq F(E(\omega, \wp))$$

olan $\tau > 0$, $d(Q\omega, Q\wp) > 0$ ve $F \in \mathcal{F}_E$ varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Diğer yandan 2018 yılında Fulga ve Karapınar [49] Z –daralma ve E –daralma dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamışlardır.

Teorem 1.4.39. [49] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$E(\omega, \wp) = d(\omega, \wp) + |d(\omega, Q\omega) - d(\wp, Q\wp)|$$

iken

$$\mathcal{X}(d(Q\omega, Q\wp), E(\omega, \wp)) \geq 0$$

ifadesini sağlayan $\mathcal{X} \in Z$ fonksiyonu varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

2018 yılında A. M. Proca [50] E –daralma dönüşümünü maksimum operatörü ile genelleyerek yeni bir E_m –daralma dönüşümünü tanımlamıştır ve aşağıdaki sabit nokta sonucunu elde etmiştir.

Teorem 1.4.40. [50] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$E_m(\omega, \wp) = \max\{d(\omega, \wp) + |d(\omega, Q\omega) - d(\wp, Q\wp)|; \\ d(\omega, Q\omega) + |d(\omega, \wp) - d(\wp, Q\wp)|; \\ d(\wp, Q\wp) + |d(\omega, \wp) - d(\omega, Q\omega)|; \\ \frac{d(\zeta\omega, \mathcal{K}\wp) + d(J\wp, Q\omega) + |d(\zeta\omega, Q\omega) - d(J\wp, \mathcal{K}\wp)|}{2}\}$$

iken

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \beta(E_m(\omega, \wp))E_m(\omega, \wp),$$

olan $\beta \in B$ fonksiyonu varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

2019 yılında A. M. Proca [51] de E_m –daralma dönüşümünün Ciric daralma dönüşümünden daha genel olduğunu örneklerle açıklamış ve aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.4.41. [51] $Q, (\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzayından kendisine tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$d(Q\omega, Q\wp) \leq \alpha(E_m(\omega, \wp))$$

eşitsizliğini sağlayan $\alpha \in [0,1)$ sabiti varsa Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

1.4.8. G Fonksiyonu

2021 yılında K. Zoto ve A. Sulaj [52] G fonksiyonu tanımlamışlar ve bu fonksiyonu kullanarak sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

Δ_G aşağıdaki şartları sağlayan tüm $G: [0, \infty)^4 \rightarrow [0, \infty)$ olan fonksiyonlarının bir ailesi olsun [52].

(G_1) G tüm değişkenlerinde azalmayandır,

(G_2) $\iota \in [0, \infty)$ için $G(\iota, \iota, \iota, \iota) \leq \iota$ dir.

Örnek 1.4.42. [52] Δ_G sınıfına ait olan bazı G fonksiyonu örnekleri aşağıda sunulmuştur.

- (i) $G_1(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \max\{\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4\}$ dir,
- (ii) $G_2(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \max\{\iota_1 + \iota_2, \iota_2 + \iota_3, \iota_1 + \iota_3, \iota_3 + \iota_4\}$ dir,
- (iii) $G_3(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = [\max\{\iota_1\iota_2, \iota_2\iota_3, \iota_1\iota_3, \iota_3\iota_4\}]^{\frac{1}{2}}$ dir,
- (iv) $G_4(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = [\max\{\iota_1^q, \iota_2^q, \iota_3^q, \iota_4^q\}]^{\frac{1}{q}}, q > 0$ dir,
- (v) $G_5(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \iota_1$ dir,
- (vi) $G_6(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \frac{\iota_2 + \iota_3}{2}$ dir,
- (vii) $G_7(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 + \iota_4$ dir,
- (viii) $G_8(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = p_1\iota_1 + p_2\iota_2 + p_3\iota_3 + p_4\iota_4, 0 < p_1 + p_2 + p_3 + p_4 < 1$ dir.

Bununla birlikte sabit nokta teorisinde ve özellikle Banach sabit nokta teoreminin genellemelerinde öne çıkan yardımcı fonksiyonlar elbette bunlarla sınırlı değildir. Farklı diğer yapılar ve fonksiyonlar tanımlanmış ve günümüzde de üzerine çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir. Bu tez kapsamında verilen fonksiyon sınıfları burada tamamlanmıştır.

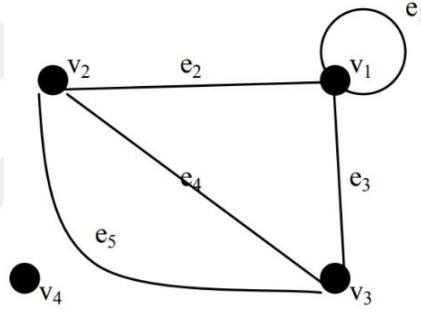
Şimdi sabit nokta teorisinin bazı uygulama alanlarına yer verilecektir. İlk olarak 2008 yılında Jacek Jachymski [53] tarafından ortaya koyulan ve özellikle Banach daralma dönüşümü için önemli bir uygulama alanı olan graf teorisine yer verilecektir.

1.5. Graf Teorisi

Graf teorisinin uygulamaları modern hayatın karmaşık ve geniş kapsamlı birçok probleminin çözümü için kullanılmaktadır. Bu uygulamalar; ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, bilgi iletimi, taşıma planlanması gibi alanları kapsamaktadır. Graf teorisi problemleri tanımlama ve yapısal olarak ilişkileri belirlemekte de faydalıdır.

Bu kısımda kullanılan graf bir fonksiyonun grafiği değildir. O halde graf nedir? Basitçe bir graf düğüm olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktayı veya sadece noktanın kendisini birleştiren ve ayırıt (edge) olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur. Örnek olarak şehirleri düğüm (verticle) ve onları bağlayan yolları ayırıt olarak gösteren yol haritaları verilebilir.

Bir grafi tanımlamak için öncelikle düğümlerin ve ayırıtların kümesinin tanımlamak gerekir. Daha sonra hangi ayırıtların hangi düğümleri bağladığı belirtilmelidir. Bir ayırıt her iki ucunda da bir düğüm olacak şekilde tanımlandığından graftaki tüm ayırıtların uç noktalarını bir düğüm ile ilişkilendirmek gerekir. Bu nedenle her bir e ayırıtı için $\{v_1, v_2\}$ kümesi tanımlanır. Bunun anlamı e ayırıtının v_1 ve v_2 düğümleri ile bağlılığıdır. $v_1 = v_2$ olabilir. Ayrıca $\{v_1, v_2\}$ kümesi düğümler kümesinin alt kümesidir.



Şekil 3. G grafinin düğümleri [55]

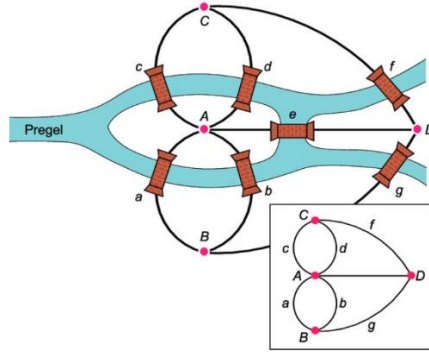
Şekil 2 de verilen G grafi incelenirse G grafinin düğüm kümesinin $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve ayırıt kümesinin $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olduğu açıktır. Örneğin, e_1 ayırıtının v_1 düğümü kendisine, e_2 ayırıtının ise v_1 ve v_2 düğümlerinin bağladığını gösterir.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi bir ayırıt bir düğümü yine kendisine bağlayacağı (loop) gibi, bir düğüm hiçbir ayırıtle bağlanmamış olabilir (v_4 düğümünde olduğu gibi). Ayrıca iki düğüm birden fazla ayırıt (multiple edge) ile de bağlanmış olabilir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta bir graf ile onu temsil eden diyagram aynı değildir. Çünkü, graf bir fonksiyon ile birlikte iki kümeden oluşur. Eğer bir graf bir düğümü yine kendisine bağlayan (çevrim içermeyen) bir ayırıt ve aynı iki düğümü birden fazla bağlayan ayırıtlara sahip değilse basit graf olarak adlandırılır.

Bir G grafında eğer birbirinden ayrı düğümleri bağlayan bir yol varsa G grafına bağlantılıdır denir [55-56].

Örnek 1.5.1. [54] (**Könnisberg Köprüsü problemi**) Euler 1736 yılında yazdığı makale ile graf teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Bu makale Şekil 4 de gösterilen Könnisberg Köprü problemine çözümünü içeriyordu. Pregel nehri Könnisberg kasabasının içinden akmaktadır. Nehrin ortasında nehrin kıyılarına ve birbirlerine köprü ile bağlı iki ada bulunmaktadır. Könnisberg kasabasının vatandaşları için problem kıyıların veya adaların birinden başlayıp köprülerden sadece bir kez geçerek başladığımız yere yürüyebilir miyiz?

Euler öncelikle Könnisberg coğrafyasının gerekli özelliklerinin bir graf ile gösterdi. Her bir nehir kıyısı ve adalar bir düğüm ile, köprüler ise ayrıtlar ile temsil edildi. Graf teorisi terimleri ile problem şu hale geldi: grafın tüm ayrıtları içeren kapalı bir yol var mıdır?



Şekil 4. Pregel nehri için graf [56]

Şimdi bu çalışmada kullanılacak olan graf teorisi ile ilgili notasyonlar verilecektir.

$(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $\Lambda = \{(\omega, \omega) : \omega \in \mathcal{S}\}$ kümesi $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ kartezyen çarpımının köşegenleri olsun. $\mathcal{S}$ kümesinin elemanları ile

- $V(G) \rightarrow$ grafın noktalar kümesi
- $E(G) \rightarrow$ grafın doğrular kümesi

ile oluşturulsun. O halde $\Lambda = (V(G), E(G))$ basit yönlü graftır. Basit yönlü graf tüm düğüm noktalarını içerdiği için $\Lambda \subseteq E(G)$ dir.

Eğer G grafının kenarlarının yönü değiştirilir ise G grafının tersi, yani G^{-1} grafi elde edilir.

$$E(G^{-1}) = \{ (\omega, \wp) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid (\wp, \omega) \in E(G) \},$$

ve aynı zamanda $V(G^{-1}) = V(G)$ dir.

Eğer G grafının yönü ihmal edilir ise $\tilde{G}$ yönsüz grafi elde edilir. Böylece $\tilde{G}$ grafının doğrular kümesi simetrik olduğundan

$$E(\tilde{G}) = E(G) \cup E(G^{-1})$$

olarak tanımlanır. Diğer yandan $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H grafına G nin alt grafi denir. Eğer $\tilde{G}$ grafi bağlantılı ise G grafi zayıf bağlantılıdır denir.

Jachymski [53] metrik uzay üzerindeki graf yapısını kullanarak Banach G –daralma dönüşümü tanımlamış ve sabit nokta kavramının graf teorisine uygulamasının en temel sonucunu elde etmiştir.

Tanım 1.5.2. [53] $G, (\mathcal{S}, d)$ üzerinde bir graf ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

(i) Q dönüşümü G grafının doğrularını korur. Yani,

$$(\omega, \wp) \in E(G) \Rightarrow (Q\omega, Q\wp) \in E(G) \text{ dir,}$$

(ii) $(\omega, \wp) \in E(G)$ için $d(Q\omega, Q\wp) \leq \alpha d(\omega, \wp)$ ifadesini sağlayan $\alpha \in (0,1)$ vardır,

şartları sağlanırsa Q dönüşümüne Banach G –daralma veya daha sade bir şekilde G –daralma dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.5.3. [53] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(\mathcal{S}, d, G)$ üçlüsüne düzenli (regular) uzay adı verilir.

(i) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ dizisi için $\omega_n \rightarrow \omega^*$ ve $(\omega_n, \omega_{n+1}) \in E(G)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $(\omega_n, \omega^*) \in E(G)$ dir.

(ii) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ dizisi için $\omega_n \rightarrow \omega^*$ ve $(\omega_{n+1}, \omega_n) \in E(G)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $(\omega^*, \omega_n) \in E(G)$ dir.

1.6. İntegral Denklemler

İntegral denklemler teorisi matematiğin kapsamlı bir konusudur ve fizik, mekanik, mühendislik, biomühendislik, kontrol teorisi gibi alanlarda çeşitli uygulamalara sahiptir. Bu denklemler pek çok problemin integral denklemler ile tekrar formüle edilebilir olması bakımından da önemli bir rol oynamaktadır.

Genel olarak integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu denklemlere integral denklem denir. Ayrıca, $\omega(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^t K(t, v) \omega(v) dv$$

yapısında bir integral denklemde, integral operatörünün $\omega(t)$ fonksiyonuna göre lineer olması halinde integral denklem de lineer integral denklem adını almaktadır. Eğer yukarıdaki integral denklemde $\omega(v)$ yerine $\omega(v)$ nin n . kuvveti yazılır ise bu integral denklem lineer olmayan integral denklem olarak adlandırılır. Ya da daha genel olarak

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^t \mathfrak{I}(t, v, \omega(v)) dv$$

integral denklemini de lineer olmayan integral denklemdir [57].

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılmaktadır.

1.6.1. Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

$t > v$ için $K(t, v) = 0$ şartını sağlayan

$$f(t) = \int_a^t K(t, v) \omega(v) dv$$

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^t K(t, v) \omega(v) dv$$

$$\Im(t). \omega(t) = f(t) + \int_a^t K(t, v) \omega(v) dv$$

integral denklemlerine sırası ile *I.*, *II.* ve *III.* tip Volterra integral denklemleri adı verilir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) t değişkeni bulunmaktadır.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $t = b$ olsun. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t > v$ için $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \text{ ve } \iint_{a,b} |K(t, v)|^2 dt dv < \infty$$

özelliklerini sağlasın. $\omega: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$f(t) = \int_a^b K(t, v) \omega(v) dv,$$

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^b K(t, v) \omega(v) dv,$$

$$\Im(t). \omega(t) = f(t) + \int_a^b K(t, v) \omega(v) dv$$

biçiminde tanımlanan integral denklemlere sırasıyla *I.*, *II.* ve *III.* tip Fredholm integral denklemleri denir. Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki en belirgin fark integral sınırları ile belirlenmiştir [57].

Aşağıdaki teoremden Banach sabit nokta teoreminin lineer olmayan Fredholm integral denklemlere bir uygulaması olarak verilmiştir.

Teorem 1.6.1. [5] $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^b K(t, \omega(v)) dv, \quad a \leq t \leq b,$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi göz önüne alınsın. Her $t \in [a, b]$ ve $u, u' \in \mathbb{R}$ için

$$|K(t, u) - K(t, u')| \leq M|u - u'|$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \left[0, \frac{1}{b-a}\right)$ var olsun. Bu durumda tanımlanan lineer olmayan Fredholm integral denklemi bir tek çözüme sahiptir.

Yukarıdaki teoremin farklı bir gösterimi de aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.6.2. [5] $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^b K(t, v, \omega(v)) dv, \quad a \leq t \leq b$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi göz önüne alınsın. Her $t, v \in [a, b]$ ve $u, u' \in \mathbb{R}$ için

$$|K(t, v, u) - K(t, v, u')| \leq M|u - u'|$$

ifadesini sağlayan $M \in \left[0, \frac{1}{b-a}\right)$ var olsun. Bu durumda lineer olmayan Fredholm integral denklemi bir tek çözüme sahiptir.

Şimdi Bryant sabit nokta teoremini (Teorem 1.3.13) kullanarak lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı için gerekli olan sonuca yer verilmiştir.

Lemma 1.6.3. [5] Bazı $N \in \mathbb{N}$ için $A \geq 0$ ise $\frac{A^N}{N!} < 1$ dir.

Teorem 1.6.4. [5] $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^t K(t, \omega(v)) dv, \quad a \leq t \leq b,$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi göz önüne alınsın. Her $t \in [a, b]$ ve $u, u' \in \mathbb{R}$ için

$$|K(t, u) - K(t, u')| \leq L|u - u'|$$

eşitsizliğini sağlayan $L \geq 0$ varsa lineer olmayan Volterra integral denklemi bir tek çözüme sahiptir.

Lineer olmayan Fredholm integral denklemde olduğu gibi yukarıdaki teoremin de farklı bir formu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Teorem 1.6.5. [5] $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega(t) = f(t) + \int_a^t K(t, v, \omega(v)) dv, \quad a \leq t \leq b$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi göz önüne alınsın. Her $t, v \in [a, b]$ ve $u, u' \in \mathbb{R}$ için

$$|K(t, v, u) - K(t, v, u')| \leq L|u - u'|$$

eşitsizliğini sağlayan $L \geq 0$ varsa lineer olmayan Volterra integral denklemi bir tek çözüme sahiptir.

Örnek 1.6.6. [5] Teorem 1.6.5 kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanan integral denklemin bir tek çözüme sahip olduğu gösterilir.

$$\omega(t) = \sin(t + e^{2t}) + \int_0^t \left[\left(\frac{t}{4e^v} - \frac{15 - v^3}{3} \right) \omega(v) + \sqrt{2v^4 + t} \right] dv, \quad t \in [0, 8].$$

1.7. Homotopi Teorisi

Homotopi teorisi cebirsel topolojinin ayrılmaz bir parçasıdır ve bu teoride homotopik denklige kadar olan topolojik nesnelerin çalışılması ön plana çıkmıştır. Son yüzyılda, homotopi teorisi ile matematiğin diğer branşları arasında derin bir bağlantı olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin, homotopi teorisi ve kategori teorisi (yüksek boyutlu) arasındaki bağlantıyı destekleyen pek çok çalışma yapılmıştır ve bu çalışmalar son yıllarda artan bir ilgi görmektedir. Ayrıca, Hamilton manifoldları ile ilgilenen quantum mekaniğinde de bu teoriden faydalanmaktadır.

Kısaca hatırlatmak gerekirse bir topolojik uzaydan diğer topolojik uzaya olan iki sürekli dönüşümün homotopik olabilmesi için bir uzayın diğeri içinde sürekli olarak deforme olabilmesidir. Bu gibi bir deformasyon iki fonksiyon arasındaki homotopi olarak adlandırılır. Aşağıdaki tanımda homotopi kavramı matematiksel olarak ifade edilmiştir [58].

Tanım 1.7.1. [58] $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ iki topolojik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ sürekli iki dönüşüm olsun. Her $\omega \in \mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \mathcal{S} \times [0,1] &\rightarrow \mathcal{T} \\ (\omega, z) &\rightarrow \mathcal{H}(\omega, z) = \begin{cases} Q\omega, & z = 0 \text{ ise} \\ \mathcal{K}\omega, & z = 1 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olan bir $\mathcal{H}$ sürekli fonksiyonu varsa Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine homotopik dönüşümler, $\mathcal{H}$ fonksiyonuna ise Q dan $\mathcal{K}$ ya bir homotopi adı verilir.

$(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve U kümesi $\mathcal{S}$ kümesinin açık alt kümesi olsun. Bu durumda iki daralma dönüşümü arasında tanımlanan bir homotopi ile sabit noktanın değişmezliği (invariant) aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 1.7.2. [59] U kümesinin kapanışı $\overline{U}$ olmak üzere $Q: \overline{U} \rightarrow \mathcal{S}$ ve $\mathcal{K}: \overline{U} \rightarrow \mathcal{S}$ iki daralma dönüşümü olsun. $\mathcal{H}: \overline{U} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu

- (i) $\mathcal{H}(\cdot, 0) = \mathcal{K}$ ve $\mathcal{H}(\cdot, 1) = Q$ dır,
- (ii) U kümesinin sınırı ∂U olmak üzere her $\omega \in \partial U$ ve $t \in [0,1]$ için $\omega \neq \mathcal{H}(\omega, t)$ dir,
- (iii) her $\omega, \wp \in \overline{U}$ ve $t \in [0,1]$ için $d(\mathcal{H}(\omega, t), \mathcal{H}(\wp, t)) \leq \delta d(\omega, \wp)$ olan $\delta \in [0,1]$ vardır,

(iv) her $\omega \in \overline{U}$ ve $t, s \in [0, 1]$ için $d(\mathcal{H}(\omega, t), \mathcal{H}(\omega, s)) \leq M|t - s|$ olan $M \geq 0$ vardır,

özellikleri sağlarsa $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine homotopik daralma dönüşümleri adı verilir.

Teorem 1.7.3. [59] $(\mathcal{S}, d)$ tam metrik uzay ve U kümesi $\mathcal{S}$ kümesinin açık alt kümesi olsun. Ayrıca $\mathcal{Q}: \overline{U} \rightarrow \mathcal{S}$ ve $\mathcal{K}: \overline{U} \rightarrow \mathcal{S}$ iki homotopik daralma dönüşümü ve $\mathcal{K}$ dönüşümü U kümesinde bir sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda $\mathcal{Q}$ dönüşümü de U kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Sabit nokta teorisinin farklı uygulama alanları da mevcuttur. Reel analiz, adi diferansiyel denklemler, Ulan-Hyers kararlılık problemi (stability problem in the sense of Ulam-Hyers), sabit nokta probleminin iyi konumlanmışlığı (well posedness of the fixed point problem), matris denklemler bunlardan bazılarıdır.

Sabit nokta teorisinin (tam) metrik uzay üzerine inşa edilen farklı yapılarından ve sonuçlarından bahsedildi. Şimdi metrik uzaylardan daha genel olan bazı genelleştirilmiş metrik uzay yapılarından bahsedilecektir. Böylece Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerindeki genişlemeleri de elde edilmiştir. Ayrıca topolojik yapısını kurduğumuz Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler metrik kavramı da tanıtılacaktır.

1.8. Bazı Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar

Bu kısımda metrik aksiyomlarının değiştirilmesi sonucu elde edilen bazı genelleştirilmiş metrik uzay tanımlarına, örneklerine, topolojik yapıları ile bazı teoremlere yer verilmiştir.

1.8.1. b –Metrik Uzaylar

Metrik fonksiyonunun en popüler genelleştirmesinden birisi b –metrik fonksiyonudur. İlk olarak b –metrik uzay yapısı Bakhtin'in [60] çalışmasında 1989 yılında görüldü. Fakat S. Czerwik'in [61,62] 1993 ve 1998 yıllarındaki çalışmalarından sonra pek çok yazarın dikkatini çekti. S. Czerwik b –metrik uzay yapısını aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 1.8.1. [61] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme ve $\tau \geq 1$ bir reel sayı olsun. Her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için $\varrho: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} (\varrho_1) \quad \varrho(\omega, \wp) &= 0 \Leftrightarrow \omega = \wp, \\ (\varrho_2) \quad \varrho(\omega, \wp) &= \varrho(\wp, \omega), \\ (\varrho_3) \quad \varrho(\omega, \wp) &\leq \tau[\varrho(\omega, \nu) + \varrho(\nu, \wp)] \end{aligned}$$

şartlarını sağlarsa ϱ fonksiyonuna b –metrik ve $(\mathcal{S}, \varrho)$ ikilisine de b –metrik uzay denir.

Eğer $\tau = 1$ olarak seçilir ise b –metrik fonksiyonu ile adi metrik fonksiyonu çakışır. Şimdi b –metrik fonksiyonu ve b –metrik uzayı ile ilgili bazı örnekler gösterilecektir.

Örnek 1.8.2. $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay ve $p > 1$ reel sayı olsun. Bu durumda

$$\varrho(\omega, \wp) = (d(\omega, \wp))^p$$

ile tanımlanan ϱ fonksiyonu $\tau = 2^{p-1}$ olmak üzere bir b –metrik fonksiyonudur. Tanım 1.8.1 den (ϱ_1) ve (ϱ_2) şartlarının sağlandığı açıktır. Eğer $1 < p < \infty$ ise $\mathcal{Q}(\omega) = \omega^p (\omega > 0)$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p)$$

olur ve böylece $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ sağlanır. Buradan, her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned} \varrho(\omega, \wp) &= (d(\omega, \wp))^p \leq (d(\omega, \nu) + d(\nu, \wp))^p \\ &\leq 2^{p-1}((d(\omega, \nu))^p + (d(\nu, \wp))^p) \\ &= 2^{p-1}(\varrho(\omega, \nu) + \varrho(\nu, \wp)) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak (ϱ_3) şartı da sağlanmış olur. Böylece ϱ bir b –metriktir. Ancak $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay ise $(\mathcal{S}, \varrho)$ uzayının metrik uzay olması gerekmez.

Örnek 1.8.3. $(\mathcal{S}, d)$ metrik uzay, $\mathcal{L} \geq 0$, $\gamma > 0$ ve $\beta \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$d'(\omega, \wp) = \mathcal{L}d(\omega, \wp) + \gamma d(\omega, \wp)^\beta$$

ile tanımlanan $d': \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ üzerinde bir metrik değildir. Ancak $(\mathcal{S}, d')$ uzayı $\tau = 2^{\beta-1} \geq 1$ sabiti ile bir b –metrik uzaydır. Gerçekten her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned} d'(\omega, \wp) &= \mathcal{L}d(\omega, \wp) + \mathfrak{T}d(\omega, \wp)^\beta \\ &\leq \mathcal{L}[d(\omega, \nu) + d(\nu, \wp)] + \mathfrak{T}[d(\omega, \nu) + d(\nu, \wp)]^\beta \\ &\leq \mathcal{L}[d(\omega, \nu) + d(\nu, \wp)] + 2^{\beta-1}\mathfrak{T}[d(\omega, \nu)^\beta + d(\nu, \wp)^\beta] \\ &\leq 2^{\beta-1}(d'(\omega, \nu) + d'(\nu, \wp)) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $(\mathcal{S}, d')$ ikilisinin b –metrik uzay olduğu açıktır.

Örnek 1.8.4. $0 < p < 1$ olmak üzere $\ell_p(\mathbb{R})$ kümesi

$$\ell_p(\mathbb{R}) = \left\{ \{\omega_n\} \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. $\omega = \{\omega_n\}$, $\wp = \{\wp_n\} \in \ell_p(\mathbb{R})$ için

$$\mathfrak{Q}: \ell_p(\mathbb{R}) \times \ell_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, \wp) \rightarrow \mathfrak{Q}(\omega, \wp) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n - \wp_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $\ell_p(\mathbb{R})$ üzerinde $\tau = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ sabiti ile bir b –metriktir. Ayrıca yukarıdaki sonuç $0 < p < 1$ için $\mathcal{S}$ bir Banach uzayı olmak üzere

$$\ell_p(\mathcal{S}) = \left\{ \{x_n\} \subset \mathcal{S}: \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}$$

uzayı için de doğrudur.

Örnek 1.8.5. $p \in (0,1)$ bir reel sayı olmak üzere

$$L_p[0,1] := \left\{ \omega: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 |\omega(t)|^p dt < 1 \right\}$$

verilsin. Bu durumda $\omega, \wp \in L_p[0,1]$ için

$$\varrho: L_p[0,1] \times L_p[0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\omega, \wp) \rightarrow \varrho(\omega, \wp) = \left(\int_0^1 |\omega(t) - \wp(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $L_p[0,1]$ üzerinde $\tau = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ sabiti ile bir b –metriktir.

Örnek 1.8.6. $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$ olsun. Bu durumda

$$\varrho(\omega, \wp) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \omega = \wp \\ (\omega + \wp)^2 & \text{eğer } \omega \neq \wp \end{cases}$$

ile tanımlanan $\varrho: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\tau = \frac{49}{25}$ sabiti ile bir b –metriktir.

Örnek 1.8.7. [63] $\mathcal{S} = \{0,1,2\}$ ve $m \geq 2$ bir reel sayı olsun. $\varrho: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\varrho(0,0) = \varrho(1,1) = \varrho(2,2) = 0,$$

$$\varrho(1,0) = \varrho(0,1) = \varrho(1,2) = \varrho(2,1) = 1,$$

$$\varrho(2,0) = \varrho(0,2) = m$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathcal{S}, \varrho)$ uzayı $\tau = \frac{m}{2}$ sabiti ile bir b –metrik uzaydır.

Şimdi b –metrik uzay üzerindeki topolojiden bahsedilecektir. $(\mathcal{S}, \varrho)$ bir b –metrik uzay olsun. Bu durumda $\omega \in \mathcal{S}$ merkezli r yarıçaplı açık yuvarı

$$B_\varrho(\omega, r) = \{\wp \in \mathcal{S} \mid \varrho(\omega, \wp) < r\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda her $\omega \in \mathcal{M}$ için $B_\varrho(\omega, r) \subseteq \mathcal{M}$ olan $r_\omega > 0$ sayısı varsa $\mathcal{M}$ kümesine açıktır denir. $\mathcal{S}$ kümesinin tüm açık alt kümelerinin ailesi τ_ϱ olsun. Bu durumda τ_ϱ b –metrik için bir topoloji oluşturur. Bunun yanında $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{(\omega, \wp) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid \varrho(\omega, \wp) < \varepsilon\}$$

kümesi b –metrik topolojisi için bir tabandır.

Tanım 1.8.8. [61] $(\mathcal{S}, \varrho)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile b –metrik uzay ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun.

- (i) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin b –yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $\varrho(\omega_n, \omega^*) \rightarrow 0$ olan $\omega^* \in \mathcal{S}$ noktasının var olmasıdır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, \omega^*) = 0$ dir.
- (ii) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin b –Cauchy olması için gerek ve şart $n, m \rightarrow \infty$ iken $\varrho(\omega_n, \omega_m) \rightarrow 0$ olmasıdır. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, \omega_m) = 0$ dir.
- (iii) b –metrik uzayın b –tam olması için gerek ve yeter şart bu uzayda alınan her b –Cauchy dizisinin bu uzaydaki bir noktaya b –yakınsak olmasıdır.

Önerme 1.8.9. [61] $(\mathcal{S}, \varrho)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile b –metrik uzay ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda $\omega^* \in \mathcal{S}$ noktasına b –yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir tek limite sahiptir.
- (ii) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi b –Cauchy dizisidir.

Adi metrik fonksiyonunun aksine b –metrik fonksiyonu genelde sürekli değildir. Bu sebeple aşağıdaki lemma b –metrik için oldukça önemlidir.

Lemma 1.8.10. [64] $(\mathcal{S}, \varrho)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile b –metrik uzay olsun. $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{\wp_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla ω ve $\wp$ noktalarına yakınsasın. Bu durumda

$$\frac{1}{\tau^2} \varrho(\omega, \wp) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, \wp_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, \wp_n) \leq \tau^2 \varrho(\omega, \wp)$$

dir. Özellikle $\omega = \wp$ alınır ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, \wp_n) = 0$ olur. Ayrıca $v \in \mathcal{S}$ için

$$\frac{1}{\tau} \varrho(\omega, v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, v) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varrho(\omega_n, v) \leq \tau \varrho(\omega, v)$$

elde edilir.

Banach sabit nokta teoreminin b –metrik uzaylardaki ifadesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.8.11. [63] $(\mathcal{S}, \varrho)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile b –tam b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $k \in [0,1)$ için

$$\tau \varrho(Q\omega, Q\wp) \leq k \varrho(\omega, \wp)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi her $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için Q dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

1.8.2. Branciari (Dikdörtgensel) Metrik Uzaylar

Branciari [65] 2000 yılında metrik aksiyomlarından üçgen eşitsizliğini iki terim yerine üç terim kullanarak genişletip metrik yapısından daha genel bir yapı tanımlayarak geliştirilmiş bir metrik kavramını ortaya koymuştur. Bu yeni yapı ile oluşturulan geliştirilmiş metrik uzay literatürde Branciari metrik uzay veya dikdörtgensel metrik uzay olarak da isimlendirilmektedir.

Bu çalışma boyunca geliştirilmiş metrik yapısı Branciari metrik fonksiyonu olarak kullanılmıştır.

Tanım 1.8.12.[65] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme olsun. $\mathcal{B}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve her farklı $p, q \in \mathcal{S} - \{\omega, \wp\}$ için aşağıdaki koşulları sağlasın.

$$(\mathcal{B}_1) \mathcal{B}(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp \text{ dir,}$$

$$(\mathcal{B}_2) \mathcal{B}(\omega, \wp) = \mathcal{B}(\wp, \omega) \text{ dir,}$$

$$(\mathcal{B}_3) \mathcal{B}(\omega, \wp) \leq \mathcal{B}(\omega, p) + \mathcal{B}(p, q) + \mathcal{B}(q, \wp) \text{ dir.}$$

Bu durumda $\mathcal{B}$ fonksiyonuna Branciari metrik ve $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ ikilisine de Branciari metrik uzay denir.

Örnek 1.8.13. [66] $\iota > 0$ sabit olmak üzere $\mathcal{S} = \{\iota, 2\iota, 3\iota, 4\iota, 5\iota\}$ kümesi verilsin. $\mathcal{B}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\nu > 0$ sabiti olmak üzere

- (1) her $\omega \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{B}(\omega, \omega) = 0$,
- (2) her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{B}(\omega, \wp) = \mathcal{B}(\wp, \omega)$,
- (3) $\mathcal{B}(\iota, 2\iota) = 3\nu$,
- (4) $\mathcal{B}(\iota, 3\iota) = \mathcal{B}(2\iota, 3\iota) = \nu$,
- (5) $\mathcal{B}(\iota, 4\iota) = \mathcal{B}(2\iota, 4\iota) = \mathcal{B}(3\iota, 4\iota) = 2\nu$,
- (6) $\mathcal{B}(\iota, 5\iota) = \mathcal{B}(2\iota, 5\iota) = \mathcal{B}(3\iota, 5\iota) = \mathcal{B}(4\iota, 5\iota) = \frac{3}{2}\nu$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ bir Branciari metrik uzaydır. Fakat,

$$\mathcal{B}(\iota, 2\iota) = 3\nu > \mathcal{B}(\iota, 3\iota) + \mathcal{B}(3\iota, 2\iota) = 2\nu$$

olduğundan $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ bir metrik uzay değildir.

$(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ Branciari metrik uzay olsun. Bu durumda $\omega \in \mathcal{S}$ merkezli r yarıçaplı açık yuvarı $B_{\mathcal{B}}(\omega, r) = \{\wp \in \mathcal{S} \mid \mathcal{B}(\omega, \wp) < r\}$ ile tanımlanmaktadır.

2009 yılında Sarma ve ark. [67] Branciari metrik uzay üzerindeki topolojiyi aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

$A \subset \mathcal{S}$ olsun. Her $a \in A$ için $B_{\mathcal{B}}(a, r_a) \subseteq A$ olan $r_a > 0$ var olsun. Bu durumda tüm A alt kümelerinin topluluğu $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ Branciari metrik uzay için bir topoloji oluşturur. Bununla beraber Branciari metrik uzaylarda

- Bir dizinin limitinin tek olması gerekmez,
- Yakınsak bir dizi Cauchy dizisi olmayabilir,
- Hausdorff olma özelliğinin sağlanması gerekmez,

sonuçlarına da ulaşmıştır.

Diğer yandan Branciari metrik uzaylarda bir dizinin yakınsaklığı, Cauchy dizisi ve tamlık gibi kavramlar metrik uzay ile benzerlik gösterir.

2010 yılında Samet [68] Branciari metrik fonksiyonunun daima sürekli olmadığını da bir örnekle göstermiştir.

Sarma ve ark. [67] Branciari nin [65] bu uzayda ispatlamış olduğu Banach sabit nokta teoreminin ifadesini ulaştığı yeni sonuçlardan yola çıkarak aşağıdaki gibi tekrar ifade etmiş ve ispatını da bu doğrultuda yapmıştır.

Teorem 1.8.14. [67] $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ Hausdorff ve tam Branciari metrik uzay olsun. $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümü her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $k \in (0,1)$ için

$$\mathcal{B}(Q\omega, Q\wp) \leq k\mathcal{B}(\omega, \wp)$$

eşitsizliğini sağlarsa $\mathcal{S}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

1.8.3. Branciari b –Metrik Uzaylar

George ve ark. [69] Branciari metrik uzay ve b –metrik uzay yapılarını göz önüne alarak Branciari metrik uzaydan daha genel bir yapı olan Branciari b –metrik uzay yapısını aşağıdaki biçimde tanımlamışlardır.

Tanım 1.8.15. [69] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme olsun. $\mathcal{B}_b: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve her farklı $p, q \in \mathcal{S} - \{\omega, \wp\}$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$(\mathcal{B}_{b_1}) \mathcal{B}_b(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp \text{ dir,}$$

$$(\mathcal{B}_{b_2}) \mathcal{B}_b(\omega, \wp) = \mathcal{B}_b(\wp, \omega) \text{ dir,}$$

$$(\mathcal{B}_{b_3}) \mathcal{B}_b(\omega, \wp) \leq \tau[\mathcal{B}_b(\omega, p) + \mathcal{B}_b(p, q) + \mathcal{B}_b(q, \wp)] \text{ dir.}$$

Bu durumda $\mathcal{B}_b$ fonksiyonuna Branciari b –metrik ve $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_b)$ ikilisine de Branciari b –metrik uzay denir.

Branciari b –metrik uzayda r yarıçaplı $\omega \in \mathcal{S}$ merkezli

$$B_{\mathcal{B}_b}(\omega, r) = \{\wp \in \mathcal{S} \mid \mathcal{B}_b(\omega, \wp) < r\}$$

ile tanımlanan bir açık yuvarın bir açık küme olması gerekmez. $\mathcal{S}$ kümesinin tüm $\mathcal{A}$ alt kümelerinin topluluğu $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_b}$ olsun. Bu durumda her $a \in \mathcal{A}$ için $B_{\mathcal{B}_b}(a, r) \subseteq \mathcal{A}$ olacak şekilde

$r > 0$ var olsun. Böylece, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_\ell}$ Hadusdorff olması gerekmeyen Branciari b –metrik uzay için bir topoloji tanımlar. Bunun yanında yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık gibi kavramlar metrik uzay ile benzerlik gösterir ve Branciari metrik uzaydaki diğer topolojik özellikler bu uzayda da geçerlidir. Tüm bu özellikler aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 1.8.16. [70] $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $B = \{2,3,4,5, \dots\}$ olmak üzere $\mathcal{S} = A \cup B$ olsun. $\mathcal{B}_\ell: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{B}_\ell(\omega, \wp) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \omega = \wp \\ 2\alpha, & \text{eğer } \omega, \wp \in A \\ \frac{\alpha}{2n}, & \text{eğer } \omega, \wp \in A, \wp \in \{2,3\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases},$$

$$\mathcal{B}_\ell(\omega, \wp) = \mathcal{B}_\ell(\wp, \omega)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\mathcal{B}_\ell\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 2\alpha > \mathcal{B}_\ell\left(\frac{1}{2}, 2\right) + \mathcal{B}_\ell\left(2, \frac{1}{3}\right) = \frac{5\alpha}{12}$$

olduğundan $\mathcal{B}_\ell$ bir metrik değildir. Benzer şekilde

$$\mathcal{B}_\ell\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 2\alpha > \mathcal{B}_\ell\left(\frac{1}{2}, 2\right) + \mathcal{B}_\ell(2, 5) + \mathcal{B}_\ell\left(5, \frac{1}{3}\right) = \frac{17\alpha}{12}$$

yazılabileceğinden $\mathcal{B}_\ell$ bir Branciari metrikte değildir. Bununla beraber her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{B}_\ell\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = 2\alpha > \tau \left[\mathcal{B}_\ell\left(\frac{1}{n}, 2\right) + \mathcal{B}_\ell\left(2, \frac{1}{m}\right) \right] = 2\alpha\tau \frac{4mn}{m+n}$$

eşitsizliğinde $\frac{4mn}{m+n} > \tau$ olduğundan $\mathcal{B}_\ell$ bir b –metrik olamaz. Fakat her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve her farklı $p, q \in \mathcal{S} - \{\omega, \wp\}$ için

$$\mathcal{B}_\ell(\omega, \wp) \leq 2[\mathcal{B}_\ell(\omega, p) + \mathcal{B}_\ell(p, q) + \mathcal{B}_\ell(q, \wp)]$$

olduğundan $\tau = 2$ sabiti ile $\mathcal{B}_\ell$ bir Branciari b –metriktir. Dahası

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_\ell \left(\frac{1}{n}, 2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2n} = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_\ell \left(\frac{1}{n}, 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2n} = 0,$$

ifadelerinden $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ dizisi hem 2 hem de 3 noktasına yakınsak olduğu görülür. Böylece $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ dizisi yakınsaktır, fakat Cauchy dizisi değildir. Gerçekten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_\ell \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2a \neq 0$$

dır. Son olarak $B_{\mathcal{B}_\ell} \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right) = \left\{ \frac{1}{2}, 2, 3 \right\}$ açık yuvarı 2 noktasını içerir, fakat $B_{\mathcal{B}_\ell}(2, r) \subset B_{\mathcal{B}_\ell} \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right)$ olan $r > 0$ yoktur. Ayrıca, $B_{\mathcal{B}_\ell}(2, r_1) \cap B_{\mathcal{B}_\ell}(3, r_2) = \emptyset$ ifadesini sağlayan r_1, r_2 pozitif sayıları da olmadığından $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_\ell)$ Hausdorff değildir.

1.8.4. Modüler Metrik Uzaylar

Bu kısımda Chistyakov'un [71-72] 2010 yılında tanımladığı modüler metrik kavramına yer verilecektir. Chistyakov [73], ilk olarak 2008 yılında F –modülerden indirgenen modüler metrik kavramını vermiştir. Daha sonra keyfi bir küme üzerinde tanımladığı modüler kavramı tarafından üretilen metrik uzay yapısını tanımlanmış ve bu uzaya modüler metrik uzay adını vermiştir.

$\mathcal{S} \neq \emptyset$ ve $\eta: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. $\forall \rho > 0$ ve $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\eta_\rho(\rho, \omega, \wp)$ gösterimi yerine $\eta_\rho(\omega, \wp)$ ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 1.8.17. [74] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme ve $\eta: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(\eta_1) \text{ her } \rho > 0 \text{ için } \eta_\rho(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp \text{ dir,}$$

$$(\eta_2) \text{ her } \rho > 0 \text{ için } \eta_\rho(\omega, \wp) = \eta_\rho(\wp, \omega) \text{ dir,}$$

$$(\eta_3) \text{ her } \rho, \mu > 0 \text{ için } \eta_{\rho+\mu}(\omega, \wp) \leq \eta_\rho(\omega, \nu) + \eta_\mu(\nu, \wp) \text{ dir.}$$

Bu durumda η fonksiyonuna modüler metrik ve $(\mathcal{S}, \eta)$ ikilisine de modüler metrik uzay denir.

Yukarıdaki tanımda (η_1) şartı yerine her $\omega \in \mathcal{S}$ için

$$(\eta_1') \text{ her } \rho > 0 \text{ için } \eta_\rho(\omega, \omega) = 0,$$

koşulu sağlanırsa η fonksiyonuna yarı (pseudo) modüler metrik denir. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için (η_1') şartı ve ω ve $\wp$ ye bağlı bir $\rho > 0$ sayısı için

$$(\eta_s) \eta_\rho(\omega, \wp) = 0 \Rightarrow \omega = \wp$$

şartı da sağlanırsa η fonksiyonuna kesin (strict) modüler denir. Ayrıca η modüler metriği (η_1) şartından daha zayıf olan

$$(\eta_1'') \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için } \eta_\rho(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp,$$

şartını sağladığında ise η fonksiyonuna regülerler denir. Son olarak her $\omega, \wp, v \in \mathcal{S}$ ve $\rho, \mu > 0$ için (η_3) şartı yerine

$$(\eta_3') \eta_{\rho+\mu}(\omega, \wp) \leq \frac{\rho}{\rho+\mu} \eta_\rho(\omega, v) + \frac{\mu}{\rho+\mu} \eta_\mu(v, \wp)$$

ifadesini sağlarsa η fonksiyonuna da konvektir denir.

Örnek 1.8.18. [74] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $\rho > 0$ için

$$\eta_\rho(\omega, \wp) = \frac{d(\omega, \wp)}{\rho}$$

ile tanımlanan η fonksiyonu konveks modüler metrik uzaydır. Ayrıca bu örnekle modüler metrik yapısının fiziksel yorumu yapılabilir. $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ noktaları arasında geçen zaman ρ ve $d(\omega, \wp)$, bu noktalar arasındaki uzaklığı göstermek üzere

$$0 \leq \eta_\rho(\omega, \wp) < \infty$$

değeri ortalama hızı gösterir. Buradan hareketle aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

(η_1) $\mathcal{S}$ kümesindeki ω ve $\wp$ noktalarının çakışık olması ($d(\omega, \wp) = 0$) için gerek ve yeter şart herhangi bir $\rho > 0$ zamanında ω noktasından $\wp$ noktasına hareketin hızının $\eta_\rho(\omega, \wp) = 0$ olmasıdır. Özetle, herhangi bir $\rho > 0$ zamanında hareket yoktur.

(η_2) $d(\omega, \wp) = d(\wp, \omega)$ olduğundan herhangi $\rho > 0$ zamanında ω noktasından $\wp$ noktasına hareketin ortalama hızı ile ters yöndeki ortalama hızlar birbirine eşittir.

(η_3) Zamanlar eşit olmak üzere ω noktasından $\wp$ noktasına hareket aşağıdaki gibi iki şekilde yapılsın.

(a) ω noktasından $\wp$ noktasına olan harekette üçüncü bir $\nu \in \mathcal{S}$ noktasından geçilsin,

(b) Doğrudan ω noktasından $\wp$ noktasına hareket etsin.

ω noktasından ν noktasına olan harekette geçen süre ρ ve ν noktasından $\wp$ noktasına olan harekette geçen süre ise μ olsun. Bu durumda ortalama hızlar sırasıyla $\eta_\rho(\omega, \nu)$ ve $\eta_\mu(\nu, \wp)$ dir. (a) durumundaki harekette harcanan zaman $\rho + \mu$ dir. Her iki harekette de geçen süreler eşit olduğundan (b) durumundaki ortalama hız $\eta_{\rho+\mu}(\omega, \wp)$ dir. Üçgen eşitsizliğinden $d(\omega, \wp) \leq d(\omega, \nu) + d(\nu, \wp)$ dir. Yani ω ve $\wp$ noktaları arasındaki uzaklık (b) durumundaki yolların toplamını aşamayacağından her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ ve $\rho, \mu > 0$ için

$$\eta_{\rho+\mu}(\omega, \wp) \leq \max\{\eta_\rho(\omega, \nu) + \eta_\mu(\nu, \wp)\} \leq \eta_\rho(\omega, \nu) + \eta_\mu(\nu, \wp)$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 1.8.19. [74] $(\mathcal{S}, d)$ bir metrik uzay olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve $\rho > 0$ için

$$\eta_\rho(\omega, \wp) = \begin{cases} 0, & \rho \geq d(\omega, \wp) \\ \infty, & \rho < d(\omega, \wp) \end{cases}$$

olarak tanımlanan η fonksiyonu $\mathcal{S}$ üzerinde konveks modülerdir. Bu örneğin bir sonucu olarak modüler metriğin görüntü kümesi de $[0, \infty]$ olarak tanımlanmıştır.

Örnek 1.8.20. [74] $\rho > 0$ ve reel sayıların $\omega = \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \wp = \{\wp_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ iki alt dizisi için

$$\eta_\rho(\omega, \wp) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\omega_n - \wp_n|}{\rho} \right)^p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

ile tanımlanan η fonksiyonu kesin ve konveks modülerdir. Ayrıca aynı koşullar altında η modülleri

$$\eta_\rho(\omega, \wp) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{|\omega_n - \wp_n|}{\rho} \right)^{\frac{1}{n}}$$

ile tanımlanırsa kesin konveks olmayan modülleri elde edilir.

$\eta_\rho(\omega, \wp)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde artmayan artmayan bir fonksiyondur. $(\eta_1) - (\eta_3)$ koşulları dikkate alındığında $0 < \mu < \rho$ için

$$\eta_\rho(\omega, \wp) \leq \eta_{\rho-\mu}(\omega, \omega) + \eta_\mu(\omega, \wp) \leq \eta_\mu(\omega, \wp)$$

yazılabilir. Bu ise istenendir.

Tanım 1.8.21. [74] $\eta, \mathcal{S}$ üzerinde yarı modüler ve $\omega_0 \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}_\eta(\omega_0) = \{\omega \in \mathcal{S} : \eta_\rho(\omega, \omega_0) \rightarrow 0, (\rho \rightarrow \infty)\},$$

$$\mathcal{S}_\eta^* = \mathcal{S}_\eta^*(\omega_0) = \{\omega \in \mathcal{S} : \exists \rho = \rho(\omega) > 0 \text{ öyle ki } \eta_\rho(\omega, \omega_0) < \infty\}$$

kümelerine $(\omega_0$ civarındaki) modüler uzaylar denir. Buradan $\mathcal{S}_\eta \subset \mathcal{S}_\eta^*$ olduğu açıktır. η fonksiyonu $\mathcal{S}$ üzerinde bir modüler ise $\mathcal{S}_\eta$ modüler uzayı herhangi $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\eta$ için

$$d_\eta(\omega, \wp) = \inf\{\rho > 0 : \eta_\rho(\omega, \wp) \leq \rho\}$$

metriği ile verilen ve η tarafından üretilen metrik (nontrivial) ile donatılmıştır. Ayrıca $\eta, \mathcal{S}$ üzerinde bir konveks modüler ise $\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}_\eta^*$ olur ve bu ortak kümeler herhangi $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\eta$ için

$$d_{\eta}^*(\omega, \wp) = \inf\{\rho > 0: \eta_{\rho}(\omega, \wp) \leq 1\}$$

metriği ile donatılmıştır. Bu metriğe Luxemburg uzaklığı denir.

$\mathcal{S}_{\eta}^*$ modüler metrik uzay üzerinde $\omega \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı açık yuvarı

$$B_{\eta}(\omega, r) = \{\wp \in \mathcal{S}_{\eta}^* \mid d_{\eta}(\omega, \wp) < r\}$$

kümesi ile tanımlanır. Ayrıca her $\omega \in U$ için $B_{\eta}(\omega, r) \subset U$ olan bir $r = r(\omega) > 0$ varsa U kümesine açık küme denir.

$\mathcal{S}_{\eta}^*$ kümesi üzerindeki bütün açık alt kümelerinin ailesine d_{η} metriği tarafından $\mathcal{S}_{\eta}^*$ kümesi üzerine indirgenen metrik topoloji denir ve $\tau_{d_{\eta}}$ ile gösterilir.

Modüler metrik uzaya ait bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.8.22. [74] $\mathcal{S}_{\eta}^*$ bir modüler metrik uzay ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ bir dizi olsun.

- (i) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\omega^* \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ noktasına η –yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\rho > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\eta_{\rho}(\omega_n, \omega^*) \rightarrow 0$ olmasıdır. Ayrıca ω^* noktasına $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin η –limiti denir.
- (ii) $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin η –Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $\rho > 0$ ve $n, m \rightarrow \infty$ için $\eta_{\rho}(\omega_n, \omega_m) \rightarrow 0$ olmasıdır.
- (iii) $\mathcal{S}_{\eta}^*$ modüler metrik uzayında alınan her η –Cauchy dizisi $\mathcal{S}_{\eta}^*$ uzayında bir noktaya yakınsak ise $\mathcal{S}_{\eta}^*$ modüler metrik uzayına η –tamdır denir.
- (iv) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}_{\eta}^*$ verilsin. $\mathcal{N}$ kümesindeki η –yakınsak her dizinin limiti yine $\mathcal{N}$ kümesinde ise $\mathcal{N}$ ye η –kapalıdır denir.
- (v) Her $\rho > 0$ için $\delta_{\eta}(\mathcal{N}) = \{\eta_{\rho}(\omega, \wp) \mid \omega, \wp \in \mathcal{N}\} < \infty$ ise $\mathcal{N}$ kümesine η –sınırlı küme denir.

Tanım 1.8.23. [75] $\mathcal{S}_{\eta}^*$ bir modüler metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_{\eta}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\eta}^*$ bir dönüşüm olsun. $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $n \rightarrow \infty$ için $\omega_n \xrightarrow{\eta} \omega$ oluyor iken $Q\omega_n \xrightarrow{\eta} Q\omega$ oluyorsa Q dönüşümüne η –süreklî dönüşüm denir.

Teorem 1.8.24. [76] $\mathcal{S}_{\eta}^*$ η –tam modüler metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_{\eta}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\eta}^*$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ için

$$\eta_{\rho}(Q\omega, Q\wp) \leq k\eta_{\rho}(\omega, \wp)$$

eşitsizliği $k \in [0,1)$ için sağlansın. Her $\rho > 0$ için $\eta_{\rho}(\omega_0, Q\omega_0) < \infty$ olacak şekilde $\omega_0 \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ elemanı varsa Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.8.25. [76] $\mathcal{S}_{\eta}^*$ η –tam modüler metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_{\eta}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\eta}^*$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ için

$$\eta_{\rho}(Q\omega, Q\wp) \leq k[\eta_{2\rho}(\omega, Q\omega) + \eta_{2\rho}(\wp, Q\wp)]$$

eşitsizliği $k \in [0, \frac{1}{2})$ için sağlansın. Her $\rho > 0$ için $\eta_{\rho}(\omega_0, Q\omega_0) < \infty$ olacak şekilde $\omega_0 \in \mathcal{S}_{\eta}^*$ elemanı varsa Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Modüler metrik uzayın kendine özgü fiziksel yorumu ve metrik uzay ile olan bağlantısından dolayı ortaya çıkan yeni kavramlar araştırmacıları bu yönde çalışmalar yapmaya teşvik etmiştir ve literatüre birçok çalışma kazandırılmıştır [77-87].

1.8.5. Modüler b –Metrik Uzaylar

Modüler metrik ve b –metrik kavramları dikkate alınarak C. Alaca ve M.E. Ege [88] modüler b –metrik yapısını tanımlamışlardır ve modüler b –metrik uzayı tanıtmışlardır. Ayrıca bu yeni uzayda Banach sabit nokta teoremini de ifade ve ispat etmişlerdir.

Tanım 1.8.26. [88] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme ve $\tau \geq 1$ bir reel sayı olsun. Her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için $\xi: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(\xi_1) \text{ her } \rho > 0 \text{ için } \xi_{\rho}(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp \text{ dir,}$$

$$(\xi_2) \text{ her } \rho > 0 \text{ için } \xi_{\rho}(\omega, \wp) = \xi_{\rho}(\wp, \omega) \text{ dir,}$$

$$(\xi_3) \text{ her } \rho, \mu > 0 \text{ için } \xi_{\rho+\mu}(\omega, \wp) \leq \tau[\xi_{\rho}(\omega, \nu) + \xi_{\mu}(\nu, \wp)] \text{ dir.}$$

Bu durumda ξ fonksiyonuna modüler b –metrik ve $(\mathcal{S}, \xi)$ ikilisine de modüler b –metrik uzay denir.

Modüler b –metrik uzay modüler metrik uzayın bir genellemesi olarak görülebilir. Gerçekten, $\tau = 1$ alınır ise bu iki tanımın çakışacağı açıktır.

Örnek 1.8.27. $0 < p < 1$ olmak üzere ℓ_p kümesi

$$\ell_p = \left\{ \{\omega_n\} \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|^p < \infty \right\}$$

ile tanımlansın. $\omega = \omega_n$, $\wp = \wp_n \in \ell_p$ için

$$d: \ell_p \times \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, \wp) \rightarrow d(\omega, \wp) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n - \wp_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

metrik fonksiyonu verilsin. $\rho \in (0, \infty)$ için $\xi_\rho(\omega, \wp) = \frac{d(\omega, \wp)}{\rho}$ ile tanımlı

$\xi: (0, \infty) \times \ell_p \times \ell_p \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\tau = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ sabiti olmak üzere bir modüler b -metriktir.

Örnek 1.8.28. $(\mathcal{S}, \eta)$ modüler metrik uzay ve $p > 1$ reel sayı olsun.

$$\xi_\rho(\omega, \wp) = (\eta(\omega, \wp))^p$$

ile tanımlanan ξ fonksiyonu $\tau = 2^{p-1}$ ile bir modüler b -metrik fonksiyonudur.

Örnek 1.8.29. $\mathcal{S} = [0, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlı $\xi: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için

$$\xi_\rho(\omega, \wp) = \frac{(e^\omega - e^\wp)^2}{\rho}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (ξ_1) ve (ξ_2) koşullarının sağlandığı açıktır. O halde her $\omega, \wp, \nu \in \mathcal{S}$ için

$$\xi_{\rho+\mu}(\omega, \wp) = \frac{(e^\omega - e^\wp)^2}{\rho + \mu} = \frac{(e^\omega - e^\wp + e^\nu - e^\nu)^2}{\rho + \mu}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^\omega - e^\nu)^2}{\rho + \mu} + \frac{(e^{\wp} - e^\nu)^2}{\rho + \mu} + \frac{2(e^\omega - e^\nu)(e^{\wp} - e^\nu)}{\rho + \mu} \\
&\leq \frac{(e^\omega - e^\nu)^2}{\rho} + \frac{(e^{\wp} - e^\nu)^2}{\mu} + \frac{(e^\omega - e^\nu)^2}{\rho} + \frac{(e^{\wp} - e^\nu)^2}{\mu} \\
&= 2 \left[\frac{(e^\omega - e^\nu)^2}{\rho} + \frac{(e^{\wp} - e^\nu)^2}{\mu} \right] \\
&\leq 2[\xi_\rho(\omega, \nu) + \xi_\mu(\nu, \wp)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği ile (ξ_3) şartı da sağlandığından $\tau = 2 > 1$ ile $(\mathcal{S}, \xi)$ bir modüler b –metrik uzaydır. Ancak dikkat edilir ise ξ bir modüler metrik değildir. Sonuç olarak her modüler metrik uzay bir modüler b –metrik uzaydır. Fakat bu örnekte olduğu gibi tersinin doğru olması gerekmez.

Tanım 1.8.30. [88] $(\mathcal{S}, \xi)$ bir modüler b –metrik uzay olsun. Bu durumda bir modüler küme $\mathcal{S}_\xi = \{\wp \in \mathcal{S} : \wp \sim \omega\}$ dir. Burada $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{S}$ üzerinde $\sim$, $\omega \sim \wp \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega, \wp) = 0$ olacak şekilde bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca $\omega_0 \in \mathcal{S}$ için

$$\mathcal{S}_\xi^* = \mathcal{S}_\eta^*(\omega_0) = \{\omega \in \mathcal{S} : \exists \rho = \rho(\omega) > 0 \text{ öyle ki } \xi_\rho(\omega, \omega_0) < \infty\}$$

kümesi $(\omega_0$ civarında) bir modüler b –metrik uzaydır.

Modüler b –metrik uzaydaki ξ –yakınsaklık, ξ –Cauchy ve ξ –tamlık gibi topolojik kavramlar modüler metrik uzay ile benzer şekilde ifade edilebilir.

Modüler b –metrik uzayda sabit nokta teorisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.8.31. [88] $(\mathcal{S}, \xi)$ bir modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\rho > 0$ için

$$\xi_\rho(Q\omega, Q\wp) \leq k\xi_\rho(\omega, \wp)$$

olan $k \in [0,1)$ varsa Q dönüşümüne ξ –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 1.8.32. [88] $(\mathcal{S}, \xi)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile bir ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir ξ –daralma dönüşümü olmak üzere $k \in [0,1)$ ve $\tau.k < 1$ olsun.

$\xi_\rho(\omega, Q\omega) < \infty$ olan $\omega = \omega(\rho) \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı varsa $\{\omega_n\} \rightarrow \omega^*$ dir ve ω^* noktası Q dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Teorem 1.8.33. [88] $(\mathcal{S}, \xi)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile bir ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\rho > 0$ için

$$\xi_\rho(Q\omega, Q\wp) \leq \rho [\xi_\rho(\omega, Q\omega) + \xi_\rho(\wp, Q\wp)]$$

eşitsizliğini sağlayan $\tau. \rho \in (0, \frac{1}{2})$ olan $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ var olsun. Bu durumda $\xi_\rho(\omega, Q\omega) < \infty$ olan $\omega = \omega(\rho) \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı varsa $\{\omega_n\} \rightarrow \omega^*$ dir ve ω^* noktası Q dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Teorem 1.8.34. [88] $(\mathcal{S}, \xi)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile bir ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\rho > 0$ için

$$\xi_\rho(Q\omega, Q\wp) \leq \tau [\xi_\rho(\omega, Q\wp) + \xi_\rho(\wp, Q\omega)]$$

ifadesini sağlayan $\tau. \tau \in [0, \frac{1}{2})$ olan $\tau \in [0, \frac{1}{2})$ var olsun. Bu durumda $\xi_\rho(\omega, Q\omega) < \infty$ olan $\omega = \omega(\rho) \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı varsa $\{\omega_n\} \rightarrow \omega^*$ dir ve ω^* noktası Q dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Parvaneh ve ark. [89] modüler b –metrik uzaylarda F –daralma dönüşümlerini kullanarak sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar vermişlerdir.

1.8.6. Branciari Uzaklık Fonksiyonu ile Donatılmış Modüler b –Metrik Uzaylar

Bu kısımda Branciari metrik kavramı yerine daha uygun bir ifade olan Branciari uzaklık (Branciari distance) terimi kullanılacaktır. 2021 yılında M. Öztürk ve A. Büyükkaya [90] tarafından Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 1.8.35. [90] $\mathcal{S}$ boştan farklı bir küme ve $\tau \geq 1$ bir reel sayı olsun. $\mathfrak{B}: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve her farklı $p, q \in \mathcal{S} - \{\omega, \wp\}$ noktaları için aşağıdaki koşulları sağlasın:

($\mathfrak{B}_1$) her $\rho > 0$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) = 0 \Leftrightarrow \omega = \wp$ dir,

($\mathfrak{B}_2$) her $\rho > 0$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) = \mathfrak{B}_\rho(\wp, \omega)$ dir,

($\mathfrak{B}_3$) her $\rho, \mu, \nu > 0$ için $\mathfrak{B}_{\rho+\mu+\nu}(\omega, \wp) \leq \tau[\mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) + \mathfrak{B}_\mu(\wp, q) + \mathfrak{B}_\nu(q, \wp)]$ dir.

Bu durumda $\mathfrak{B}$ fonksiyonu Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik ve $(\mathcal{S}, \mathfrak{B}) = \mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ kümesine de Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzay denir, $\mathfrak{BM}_b$ ile gösterilir.

Diğer yandan ($\mathfrak{B}_1$) koşulu yerine aşağıda verilen ($\mathfrak{B}_1'$) koşulu sağlanırsa $\mathfrak{B}$ fonksiyonuna Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış yarı(pseudo) modüler b –metrik denir.

($\mathfrak{B}_1'$) her $\rho > 0$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega, \omega) = 0$ dir.

Şimdi bazı $\mathfrak{BM}_b$ uzay örneklerine yer verilecektir.

Örnek 1.8.36. [90] $(\mathcal{S}, \mathfrak{d})$ Branciari metrik uzay ve $k \geq 1$ için

$\mathfrak{B} : (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$

$$\mathfrak{B}(\omega, \wp, \rho) \rightarrow \mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) = \frac{(\mathfrak{d}(\omega, \wp))^k}{\rho}$$

fonksiyonu tanımlansın. $t \geq 0$ için $f(t) = t^k$ fonksiyonunun iç bükey olmasından ve Jensen eşitsizliği ile a, b, c negatif olmayan reel sayıları için

$$(a + b + c)^k \leq 3^{k-1}(a^k + b^k + c^k)$$

sağlandığından $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ uzayı $\tau \leq 3^{k-1}$ sabiti ile bir $\mathfrak{BM}_b$ dir.

Örnek 1.8.37. [90] $(\mathcal{S}, \mathfrak{d})$ Branciari metrik uzay, $k \geq 1$ ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve her $\rho > 0$ için $\mathfrak{B} : (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) = \frac{\alpha d(\omega, \wp) + \beta d(\omega, \wp)^k}{1 + \rho}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ uzayı Branciari metrik uzay değildir. Ancak $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ bir $\mathfrak{BM}_b$ dir. $(\mathfrak{B}_1)$ ve $(\mathfrak{B}_2)$ koşullarının sağlandığı açıktır. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ ve tüm farklı $p, q \in \mathcal{S} - \{\omega, \wp\}$ için

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{\rho+\mu+\nu}(\omega, \wp) &= \frac{\alpha d(\omega, \wp) + \beta d(\omega, \wp)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{\alpha[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)] + \beta[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)]^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{\alpha[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)] + 3^{\mathfrak{k}-1}\beta[d(\omega, p)^{\mathfrak{k}} + d(p, q)^{\mathfrak{k}} + d(q, \wp)^{\mathfrak{k}}]}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq 3^{\mathfrak{k}-1} \left[\frac{\alpha d(\omega, p) + \beta d(\omega, p)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho} + \frac{\alpha d(p, q) + \beta d(p, q)^{\mathfrak{k}}}{1 + \mu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha d(q, \wp) + \beta d(q, \wp)^{\mathfrak{k}}}{1 + \nu} \right] \\
&= 3^{\mathfrak{k}-1} [\mathfrak{B}_{\rho}(\omega, p) + \mathfrak{B}_{\mu}(p, q) + \mathfrak{B}_{\nu}(q, \wp)],
\end{aligned}$$

olduğundan $(\mathfrak{B}_3)$ koşulu da sağlanmış olur. Sonuç olarak $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ uzayı $\tau \leq 3^{\mathfrak{k}-1}$ sabiti ile $\mathfrak{BM}_b$ dir. Fakat $(a + b)^{\mathfrak{k}} \leq 2^{\mathfrak{k}-1}(a^{\mathfrak{k}} + b^{\mathfrak{k}})$ eşitsizliği kullanılırsa $(\mathfrak{B}_3)$ koşulu aşağıdaki yolla da ispatlanabilir ve $\tau = (2^{\mathfrak{k}-1})^2$ ile $\mathfrak{BM}_b$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{\rho+\mu+\nu}(\omega, \wp) &= \frac{\alpha d(\omega, \wp) + \beta d(\omega, \wp)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{\alpha[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)] + \beta[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)]^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{\alpha[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)] + 2^{\mathfrak{k}-1}\beta[(d(\omega, p) + d(p, q))^{\mathfrak{k}} + d(q, \wp)^{\mathfrak{k}}]}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq \frac{\alpha[d(\omega, p) + d(p, q) + d(q, \wp)] + (2^{\mathfrak{k}-1})^2\beta[d(\omega, p)^{\mathfrak{k}} + d(p, q)^{\mathfrak{k}} + d(q, \wp)^{\mathfrak{k}}]}{1 + \rho + \mu + \nu} \\
&\leq (2^{\mathfrak{k}-1})^2 \left[\frac{\alpha d(\omega, p) + \beta d(\omega, p)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} + \frac{\alpha d(p, q) + \beta d(p, q)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} + \frac{\alpha d(q, \wp) + \beta d(q, \wp)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho + \mu + \nu} \right] \\
&\leq (2^{\mathfrak{k}-1})^2 \left[\frac{\alpha d(\omega, p) + \beta d(\omega, p)^{\mathfrak{k}}}{1 + \rho} + \frac{\alpha d(p, q) + \beta d(p, q)^{\mathfrak{k}}}{1 + \mu} + \frac{\alpha d(q, \wp) + \beta d(q, \wp)^{\mathfrak{k}}}{1 + \nu} \right] \\
&= (2^{\mathfrak{k}-1})^2 [\mathfrak{B}_{\rho}(\omega, p) + \mathfrak{B}_{\mu}(p, q) + \mathfrak{B}_{\nu}(q, \wp)]
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.8.38. [90] $k \geq 1$ ve $\omega, \wp \in \mathcal{S}$ olsun. $\mathfrak{B}: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) = \frac{|\omega - \wp|^k}{1 + \rho}$$

ise $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ uzayının $\tau = (2^{k-1})^2$ sabiti ile $\mathfrak{BM}_{\mathfrak{b}}$ olduğu açıktır.

Örnek 1.8.39. [90] $\mathcal{S} = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0\} \cup \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \geq 0\}$ olsun. $\mathfrak{B}: (0, \infty) \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanırsa $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ bir $\mathfrak{BM}_{\mathfrak{b}}$ olur.

$$\mathfrak{B}_\rho((a_1, 0), (a_2, 0)) = \frac{|a_1 - a_2|^k}{1 + \rho},$$

$$\mathfrak{B}_\rho((0, b_1), (0, b_2)) = \frac{|b_1 - b_2|^k}{1 + \rho},$$

$$\mathfrak{B}_\rho((a, 0), (0, b)) = \frac{|a - b|^k}{1 + \rho}$$

dir.

$\mathfrak{BM}_{\mathfrak{b}}$ uzayında $\omega \in \mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ ve $\rho, \mu > 0$ olsun. Bu durumda ρ ve μ ye bağlı $\mathfrak{B}$ –açık yuvar

$$B_{\rho, \mu}^{\mathfrak{B}}(\omega, r) = \{\wp \in \mathcal{S}_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B}_\rho(\omega, \wp) < \mu\}$$

ile tanımlanır. Her $\rho > 0$ ve $a \in A \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ için $B_{\rho, \mu}^{\mathfrak{B}}(\omega, a) \subseteq A$ olan $\mu > 0$ varsa A kümesine $\mathfrak{B}$ –açıktır denir. $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ kümesindeki tüm A alt kümelerinin bir topluluğu $\tau_{\mathfrak{B}}$ olsun. Bu durumda $\tau_{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{BM}_{\mathfrak{b}}$ uzayı için bir topoloji tanımlar.

Şimdi $\mathfrak{B}$ –yakınsaklık, $\mathfrak{B}$ –Cauchy dizisi ve $\mathfrak{B}$ –tamlık gibi $\mathfrak{BM}_{\mathfrak{b}}$ uzayının bazı topolojik özellikleri aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 1.8.40. [90] $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ bir $\mathfrak{BM}_{\mathfrak{b}}$, $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi ve $\omega \in \mathcal{S}$ olsun.

- (i) $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega) < \varepsilon$ olan $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ uzayındaki $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $\omega \in \mathcal{S}_{\mathfrak{B}}$ noktasına $\mathfrak{B}$ –yakınsaktır denir. Yani her $\rho > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega) = 0$ dır.

- (ii) $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ ve $p > 0$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+p}) < \varepsilon$ olan $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ uzayındaki $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $\mathfrak{B}$ –Cauchy dizisi denir. Yani $\rho > 0$ için $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_m) = 0$ dır.
- (iii) $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ uzayındaki her $\mathfrak{B}$ –Cauchy dizisi $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ uzayındaki bir noktaya $\mathfrak{B}$ –yakınsak ise $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ uzayına $\mathfrak{B}$ –tam $\mathfrak{BM}_b$ denir.

Uyarı 1.8.41. [90] Aşağıdaki ifadeler $\mathfrak{BM}_b$ için sağlanır.

- (i) $\mathfrak{BM}_b$ da bir dizinin limiti tek olmak zorunda değildir.
- (ii) $\mathfrak{BM}_b$ da bir yakınsak dizisi Cauchy dizisi olmayabilir.
- (iii) Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik fonksiyonu sürekli olmayabilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde çeşitli modüler metrik uzaylardaki ortak sabit nokta ve sabit nokta teoremleri ve sonuçları ile bunların uygulamalarına yer verilecektir. Ancak, modüler metrik kavramı sonlu değer olmak zorunda değildir. Dolayısıyla modüler metrik uzay (modüler b –metrik uzay ve Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzay) üzerindeki daralma dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği hakkında yorum yapabilmesi için aşağıdaki ön koşulların verilmesi gerekmektedir.

(M_1) Her $\rho > 0$ ve $\omega \in \mathcal{S}_\eta^*$ için $\eta_\rho(\omega, Q\omega) < \infty$ dir.

(M_2) Her $\rho > 0$ ve $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\eta^*$ için $\eta_\rho(\omega, \wp) < \infty$ dir.

2.1. Modüler b –Metrik Uzaylarda Simülasyon Fonksiyon Yardımı ile Elde Edilen Suzuki Σ –Daralmalar İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde modüler b –metrik uzaylarda simülasyon fonksiyon yardımıyla elde edilen ve Suzuki Σ –daralma olarak adlandırılan yeni bir daralma dönüşümü tanımlanacaktır. Ayrıca, bu uzay üzerinde dört dönüşüm için ortak sabit noktaların varlığı ve tekliği incelenecektir. Son kısımda ise Graf teorisi ve Homotopi teorisi için sonuçlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi, $\tau \geq 1$ sabiti ile modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}, J$ ve ζ bu uzayda dört dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta\omega, Q\omega), \xi_\rho(J\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \max\{\xi_\rho(\zeta\omega, J\wp), \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)\} \Rightarrow$$

$$\Sigma(\omega, \wp) = \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta\omega, J\wp) + |\xi_\rho(\zeta\omega, Q\omega) - \xi_\rho(J\wp, \mathcal{K}\wp)|]$$

olmak üzere

$$\mathcal{X}(\tau\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp), \Sigma(\omega, \wp)) \geq 0 \quad (2.1)$$

olan $\mathcal{X} \in \mathbb{Z}$ varsa $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerine Suzuki Σ –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.1.2. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümleri Suzuki Σ –daralma dönüşümü olsun. Eğer

- (i) $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ dir,
- (ii) $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*), \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*), \mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ kümelerinden biri $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesinin kapalı alt kümesidir,
- (iii) $\{\mathcal{J}, \mathcal{K}\}$ ve $\{\zeta, \mathcal{Q}\}$ çiftleri zayıf uyumludur,
- (iv) (M_1) ve (M_2) sağlanır,

şartları sağlanırsa $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında ortak tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ keyfi bir nokta olsun. $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ olduğundan $\wp_0 = \mathcal{Q}\omega_0 = \mathcal{J}\omega_1$ eşitliğini sağlayan $\omega_1 \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Benzer şekilde $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ ile $\wp_1 = \mathcal{K}\omega_1 = \zeta\omega_2$ olacak şekilde $\omega_2 \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Bu şekilde devam edilerek $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir $\{\wp_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\wp_{2n} = \mathcal{Q}\omega_{2n} = \mathcal{J}\omega_{2n+1} \text{ ve } \wp_{2n+1} = \mathcal{K}\omega_{2n+1} = \zeta\omega_{2n+2}$$

olarak tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta\omega_{2n}, \mathcal{Q}\omega_{2n}), \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\} \\ \leq \max\{\xi_\rho(\zeta\omega_{2n}, \mathcal{J}\omega_{2n+1}), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2n}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\} \end{aligned}$$

sağlandığından (2.1) ve $(\mathcal{X}_2)$ den

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{X}\left(\tau\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2n}, \mathcal{K}\omega_{2n+1}), \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})\right) \\ &< \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) - \tau\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2n}, \mathcal{K}\omega_{2n+1}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

yazılabilir ve burada

$$\begin{aligned}
& \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \\
&= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta\omega_{2n}, \mathcal{J}\omega_{2n+1}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2n}, \mathcal{Q}\omega_{2n}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})|] \\
&= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\wp_{2n-1}, \wp_{2n}) + |\xi_\rho(\wp_{2n-1}, \wp_{2n}) - \xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1})|]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dir. Nihayetinde (2.2) ve (2.3) den

$$\xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1}) \leq \tau \xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1}) < \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \tag{2.4}$$

elde edilir. Eğer (2.3) ve (2.4) de $\kappa_n = \xi_\rho(\wp_{n-1}, \wp_n)$ kısaltması uygulanırsa

$$\kappa_{2n+1} \leq \tau \kappa_{2n+1} < \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) = \frac{1}{\tau^2} [\kappa_{2n} + |\kappa_{2n} - \kappa_{2n+1}|] \tag{2.5}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $\kappa_{2n} \leq \kappa_{2n+1}$ durumu göz önüne alınırsa $\kappa_{2n+1} \leq \tau \kappa_{2n+1} < \frac{1}{\tau^2} \kappa_{2n+1}$ elde edilir. Fakat bu ifade bir çelişkidir. Bu durumda $\kappa_{2n+1} < \kappa_{2n}$ dir ve böylece

$$\Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) = \frac{1}{\tau^2} [2\kappa_{2n} - \kappa_{2n+1}] \tag{2.6}$$

bulunur. Diğer yandan yukarıdaki benzer adımlar takip edilerek $\kappa_{2n} < \kappa_{2n-1}$ ifadesinin sağlandığı gösterilebilir. Bu da $\kappa_{n+1} < \kappa_n$ olduğunu garanti eder. Böylece $\{\kappa_n\} = \{\xi_\rho(\wp_{n-1}, \wp_n)\}$ reel sayıların artmayan ve negatif olmayan bir dizisidir. Bu durumda her $\rho > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = r$ olacak şekilde $r \geq 0$ vardır. Şimdi $r = 0$ olduğu gösterilsin. Fakat tersine $r > 0$ olsun.

Bu aşamada aşağıdaki iki durum söz konusudur.

Durum 1: $\tau > 1$ olsun. (2.6) ve (2.4) de $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ise

$$r \leq \tau r < \frac{1}{\tau^2} r$$

çelişkisine ulaşılır.

Durum 2: $\tau = 1$ olsun. Bu durumda $\mathcal{X}(\tau\xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1}), \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})) \geq 0$ dir.

Eğer $\alpha_n = \xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1})$ ve $\beta_n = \Sigma(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})$ için $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tau\alpha_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n = r > 0$ ve $\alpha_n < \beta_n$ koşulları sağlanırsa, $(\mathcal{X}_3^*)$ den $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}^*(\tau\alpha_n, \beta_n) < 0$ çelişkisi ortaya çıkar. Bundan dolayı $r = 0$ elde edilir. Yani her $\rho > 0$ için

$$\xi_\rho(\wp_{n-1}, \wp_n) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

bulunur.

Şimdi bir sonraki adım olarak $\{\wp_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ -Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Fakat $\{\wp_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ -Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine verilen $\varepsilon > 0$ için $\{n_k\} > \{m_k\} \geq k$ özelliğindeki pozitif sayıların $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ alt dizileri

$$\xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k}) \geq \varepsilon \text{ ve } \xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k-2}) < \varepsilon \quad (2.8)$$

ifadelerini her $\rho > 0$ için sağlasın. Böylece (2.8) ile

$$\varepsilon \leq \xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k}) \leq \tau\xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k+1}) + \tau\xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2n_k+1}, \wp_{2n_k})$$

ifadesi elde edilir ve (2.7) kullanılarak $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ise

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k+1}) \geq \frac{\varepsilon}{\tau} \quad (2.9)$$

olur. Ayrıca, (ξ_3) ile

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\wp_{2m_k-1}, \wp_{2n_k}) &\leq \tau\xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2m_k-1}, \wp_{2m_k}) + \tau^2\xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k-2}) \\ &\quad + \tau^3\xi_{\frac{\rho}{4}}(\wp_{2n_k-2}, \wp_{2n_k-1}) + \tau^3\xi_{\frac{\rho}{4}}(\wp_{2n_k-1}, \wp_{2n_k}) \end{aligned}$$

bulunur ve (2.7) ile (2.8) göz önüne alınırsa $k \rightarrow \infty$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k+1}) \leq \tau^2 \varepsilon \quad (2.10)$$

elde edilir. Devamında (2.7) ve (2.8) den

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta\omega_{2m_k}, \mathcal{Q}\omega_{2m_k}), \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n_k+1}, \mathcal{K}\omega_{2n_k+1})\} \\ & \leq \frac{\varepsilon}{\tau^2} \max\{\xi_\rho(\zeta\omega_{2m_k}, \mathcal{J}\omega_{2n_k+1}), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2m_k}, \mathcal{K}\omega_{2n_k+1})\} \end{aligned}$$

ifadesini sağlayacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ pozitif tamsayısı vardır. Bu durumda (2.1) ve $(\mathcal{X}_2)$ den

$$\begin{aligned} 0 & \leq \mathcal{X}(\tau\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2m_k}, \mathcal{K}\omega_{2n_k+1}), \Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1})) \\ & < \Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1}) - \tau\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2m_k}, \mathcal{K}\omega_{2n_k+1}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1}) &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta\omega_{2m_k}, \mathcal{J}\omega_{2n_k+1}) \\ & \quad + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2m_k}, \mathcal{Q}\omega_{2m_k}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n_k+1}, \mathcal{K}\omega_{2n_k+1})|] \\ &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\wp_{2m_k-1}, \wp_{2n_k}) + |\xi_\rho(\wp_{2m_k-1}, \wp_{2m_k}) - \xi_\rho(\wp_{2n_k}, \wp_{2n_k+1})|] \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Buradan (2.10) kullanılarak (2.12) ifadesinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1}) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\wp_{2m_k-1}, \wp_{2n_k})] \right\} \\ &\leq \frac{1}{\tau^2} \tau^2 \varepsilon = \varepsilon \end{aligned} \quad (2.13)$$

bulunur. Son olarak (2.9) ve (2.13) ifadeleri ile (2.11) eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\begin{aligned} 0 & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{X}(\tau\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2m_k}, \mathcal{K}\omega_{2n_k+1}), \Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1}))] \\ & < \limsup_{k \rightarrow \infty} [\Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1}) - \tau\xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k+1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \Sigma(\omega_{2m_k}, \omega_{2n_k+1}) - \liminf_{k \rightarrow \infty} [\tau \xi_\rho(\wp_{2m_k}, \wp_{2n_k+1})] \\
&\leq \varepsilon - \tau \frac{\varepsilon}{\tau} = 0
\end{aligned}$$

çelişkisi ortaya çıkar. Bu da $\{\wp_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece $\{\wp_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de bir ξ –Cauchy dizisi olur. $\mathcal{S}_\xi^*$, ξ –tam modüler b –metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \wp_n = z, \quad (2.14)$$

olan $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır.

Devamında z noktasının $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu gösterilecektir. İlk olarak z noktasının $\mathcal{Q}$ ve ζ dönüşümlerinin sabit noktası olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \wp_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Q}\omega_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}\omega_{2n+1} = z \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \wp_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}\omega_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta\omega_{2n+2} = z
\end{aligned}$$

ifadelerinin sağlandığı açıktır. $\zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$, $\mathcal{S}_\xi^*$ nin kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $z = \zeta u$ olacak şekilde $u \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. $\mathcal{Q}u = z$ olduğunu göstermek için $\mathcal{Q}u \neq z$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta u, \mathcal{Q}u), \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\} \\
&\leq \max\{\xi_\rho(\zeta u, \mathcal{J}\omega_{2n+1}), \xi_\rho(\mathcal{Q}u, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\}
\end{aligned}$$

sağlandığından

$$0 \leq \mathcal{X}(\tau \xi_\rho(\mathcal{Q}u, \mathcal{K}\omega_{2n+1}), \Sigma(u, \omega_{2n+1})) < \Sigma(u, \omega_{2n+1}) - \tau \xi_\rho(\mathcal{Q}u, \mathcal{K}\omega_{2n+1})$$

ve

$$\begin{aligned}\Sigma(u, \omega_{2n+1}) &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta u, \mathcal{J}\omega_{2n+1}) + |\xi_\rho(\zeta u, Qu) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})|] \\ &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(z, \wp_{2n}) + |\xi_\rho(z, Qu) - \xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1})|]\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(u, \omega_{2n+1}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tau \xi_\rho(Qu, \mathcal{K}\omega_{2n+1}) = \frac{1}{\tau^2} \xi_\rho(z, Qu) - \tau \xi_\rho(z, Qu) < 0$$

çelişkisine ulaşılır. Böylece $Qu = z$ olur ve $Qu = \zeta u = z$ ifadesine ulaşılır. Q ve ζ dönüşümleri zayıf uyumlu dönüşümler olduklarından $Qz = Q\zeta u = \zeta Qu = \zeta z$ bulunur.

$Qz = z$ olduğunu göstermek için $Qz \neq z$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta z, Qz), \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\} \\ \leq \max\{\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}\omega_{2n+1}), \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\}\end{aligned}$$

koşulu sağlandığından

$$0 \leq \mathcal{X}(\tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}\omega_{2n+1}), \Sigma(z, \omega_{2n+1})) < \Sigma(z, \omega_{2n+1}) - \tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}\omega_{2n+1}),$$

$$\begin{aligned}\Sigma(z, \omega_{2n+1}) &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}\omega_{2n+1}) + |\xi_\rho(\zeta z, Qz) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})|] \\ &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta z, \wp_{2n}) + |\xi_\rho(\zeta z, Qz) - \xi_\rho(\wp_{2n}, \wp_{2n+1})|]\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(z, \omega_{2n+1}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}\omega_{2n+1}) = \frac{1}{\tau^2} \xi_\rho(\zeta z, z) - \tau \xi_\rho(\zeta z, z) < 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Yani $Qz = z$ olmalıdır.

Bir sonraki adımda z noktasının $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{J}$ dönüşümlerinin sabit noktası olduğu gösterilsin. $Q(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ olduğundan $Qz = \mathcal{J}v$ olacak şekilde $v \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası mevcuttur ve $Qz = \mathcal{J}v = \zeta z = z$ dir. Burada $\mathcal{K}v = z$ dir. Aksine $\mathcal{K}v \neq z$ ise

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta z, Qz), \xi_\rho(\mathcal{J}v, Q\omega_{2n+1})\} \leq \max\{\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}v), \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}v)\}$$

eşitsizliği sağlandığından

$$0 \leq \mathcal{X}(\tau\xi_\rho(Qz, \mathcal{K}v), \Sigma(z, v)) < \Sigma(z, v) - \tau\xi_\rho(Qz, \mathcal{K}v),$$

$$\begin{aligned} \Sigma(z, v) &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}v) + |\xi_\rho(\zeta z, Qz) - \xi_\rho(\mathcal{J}v, \mathcal{K}v)|] \\ &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta z, z) + |\xi_\rho(\zeta z, z) - \xi_\rho(z, \mathcal{K}v)|] \end{aligned}$$

yazılır. Eğer $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(z, v) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tau\xi_\rho(Qz, \mathcal{K}v) = \frac{1}{\tau^2} \xi_\rho(z, \mathcal{K}v) - \tau\xi_\rho(z, \mathcal{K}v) < 0$$

çelişkisi elde edilir. Bu durumda $z = \mathcal{K}v$ dir ve böylece $\mathcal{K}v = \mathcal{J}v = z$ olur. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{J}$ dönüşümlerinin zayıf uyumluluğu kullanılarak $\mathcal{K}z = \mathcal{K}\mathcal{J}v = \mathcal{J}\mathcal{J}v = \mathcal{J}z$ eşitliği bulunur.

Son olarak $\mathcal{K}z = z$ olsun. Eğer $\mathcal{K}z \neq z$ ise

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta z, Qz), \xi_\rho(\mathcal{J}z, Qz)\} \leq \max\{\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}z), \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}z)\}$$

ifadesinin sağlandığı açıktır ve

$$\begin{aligned} \Sigma(z, z) &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}z) + |\xi_\rho(\zeta z, Qz) - \xi_\rho(\mathcal{J}z, \mathcal{K}z)|] \\ &= \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\mathcal{K}z, z) + |\xi_\rho(\zeta z, z) - \xi_\rho(\mathcal{K}z, \mathcal{K}z)|] \end{aligned}$$

iken

$$0 \leq \mathcal{X} \left(\tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}z), \Sigma(z, z) \right) < \Sigma(z, z) - \tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}z),$$

olur. Benzer şekilde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(z, z) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}z) = \frac{1}{\tau^2} \xi_\rho(z, \mathcal{K}z) - \tau \xi_\rho(z, \mathcal{K}z) < 0$$

çelişkisine ulaşılır. Bu da $Qz = \mathcal{K}z = \zeta z = \mathcal{J}z = z$ olduğunu gösterir. Benzer sonuçlar $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ olduğundan $\mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ (veya $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*), \mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*)$) kümelerinin kapalı alt kümeler olduğu durumlar içinde geçerlidir.

Son olarak z noktasının tek ortak sabit nokta olduğunu göstermek için $z \neq p$ olan $p = Qp = \mathcal{K}p = \mathcal{J}p = \zeta p$ koşulunu sağlayan başka bir sabit nokta olsun. Bu durumda

$$0 = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\zeta z, Qz), \xi_\rho(\mathcal{J}p, \mathcal{K}p)\} \leq \max\{\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}p), \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}p)\}$$

dır ve (2.1) eşitsizliğinden

$$\Sigma(z, p) = \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\zeta z, \mathcal{J}p) + |\xi_\rho(\zeta z, Qz) - \xi_\rho(\mathcal{K}p, \mathcal{J}p)|] \quad (2.15)$$

iken

$$0 \leq \mathcal{X} \left(\tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}p), \Sigma(z, p) \right) < \Sigma(z, p) - \tau \xi_\rho(Qz, \mathcal{K}p) \quad (2.16)$$

ifadesi elde edilir. Böylece (2.15) ve (2.16) ifadelerinden

$$\xi_\rho(z, p) \leq \tau \xi_\rho(z, p) < \Sigma(z, p) = \frac{1}{\tau^2} \xi_\rho(z, p)$$

çelişkisi ortaya çıkar. Bu durumda $z = p$ dir ve $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ .dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

■

Şimdi Teorem 2.1.2 den elde edilen bazı sonuçlara yer verilecektir.

Sonuç 2.1.3. Teorem 2.1.2 de $\Sigma(\omega, \wp) = \xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp) + |\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)|$ olarak tanımlanır ise $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak noktaya sahiptir.

Sonuç 2.1.4. $\mathcal{S}_\xi^*$, $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}$ bu uzayda iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp)$$

iken

$$\mathcal{X}(\tau\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp), \Sigma(\omega, \wp)) \geq 0, \quad (2.17)$$

$$\Sigma(\omega, \wp) = \frac{1}{\tau^2} [\xi_\rho(\omega, \wp) + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)|]$$

ifadeleri $\mathcal{X} \in \mathcal{Z}$ için sağlansın. (M_1) ve (M_2) sağlanırsa $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak sahip noktaya sahiptir.

Sonuç 2.1.5. Sonuç 2.1.4 de $\Sigma(\omega, \wp) = \xi_\rho(\omega, \wp) + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)|$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak noktaya sahiptir.

Eğer Sonuç 2.1.4 de $\mathcal{Q} = \mathcal{K}$ seçilir ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.6. $\mathcal{S}_\xi^*$ $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}$ bu uzayda bir dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) \leq \xi_\rho(\omega, \wp)$$

iken

$$\mathcal{X} \left(\tau \xi_{\rho}(Q\omega, Q\wp), \Sigma(\omega, \wp) \right) \geq 0, \quad (2.18)$$

$$\Sigma(\omega, \wp) = \frac{1}{\tau^2} [\xi_{\rho}(\omega, \wp) + |\xi_{\rho}(\omega, Q\omega) - \xi_{\rho}(\wp, Q\wp)|]$$

ifadesini sağlayan $\mathcal{X} \in Z$ var olsun. (M_1) ve (M_2) sağlanırsa Q dönüşümü $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 2.1.7 Sonuç 2.1.6 da $\Sigma(\omega, \wp) = \xi_{\rho}(\omega, \wp) + |\xi_{\rho}(\omega, Q\omega) - \xi_{\rho}(\wp, \mathcal{K}\wp)|$ olarak tanımlanırsa Q dönüşümü $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında bir tek noktaya sahiptir.

2.1.1. Suzuki Σ –Daralma Dönüşümlerinin Graf Teorisine Uygulanması

Bu kısımda $\mathcal{S}_{\xi}^*$ kümesi G grafi ile donatılmış modüler b –metrik uzay olsun ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{S}^Q = \{ \omega \in \mathcal{S}_{\xi}^* | (\omega, Q\omega) \in E(G) \} \text{ ve } \mathcal{S}^{\mathcal{K}} = \{ \omega \in \mathcal{S}_{\xi}^* | (\omega, \mathcal{K}\omega) \in E(G) \}.$$

Tanım 2.1.8. $\mathcal{S}_{\xi}^*$, G grafi ile donatılmış modüler b –metrik uzay olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (i) Her $\omega \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ için $(\omega, Q\omega) \in E(G) \Rightarrow (Q\omega, \mathcal{K}Q\omega) \in E(G)$ ve $(\omega, \mathcal{K}\omega) \in E(G) \Rightarrow (\mathcal{K}\omega, Q\mathcal{K}\omega) \in E(G)$ dir.
- (ii) $\mathcal{X} \in Z$ ve $\tau \geq 1$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_{\rho}(\omega, Q\omega), \xi_{\rho}(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_{\rho}(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$\mathcal{X} \left(\tau \xi_{\rho}(Q\omega, \mathcal{K}\wp), \Sigma(\omega, \wp) \right) \geq 0, \quad (2.19)$$

$$\Sigma(\omega, \wp) = \frac{1}{\tau^2} [\xi_{\rho}(\omega, \wp) + |\xi_{\rho}(\omega, Q\omega) - \xi_{\rho}(\wp, \mathcal{K}\wp)|]$$

ifadeleri her $(\omega, \wp) \in E(G)$ ve her $\rho > 0$ için sağlansın.

Bu durumda $(Q, \mathcal{K})$ ikilisine Suzuki Σ_G –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.1.9. $\mathcal{S}_\xi^*$, G grafi ile donatılmış ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (i) $\omega_0 \in \mathcal{S}^Q$ dir,
- (ii) $(Q, \mathcal{K})$ ikilisi Suzuki Σ_G – daralma dönüşümüdür,
- (iii) Q veya $\mathcal{K}$ dönüşümü ξ –süreklidir, veya
- (iv) $(\mathcal{S}_\xi^*, \xi, G)$ üçlüsü düzenlidir,
- (v) G grafi zayıf bağlantılıdır,
- (vi) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}^Q$ olsun. Bu durumda $(\omega_0, Q\omega_0) \in E(G)$ dir. (i) şartından

$$(\omega_0, Q\omega_0) \in E(G) \Rightarrow (Q\omega_0, \mathcal{K}Q\omega_0) \in E(G)$$

dir. Eğer $\omega_1 = Q\omega_0$ olarak seçilirse $(\omega_1, \mathcal{K}\omega_1) \in E(G)$ bulunur. Tekrar (i) şartı ile

$$(\omega_1, \mathcal{K}\omega_1) \in E(G) \Rightarrow (\mathcal{K}\omega_1, Q\mathcal{K}\omega_1) \in E(G)$$

elde edilir. Devamında $\omega_2 = \mathcal{K}\omega_1$ olarak alınırsa $(\omega_2, Q\omega_2) \in E(G)$ bulunur. Benzer şekilde devam edilerek $(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \in E(G)$ elde edilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{2n+2} = \mathcal{K}\omega_{2n+1} \text{ ve } \omega_{2n+1} = Q\omega_{2n}$$

olacak şekilde $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlanır. Böylece Teorem 2.1.2 den $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında ξ –Cauchy dizisidir ve uzayın ξ –tamlığı ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = z \tag{2.20}$$

olacak şekilde bir $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır. $z \in \mathcal{S}_\xi^*$, $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası mıdır? (iii) şartı sağlanırsa z noktasının ortak sabit nokta olduğunu açıktır. Bu durumda (iv) şartı sağlansın. Buradan $\omega = z \in \mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ ve $\wp = \omega_{2n+1} \in \mathcal{S}^{\mathcal{K}}$ ifadeleri (iv) şartında yerine yazılır ise her $n \geq 0$ için

$$(z, \omega_{2n+1}) \in E(G)$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(z, \mathcal{Q}z), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\} \leq \xi_\rho(z, \omega_{2n+1})$$

ifadesi sağlandığından Teorem 2.1.2 deki benzer yöntem takip edilirse z noktası $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olarak bulunur.

Son olarak z noktasının tek ortak sabit nokta olduğunu göstermek için $z \neq v$ olan $v \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası da başka bir ortak sabit nokta olsun. Yani $v = \mathcal{K}v = \mathcal{Q}v$ olsun. Bu durumda $(z, \mu) \in E(G)$ ve $(\mu, v) \in E(G)$ olacak şekilde $\mu \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Buradan (v) şartı ile $(z, v) \in E(G)$ olduğu elde edilir. Ayrıca

$$0 = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(z, \mathcal{Q}z), \xi_\rho(v, \mathcal{K}v)\} \leq \xi_\rho(z, v)$$

olduğundan Teorem 2.1.2 ile benzer şekilde z noktasının $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğu bulunur. ■

2.1.2. Homotopi Teorisi Üzerine Uygulama

Bu kısımda ilk olarak Teorem 2.1.2 nin bir analizi olan bir sonuca yer verilecektir.

Sonuç 2.1.10. $\mathcal{S}_\xi^*$, $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}$ bu uzay üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\tau \xi_{\rho}(Q\omega, Q\wp) \leq k(\Sigma(\omega, \wp)), \quad (2.21)$$

$$\Sigma(\omega, \wp) = \frac{1}{2\tau} [\xi_{\rho}(\omega, \wp) + |\xi_{\rho}(\omega, Q\omega) - \xi_{\rho}(\wp, Q\wp)|],$$

ifadesini sağlayacak şekilde $k \in [0, 1)$ var olsun. (M_1) ve (M_2) sağlanırsa Q dönüşümü $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ keyfi bir nokta olsun ve her $\omega \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ için $\omega_n = Q\omega_{n-1} = Q^n\omega_0$ olan $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. (2.21) ifadesinden

$$\begin{aligned} \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1}) &= \xi_{\rho}(Q\omega_{n-1}, Q\omega_n) \leq \tau \xi_{\rho}(Q\omega_{n-1}, Q\omega_n) \\ &\leq k(\Sigma(\omega_{n-1}, \omega_n)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_{n-1}, \omega_n) &= \frac{1}{2\tau} [\xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n) + |\xi_{\rho}(\omega_{n-1}, Q\omega_{n-1}) - \xi_{\rho}(\omega_n, Q\omega_n)|] \\ &= \frac{1}{2\tau} [\xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n) + |\xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n) - \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})|] \end{aligned}$$

olur. Eğer $\xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n) < \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})$ ise (2.22) ifadesi

$$\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1}) \leq \frac{k}{2\tau} \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})$$

dir ve $\frac{k}{2\tau} \in (0, 1)$ olduğundan bu ifade bir çelişki belirtir. Bu durumda $\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1}) < \xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n)$ olmalıdır. Böylece (2.22) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1}) &\leq \frac{k}{2\tau} [2\xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n) - \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})] \\ &\leq \frac{k}{\tau} \xi_{\rho}(\omega_{n-1}, \omega_n) \\ &\leq \left(\frac{k}{\tau}\right)^2 \xi_{\rho}(\omega_{n-2}, \omega_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \leq \left(\frac{k}{\tau}\right)^n \xi_\rho(\omega_0, \omega_1) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) = 0 \quad (2.23)$$

eşitliği elde edilir. $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

$m > n$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_\rho(\omega_n, \omega_m) \leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\omega_n, \omega_{n+1}) + \tau^2 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\omega_{n+1}, \omega_{n+2}) + \tau^3 \xi_{\frac{\rho}{8}}(\omega_{n+2}, \omega_{n+3}) + \dots$$

olur ve genelliği bozmaksızın

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_n, \omega_m) & \leq \tau \left(\frac{k}{\tau}\right)^n \xi_\rho(\omega_0, \omega_1) + \tau^2 \left(\frac{k}{\tau}\right)^{n+1} \xi_\rho(\omega_0, \omega_1) + \tau^3 \left(\frac{k}{\tau}\right)^{n+2} \xi_\rho(\omega_0, \omega_1) \\ & + \dots \\ & \leq \tau \left(\frac{k}{\tau}\right)^n \xi_\rho(\omega_0, \omega_1) [1 + k + k^2 + \dots] \end{aligned}$$

yazılabilir. $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınır $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca $\mathcal{S}_\xi^*$ ξ –tam modüler b –metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = z \quad (2.24)$$

olan $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Devamında $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktasının Q dönüşümünün sabit noktası olduğunu göstermek için $z \neq Qz$ olsun. (2.21) ifadesinden

$$\begin{aligned} \tau \xi_\rho(\omega_n, Qz) & = \tau \xi_\rho(Q\omega_{n-1}, Qz) \leq k(\Sigma(\omega_{n-1}, z)) \\ & = k[\xi_\rho(\omega_{n-1}, z) + |\xi_\rho(\omega_{n-1}, Q\omega_{n-1}) - \xi_\rho(z, Qz)|] \end{aligned}$$

bulunur ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\xi_\rho(z, Qz) \leq \frac{k}{\tau} \xi_\rho(z, Qz)$$

çelişkisine ulaşılır. Bu durumda z noktası Q dönüşümün sabit noktasıdır.

Son olarak sabit noktanın tekliğini göstermek için $Qu = u$ olan $z \neq u$ bir başka sabit nokta var olsun. (2.21) ifadesinden

$$\tau \xi_\rho(z, u) = \tau \xi_\rho(Qz, Qu) \leq k(\Sigma(z, u)) = k[\xi_\rho(z, u) + |\xi_\rho(z, Qz) - \xi_\rho(u, Qu)|]$$

bulunur ve buradan

$$\xi_\rho(z, u) \leq \frac{k}{\tau} \xi_\rho(z, u)$$

çelişkili ifadesi elde edilir. Dolayısıyla $z = u$ olmalıdır, yani $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası Q dönüşümün tek sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.1.11. $\mathcal{S}_\xi^*$ $\tau \geq 1$ sabiti ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve P, R sırası ile $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayının kapalı ve açık alt kümeleri olsun. $\mathcal{H}: R \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ operatörü aşağıdaki şartları sağlasın.

- (i) Her $\omega \in R \setminus P$ ve $\iota \in [0, 1)$ için $\omega \neq \mathcal{H}(\omega, \iota)$ dir,
- (ii) Her $\omega, \wp \in R$ ve $\iota, k \in [0, 1)$ için

$$\Sigma(\omega, \wp) = \frac{1}{2\tau} [\xi_\rho(\omega, \wp) + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{H}(\omega, \iota)) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{H}(\wp, \iota))|]$$

iken

$$\tau \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota), \mathcal{H}(\wp, \iota)) \leq k(\Sigma(\omega, \wp)),$$

dir,

(iii) Her $\iota, \iota^* \in [0,1]$ ve $\forall \omega \in \mathbb{R}$ için

$$\tau \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota), \mathcal{H}(\omega, \iota^*)) \leq |\psi(\iota) - \psi(\iota^*)|$$

eşitsizliğini sağlayan $\psi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Bu durumda $\mathcal{H}(\cdot, 0)$ operatörünün bir sabit noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}(\cdot, 1)$ operatörünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat. Λ kümesi

$$\Lambda = \{ \iota \in [0,1] : \omega = \mathcal{H}(\omega, \iota) \text{ bazı } \omega \in P \text{ için} \}$$

olarak tanımlansın.

($\Rightarrow$:) $\mathcal{H}(\cdot, 0)$ bir sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda Λ kümesi boş küme değildir. Yani $0 \in \Lambda$ dır. Şimdi Λ kümesinin $[0,1]$ üzerinde hem açık hem de kapalı olduğu gösterilsin. $[0,1]$ kümesinin bağlantılılığından $\Lambda = [0,1]$ olacağından istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Öncelikle Λ kümesinin $[0,1]$ üzerinde kapalı olduğu gösterilsin. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için $\iota_n \rightarrow \iota \in [0,1]$ olacak şekilde $\{\iota_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Lambda$ dizisi tanımlansın. Burada $\iota \in \Lambda$ olduğunu gösterilecektir. Her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\iota_n \in \Lambda$ olduğundan $\omega_n = \mathcal{H}(\omega_n, \iota_n)$ olan $\omega_n \in P$ noktası vardır. Ayrıca, $n, m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ için

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_n, \omega_m) &= \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_n), \mathcal{H}(\omega_m, \iota_m)) \\ &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_n), \mathcal{H}(\omega_n, \iota_m)) + \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_m), \mathcal{H}(\omega_m, \iota_m)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\tau \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_m), \mathcal{H}(\omega_m, \iota_m)) \\ &\leq k(\Sigma(\omega_n, \omega_m)) \\ &= \frac{k}{2\tau} [\xi_\rho(\omega_n, \omega_m) + |\xi_\rho(\omega_n, \mathcal{H}(\omega_n, \iota_m)) - \xi_\rho(\omega_m, \mathcal{H}(\omega_m, \iota_m))|] \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2\tau} [\xi_\rho(\omega_n, \omega_m) + \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_n), \mathcal{H}(\omega_n, \iota_m))]$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\xi_\rho(\omega_n, \omega_m) \leq |\psi(\iota_n) - \psi(\iota_m)| + \frac{k}{2\tau} \left[\xi_\rho(\omega_n, \omega_m) + \frac{|\psi(\iota_n) - \psi(\iota_m)|}{\tau} \right]$$

$$\xi_\rho(\omega_n, \omega_m) \leq \left(\frac{2\tau^2 + k}{\tau(2\tau - k)} \right) |\psi(\iota_n) - \psi(\iota_m)|$$

bulunur. $n, m \rightarrow \infty$ için $\{\iota_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsaklığı göz önüne alınırsa $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_n, \omega_m) = 0$ olur. Bu da $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ -Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayının ξ -tamlığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega^*, \omega_n) = 0$$

olacak şekilde $\omega^* \in R$ noktası vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_n, \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) &= \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_n), \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) \\ &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega_n, \iota_n), \mathcal{H}(\omega_n, \iota)) + \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega_n, \iota), \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega_n, \iota), \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) &\leq k \Sigma(\omega_n, \omega^*) \\ &= \frac{k}{2\tau} [\xi_\rho(\omega_n, \omega^*) + |\xi_\rho(\omega_n, \mathcal{H}(\omega_n, \iota)) - \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{H}(\omega^*, \iota))|] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\xi_\rho(\omega_n, \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) \leq |\psi(\iota_n) - \psi(\iota)| + \frac{k}{2\tau} \xi_\rho(\omega_n, \omega^*)$$

dir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_n, \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) = 0$ olur. Böylece

$$\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{H}(\omega^*, \iota)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_n, \mathcal{H}(\omega_n, \iota)) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\omega^* = \mathcal{H}(\omega^*, \iota)$ olması demektir. (i) sağlandığından $\omega^* \in P$ olur. Buradan $\iota \in \Lambda$ dır ve sonuç olarak Λ kümesi $[0,1]$ üzerinde kapalıdır.

Şimdi de Λ kümesinin $[0,1]$ üzerinde açık olduğu gösterilsin. $\iota_0 \in \Lambda$ olsun. Bu durumda $\omega_0 = \mathcal{H}(\omega_0, \iota_0)$ olacak şekilde $\omega_0 \in P$ noktası vardır. P açık olduğundan $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında $B_\xi(\omega_0, r) \subseteq P$ olan $r > 0$ vardır. $k \in [0,1]$ ve $\tau \geq 1$ olmak üzere $\varepsilon = \frac{r(2\tau-k)\tau}{2\tau^2+k} > 0$ olsun. ψ, ι_0 noktasında sürekli olduğundan $\iota \in (\iota_0 - \vartheta(\varepsilon), \iota_0 + \vartheta(\varepsilon))$ için $|\psi(\iota) - \psi(\iota_0)| < \varepsilon$ olan $\vartheta(\varepsilon) > 0$ vardır.

$\iota \in (\iota_0 - \vartheta(\varepsilon), \iota_0 + \vartheta(\varepsilon))$ olmak üzere

$$p \in \overline{B_\xi(\omega_0, r)} = \{\omega \in \mathcal{S}_\xi^* : \xi_\rho(\omega, \omega_0) \leq r\}$$

için

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota), \omega_0) &= \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota), \mathcal{H}(\omega_0, \iota_0)) \\ &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega, \iota), \mathcal{H}(\omega, \iota_0)) + \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{H}(\omega, \iota_0), \mathcal{H}(\omega_0, \iota_0)) \end{aligned}$$

dir ve bu eşitsizlikte

$$\begin{aligned} \tau \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota_0), \mathcal{H}(\omega_0, \iota_0)) &\leq k \Sigma(\omega, \omega_0) \\ &\leq \frac{k}{2\tau} [\xi_\rho(\omega, \omega_0) + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{H}(\omega, \iota_0)) - \xi_\rho(\omega_0, \mathcal{H}(\omega_0, \iota_0))|] \\ &= \frac{k}{2\tau} [\xi_\rho(\omega, \omega_0) + \xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota), \mathcal{H}(\omega, \iota_0))] \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlikler göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\xi_\rho(\mathcal{H}(\omega, \iota), \omega_0) &\leq |\psi(\iota) - \psi(\iota_0)| + \frac{k}{2\tau} \left[\xi_\rho(\omega, \omega_0) + \frac{|\psi(\iota) - \psi(\iota_0)|}{\tau} \right] \\
&= \left(1 + \frac{k}{2\tau^2}\right) |\psi(\iota) - \psi(\iota_0)| + \frac{k}{2\tau} \xi_\rho(\omega, \omega_0) \\
&\leq \left(1 + \frac{k}{2\tau^2}\right) \varepsilon + \frac{k}{2\tau} r \\
&\leq r
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\mathcal{H}(\omega, \iota) \in \overline{B_\xi(\omega_0, r)}$ olur. Böylece her sabit $\iota \in (\iota_0 - \vartheta(\varepsilon), \iota_0 + \vartheta(\varepsilon))$ için

$$\mathcal{H}(\cdot, \iota): \overline{B_\xi(\omega_0, r)} \rightarrow \overline{B_\xi(\omega_0, r)}$$

dir. Sonuç 2.3.1 in hipotezi sağlandığından $\mathcal{H}(\cdot, \iota)$ operatörü R kümesinde bir sabit noktaya sahiptir. Fakat (i) şartından sabit nokta P kümesinde olmalıdır. Bu yüzden $(\iota_0 - \vartheta(\varepsilon), \iota_0 + \vartheta(\varepsilon)) \subseteq \Lambda$ dir ve sonuç olarak Λ kümesi $[0,1]$ üzerinde açıktır.

2.2. C –Sınıfı Daralma Dönüşümleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda maksimum operatörü ile genelleştirilmiş olan E –daralma dönüşümleri ve C –sınıfı fonksiyonlar kullanılarak edilen ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçların graf teorisine ve integral tipi daralma dönüşümlerine uygulamalarına yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi $\tau \geq 1$ sabiti ile modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ bu uzayda dört dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\begin{aligned}
\Xi(\omega, \wp) = \max \{ &\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp) + |\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)|, \\
&\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega) + |\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp) - \xi_\rho(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)|, \\
&\xi_\rho(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp) + |\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp) - \xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega)|, \\
&\frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\zeta\omega, \mathcal{K}\wp) + \xi_{2h}(\mathcal{J}\wp, \mathcal{Q}\omega)}{\tau} + |\xi_\rho(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)| \right] \}
\end{aligned}$$

iken

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp))\right) \quad (2.25)$$

ifadesini sağlayan $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$ ve $\vartheta \in \Pi$ fonksiyonları varsa $Q, \mathcal{K}, J$ ve ζ dönüşümleri $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –daralma olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.2. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}, J$ ve ζ dönüşümleri $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –daralma olsun. Bu durumda

- (i) $Q(\mathcal{S}_\xi^*) \subset J(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ dir,
- (ii) $Q(\mathcal{S}_\xi^*), J(\mathcal{S}_\xi^*), \mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ kümelerinden biri $\mathcal{S}_\xi^*$ nin kapalı alt kümesidir,
- (iii) $\{J, \mathcal{K}\}$ ve $\{\zeta, Q\}$ çiftleri zayıf uyumludur,

şartları sağlansın. Eğer (M_1) şartı da sağlanır ise $Q, \mathcal{K}, J$ ve ζ dönüşümleri ortak bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, (M_2) şartı da eklenirse dönüşümler tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ keyfi bir nokta olsun. $Q(\mathcal{S}_\xi^*) \subset J(\mathcal{S}_\xi^*)$ olduğundan $\wp_0 = Q\omega_0 = J\omega_1$ sağlayan $\omega_1 \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası bulunabilir. Benzer şekilde $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ ile $\wp_1 = \mathcal{K}\omega_1 = \zeta\omega_2$ olacak şekilde $\omega_2 \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Bu şekilde devam edilirse $\mathcal{S}_\xi^*$ de bir $\{\wp_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\wp_{2n} = Q\omega_{2n} = J\omega_{2n+1} \text{ ve } \wp_{2n+1} = \mathcal{K}\omega_{2n+1} = \zeta\omega_{2n+2}$$

ile tanımlanır. Eğer $\wp_{q_0} = \wp_{q_0+1}$ olacak şekilde q_0 noktası var ise bu nokta $Q, \mathcal{K}, J$ ve ζ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olur. Sonuç olarak, $\wp_{q_0} \neq \wp_{q_0+1}$ olsun. Böylece her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1}) > 0$ dir. O halde (2.25) den

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega_{2q}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})\right) \\ & \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})\right), \vartheta\left(\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})\right)\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

dir ve burada

$$\begin{aligned}
& \Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \\
&= \text{maks}\{\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{J}\omega_{2q+1}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})| \\
&\quad \xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{J}\omega_{2q+1}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{J}\omega_{2q+1}) - \xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q})|; \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\hbar}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) + \xi_{2\hbar}(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{Q}\omega_{2q})}{\tau} \right. \\
&\quad \left. + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})| \right] \Big\} \\
&= \text{maks}\{\xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) + |\xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) + |\xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1}) + |\xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q})|; \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\hbar}(\wp_{2q-1}, \wp_{2q+1}) + \xi_{2\hbar}(\wp_{2q}, \wp_{2q})}{\tau} + |\xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})| \right] \Big\}
\end{aligned}$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$\xi_{2\hbar}(\wp_{2q-1}, \wp_{2q+1}) \leq \tau [\xi_\rho(\wp_{2q-1}, \wp_{2q}) + \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})]$$

dir. Ayrıca $\xi_\rho(\wp_{q-1}, \wp_q)$ yerine σ_q kısaltma işlemi uygulanır ise (2.26) eşitsizliği

$$\Phi(\tau^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})\right), \vartheta\left(\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})\right)\right), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) &\leq \text{maks}\{\sigma_{2q} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}|; \sigma_{2q} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}|; \\
&\quad \sigma_{2q+1} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q}|; \frac{1}{2} \left[\frac{\tau(\sigma_{2q} + \sigma_{2q+1})}{\tau} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}| \right] \Big\}
\end{aligned}$$

bulunur. $\Sigma_{2q+1} \geq \sigma_{2q}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \leq \text{maks}\left\{\sigma_{2q+1}, \frac{\sigma_{2q} + \sigma_{2q+1} + \sigma_{2q+1} - \sigma_{2q}}{2}\right\} = \sigma_{2q+1}$$

ifadesine ulaşılır. Buradan

$$\Phi(\sigma_{2q+1}) \leq \Phi(\tau^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G}(\Phi(\sigma_{2q+1}), \vartheta(\sigma_{2q+1})) \leq \Phi(\sigma_{2q+1})$$

dir ve bu ise

$$\mathcal{G}(\Phi(\sigma_{2q+1}), \vartheta(\sigma_{2q+1})) = \Phi(\sigma_{2q+1})$$

olduğunu gösterir. Bu durumda $\mathcal{G}_2$ den $\Phi(\sigma_{2q+1}) = 0$ ya da $\vartheta(\sigma_{2q+1}) = 0$ olur. Fakat iki durumda da öngörülen varsayımdan dolayı bir çelişkili durum ortaya çıkar.

Eğer $\sigma_{2q+1} < \sigma_{2q}$ ise $|\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}| = \sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}$ olur ve

$$\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \leq \max\left\{2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}, \sigma_{2q+1} \frac{\sigma_{2q} + \sigma_{2q+1} + \sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}}{2}\right\}$$

bulunur. Ayrıca $[2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1} > \sigma_{2q} > \sigma_{2q+1}]$ olduğundan

$$\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) = \max\{2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}, \sigma_{2q+1}, \sigma_{2q}\} = 2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1} \quad (2.28)$$

elde edilir. Diğer yandan yukarıdaki benzer adımlar takip edilirse $\sigma_{2q} < \sigma_{2q-1}$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $\sigma_{q+1} < \sigma_q$ olduğunu gösterir. Böylece $\{\sigma_q\} = \{\xi_\rho(\wp_{q-1}, \wp_q)\}$ negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisidir. Buradan her $\rho > 0$ için $\lim_{q \rightarrow \infty} \sigma_q = r$ olacak şekilde $r \geq 0$ vardır. Şimdi $r = 0$ olduğu gösterilsin.

$(\mathcal{G}_1)$ ve (2.28) ifadesi kullanılarak (2.27) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_{2q+1}) &\leq \Phi(\tau^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G}(\Phi(2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}), \vartheta(2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1})) \\ &\leq \Phi(2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte limit alınırsa

$$\Phi(r) \leq \mathcal{G}(\Phi(r), \vartheta(r)) \leq \Phi(r)$$

elde edilir. Yani $\mathcal{G}(\Phi(r), \vartheta(r)) = \Phi(r)$ dir. Böylece $\mathcal{G}_2$ den $\Phi(r) = 0$ ya da $\vartheta(r) = 0$ dır. Bu ise $r = 0$ olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak, her $\rho > 0$ için

$$\xi_\rho(\wp_{q-1}, \wp_q) \rightarrow 0, (q \rightarrow \infty) \quad (2.29)$$

dir. Devamında $\{\wp_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğu göstermek için $\{\wp_{2q}\}_{q \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine, verilen $\varepsilon > 0$ için $b_i > a_i \geq i$ özelliğindeki pozitif sayıların $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ alt dizileri

$$\xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i}) \geq \varepsilon \text{ ve } \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i-2}) < \varepsilon \quad (2.30)$$

ifadeleri her $\rho > 0$ için sağlansın. (2.30) eşitsizliklerinden

$$\varepsilon \leq \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i}) \leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1}) + \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2b_i+1}, \wp_{2b_i})$$

olur. Burada $i \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (2.29) ifadesi kullanılırsa

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1}) \geq \frac{\varepsilon}{\tau} \quad (2.31)$$

eşitsizliği her $\rho > 0$ için elde edilir. Ayrıca (ξ_3) den

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2a_i}) + \tau^2 \xi_{\frac{\rho}{2}}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i-2}) \\ &\quad + \tau^3 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\wp_{2b_i-2}, \wp_{2b_i-1}) + \tau^3 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\wp_{2b_i-1}, \wp_{2b_i}) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $i \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (2.29) ve (2.30) ifadelerinden

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) \leq \tau^2 \varepsilon \quad (2.32)$$

elde edilir. Böylece (2.25) den

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2a_i}, \mathcal{K}\omega_{2b_i+1})\right) \\
& \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\Xi(\omega_{2a_i}, \omega_{2b_i+1})\right), \vartheta\left(\Xi(\omega_{2a_i}, \omega_{2b_i+1})\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

yazılır. Bu ifade de

$$\begin{aligned}
& \Xi(\omega_{2a_i}, \omega_{2b_i+1}) \\
& = \text{maks}\{\xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{J}\omega_{2b_i+1}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{Q}\omega_{2a_i}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2b_i+1}, \mathcal{K}\omega_{2b_i+1})|; \\
& \quad \xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{Q}\omega_{2a_i}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{J}\omega_{2b_i+1}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2b_i+1}, \mathcal{K}\omega_{2b_i+1})|; \\
& \quad \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2b_i+1}, \mathcal{K}\omega_{2b_i+1}) + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{J}\omega_{2b_i+1}) - \xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{Q}\omega_{2a_i})|; \\
& \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{K}\omega_{2b_i+1}) + \xi_{2\rho}(\mathcal{J}\omega_{2b_i+1}, \mathcal{Q}\omega_{2a_i})}{\tau} \right. \\
& \quad \left. + |\xi_\rho(\zeta\omega_{2a_i}, \mathcal{Q}\omega_{2a_i}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2b_i+1}, \mathcal{K}\omega_{2b_i+1})| \right\} \\
& = \text{maks}\{\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) + |\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) - \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1})|; \\
& \quad \xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) + |\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) - \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1})|; \\
& \quad \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1}) + |\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) - \xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i})|; \\
& \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i+1}) + \xi_{2\rho}(\wp_{2b_i}, \wp_{2a_i})}{\tau} + |\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) - \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1})| \right\}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (ξ_3) den

$$\begin{aligned}
& \xi_{2\rho}(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i+1}) \leq \tau[\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i}) + \xi_\rho(\wp_{2b_i}, \wp_{2b_i+1})], \\
& \xi_{2\rho}(\wp_{2b_i}, \wp_{2a_i}) \leq \tau[\xi_\rho(\wp_{2b_i}, \wp_{2a_i-1}) + \xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2a_i})]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

dir. Sonuç olarak, (2.33) ve (2.34) eşitsizliklerinden $\Xi(\omega_{2a_i}, \omega_{2b_i+1}) \leq \xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i})$ elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned}
& \Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i+1})\right) \\
& \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i})\right), \vartheta\left(\xi_\rho(\wp_{2a_i-1}, \wp_{2b_i})\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

yazılır. Şimdi (2.31), (2.32) ve $(\mathcal{G}_1)$ kullanılarak $(i \rightarrow \infty)$ için (2.35) de limit alınırsa

$$\Phi\left(\tau^3 \frac{\varepsilon}{\tau}\right) \leq \mathcal{G}(\Phi(\tau^2 \varepsilon), \vartheta(\tau^2 \varepsilon)) \leq \Phi(\tau^2 \varepsilon)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{G}(\Phi(\tau^2 \varepsilon), \vartheta(\tau^2 \varepsilon)) = \Phi(\tau^2 \varepsilon)$$

dır. Yani $\Phi(\tau^2 \varepsilon) = 0$ ya da $\vartheta(\tau^2 \varepsilon) = 0$ olur. Fakat $\tau \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ olduğu için bu ifade bir çelişkidir. O halde $\{\wp_{2q}\}_{q \in \mathbb{N}}$ bir ξ –Cauchy dizisidir. Böylece $\{\wp_q\}_{q \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir ξ –Cauchy dizisidir. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı ξ –tam modüler b –metrik uzay olduğundan

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \wp_q = c \tag{2.36}$$

olacak şekilde $c \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır.

Şimdi $Qc = \mathcal{K}c = \mathcal{J}c = \zeta c = c$ olduğu gösterilsin. Fakat, öncelikle $Qc = \zeta c = c$ olduğu gösterilerek başlansın. Buradan

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \wp_{2q} = \limsup_{q \rightarrow \infty} Q\omega_{2q} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \mathcal{J}\omega_{2q+1} = c,$$

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \wp_{2q+1} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \mathcal{K}\omega_{2q+1} = \limsup_{q \rightarrow \infty} \zeta\omega_{2q+2} = c$$

ifadelerinin sağlandığı açıktır.

(ii) şartından $\zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$, $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayının kapalı alt kümesi olsun. Bu takdirde $c = \zeta u$ olacak şekilde $u \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır. Şimdi $Qu = c$ olsun. (2.25) ifadesinden

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Qu, \mathcal{K}\omega_{2q+1})\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\Xi(u, \omega_{2q+1})\right), \vartheta\left(\Xi(u, \omega_{2q+1})\right)\right)$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned}
\Xi(u, \omega_{2q+1}) &= \max\{\xi_\rho(\zeta u, J\omega_{2q+1}) + |\xi_\rho(\zeta u, Qu) - \xi_\rho(J\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\zeta u, Qu) + |\xi_\rho(\zeta u, J\omega_{2q+1}) - \xi_\rho(J\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(J\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) + |\xi_\rho(\zeta u, J\omega_{2q+1}) - \xi_\rho(\zeta u, Qu)|; \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(\zeta u, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) + \xi_{2\rho}(J\omega_{2q+1}, Qu)}{\tau} + |\xi_\rho(\zeta u, Qu) - \xi_\rho(J\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})| \right] \} \\
&= \max\{\xi_\rho(c, \wp_{2q}) + |\xi_\rho(c, Qu) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(c, Qu) + |\xi_\rho(c, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1}) + |\xi_\rho(c, \wp_{2q}) - \xi_\rho(c, Qu)|; \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(c, \wp_{2q+1}) + \xi_{2\rho}(\wp_{2q}, Qu)}{\tau} + |\xi_\rho(c, Qu) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})| \right] \}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (2.36) ve $(\mathcal{G}_1)$ kullanılarak $q \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $\xi_{2\rho}(\wp_{2q}, Qu) \leq \tau[\xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1}) + \xi_\rho(\wp_{2q+1}, Qu)]$ olduğu göz önüne alınırsa $\Xi(u, \omega_{2q+1}) \leq \xi_\rho(c, Qu)$ ifadesi elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi_\rho(Qu, c)) &\leq \Phi(\tau^3 \xi_\rho(Qu, c)) \\
&\leq \mathcal{G}(\Phi(\xi_\rho(Qu, c)), \vartheta(\xi_\rho(Qu, c))) \\
&\leq \Phi(\xi_\rho(Qu, c))
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mathcal{G}(\Phi(\xi_\rho(Qu, c)), \vartheta(\xi_\rho(Qu, c))) = \Phi(\xi_\rho(Qu, c))$$

dir. O halde $(\mathcal{G}_2)$ den $\Phi(\xi_\rho(Qu, c)) = 0$ ya da $\vartheta(\xi_\rho(Qu, c)) = 0$ dir. Sonuç olarak, $\xi_\rho(Qu, c) = 0 \Leftrightarrow Qu = c$ ifadesine ulaşılır. Böylece $Qu = \zeta u = c$ olur. (iii) şartından Q ve ζ zayıf uyumlu çift olduğundan $Qc = Q\zeta u = \zeta Qu = \zeta c$ dir.

$Qc = c$ olsun. Benzer şekilde (2.25) ifadesinden

$$\Phi(\tau^3 \xi_\rho(Qc, \mathcal{K}\omega_{2q+1})) \leq \mathcal{G}(\Phi(\Xi(c, \omega_{2q+1})), \vartheta(\Xi(c, \omega_{2q+1}))),$$

yazılır ve

$$\begin{aligned}
\Xi(c, \omega_{2q+1}) &= \max\{\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}\omega_{2q+1}) + |\xi_\rho(\zeta c, Qc) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\zeta c, Qc) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}\omega_{2q+1}) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}\omega_{2q+1}) - \xi_\rho(\zeta c, Qc)|; \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(\zeta c, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) + \xi_{2\rho}(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, Qc)}{\tau} + |\xi_\rho(\zeta c, Qc) - \xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})| \right] \} \\
&= \max\{\xi_\rho(Qc, \wp_{2q}) + |\xi_\rho(\zeta c, Qc) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\zeta c, Qc) + |\xi_\rho(Qc, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})|; \\
&\quad \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1}) + |\xi_\rho(Qc, \wp_{2q}) - \xi_\rho(\zeta c, Qc)|; \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(Qc, \wp_{2q+1}) + \xi_{2\rho}(\wp_{2q}, Qc)}{\tau} + |\xi_\rho(\zeta c, Qc) - \xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})| \right] \}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $(\wp_{2q}, Qc) \leq \tau[\xi_\rho(\wp_{2q}, \wp_{2q+1}) + \xi_\rho(\wp_{2q+1}, Qc)]$ olduğundan (2.36) ile $(\mathcal{G}_1)$ kullanılarak yukarıdaki eşitsizlikte $q \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\Xi(c, \omega_{2q+1}) \leq \xi_\rho(Qc, c)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi_\rho(Qc, c)) &\leq \Phi(\tau^3 \xi_\rho(Qc, c)) \\
&\leq \mathcal{G}(\Phi(\Xi(Qc, c)), \vartheta(\Xi(Qc, c))) \\
&\leq \Phi(\Xi(Q, c))
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\mathcal{G}(\Phi(\xi_\rho(Qc, c)), \vartheta(\xi_\rho(Qc, c))) = \Phi(\xi_\rho(Qc, c))$$

olur. $(\mathcal{G}_2)$ den $\Phi(\xi_\rho(Qc, c)) = 0$ veya $\vartheta(\xi_\rho(Qc, c)) = 0$ dir. Bu ise $Qc = c$ olduğunu gösterir.

Bir sonraki adımda c noktasının $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{J}$ dönüşümlerinin sabit noktası olduğu gösterilsin. $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ olduğundan $\mathcal{Q}c = \mathcal{J}v$ olacak şekilde $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında v elemanı vardır. Bu durumda $\mathcal{Q}c = \mathcal{J}v = \zeta c = c$ olur. Şimdi $\mathcal{K}v = c$ olsun. (2.25) ifadesinden

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{Q}c, \mathcal{K}v)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(c, v)), \vartheta(\Xi(c, v))\right)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \Xi(c, v) &= \max\left\{\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}v) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c) - \xi_\rho(\mathcal{J}v, \mathcal{K}v)|; \right. \\ &\quad \xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}v) - \xi_\rho(\mathcal{J}v, \mathcal{K}v)|; \\ &\quad \xi_\rho(\mathcal{J}v, \mathcal{K}v) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}v) - \xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c)|; \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2\rho}(\zeta c, \mathcal{K}v) + \xi_{2\rho}(\mathcal{J}v, \mathcal{Q}c)}{\tau} + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c) - \xi_\rho(\mathcal{J}v, \mathcal{K}v)| \right] \right\} \\ &= \max\left\{\xi_\rho(\zeta c, c) + |\xi_\rho(\zeta c, c) - \xi_\rho(c, \mathcal{K}v)|; \right. \\ &\quad \xi_\rho(\zeta c, c) + |\xi_\rho(\zeta c, c) - \xi_\rho(c, \mathcal{K}v)|; \\ &\quad \xi_\rho(c, \mathcal{K}v) + |\xi_\rho(\zeta c, c) - \xi_\rho(\zeta c, c)|; \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(c, \mathcal{K}v) + \xi_{2h}(c, \mathcal{Q}c)}{\tau} + |\xi_\rho(c, \mathcal{Q}c) - \xi_\rho(c, \mathcal{K}v)| \right] \right\} \end{aligned}$$

dır. Buradan $\xi_{2\rho}(c, \mathcal{K}v) \leq \tau[\xi_\rho(c, \wp_{2q}) + \xi_\rho(\wp_{2q}, \mathcal{K}v)]$ olduğundan $\Xi(c, v) \leq \xi_\rho(c, \mathcal{K}v)$ olur. Bu durumda $(\mathcal{G}_1)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \Phi\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right) &\leq \Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right) \\ &\leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right)\right) \\ &\leq \Phi\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right), \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right)\right) = \Phi\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}v)\right)$$

olur. Böylece $(\mathcal{G}_2)$ den $\mathcal{K}v = c$ olduğu açıktır. O halde $\mathcal{K}v = \mathcal{J}v = c$ dir. Buradan $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{J}$ dönüşümlerinin zayıf uyumluluğu kullanılarak $\mathcal{K}c = \mathcal{K}\mathcal{J}v = \mathcal{J}\mathcal{J}v = \mathcal{J}c$ elde edilir.

Son olarak da $\mathcal{K}c = c$ olsun. Bu durumda

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{Q}c, \mathcal{K}c)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(c, c)), \vartheta(\Xi(c, c))\right)$$

yazılır ve

$$\begin{aligned} \Xi(c, c) &= \max\left\{\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}c) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c) - \xi_\rho(\mathcal{J}c, \mathcal{K}c)|; \right. \\ &\quad \xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}c) - \xi_\rho(\mathcal{J}c, \mathcal{K}c)|; \\ &\quad \xi_\rho(\mathcal{J}c, \mathcal{K}c) + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{J}c) - \xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c)|; \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\zeta c, \mathcal{K}c) + \xi_{2h}(\mathcal{J}c, \mathcal{Q}c)}{\tau} + |\xi_\rho(\zeta c, \mathcal{Q}c) - \xi_\rho(\mathcal{J}c, \mathcal{K}c)| \right] \right\} \\ &= \max\left\{\xi_\rho(c, \mathcal{K}c) + |\xi_\rho(c, c) - \xi_\rho(\mathcal{K}c, \mathcal{K}c)|; \right. \\ &\quad \xi_\rho(\zeta c, c) + |\xi_\rho(\zeta c, c) - \xi_\rho(c, \mathcal{K}c)|; \\ &\quad \xi_\rho(c, \mathcal{K}v) + |\xi_\rho(\zeta c, c) - \xi_\rho(\zeta c, c)|; \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(c, \mathcal{K}c) + \xi_{2h}(\mathcal{K}c, c)}{\tau} + |\xi_\rho(c, c) - \xi_\rho(\mathcal{K}c, \mathcal{K}c)| \right] \right\} \end{aligned}$$

dır. Bu ise

$$\Xi(c, c) = \max\left\{\xi_\rho(\mathcal{K}c, c), \frac{\xi_{2h}(\mathcal{K}c, c)}{\tau}\right\} = \xi_\rho(\mathcal{K}c, c)$$

olduğunu gösterir. Böylece $(\mathcal{G}_1)$ den

$$\begin{aligned} \Phi\left(\xi_\rho(c, \mathcal{K}c)\right) &\leq \Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{K}c, c)\right) \\ &\leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(\mathcal{K}c, c)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(\mathcal{K}c, c)\right)\right) \\ &\leq \Phi\left(\xi_\rho(\mathcal{K}c, c)\right) \end{aligned}$$

olur ve

$$\mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_{\rho}(c, \mathcal{K}c)\right), \vartheta\left(\xi_{\rho}(c, \mathcal{K}c)\right)\right) = \Phi\left(\xi_{\rho}(c, \mathcal{K}c)\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $(\mathcal{G}_2)$ den $\mathcal{Q}c = \mathcal{K}c = \zeta c = \mathcal{J}c = c$ olur.

$\mathcal{Q}(\mathcal{S}_{\xi}^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_{\xi}^*)$ ve $\mathcal{K}(\mathcal{S}_{\xi}^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_{\xi}^*)$ olduğundan benzer hesaplamalar $\mathcal{J}(\mathcal{S}_{\xi}^*)$ (veya $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_{\xi}^*), \mathcal{K}(\mathcal{S}_{\xi}^*)$) kümesinin $\mathcal{S}_{\xi}^*$ kümesinin kapalı alt kümesi olduğu durum içinde yapılabilir.

Son adımda $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerinin ortak sabit noktasının tekliği gösterilsin. c^* noktası c noktasından farklı dönüşümlerin başka bir ortak sabit noktası olsun. Yani $c^* = \mathcal{Q}c^* = \mathcal{K}c^* = \mathcal{J}c^* = \zeta c^*$ olsun. (2.25) ifadesinden

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_{\rho}(\mathcal{Q}c, \mathcal{K}c^*)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(c, c^*)), \vartheta(\Xi(c, c^*))\right)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \Xi(c, c^*) &= \text{maks} \left\{ \xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{J}c^*) + |\xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{Q}c) - \xi_{\rho}(\mathcal{J}c^*, \mathcal{K}c^*)|; \right. \\ &\quad \xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{Q}c) + |\xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{J}c^*) - \xi_{\rho}(\mathcal{J}c^*, \mathcal{K}c^*)|; \\ &\quad \xi_{\rho}(\mathcal{J}c^*, \mathcal{K}c^*) + |\xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{J}c^*) - \xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{Q}c)|; \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\zeta c, \mathcal{K}c^*) + \xi_{2h}(\mathcal{J}c^*, \mathcal{Q}c)}{\tau} + |\xi_{\rho}(\zeta c, \mathcal{Q}c) - \xi_{\rho}(\mathcal{J}c^*, \mathcal{K}c^*)| \right] \right\} \\ &= \text{maks} \left\{ \xi_{\rho}(c, c^*) + |\xi_{\rho}(c, c) - \xi_{\rho}(c^*, c^*)|; \right. \\ &\quad \xi_{\rho}(c, c) + |\xi_{\rho}(c, c^*) - \xi_{\rho}(c^*, c^*)|; \\ &\quad \xi_{\rho}(c^*, c^*) + |\xi_{\rho}(c, c^*) - \xi_{\rho}(c, c)|; \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(c, c^*) + \xi_{2h}(c^*, c)}{\tau} + |\xi_{\rho}(c, c) - \xi_{\rho}(c^*, c^*)| \right] \right\} \\ &= \text{maks} \left\{ \xi_{\rho}(c, c^*), \frac{\xi_{2h}(c, c^*)}{\tau} \right\} = \xi_{\rho}(c, c^*) \end{aligned}$$

dir. O halde $(\mathcal{G}_1)$ den

$$\Phi\left(\xi_{\rho}(c, c^*)\right) \leq \Phi\left(\tau^3 \xi_{\rho}(c, c^*)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(c, c^*)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(c, c^*)\right)\right) \\
&\leq \Phi\left(\xi_\rho(c, c^*)\right),
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$\mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(c, c^*)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(c, c^*)\right)\right) = \Phi\left(\xi_\rho(c, c^*)\right)$$

olduğunu gösterir. Buradan da $c = c^*$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerinin ortak sabit noktası taktır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi Teorem 2.2.2 den elde edilen bazı sonuçlara yer verilecektir.

Sonuç 2.2.3. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Eğer

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\begin{aligned}
\Xi(\omega, \wp) = & \max\{\xi_\rho(\omega, \wp) + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)|; \\
& \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) + |\xi_\rho(\omega, \wp) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)|; \\
& \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp) + |\xi_\rho(\omega, \wp) - \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega)|; \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\omega, \mathcal{K}\wp) + \xi_{2h}(\wp, \mathcal{Q}\omega)}{\tau} + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\wp, \zeta\wp)| \right] \}
\end{aligned}$$

iken

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp))\right) \quad (2.37)$$

olacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$ ve $\vartheta \in \Pi$ fonksiyonları vardır,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır,

ifadeleri sağlanırsa $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında ortak bir tek sabit noktaya sahiptir.

Eğer Sonuç 2.2.3 de $\mathcal{Q} = \mathcal{K}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.4. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Eğer

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\begin{aligned} \Xi(\omega, \wp) = & \max\{\xi_\rho(\omega, \wp) + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{Q}\wp)|; \\ & \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) + |\xi_\rho(\omega, \wp) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{Q}\wp)|; \\ & \xi_\rho(\wp, \mathcal{Q}\wp) + |\xi_\rho(\omega, \wp) - \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega)|; \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\omega, \mathcal{Q}\wp) + \xi_{2h}(\wp, \mathcal{Q}\omega)}{\tau} + |\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) - \xi_\rho(\wp, \mathcal{Q}\wp)| \right]\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

iken

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}\wp)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp))\right), \quad (2.39)$$

olacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$ ve $\vartheta \in \Pi$ vardır,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır,

ifadeleri sağlanırsa $\mathcal{Q}$ dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca Sonuç 2.2.4 de $p, q \in [0, \infty)$ için $\mathcal{G}(p, q) = p - q$ olarak seçilirse bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.5. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Eğer

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}\wp)\right) \leq \Phi(\Xi(\omega, \wp)) - \vartheta(\Xi(\omega, \wp)) \quad (2.40)$$

olan $\Phi \in \Omega$ ve $\vartheta \in \Pi$ fonksiyonları vardır. Burada $\Xi(\omega, \wp)$, (2.38) de tanımlandığı gibidir,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır,

ifadeleri sağlanırsa Q dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Eğer $p \in [0, \infty)$ için Sonuç 2.2.4 de $\mathcal{G}(p, q) = kp$, $k \in (0, 1)$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.6. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Eğer

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, Q\wp)\right) \leq k\Phi(\Xi(\omega, \wp)) \quad (2.41)$$

olan $\Phi \in \Omega$ fonksiyonu ve $k \in (0, 1)$ sabiti vardır. Burada $\Xi(\omega, \wp)$, (2.38) de tanımlandığı gibidir,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır,

ifadeleri sağlanırsa Q dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

2.2.1. Graf Teorisine Uygulama

$\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı G grafi ile donatılmış modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ olsun.

$$\mathcal{S}_\xi^{*Q} = \{\omega \in \mathcal{S}_\xi^* \mid (\omega, Q\omega) \in E(G)\}$$

kümesi tanımlansın.

Şimdi graf yapısı kullanılarak elde edilen $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –grafik daralma dönüşümü tanımlanacaktır.

Tanım 2.2.7. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı G grafi ile donatılmış modüler b –metrik uzay olsun. Bu durumda

(i) Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ için $(\omega, \wp) \in E(G) \Rightarrow (Q\omega, Q\wp) \in E(G)$ olsun,

(ii) Her farklı $\omega, \wp \in E(G)$ ve her $\rho > 0$ için

$$\begin{aligned} \Xi(\omega, \wp) = & \max\{\xi_\rho(\omega, \wp) + |\xi_\rho(\omega, Q\omega) - \xi_\rho(\wp, Q\wp)|; \\ & \xi_\rho(\omega, Q\omega) + |\xi_\rho(\omega, \wp) - \xi_\rho(\wp, Q\wp)|; \\ & \xi_\rho(\wp, Q\wp) + |\xi_\rho(\omega, \wp) - \xi_\rho(\omega, Q\omega)|; \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\omega, Q\wp) + \xi_{2h}(\wp, Q\omega)}{\tau} + |\xi_\rho(\omega, Q\omega) - \xi_\rho(\wp, Q\wp)| \right]\} \end{aligned}$$

iken

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, Q\wp)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp))\right) \quad (2.42)$$

olacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$ ve $\vartheta \in \Pi$ vardır,

koşulları sağlanırsa Q dönüşümüne $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –grafik daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.2.8. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı G grafi ile donatılmış modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun.

- (i) $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^{*Q}$ vardır,
- (ii) Q dönüşümü $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –grafik daralma dönüşümüdür,
- (iii) $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_k, \omega^*) = 0$ ve $(\omega_k, \omega_{k+1}) \in E(G)$ ifadelerini sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $(\omega_{k_s}, \omega^*) \in E(G)$ olacak şekilde $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\{\omega_{k_s}\}$ alt dizisi vardır,
- (iv) G grafi zayıf bağlantılıdır,
- (v) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $\omega_{k+1} = Q\omega_k$ ile tanımlansın. Bu durumda (i) şartından $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^{*Q}$ olduğundan $(\omega_0, Q\omega_0) \in E(G)$ dir ve $\omega_1 = Q\omega_0$ olarak alınırsa

$$(\omega_0, Q\omega_0) = (\omega_0, \omega_1) \in E(G)$$

olur ve buradan

$$(\omega_0, \omega_1) \in E(G) \Rightarrow (Q\omega_0, Q\omega_1) \in E(G)$$

dir. Benzer şekilde devam edilirse

$$(\omega_k, \omega_{k+1}) \in E(G)$$

elde edilir. İspatın devamında Teorem 2.2.2 ye benzer şekilde $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında ξ –Cauchy dizisi olduğu bulunur. Ayrıca $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı ξ –tam olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_k, \omega^*) = 0 \quad (2.43)$$

olacak şekilde $\omega^* \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır.

ω^* noktasının Q dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilsin. (iii) şartından $(\omega_{k_s}, \omega^*) \in E(G)$ dir. (2.42) ifadesinden

$$\begin{aligned} \Xi(\omega_{k_s}, \omega^*) &= \max\{\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega^*) + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, Q\omega_{k_s}) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)|; \\ &\quad \xi_\rho(\omega_{k_s}, Q\omega_{k_s}) + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega^*) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)|; \\ &\quad \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega^*) - \xi_\rho(\omega_{k_s}, Q\omega_{k_s})|; \\ &\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\omega_{k_s}, Q\omega^*) + \xi_{2h}(\omega^*, Q\omega_{k_s})}{\tau} + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, Q\omega_{k_s}) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)| \right] \} \\ &= \max\{\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega^*) + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega_{k_s-1}) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)|; \\ &\quad \xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega_{k_s-1}) + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega^*) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)|; \\ &\quad \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega^*) - \xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega_{k_s-1})|; \\ &\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\omega_{k_s}, Q\omega^*) + \xi_{2h}(\omega^*, \omega_{k_s-1})}{\tau} + |\xi_\rho(\omega_{k_s}, \omega_{k_s-1}) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)| \right] \} \end{aligned} \quad (2.44)$$

olmak üzere

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega_{k_s}, Q\omega^*)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\Xi(\omega_{k_s}, \omega^*)\right), \vartheta\left(\Xi(\omega_{k_s}, \omega^*)\right)\right) \quad (2.45)$$

dir. (2.44) ve (2.45) ifadelerinde $s \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (2.43) ile $(\mathcal{G}_1)$ ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Phi\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right) &\leq \Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right) \\ &\leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right)\right) \\ &\leq \Phi\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{G}\left(\Phi\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right), \vartheta\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right)\right) = \Phi\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right)$$

olur. Bu durumda $\mathcal{G}$ fonksiyonunun özelliğinden $\omega^* = Q\omega^*$ olduğu elde edilir. Yani ω^* noktası Q dönüşümünün sabit noktasıdır.

ω^* noktasının tekliği göstermek için w noktası Q dönüşümünün ω^* noktasından farklı diğer bir sabit noktası olsun. Bu durumda $(\omega^*, r) \in E(G)$ ve $(r, w) \in E(G)$ olan $r \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır. (iv) şartından $(\omega^*, w) \in E(G)$ dir. Böylece (2.43) den

$$\begin{aligned} \Xi(\omega^*, w) &= \max\{\xi_\rho(\omega^*, w) + |\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) - \xi_\rho(w, Qw)|; \\ &\quad \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) + |\xi_\rho(\omega^*, w) - \xi_\rho(w, Qw)|; \\ &\quad \xi_\rho(w, Qw) + |\xi_\rho(\omega^*, w) - \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)|; \\ &\quad \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_{2h}(\omega^*, Qw) + \xi_{2h}(w, Q\omega^*)}{\tau} + |\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) - \xi_\rho(w, Qw)| \right] \} \end{aligned} \quad (2.46)$$

iken

$$\Phi\left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega^*, Qw)\right) \leq \mathcal{G}\left(\Phi\left(\Xi(\omega^*, w)\right), \vartheta\left(\Xi(\omega^*, w)\right)\right) \quad (2.47)$$

dir. $\mathcal{G}$, Φ , ϑ fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak (2.46) ve (2.47) den $\omega^* = w$ olduğu sonucuna ulaşılır. Yani ω^* noktası $\mathcal{Q}$ dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

2.2.2. İntegral Tipinde Daralmalara Uygulama

Bu kısımda integral tip $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –daralma dönüşümü tanımlanıp sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.2.9. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi $\tau \geq 1$ sabiti ile modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ bu uzayda dört dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$, $c, l \in \mathbb{R}^+(c > l)$ ve her $\rho > 0$ için

$$\Xi(\omega, \wp) = \max \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right|; \\ & \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right|; \\ & \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{J}\wp)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega)} \mu(x) dx \right|; \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\xi_{\frac{2\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx + \int_0^{\xi_{\frac{2\rho}{\tau}}(\mathcal{J}\wp, \mathcal{Q}\omega)} \mu(x) dx}{\tau} + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\zeta\omega, \mathcal{Q}\omega)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{\tau}}(\mathcal{J}\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right| \right] \end{aligned} \right\}$$

iken

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right) \leq \mathcal{G} \left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp)) \right) \quad (2.48)$$

olacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$, $\vartheta \in \Pi$ ve $\mu \in \mathcal{I}$ varsa $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerine integral tip $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.2.10. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ dönüşümleri integral tip $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –daralma dönüşümü olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

- (i) $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*) \subset \zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ dir,
- (ii) $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_\xi^*)$, $\mathcal{J}(\mathcal{S}_\xi^*)$, $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\xi^*)$ ve $\zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ kümelerinden biri $\mathcal{S}$ nin kapalı alt kümesidir,
- (iii) $\{\mathcal{J}, \mathcal{K}\}$ ve $\{\zeta, \mathcal{Q}\}$ çiftleri zayıf uyumludur,
- (iv) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda $\mathcal{Q}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ ve ζ dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ keyfi bir nokta ve Teorem 2.2.2 nin ispatında olduğu gibi $\{\wp_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\wp_{2q} = \mathcal{Q}\omega_{2q} = \mathcal{J}\omega_{2q+1} \text{ ve } \wp_{2q+1} = \mathcal{K}\omega_{2q+1} = \zeta\omega_{2q+2}$$

biçiminde tanımlansın. (2.48) ifadesinden

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\frac{\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2q}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})}{c}} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \leq \mathcal{G} \left(\Phi \left(\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \right), \vartheta \left(\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \right) \right)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} & \Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \\ &= \text{maks} \left\{ \int_0^{\frac{\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{J}\omega_{2q+1})}{l}} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \left| \int_0^{\frac{\xi_\rho(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q})}{l}} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_0^{\frac{\xi_\rho(\mathcal{J}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})}{l}} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| ; \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q})} \mu(x) dx + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{I}\omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{I}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx \right| ; \\
& \xi_{\tau}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{I}\omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{I}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q})} \mu(x) dx \right| ; \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\xi_{2\rho}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx + \int_0^{\xi_{2\rho}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{Q}\omega_{2q})} \mu(x) dx}{\tau} \right. \\
& \left. + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\zeta\omega_{2q}, \mathcal{Q}\omega_{2q})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\mathcal{I}\omega_{2q+1}, \mathcal{K}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx \right| \right] \\
= \text{maks} & \left\{ \begin{aligned} & \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})} \mu(x) dx \right| ; \\ & \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})} \mu(x) dx \right| ; \\ & \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})} \mu(x) dx + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx \right| ; \end{aligned} \right. \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\xi_{2\rho}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q+1})} \mu(x) dx + \int_0^{\xi_{2\rho}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q})} \mu(x) dx}{\tau} \right. \\
& \left. + \left| \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx - \xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1})} \mu(x) dx \right| \right]
\end{aligned}$$

dir. $\kappa_q = \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx$ ve $\kappa_q^* = \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx$ olarak belirlensin. Ayrıca, $\kappa_{2q+1}^* \geq \kappa_{2q}^*$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.2 de olduğu gibi $(\mathcal{G}_1)$ ifadesinden

$$\Phi(\kappa_{2q+1}^*) \leq \Phi(\kappa_{2q+1}) \leq \Phi(\tau^3 \kappa_{2q+1}) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\kappa_{2q+1}^*), \vartheta(\kappa_{2q+1}^*)) \leq \Phi(\kappa_{2q+1}^*)$$

elde edilir. Fakat $\mathcal{G}$ fonksiyonunun özelliğinden yukarıdaki ifadede bir çelişkili durum ortaya çıkar. Böylece $\kappa_{2q+1}^* < \kappa_{2q}^*$ olur. Buradan $\Xi(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) = 2\kappa_{2q}^* - \kappa_{2q+1}^*$ dir Ayrıca benzer bir yol izlenirse $\kappa_{2q}^* < \kappa_{2q-1}^*$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durumda $\kappa_{q+1}^* < \kappa_q^*$ dir. Yani

$$\kappa_q^* = \left\{ \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx \right\}$$

negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisidir ve böylece

$$\left\{ \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx \right\}$$

negatif olmayan r sayısına yakınsar. $r = 0$ olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa_{2q+1}) &\leq \Phi(\tau^3 \kappa_{2q+1}) \\ &\leq \mathcal{G}(\Phi(2\kappa_{2q}^* - \kappa_{2q+1}^*), \vartheta(2\kappa_{2q}^* - \kappa_{2q+1}^*)) \\ &\leq \Phi(2\kappa_{2q}^* - \kappa_{2q+1}^*) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır ve bu eşitsizlikte $q \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\Phi(r) \leq \mathcal{G}(\Phi(r), \vartheta(r)) \leq \Phi(r)$$

bulunur. Sonuç olarak $\mathcal{G}(\Phi(r), \vartheta(r)) = \Phi(r)$ dir. Böylece $(\mathcal{G}_2)$ şartından $\Phi(r) = 0$ veya $\vartheta(r) = 0$ dır. Bu ise $r = 0$ olduğunu gösterir. Yani $q \rightarrow \infty$ için $\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\omega_{2q-1}, \omega_{2q})} \mu(x) dx \rightarrow 0$ dir ve

$$\xi_{\rho}(\wp_{q-1}, \wp_q) \rightarrow 0, (q \rightarrow \infty) \quad (2.49)$$

ifadesine ulaşılır.

$\{\wp_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $\{\wp_{2q}\}_{q \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine, verilen $\varepsilon > 0$ için $b_i > a_i \geq i$ özelliğindeki pozitif sayıların $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ alt dizileri

$$\xi_{\rho}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i}) \geq \varepsilon \text{ ve } \xi_{\rho}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_{i-2}}) < \varepsilon \quad (2.50)$$

ifadelerini her $\rho > 0$ için sağlasın. $\varepsilon \leq \xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i}) \leq \xi_{\frac{\rho}{c}}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_i})$ ifadesi göz önüne alınır ve Teorem 2.2.2 ile benzer şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned} \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_{i+1}})} \mu(x) dx \right) &\leq \Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(\wp_{2a_i}, \wp_{2b_{i+1}})} \mu(x) dx \right) \\ &\leq \mathcal{G} \left(\Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2a_{i-1}}, \wp_{2b_i})} \mu(x) dx \right), \vartheta \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2a_{i-1}}, \wp_{2b_i})} \mu(x) dx \right) \right) \\ &\leq \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2a_{i-1}}, \wp_{2b_i})} \mu(x) dx \right) \end{aligned}$$

bulunur. Fakat yukarıdaki eşitsizlik bir çelişkidir. O halde $\{\wp_{2q}\}_{q \in \mathbb{N}}$, ξ –Cauchy dizisidir. Böylece $\{\wp_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ dizisi de $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir ξ –Cauchy dizisidir. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı ξ –tam modüler b –metrik uzay olduğundan

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \wp_q = z \quad (2.51)$$

ifadesinin sağlayan $z \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır.

Şimdi z noktasının $Q, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu gösterilsin. İlk olarak $Qz = \zeta z = z$ eşitliği gösterilsin. $\zeta(\mathcal{S}_\xi^*)$ kümesi $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayının kapalı alt kümesi ise $z = \zeta u$ olan $u \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Bu durumda (2.48) ifadesinden

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(Qu, \mathcal{K}\omega_{2q+1})} \mu(x) dx \right) \leq \mathcal{G} \left(\Phi \left(\Xi(u, \omega_{2q+1}) \right), \vartheta \left(\Xi(u, \omega_{2q+1}) \right) \right)$$

yazılır ve burada

$$\begin{aligned} \Xi(u, \omega_{2q+1}) = \max & \left\{ \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, \wp_{2q})} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, Qu)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})} \mu(x) dx \right|; \right. \\ & \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, Qu)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, \wp_{2q})} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})} \mu(x) dx \right|; \\ & \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, \wp_{2q})} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, Qu)} \mu(x) dx \right|; \\ & \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, \wp_{2q+1})} \mu(x) dx + \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2q}, Qu)} \mu(x) dx}{\tau} + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(u, Qu)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(\wp_{2q}, \wp_{2q+1})} \mu(x) dx \right| \right] \right\} \end{aligned}$$

dir. Teorem 2.2.2 nin ispatında olduğu gibi benzer adımlarla devam edilirse

$$\begin{aligned}
 \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(Qu,z)} \mu(x) dx \right) &\leq \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(Qu,z)} \mu(x) dx \right) \\
 &\leq \Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(Qu,z)} \mu(x) dx \right) \\
 &\leq \mathcal{G} \left(\Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(Qu,z)} \mu(x) dx \right), \vartheta \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(Qu,z)} \mu(x) dx \right) \right) \\
 &\leq \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(Qu,z)} \mu(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir. $(\mathcal{G}_2)$ şartından $Qu = \zeta u = z$ olur. Q ve ζ dönüşümleri zayıf uyumlu dönüşümler olduğundan $Qz = Q\zeta u = \zeta Qu = \zeta z$ bulunur. Devamında $Qz = z$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Yani $Qz = \zeta z = z$ dir.

Diğer yandan Q ve ζ dönüşümlerinde olduğu gibi $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{J}$ dönüşümleri için de $\mathcal{K}z = \mathcal{J}z = z$ olduğu gösterilebilir.

Son olarak z noktasının $Q, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu göstermek için. w noktası z noktasından farklı bir ortak sabit nokta olsun. Bu durumda (2.48) ifadesinden

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(Qz, \mathcal{K}w)} \mu(x) dx \right) \leq \mathcal{G} \left(\Phi \left(\Xi((Qz, \mathcal{K}w)) \right), \vartheta \left(\Xi((Qz, \mathcal{K}w)) \right) \right)$$

yazılır. Burada $\Xi(z, w) = \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{t}}(z, w)} \mu(x) dx$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned}
\Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(z,w)} \mu(x) dx \right) &\leq \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(z,w)} \mu(x) dx \right) \\
&\leq \Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(z,w)} \mu(x) dx \right) \\
&\leq \mathcal{G} \left(\Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(z,w)} \mu(x) dx \right), \vartheta \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(z,w)} \mu(x) dx \right) \right) \\
&\leq \Phi \left(\int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(z,w)} \mu(x) dx \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\mathcal{G}$ fonksiyonunun özelliği göz önüne alınırsa $z = w$ olduğu açıktır. Dolayısıyla z noktası $\mathcal{Q}, \mathcal{K}, \mathcal{J}$ ve ζ dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi Teorem 2.2.10 dan elde edilen bazı sonuçlara yer verilecektir.

Sonuç 2.2.11. $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlasın:

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*, c, l \in R^+(c > l)$ ve her $\rho > 0$ için

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right) \leq \mathcal{G} \left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp)) \right), \quad (2.52)$$

$$\Xi(\omega, \wp) = \max \left\{ \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(\omega, \wp)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(\omega, \mathcal{Q}\omega)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{l}}(\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right|; \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, \wp)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right|; \\
& \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, \wp)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx \right|; \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\xi_{\frac{2\rho}{\tau}}(\omega, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx + \int_0^{\xi_{\frac{2\rho}{\tau}}(\wp, Q\omega)} \mu(x) dx}{\tau} + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, \mathcal{K}\wp)} \mu(x) dx \right| \right]
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$, $\vartheta \in \Pi$ ve $\mu \in \mathcal{I}$ vardır,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu takdirde Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Eğer Sonuç 2.2.11 de $Q = \mathcal{K}$ olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.12. $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlasın:

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*$, $c, l \in R^+(c > l)$ ve her $\rho > 0$ için

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\frac{\rho}{c}}^{\rho}(Q\omega, Q\wp)} \mu(x) dx \right) \leq \mathcal{G} \left(\Phi(\Xi(\omega, \wp)), \vartheta(\Xi(\omega, \wp)) \right), \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
\Xi(\omega, \wp) = \text{maks} \left\{ \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, \wp)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, Q\wp)} \mu(x) dx \right|; \right. \\
\left. \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, \wp)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, Q\wp)} \mu(x) dx \right|; \right.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, Q\wp)} \mu(x) dx + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, \wp)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx \right|;$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\wp)} \mu(x) dx + \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, Q\omega)} \mu(x) dx}{\tau} + \left| \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\omega, Q\omega)} \mu(x) dx - \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(\wp, Q\wp)} \mu(x) dx \right| \right]$$

olacak şekilde $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\Phi \in \Omega$, $\vartheta \in \Pi$ ve $\mu \in \mathcal{I}$ vardır,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 2.2.12 de $p, q \in [0, \infty)$ için $\mathcal{G}(p, q) = p - q$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.13. $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*$, $c, l \in R^+$ ($c > l$) ve her $\rho > 0$ için

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\tau}^{\rho}(Q\omega, Q\wp)} \mu(x) dx \right) \leq \Phi(\Xi(\omega, \wp)) - \vartheta(\Xi(\omega, \wp)) \quad (2.54)$$

olan $\Phi \in \Omega$, $\vartheta \in \Pi$ ve $\mu \in \mathcal{I}$ fonksiyonları vardır. Burada $\Xi(\omega, \wp)$ Sonuç 2.2.4 de tanımlandığı gibidir.

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

$p \in [0, \infty)$ için $\mathcal{G}(p, q) = kp$, $k \in (0, 1)$ olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.14: $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*$, $c, l \in R^+$ ($c > l$) ve her $\rho > 0$ için

$$\Phi \left(\tau^3 \int_0^{\xi_{\rho}(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}\wp)} \mu(x) dx \right) \leq k \Sigma(\Xi(\omega, \wp)) \quad (2.55)$$

olan $\Phi \in \Omega$, $k \in (0,1)$ sabiti ve $\mu \in \mathcal{I}$ vardır. Burada $\Xi(\omega, \wp)$ Sonuç 2.2.12 de tanımlandığı gibidir,

(ii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda $\mathcal{Q}$ dönüşümü $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

2.3. Modüler b –Metrik Uzaylarda Çarpımsal Terimler İçeren Suzuki F –Daralmalar İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda modüler b –metrik uzaylarda Suzuki daralma ve F –daralma dönüşümleri kullanılarak elde edilen bazı ortak sabit nokta teoremlerine yer verilecektir.

Teorem 2.3.1. $\mathcal{S}_{\xi}^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

(i) $\mathcal{U}: \bar{P} \rightarrow [0,1)$ fonksiyonu $\bar{P} = \{\xi_{\rho}(\omega, \wp): \omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*\}$ üzerinde üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ ve $\xi_{\rho}(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp) > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_{\rho}(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_{\rho}(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp)\} \leq \xi_{\rho}(\omega, \mathcal{Q}\wp) \Rightarrow \\ & \mathfrak{F}(\xi_{\rho}(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_{\rho}(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp), \xi_{\rho}(\omega, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp), \xi_{\rho}(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{Q}\omega)) \\ & + F(\tau^2 \xi_{\rho}(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp)) \\ & \leq F \left(\mathcal{U}(\xi_{\rho}(\omega, \mathcal{Q}\wp)) \max \left\{ \begin{aligned} & \xi_{\rho}(\omega, \mathcal{Q}\wp), \xi_{\rho}(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_{\rho}(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp), \\ & \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\mathcal{Q}\wp) + \xi_{2\rho}(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{Q}\omega)}{2\tau} \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

olan $F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{F} \in \Delta_{\mathfrak{F}}$ vardır,

(ii) $\mathcal{Q}$ veya F dönüşümlerinden herhangi biri sürekli.

Bu durumda (M_1) şartı sağlanır ise Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca (M_2) şartı da sağlanırsa bu dönüşümlerin ortak sabit noktası tektir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ olsun. Bu durumda $\omega_1 = Q\omega_0$ olacak şekilde $\omega_1 \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Benzer şekilde $\omega_2 = \mathcal{K}\omega_1$ olan $\omega_2 \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı da vardır. Benzer adımlarla devam edildiğinde $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında

$$\omega_{2j+1} = Q\omega_{2j} \text{ ve } \omega_{2j+2} = \mathcal{K}\omega_{2j+1}$$

olan $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlanır. Bazı $j \in \mathbb{N}$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) = 0$ olsun. Genelliği bozmaksızın bazı $k \in \mathbb{N}$ için $j = 2k$ ise $\xi_\rho(\omega_{2k}, \omega_{2k+1}) = 0$ dır. O halde $\xi_\rho(\omega_{2k+1}, \omega_{2k+2}) > 0$ olur. Buradan

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2k}, Q\omega_{2k}), \xi_\rho(Q\omega_{2k}, \mathcal{K}Q\omega_{2k})\} \leq \xi_\rho(\omega_{2k}, Q\omega_{2k})$$

eşitsizliği sağlandığından (2.56) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega_{2k}, Q\omega_{2k}), \xi_\rho(Q\omega_{2k}, \mathcal{K}Q\omega_{2k}), \xi_\rho(\omega_{2k}, \mathcal{K}Q\omega_{2k}), \xi_\rho(Q\omega_{2k}, Q\omega_{2k}) \right) + \\ & F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega_{2k}, \mathcal{K}Q\omega_{2k}) \right) \leq F \left(\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega_{2k}, Q\omega_{2k}) \right) \max\{ \xi_\rho(\omega_{2k}, Q\omega_{2k}), \right. \\ & \left. \xi_\rho(\omega_{2k}, Q\omega_{2k}), \xi_\rho(Q\omega_{2k}, \mathcal{K}Q\omega_{2k}), \frac{\xi_{2\rho}(\omega_{2k}, \mathcal{K}Q\omega_{2k}) + \xi_{2\rho}(Q\omega_{2k}, Q\omega_{2k})}{2\tau} \} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\xi_\rho(\omega_{2k}, \omega_{2k+1}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2k+1}, \omega_{2k+2}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2k}, \omega_{2k+2}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2k+1}, \omega_{2k+1}) = 0$$

olduğundan $(\mathfrak{I})$ özelliğinden

$$\mathfrak{I}(\xi_\rho(\omega_{2k}, \omega_{2k+1}), \xi_\rho(\omega_{2k+1}, \omega_{2k+2}), \xi_\rho(\omega_{2k}, \omega_{2k+2}), 0) = \kappa$$

olan $\kappa > 0$ vardır ve $\eta_k = \xi_\rho(\omega_{2k}, \omega_{2k+1})$ olarak gösterilirse

$$\begin{aligned} & \kappa + F(\tau^2 \eta_{k+1}) \\ & \leq F\left(\mathcal{U}(\eta_k) \max\left\{\eta_k, \eta_{k+1}, \frac{\xi_{2\rho}(\omega_{2k}, \omega_{2k+2}) + \xi_{2\rho}(\omega_{2k+1}, \omega_{2k+1})}{2\tau}\right\}\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\xi_{2\rho}(\omega_{2k}, \omega_{2k+2}) \leq \tau(\eta_k + \eta_{k+1})$ ve $\eta_k = \xi_{2\rho}(\omega_{2k}, \omega_{2k+1}) = 0$ olduğundan $\max\left\{0, \eta_{k+1}, \frac{0+\eta_{k+1}}{2}\right\} = \eta_{k+1}$ dir. O halde

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{k+1}) \leq F(\mathcal{U}(0)\eta_{k+1})$$

olur. F fonksiyonu kesin artan olduğundan

$$\eta_{k+1} \leq \tau^2 \eta_{k+1} < \mathcal{U}(0)\eta_{k+1}$$

yazılır. Fakat $\mathcal{U}(0) < 1$ olduğundan yukarıdaki ifade bir çelişki oluşturur. Bu durumda $\eta_{k+1} = 0$ dir. Yani $\omega_{2k+1} = \omega_{2k+2}$ dir. Böylece $\omega_{2k} = \omega_{2k+1} = \omega_{2k+2}$ ve $\omega_{2k} = \mathcal{Q}\omega_{2k} = \mathcal{K}\omega_{2k}$ eşitliklerinden ω_{2k} nın $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu açıktır. Bu sebeple ispatın geri kalan kısmında $\omega_j \neq \omega_{j+1}$ olsun.

Yukarıdaki elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında (2.56) ifadesinden

$$\begin{aligned} \kappa + F(\tau^2 \eta_{j+1}) & \leq F\left(\mathcal{U}(\eta_j) \max\left\{\eta_j, \eta_j, \eta_{j+1}, \frac{\eta_j + \eta_{j+1}}{2}\right\}\right) \\ & = F(\mathcal{U}(\eta_j) \max\{\eta_j, \eta_{j+1}\}) \end{aligned} \tag{2.57}$$

bulunur. Burada $\max\{\eta_j, \eta_{j+1}\} = \eta_{j+1}$ olsun. Bu durumda (2.57) ifadesi

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{j+1}) \leq F(\mathcal{U}(\eta_j)\eta_{j+1})$$

olur. F fonksiyonunun kesin artanlığı tekrar kullanılırsa

$$\eta_{j+1} \leq \tau^2 \eta_{j+1} < \mathcal{U}(\eta_j)\eta_{j+1} < \eta_{j+1}$$

olur. Fakat bu ifade bir çelişkidir. O halde $\max\{\eta_j, \eta_{j+1}\} = \eta_j$ dir. Böylece her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{j+1}) \leq F(\mathcal{U}(\eta_j) \eta_j) < F(\eta_j) \quad (2.58)$$

olur. Benzer şekilde her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_j) < F(\eta_{j-1}) \quad (2.59)$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, (2.58) ve (2.59) ifadelerinden her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} F(\tau^2 \xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1})) &< F(\xi_\rho(\omega_{j-1}, \omega_j)) - \kappa \\ &< F(\xi_\rho(\omega_{j-2}, \omega_{j-1})) - 2\kappa \\ &< \dots \\ &< F(\xi_\rho(\omega_0, \omega_1)) - j \end{aligned} \quad (2.60)$$

dir ve buradan $\lim_{j \rightarrow +\infty} F(\tau^2 \xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1})) = -\infty$ olur. (F_2) özelliğinden $\lim_{j \rightarrow +\infty} \tau^2 \xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) = 0$ dir. $\tau \geq 1$ olduğundan

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) = 0$$

dır. (F_3) şartından

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1})^t F(\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1})) = 0$$

olan $t \in (0,1)$ vardır. Dolayısıyla (2.60) ifadesinden her $j \in \mathbb{N}$ ve $\rho > 0$ için

$$\begin{aligned} \left(\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) \right)^t \left(F(\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1})) - F(\xi_\rho(\omega_0, \omega_1)) \right) &\leq - \left(\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) \right)^t j\kappa \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca yukarıdaki ifadede limit alınırsa

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} j \left(\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) \right)^t = 0$$

elde edilir. Böylece her $j \geq j_1$ için $j \left(\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) \right)^t \leq 1$ olan $j_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $j \geq j_1$ için

$$\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) \leq \frac{1}{j^{\frac{1}{t}}} \quad (2.61)$$

dir. Devamında $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ -Cauchy olduğunu göstermek için $g > j \geq j_1$ olacak şekilde $g, j \in \mathbb{N}$ noktaları seçilsin. (ξ_3) şartı kullanılarak (2.61) ifadesinden

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_j, \omega_g) &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\omega_j, \omega_{j+1}) + \tau^2 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\omega_{j+1}, \omega_{j+2}) + \dots \\ &\quad + \tau^{g-j} \xi_{\frac{\rho}{2^{g-j}}}(\omega_{g-1}, \omega_g) \end{aligned}$$

bulunur. Genelliği bozmadan

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_j, \omega_g) &\leq \sum_{r=j}^{g-1} \tau^{r-j+1} \xi_\rho(\omega_r, \omega_{r+1}) \\ &\leq \sum_{r=j}^{g-1} \tau^{r-j+1} \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{t}}} \right) \leq \sum_{r=j}^{\infty} \tau^{r-j+1} \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{t}}} \right) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $r \rightarrow \infty$ için $\sum_{r=j}^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{1}{t}}}$ serisinin yakınsaklığından ve yakınsak bir serinin skaler ile çarpılması yine yakınsak bir seri olmasından, $j \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\omega_j, \omega_g) \rightarrow 0$ olur. Yani $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir ξ -Cauchy dizisidir. Ayrıca uzayın ξ -tamlığı ile

$$\xi_\rho(\omega_j, \omega^*) \rightarrow 0, (j \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde $\omega^* \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır.

Şimdi Q sürekli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2j}, Q\omega_{2j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2j}, \omega_{2j+1}) = 0$$

dir. Bu ise ω^* noktasının Q dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir. O halde $\omega^* \neq \mathcal{K}\omega^*$ olsun. Yani $\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*) > 0$ dir. Böylece

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega^*)\} \leq \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)$$

yazılır ve (2.56) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I}\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega^*, Q\omega^*)\right) + \\ & F\left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega^*)\right) \leq F\left(\mathfrak{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\right) \max\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \right. \\ & \left. \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega^*), \frac{\xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega^*) + \xi_{2\rho}(Q\omega^*, Q\omega^*)}{2\tau}\}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $(\mathfrak{I})$ özelliğinden

$$\mathfrak{I}(0, \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), 0) = \kappa$$

olur ve

$$\begin{aligned} \kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) & \leq F\left(\mathfrak{U}(0) \max\left\{0, 0, \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), \frac{\xi_{2l}(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)}{2\tau}\right\}\right) \\ & \leq F\left(\mathfrak{U}(0) \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) \\ & < F\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) \end{aligned}$$

yazılır. Fakat bu ifade bir çelişki oluşturur. O halde $\omega^* = \mathcal{K}\omega^*$ dir. Yani Q dönüşümünün sürekli olduğu durumda ω^* noktası Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Şimdi F fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda $j \in \mathbb{N}$ nin sonsuz değeri için $Q\omega_{2j} = Q\omega^*$ ise

$$\omega^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{2j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} Q\omega_{2j} = Q\omega^*$$

olur. Buradan ω^* noktası Q dönüşümünün sabit noktasıdır. $Q\omega_{2j} = Q\omega^* = \omega^*$ olduğundan $\mathcal{K}Q\omega_{2j} = \mathcal{K}\omega_{2j+1} = \mathcal{K}\omega^*$ dır ve

$$\omega^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{2j+2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}\omega_{2j+1} = \mathcal{K}\omega^*$$

olur. Bu ise ω^* noktasının $\mathcal{K}$ dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir.

O halde $j \in \mathbb{N}$ için $\omega_{2j+2} \neq Q\omega^*$ olsun. Şimdi $\omega^* = Q\omega^*$ olduğu gösterilsin. Bu durumda

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}) \leq \xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}), \quad (2.62)$$

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega_{2j+2}, \omega_{2j+3}) \leq \xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}). \quad (2.63)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır. Fakat bazı $j_0 \geq 0$ için bu eşitsizliklerin her ikisi de sağlanmasın. (2.62) ve (2.63) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_{2j_0+1}, \omega_{2j_0+2}) &\leq \tau \xi_\rho(\omega_{2j_0+1}, \omega^*) + \tau \xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j_0+2}) \\ &< \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2j_0+1}, \omega_{2j_0+2}) + \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2j_0+2}, \omega_{2j_0+3}) \\ &< \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2j_0+1}, \omega_{2j_0+2}) + \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2j_0+1}, \omega_{2j_0+2}) \\ &= \xi_\rho(\omega_{2j_0+1}, \omega_{2j_0+2}) \end{aligned}$$

çelişkili durumu ortaya çıkar. Bu durumda aşağıdaki iki durum vardır.

Durum (1): (2.62) eşitsizliği sonsuz sayıda $j \geq 0$ için sağlansın. Bu durumda

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_{2j}, KQ\omega_{2j})\} = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2})\} \\ \leq \xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1})$$

olur. O halde (2.56) dan

$$\mathfrak{V} \left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_{2j}, KQ\omega_{2j}), \xi_\rho(\omega^*, KQ\omega_{2j}), \xi_\rho(Q\omega_{2j}, Q\omega^*) \right) + \\ F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega^*, KQ\omega_{2j}) \right) \leq F \left(\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega_{2j}) \right) \max\{ \xi_\rho(\omega^*, Q\omega_{2j}), \right. \\ \left. \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_{2j}, KQ\omega_{2j}), \frac{\xi_{2\rho}(\omega^*, KQ\omega_{2j}) + \xi_{2\rho}(Q\omega_{2j}, Q\omega^*)}{2\tau} \} \right)$$

yazılır. Buradan da

$$F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega^*, \omega_{2j+2}) \right) \leq F \left(\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}) \right) \max\{ \xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}), \right. \\ \left. \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}), \frac{\xi_{2\rho}(\omega^*, \omega_{2j+2}) + \xi_{2\rho}(\omega_{2j+1}, Q\omega^*)}{2\tau} \} \right) \quad (2.64)$$

olur. Şimdi $\mathfrak{U}$ fonksiyonunun üstten yarı sürekliliği kullanılarak

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}) \right) \leq \mathfrak{U}(0)$$

elde edilir. $j \rightarrow \infty$ için (2.64) ifadesinde limit alınırsa

$$F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega^*, \omega^*) \right) \leq F \left(\limsup_{j \rightarrow \infty} \left[\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \max \left\{ \xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1}), \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}), \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{\xi_{2\rho}(\omega^*, \omega_{2j+2}) + \tau [\xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}) + \xi_\rho(\omega_{2j+1}, Q\omega^*)]}{2\tau} \right\} \right] \right) \\ \leq F \left(\mathfrak{U}(0) \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \right)$$

bulunur. F kesin artan olduğundan

$$\xi_\rho(Q\omega^*, \omega^*) \leq \tau^2 \xi_\rho(Q\omega^*, \omega^*) \leq \mathcal{U}(0) \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)$$

olur. Bu ise $\omega^* = Q\omega^*$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $j \in \mathbb{N}$ için $\omega_{2j+1} \neq \mathcal{K}\omega^*$ alınırsa $\mathcal{K}\omega^* = \omega^*$ olduğu sonucuna da ulaşılabilir.

Durum (2): (2.62) eşitsizliği sadece sonlu sayıda $j \geq 0$ için sağlansın. Bu durumda herhangi $j \geq j_0$ için (2.63) eşitsizliğinin sağlandığı $j_0 \geq 0$ vardır. Durum (1) de olduğu gibi ω^* noktası Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası değilse (2.63) ifadesi bir çelişkiye sebep olur.

Sonuç olarak, her iki durumda da ω^* noktası Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Son olarak sabit noktanın tekliğini göstermek için Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin birbirinden farklı ω^* ve ω_1^* ortak sabit noktaları seçilsin. Bu durumda $\xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) = \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*) > 0$ dir ve

$$0 = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*)\} \leq \xi_\rho(\omega^*, Q\omega_1^*) = \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)$$

olur. Böylece (2.56) dan

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F} \left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega_1^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, Q\omega^*) \right) \\ & + F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) \right) \leq F \left(\mathcal{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega_1^*) \right) \right. \\ & \left. \text{maks} \left\{ \frac{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega_1^*), \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*)}{\xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) + \xi_{2\rho}(Q\omega_1^*, Q\omega^*)} \right\} \right) \end{aligned}$$

yazılır. $(\mathfrak{F})$ özelliğinden

$$\mathfrak{F} \left(0, 0, \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*), \xi_\rho(\omega_1^*, \omega^*) \right) = \kappa$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)\right) &\leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)\right) \max\left\{\xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*), 0, 0, \frac{\xi_{2\rho}(\omega^*, \omega_1^*)}{\tau}\right\}\right) \\
&\leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)\right) \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)\right) \\
&< F\left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Fakat bu ifade bir çelişkidir. Yani $\omega^* = \omega_1^*$ olmalıdır. Dolayısıyla $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası tektir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Eğer Teorem 2.3.1 de $\mathcal{Q} = \mathcal{K}$ alınırse aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.3.2. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

- (i) $\mathcal{U}: \bar{P} \rightarrow [0,1)$ fonksiyonu $\bar{P} = \{\xi_\rho(\omega, \wp): \omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*\}$ üzerinde üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}^2\wp) > 0$ sağlayan

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega) \leq \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\wp) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Z}\left(\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}^2\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}^2\wp), \xi_\rho(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{Q}\omega)\right) + F\left(\tau^2 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}^2\wp)\right) \\
&\leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\wp)\right) \max\left\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{Q}^2\wp), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{Q}^2\wp) + \xi_{2\rho}(\mathcal{Q}\wp, \mathcal{Q}\omega)}{2\tau}\right\}\right)
\end{aligned}$$

olan $F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{Z} \in \Delta_3$ vardır,

- (ii) $\mathcal{Q}$ veya F dönüşümlerinden herhangi biri sürekli,
(iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda $\mathcal{Q}$ dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 2.3.1 e benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.3.3. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

(i) Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}Q\wp) > 0$ sağlayan her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, Q\wp),$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}Q\wp), \xi_\rho(Q\wp, Q\omega) \right) \\ & + F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}Q\wp) \right) \\ & \leq F \left(\alpha \max \left\{ \xi_\rho(\omega, Q\wp), \frac{\xi_\rho(\omega, Q\omega) + \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp)}{2}, \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}Q\wp) + \xi_{2\rho}(Q\wp, Q\omega)}{2\tau} \right\} \right) \end{aligned}$$

olan $F \in \mathcal{F}$, $\alpha \in [0,1)$ sabiti ve $\mathfrak{I} \in \Delta_{\mathfrak{I}}$ vardır,

(ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri süreklidir,

(iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.3.3 de $Q = \mathcal{K}$ seçilirse bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.4. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

(i) Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(Q\omega, Q^2\wp) > 0$ sağlayan

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, Q\omega) \leq \xi_\rho(\omega, Q\wp),$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, Q^2\wp), \xi_\rho(\omega, Q^2\wp), \xi_\rho(Q\wp, Q\omega) \right) + F \left(\tau^2 \xi_\rho(Q\omega, Q^2\wp) \right) \\ & \leq F \left(\alpha \max \left\{ \xi_\rho(\omega, Q\wp), \frac{\xi_\rho(\omega, Q\omega) + \xi_\rho(Q\wp, Q^2\wp)}{2}, \frac{\xi_{2\rho}(\omega, Q^2\wp) + \xi_{2\rho}(Q\wp, Q\omega)}{2\tau} \right\} \right) \end{aligned}$$

olan $F \in \mathcal{F}$, $\alpha \in [0,1)$ sabiti ve $\mathfrak{I} \in \Delta_{\mathfrak{I}}$ vardır,

- (ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri sürekli,dir,
- (iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

2.3.1. Modüler b –Metrik Uzaylarda Çarpımsal İfadeler İçeren Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti ile çarpımsal ifadeler içeren F –daralma dönüşümleri için sabit nokta sonuçlarına yer verilecektir.

Teorem 2.3.5. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

- (i) Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) > 0$ sağlayan her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp),$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega) \right) \\ & \quad + F \left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right) \\ & \leq F \left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega, Q\omega) \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp) \xi_{2\rho}(\wp, Q\omega) \right] \right. \\ & \quad \left. + \beta \left[\xi_\rho(\omega, Q\omega) \xi_{2\rho}(\wp, Q\omega) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp) \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

olan $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta < \frac{1}{\tau}, F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{I} \in \Delta_{\mathfrak{I}}$ vardır,

- (ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri sürekli,dir,
- (iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ olsun. Bu durumda $\omega_1 = \mathcal{Q}\omega_0$ olan $\omega_1 \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası vardır. Benzer şekilde $\omega_2 = \mathcal{K}\omega_1$ olan $\omega_2 \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı da vardır. Benzer şekilde devam edilirse, $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayındaki $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\omega_{2j+1} = \mathcal{Q}\omega_{2j} \text{ ve } \omega_{2j+2} = \mathcal{K}\omega_{2j+1}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca bazı $j \in \mathbb{N}$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) = 0$ olsun. Genelliği bozmadan bazı $k \in \mathbb{N}$ için $j = 2i$ seçilirse $\xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+1}) = 0$ olur. O halde $\xi_\rho(\omega_{2i+1}, \omega_{2i+2}) > 0$ dır. Buradan

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2i}, \mathcal{Q}\omega_{2i}), \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \mathcal{K}\omega_{2i+1})\} \leq \xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+1})$$

ifadesi sağlanır ve (2.65) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I}(\xi_\rho(\omega_{2i}, \mathcal{Q}\omega_{2i}), \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \mathcal{K}\omega_{2i+1}), \xi_\rho(\omega_{2i}, \mathcal{K}\omega_{2i+1}), \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \mathcal{Q}\omega_{2i})) + \\ & F(\tau^2 \xi_\rho^2(\mathcal{Q}\omega_{2i}, \mathcal{K}\omega_{2i+1})) \leq \\ & F\left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega_{2i}, \mathcal{Q}\omega_{2i}) \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \mathcal{K}\omega_{2i+1}) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega_{2i}, \mathcal{K}\omega_{2i+1}) \xi_{2\rho}(\omega_{2i+1}, \mathcal{Q}\omega_{2i}) \right] \right. \\ & \left. + \beta \left[\xi_\rho(\omega_{2i}, \mathcal{Q}\omega_{2i}) \xi_{2\rho}(\omega_{2i+1}, \mathcal{Q}\omega_{2i}) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega_{2i}, \mathcal{K}\omega_{2i+1}) \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \mathcal{K}\omega_{2i+1}) \right] \right) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $\xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+1}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \omega_{2i+2}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+2}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \omega_{2i+1}) = 0$ olduğundan

$$\mathfrak{I}(\xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+1}), \xi_\rho(\omega_{2i+1}, \omega_{2i+2}), \xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+2}), 0) = \kappa$$

olan $\kappa > 0$ vardır. Ayrıca $\eta_i = \xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+1})$ gösterimi kullanılırsa

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{i+1}^2) \leq F\left(\alpha[\eta_i \eta_{i+1}] + \beta \left[\frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega_{2i}, \omega_{2i+2}) \eta_{i+1} \right] \right)$$

yazılır. $\xi_{2\rho}(\omega_{2i}, \omega_{2i+2}) \leq \tau(\eta_i + \eta_{i+1})$ ve $\eta_i = \xi_\rho(\omega_{2i}, \omega_{2i+1}) = 0$ olduğundan

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{i+1}^2) \leq F(\beta \eta_{i+1}^2)$$

olur. Burada F fonksiyonunun kesin artan özelliğinden $\tau^2 \eta_{i+1}^2 < \beta \eta_{i+1}^2$ bulunur. Fakat bu ifade bir çelişkidir. Böylece $\eta_{i+1} = 0$ olur. Yani $\omega_{2i+1} = \omega_{2i+2}$ dir. Sonuç olarak, $\omega_{2i} = Q\omega_{2i} = \mathcal{K}\omega_{2i}$ dir. Bu ise ω_{2i} noktasının Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu gösterir. Bu sebeple ispatın geri kalan kısmında $\omega_j \neq \omega_{j+1}$ olsun. (2.65) ifadesinden

$$\begin{aligned} \kappa + F(\tau^2 \eta_{i+1}^2) &\leq F(\alpha[\eta_j \eta_{j+1}] + \beta[(\eta_j + \eta_{j+1})\eta_{j+1}]) \\ &= F((\alpha + \beta)\eta_j \eta_{j+1} + \beta \eta_{j+1}^2) \end{aligned}$$

olur. Böylece F fonksiyonunun özelliğinden

$$\tau^2 \eta_{i+1}^2 < (\alpha + \beta)\eta_j \eta_{j+1} + \beta \eta_{j+1}^2$$

bulunur ve her $j \in \mathbb{N}$ için

$$(\tau^2 - \beta)\eta_{j+1} < (\alpha + \beta)\eta_j$$

elde edilir. Diğer yandan $\alpha + \beta < \frac{1}{\tau}$ olduğundan $\tau^2 - \beta > 0$ dir. Bu durumda

$$\xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}) < \left(\frac{\alpha + \beta}{\tau^2 - \beta}\right) \xi_\rho(\omega_{2j}, \omega_{2j+1}) < \xi_\rho(\omega_{2j}, \omega_{2j+1})$$

olur. Sonuç olarak her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa + F(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2})) \leq F(\xi_\rho^2(\omega_{2j}, \omega_{2j+1}))$$

dir. Benzer şekilde her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega_{2j}, \omega_{2j+1})\right) \leq F\left(\xi_\rho^2(\omega_{2j-1}, \omega_{2j})\right)$$

olur. Son iki eşitsizlikten her $j \in \mathbb{N}$ ve $\rho > 0$ için

$$F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega_j, \omega_{j+1})\right) < F\left(\xi_\rho^2(\omega_{j-1}, \omega_j)\right) - \kappa < \dots < F\left(\xi_\rho^2(\omega_0, \omega_1)\right) - j$$

olur. Teorem 2.3.1 de olduğu gibi devam edilirse $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir ξ –Cauchy dizisi olduğu bulunur ve uzayın ξ –tamlığından

$$\xi_\rho(\omega_j, \omega^*) \rightarrow 0, \quad (j \rightarrow \infty) \quad (2.66)$$

olan $\omega^* \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı vardır. İspatın devamında $\mathcal{Q}$ sürekli olsun. Bu durumda

$$\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2j}, \mathcal{Q}\omega_{2j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2j}, \omega_{2j+1}) = 0$$

olur. O halde ω^* noktası $\mathcal{Q}$ dönüşümünün sabit noktası olur. Şimdi $\omega^* \neq \mathcal{K}\omega^*$ olsun. Bu takdirde $\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*) > 0$ dir. Buradan

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\} \leq \xi_\rho(\omega^*, \omega^*)$$

eşitsizliği sağlandığından (2.65) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)\right) + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) \\ & \leq F\left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)\right] \right. \\ & \quad \left. + \beta \left[\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)\xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right]\right) \end{aligned}$$

yazılır. ($\mathfrak{F}$) fonksiyonunun tanımından

$$\mathfrak{F}(0, \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), 0) = \kappa$$

bulunur ve böylece

$$\begin{aligned}\kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) &\leq F\left(\beta \left[\frac{1}{\tau} \xi_{21}(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*) \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right]\right) \\ &\leq F(\beta \xi_\rho^2(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)) \\ &< F\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right)\end{aligned}$$

olur. Fakat bu ifade bir çelişkiye sebep olur. Bu durumda $\omega^* = \mathcal{K}\omega^*$ dir.

Diğer yandan F fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda sonsuz sayıda $j \in \mathbb{N}$ için

$$\omega^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{2j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} Q\omega_{2j} = Q\omega^*$$

bulunur. Bu da ω^* noktasının Q dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir.

$Q\omega_{2j} = Q\omega^* = \omega^*$ olduğundan $\mathcal{K}Q\omega_{2j} = \mathcal{K}\omega_{2j+1} = \mathcal{K}\omega^*$ yazılır. Bu takdirde

$$\omega^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{2j+2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}\omega_{2j+1} = \mathcal{K}\omega^*$$

olduğu elde edilir. O halde $\omega^*, \mathcal{K}$ dönüşümünün de sabit noktası olmuş olur.

Şimdi $j \in \mathbb{N}$ için $\omega_{2j+2} \neq Q\omega^*$ olsun. Bu durumda tekrar Teorem 2.3.1 de olduğu gibi

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_{2j}, \mathcal{K}Q\omega_{2j})\} \leq \xi_\rho(\omega^*, Q\omega_{2j})$$

dir ve (2.65) ifadesinden

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \mathcal{K}\omega_{2j+1}), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega_{2j+1}), \xi_\rho(\omega_{2j+1}, Q\omega^*)\right) \\ &\quad + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \mathcal{K}\omega_{2j+1})\right) \leq \\ &\quad F\left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \mathcal{K}\omega_{2j+1}) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega_{2j+1}) \xi_{2\rho}(\omega_{2j+1}, Q\omega^*)\right]\right. \\ &\quad \left.+ \beta \left[\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \xi_{2\rho}(\omega_{2j+1}, Q\omega^*) \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega_{2j+1}) \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \mathcal{K}\omega_{2j+1})\right]\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega_{2j+2})\right) \leq \\ F\left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}) + \frac{1}{\tau} \xi_{21}(\omega^*, \omega_{2j+2})\xi_{21}(\omega_{2j+1}, Q\omega^*)\right] \right. \\ \left. + \beta \left[\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\varpi_{21}(\xi_{2j+1}, Q\xi^*) + \frac{1}{\tau} \varpi_{21}(\xi^*, \xi_{2j+2})\varpi_\rho(\xi_{2j+1}, \xi_{2j+2})\right]\right)$$

yazılır. Eğer $j \rightarrow \infty$ için yukarıdaki eşitsizlikte limit alınır ve F fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa

$$F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega^*)\right) \\ \leq F\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \beta \left[\xi_\rho^2(\omega^*, Q\omega^*) \left(\tau \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}) + \tau \xi_\rho(\omega_{2j+2}, Q\omega^*)\right)\right]\right) \\ \leq F\left(\beta \tau \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega^*)\right)$$

ifadesine ulaşılır. F kesin artan bir fonksiyon olduğundan

$$\tau \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega^*) < \beta \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega^*)$$

bulunur. Bu ise $Q\omega^* = \omega^*$ demektir. Benzer ifadelerle $j \in \mathbb{N}$ için $\omega_{2j+1} \neq \mathcal{K}\omega^*$ olacak şekilde $\mathcal{K}\omega^* = \omega^*$ olduğu elde edilir.

Sonuç olarak ω^* noktası Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olur.

Son olarak sabit noktanın tekliğini göstermek için ω^* noktasından farklı ω_1^* ortak sabit noktası var olsun. Bu durumda $\xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}\omega_1^*) = \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*) > 0$ olur ve

$$0 = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(\omega_1^*, \mathcal{K}\omega_1^*)\} \leq \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)$$

dir. Böylece (2.65) eşitsizliğinden

$$\mathfrak{F}\left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(\omega_1^*, \mathcal{K}\omega_1^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega_1^*), \xi_\rho(\omega_1^*, Q\omega^*)\right) + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \mathcal{K}\omega_1^*)\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq F \left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \xi_\rho(\omega_1^*, \mathcal{K}\omega_1^*) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega_1^*) \xi_{2\rho}(\omega_1^*, Q\omega^*) \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \xi_{2\rho}(\omega_1^*, Q\omega^*) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega_1^*) \xi_\rho(\omega_1^*, \mathcal{K}\omega_1^*) \right] \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\mathfrak{S})$ fonksiyonunun tanımından $\mathfrak{S}(0, 0, \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*), \xi_\rho(\omega_1^*, \omega^*)) = \kappa$ olur ve buradan

$$\begin{aligned} \kappa + F(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega^*, \omega_1^*)) &\leq F\left(\alpha \left[\frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}^2(\omega^*, \omega_1^*) \right]\right) \\ &\leq F(\xi_\rho^2(\omega^*, \omega_1^*)) \end{aligned}$$

bulunur. Fakat bu ifade $\omega^* = \omega_1^*$ olmasını gerektirir. Yani Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası tektir. Bu ise ispatı bitirir. ■

Teorem 2.3.5 de $Q = \mathcal{K}$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.3.6. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

(i) Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(Q\omega, Q\wp) > 0$ sağlayan

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, Q\omega) \leq \xi_\rho(\omega, \wp),$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, Q\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)) + F(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega, Q\wp)) \\ &\leq F\left(\alpha \left[\xi_\rho(\omega, Q\omega) \xi_\rho(\wp, Q\wp) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega, Q\wp) \xi_{2\rho}(\wp, Q\omega) \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[\xi_\rho(\omega, Q\omega) \xi_{2\rho}(\wp, Q\omega) + \frac{1}{\tau} \xi_{2\rho}(\omega, Q\wp) \xi_\rho(\wp, Q\wp) \right] \right) \end{aligned}$$

olan $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < \frac{1}{\tau}$, $F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{S} \in \Delta_{\mathfrak{S}}$ vardır,

(ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri süreklidir,

(iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.3.7. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

- (i) $\mathcal{U}: \bar{P} \rightarrow \left[0, \frac{1}{2\tau}\right)$ fonksiyonu $\bar{P} = \{\xi_\rho(\omega, \wp): \omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*\}$ üzerinde üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}Q\wp) > 0$ sağlayan her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, Q\wp)$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S}(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}Q\wp), \xi_\rho(Q\wp, Q\omega)) \\ & + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega, \mathcal{K}Q\wp)\right) \leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho(\omega, Q\wp)\right)\right. \\ & \left. \max \left\{ \begin{aligned} & \xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp), \frac{1}{2\tau^2} \xi_{2\rho}(\xi, \mathcal{K}Q\wp) \xi_{2\rho}(Q\wp, Q\xi), \\ & \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, Q\omega) \xi_{2\rho}(Q\wp, Q\xi), \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(Q\wp, \mathcal{K}Q\wp) \xi_{2\rho}(\xi, \mathcal{K}Q\wp) \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

olan $F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{S} \in \Delta_3$ vardır,

- (ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri süreklidir,
 (iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ olsun. $\omega_1 = Q\omega_0$ olan $\omega_1 \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır. Benzer şekilde $\omega_2 = \mathcal{K}\omega_1$ olacak şekilde $\omega_2 \in \mathcal{S}_\xi^*$ elemanı bulunabilir. Benzer şekilde devam edilirse, $\mathcal{S}_\xi^*$ uayında bir $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\omega_{2j+1} = Q\omega_{2j} \text{ ve } \omega_{2j+2} = \mathcal{K}\omega_{2j+1}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca bazı $j \in \mathbb{N}$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\omega_j, \omega_{j+1}) = 0$ olsun. Eğer genelliği bozmadan bazı $r \in \mathbb{N}$ için $j = 2r$ seçilirse $\xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+1}) = 0$ bulunur. $\xi_\rho(\omega_{2r+1}, \omega_{2r+2}) > 0$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2r}, Q\omega_{2r}), \xi_\rho(Q\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r})\} \leq \xi_\rho(\omega_{2r}, Q\omega_{2r})$$

eşitsizliği sağlanır ve (2.67) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega_{2r}, Q\omega_{2r}), \xi_\rho(Q\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}), \xi_\rho(\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}), \xi_\rho(Q\omega_{2r}, Q\omega_{2r}) \right) \\ & + F \left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}) \right) \leq F \left(\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega_{2r}, Q\omega_{2r}) \right) \right. \\ & \left. \text{maks} \left\{ \begin{aligned} & \xi_\rho(\omega_{2r}, Q\omega_{2r}) \xi_\rho(Q\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}), \frac{1}{2\tau^2} \xi_{2\rho}(\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}) \xi_{2\rho}(Q\omega_{2r}, Q\omega_{2r}), \\ & \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega_{2r}, Q\omega_{2r}) \xi_{2\rho}(Q\omega_{2r}, Q\omega_{2r}), \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(Q\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}) \xi_{2\rho}(\omega_{2r}, \mathcal{K}Q\omega_{2r}) \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. ($\mathfrak{I}$) fonksiyonunun özelliğinden

$$\xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+1}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2r+1}, \omega_{2r+2}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+2}) \cdot \xi_\rho(\omega_{2r+1}, \omega_{2r+1}) = 0$$

olduğundan

$$\mathfrak{I}(\xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+1}), \xi_\rho(\omega_{2r+1}, \omega_{2r+2}), \xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+2}), 0) = \kappa$$

olan $\kappa > 0$ vardır. Diğer yandan $\eta_r = \xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+1})$ ifadesi yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{r+1}^2) \leq F \left(\mathfrak{U}(\eta_r) \text{maks} \left\{ \eta_r \eta_{r+1}, 0, 0, \frac{1}{2\tau} \eta_{r+1} \xi_{2\rho}(\omega_{2r}, \omega_{2r+2}) \right\} \right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan $\xi_{2\rho}(\omega_{2r}, \omega_{2r+2}) \leq \tau(\eta_r + \eta_{r+1})$ ve $\eta_r = \xi_\rho(\omega_{2r}, \omega_{2r+1}) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{r+1}^2) \leq F(\mathfrak{U}(0) \eta_{r+1}^2)$$

olur. Şimdi F fonksiyonunun kesin artan olma özelliğinden

$$\tau^2 \eta_{r+1}^2 < \mathfrak{U}(0) \eta_{r+1}^2$$

bulunur. Fakat $\mathfrak{U}(0) < 1$ olduğundan bu ifade bir çelişkidir. Bu durumda η_{r+1} ifadesi 0 a eşit olur. Böylece $\omega_{2r+1} = \omega_{2r+2}$ dir ve ayrıca $\omega_{2r} = \omega_{2r+1} = \omega_{2r+2}$ bulunur. Buradan $\omega_{2r} = \mathcal{Q}\omega_{2r} = \mathcal{K}\omega_{2r}$ olur. Bu ise ω_{2r} noktasının $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu gösterir. Bu yüzden ispatın devamında $\omega_j \neq \omega_{j+1}$ olsun.

Sonuç olarak (2.67) ifadesi göz önüne alındığında ve elde edilen sonuçlarla birlikte

$$\begin{aligned} \kappa + F(\tau^2 \eta_{r+1}^2) &\leq F\left(\mathfrak{U}(\eta_j) \max\left\{\eta_j \eta_{j+1}, 0, 0, \frac{1}{2\tau} \eta_{j+1} \xi_{2\rho}(\omega_{2j}, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j})\right\}\right) \\ &\leq F\left(\mathfrak{U}(\eta_j) \max\left\{\eta_j \eta_{j+1}, 0, 0, \frac{1}{2} \eta_{j+1}(\eta_j + \eta_{j+1})\right\}\right) \\ \kappa + F(\tau^2 \eta_{r+1}^2) &\leq F\left(\mathfrak{U}(\eta_j) \max\left\{\eta_j \eta_{j+1}, 0, 0, \frac{1}{2\tau} \eta_{j+1} \xi_{2\rho}(\omega_{2j}, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j})\right\}\right) \\ &\leq F\left(\mathfrak{U}(\eta_j) \max\left\{\eta_j \eta_{j+1}, 0, 0, \frac{1}{2} \eta_{j+1}(\eta_j + \eta_{j+1})\right\}\right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\max\left\{\eta_j \eta_{j+1}, 0, 0, \frac{1}{2} \eta_{j+1}(\eta_j + \eta_{j+1})\right\} = \frac{\eta_j \eta_{j+1} + \eta_{j+1}^2}{2}$$

olduğu açıktır. Bu durumda (2.68) ifadesinden

$$\kappa + F(\tau^2 \eta_{r+1}^2) \leq F\left(\mathfrak{U}(\eta_j) \frac{\eta_j \eta_{j+1} + \eta_{j+1}^2}{2}\right) < F\left(\frac{\eta_j \eta_{j+1} + \eta_{j+1}^2}{2}\right)$$

dir. F fonksiyonunun kesin artan özelliği tekrar kullanılırsa

$$\eta_{r+1}^2 \leq \tau^2 \eta_{r+1}^2 < \frac{\eta_j \eta_{j+1} + \eta_{j+1}^2}{2}$$

bulunur ve $\eta_{j+1} < \eta_j$ eşitsizliği elde edilir. Yani $j \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2})\right) \leq F\left(\xi_\rho^2(\omega_{2j}, \omega_{2j+1})\right)$$

olur. Benzer yolla $j \in \mathbb{N}$ için

$$\kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega_{2j}, \omega_{2j+1})\right) \leq F\left(\xi_\rho^2(\omega_{2j-1}, \omega_{2j})\right)$$

olduğu gösterilir. Böylece son iki eşitsizlikten her $j \in \mathbb{N}$ ve $\rho > 0$ için

$$F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega_j, \omega_{j+1})\right) < F\left(\xi_\rho^2(\omega_{j-1}, \omega_j)\right) - \kappa < \dots < F\left(\xi_\rho^2(\omega_0, \omega_1)\right) - j\kappa$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.3.1 in ispatında olduğu gibi devam edilirse $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında ξ –Cauchy dizisi olduğu açıktır. İspatın devamında uzayın ξ –tamlığından

$$\xi_\rho(\omega_j, \omega^*) \rightarrow 0$$

olan $\omega^* \in \mathcal{S}_\xi^*$ noktası mevcuttur.

$\mathcal{Q}$ dönüşümü sürekli ise ω^* noktasının $\mathcal{Q}$ dönüşümünün sabit noktası olduğu açıktır. $\omega^* \neq \mathcal{K}\omega^*$ olsun. Bu durumda $\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*) > 0$ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*)\} \leq \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)$$

ifadesi sağlandığından (2.67) den

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)\right) + \\ & F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*)\right) \leq F\left(\mathfrak{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*)\right) \right. \\ & \left. \text{maks} \left\{ \begin{aligned} & \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*) \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*), \frac{1}{2\tau^2} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*) \xi_{2\rho}(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \\ & \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*) \xi_{2\rho}(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*) \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega^*) \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $(\mathfrak{S})$ fonksiyonunun tanımından $\mathfrak{S}(0, \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*), 0) = \kappa$ olur. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \kappa + F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) &\leq F\left(\mathfrak{U}(0) \max\left\{0, 0, 0, \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*) \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right\}\right) \\ &\leq F\left(\frac{1}{2} \mathfrak{U}(0) \xi_\rho^2(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) \\ &< F\left(\xi_\rho^2(\omega^*, \mathcal{K}\omega^*)\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade bir çelişkidir. Yani $\omega^* = \mathcal{K}\omega^*$ dir. $\mathcal{Q}$ dönüşümünün sürekli olduğu durumda ω^* noktası $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olur.

Diğer yandan F fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda sonsuz sayıda $j \in \mathbb{N}$ için

$$\omega^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{2j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{Q}\omega_{2j} = \mathcal{Q}\omega^*$$

olur. Böylece ω^* noktası $\mathcal{Q}$ dönüşümünün sabit noktasıdır. Ayrıca $\mathcal{Q}\omega_{2j} = \mathcal{Q}\omega^* = \omega^*$ olduğundan $\mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j} = \mathcal{K}\omega_{2j+1} = \mathcal{K}\omega^*$ dir. Bu takdirde

$$\omega^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{2j+2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}\omega_{2j+1} = \mathcal{K}\omega^*$$

ifadesinden ω^* noktasının $\mathcal{K}$ dönüşümünün sabit noktası olduğu sonucuna ulaşılır. Şimdi $j \in \mathbb{N}$ için $\omega_{2j+2} \neq \mathcal{Q}\omega^*$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2j}, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j})\} \leq \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega_{2j}),$$

olduğundan (2.67) ifadesinden

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega^*), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2j}, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j}), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j}), \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2j}, \mathcal{Q}\omega^*)\right) + \\ &F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(\mathcal{Q}\omega^*, \mathcal{K}\mathcal{Q}\omega_{2j})\right) \leq F\left(\mathfrak{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, \mathcal{Q}\omega_{2j})\right)\right) \end{aligned}$$

$$\text{maks} \left\{ \begin{aligned} &\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\xi_\rho(Q\omega_{2j}, \mathcal{K}Q\omega_{2j}), \frac{1}{2\tau^2} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_{2j})\xi_{2\rho}(Q\omega_{2j}, Q\omega^*), \\ &\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\xi_{2\rho}(Q\omega_{2j}, Q\omega^*), \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(Q\omega_{2j}, \mathcal{K}Q\omega_{2j})\xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_{2j}) \end{aligned} \right\}$$

yazılır ve buradan

$$F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega_{2j+2})\right) \leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1})\right)\right)$$

$$\text{maks} \left\{ \begin{aligned} &\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2}), \frac{1}{2\tau^2} \xi_{2\rho}(\omega^*, \omega_{2j+2})\xi_{2\rho}(\omega_{2j+1}, Q\omega^*), \\ &\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*)\xi_{2\rho}(\omega_{2j+1}, Q\omega^*), \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega_{2j+1}, \omega_{2j+2})\xi_{2\rho}(\omega^*, \omega_{2j+2}) \end{aligned} \right\}$$

olur. $\mathcal{U}$ fonksiyonunun üstten yarı sürekli olduğu göz önüne alınır

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{U}\left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_{2j+1})\right) \leq \mathcal{U}(0)$$

bulunur. $j \rightarrow \infty$ için yukarıdaki eşitsizlikte limit alınır

$$F\left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \omega^*)\right) \leq F\left(\frac{1}{2} \mathcal{U}(0) \xi_\rho^2(\omega^*, Q\omega^*)\right)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde bu ifadenin de çelişkili bir durum oluşturduğu sonucuna ulaşılır. Yani $\omega^* = Q\omega^*$ dir. $j \in \mathbb{N}$ için $\omega_{2j+1} \neq \mathcal{K}\omega^*$ alınır $\mathcal{K}\omega^* = \omega^*$ bulunur. Sonuç olarak $Q\omega^* = \mathcal{K}\omega^* = \omega^*$ dir. Bu ise ω^* noktasının Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası olması demektir.

ω^* noktasının tek olduğu göstermek için ω^* noktasından farklı ω_1^* ortak sabit noktası var olsun. Bu durumda $\xi_\rho(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) = \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*) > 0$ dir. Böylece

$$0 = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*)\} \leq \xi_\rho(\omega^*, Q\omega_1^*) = \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*)$$

olduğundan (2.67) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*), \xi_\rho(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*), \xi_\rho(Q\omega_1^*, Q\omega^*) \right) + \\ & F \left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) \right) \leq F \left(\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, Q\omega_1^*) \right) \right. \\ & \left. \text{maks} \left\{ \begin{aligned} & \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*), \frac{1}{2\tau^2} \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) \xi_{2\rho}(Q\omega_1^*, Q\omega^*), \\ & \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega^*, Q\omega^*) \xi_{2\rho}(Q\omega_1^*, Q\omega^*), \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(Q\omega_1^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) \xi_{2\rho}(\omega^*, \mathcal{K}Q\omega_1^*) \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned}$$

yazılır. ($\mathfrak{I}$) fonksiyonunun tanımından $\mathfrak{I} \left(0, 0, \xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*), \xi_\rho(\omega_1^*, \omega^*) \right) = \kappa$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \kappa + F \left(\tau^2 \xi_\rho^2(\omega^*, \omega_1^*) \right) & \leq F \left(\mathfrak{U} \left(\xi_\rho(\omega^*, \omega_1^*) \right) \xi_\rho^2(\omega^*, \omega_1^*) \right) \\ & < F \left(\xi_\rho^2(\omega^*, \omega_1^*) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu ifade bir çelişkidir. O halde $\omega^* = \omega_1^*$ dir. Yani Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası tektir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.3.7 de Q dönüşümü $\mathcal{K}$ dönüşümüne eşit olarak seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.8. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ – tam modüler b – metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

- (i) $\mathfrak{U}: \bar{P} \rightarrow \left[0, \frac{1}{2\tau} \right)$ fonksiyonu $\bar{P} := \{ \xi_\rho(\omega, \wp) : \omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^* \}$ üzerinde üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(Q\omega, Q^2\wp) > 0$ sağlayan

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, Q\omega) \leq \xi_\rho(\omega, Q\wp)$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(Q\wp, Q^2\wp), \xi_\rho(\omega, Q^2\wp), \xi_\rho(Q\wp, Q\omega) \right) + F \left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega, Q^2\wp) \right) \\ & \leq F \left(\gamma \left(\xi_\rho(\omega, Q\wp) \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\text{maks} \left\{ \begin{aligned} &\xi_\rho(\omega, Q\omega)\xi_\rho(Q\wp, Q^2\wp), \frac{1}{2\tau^2}\xi_{2\rho}(\omega, Q^2\wp)\xi_{2\rho}(Q\wp, Q\omega), \\ &\frac{1}{2\tau}\xi_\rho(\omega, Q\omega)\xi_{2\rho}(Q\wp, Q\omega), \frac{1}{2\tau}\xi_\rho(Q\wp, Q^2\wp)\xi_{2\rho}(\omega, Q^2\wp) \end{aligned} \right\}$$

olan $F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{I} \in \Delta_{\mathfrak{I}}$ vardır,

(ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri süreklidir,

(iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teorem Teorem 2.3.6 ya benzer şekilde ispatlanabilir. Bu sebeple ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 2.3.9. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

(i) Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) > 0$ sağlayan her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp),$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{I}(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)) + F(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega, \mathcal{K}\wp)) \\ &\leq F\left(\alpha \text{ maks} \left\{ \begin{aligned} &\xi_\rho(\omega, Q\omega)\xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\omega, \wp)\xi_\rho(\omega, Q\omega), \\ &\xi_\rho(\omega, \wp)\xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), c\left(\frac{1}{\tau^2}\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp)\xi_{2\rho}(\wp, Q\omega)\right) \end{aligned} \right\}\right) \end{aligned}$$

olan $0 < \alpha < 1, 0 < c < 1, \alpha c < \frac{1}{2\tau}, F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{I} \in \Delta_{\mathfrak{I}}$ vardır,

(ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri süreklidir,

(iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.3.9 da $Q = \mathcal{K}$ seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.10. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

(i) Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\xi_\rho(Q\omega, Q\wp) > 0$ sağlayan her $\rho > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, Q\omega) &\leq \xi_\rho(\omega, \wp), \\ \mathfrak{I} \left(\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, Q\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega) \right) &+ F \left(\tau^2 \xi_\rho^2(Q\omega, Q\wp) \right) \\ &\leq F \left(\alpha \max \left\{ \begin{aligned} &\xi_\rho(\omega, Q\omega) \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, \wp) \xi_\rho(\omega, Q\omega), \\ &\xi_\rho(\omega, \wp) \xi_\rho(\wp, Q\wp), c \left(\frac{1}{\tau^2} \xi_{2\rho}(\omega, Q\wp) \xi_{2\rho}(\wp, Q\omega) \right) \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned}$$

olan $0 < \alpha < 1, 0 < c < 1, \alpha c < \frac{1}{2\tau}, F \in \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{I} \in \Delta_{\mathfrak{I}}$ vardır,

(ii) Q veya F dönüşümlerinden herhangi biri süreklidir,

(iii) (M_1) ve (M_2) sağlanır.

Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 2.3.11. $\mathcal{S}_\xi^* = [0,1]$ olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\rho > 0$ için

$$\xi_\rho(\omega, \wp) = \frac{|\omega - \wp|^k}{\rho}, k \geq 1$$

ifadesi ile modüler b –metrik tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi $\tau = 2^{k-1}$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzaydır. $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*, \quad \mathfrak{I}: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\mathfrak{U}: \bar{P} \rightarrow [0,1)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$Q\omega = \frac{\omega}{16}, \quad \omega \in [0,1] \text{ ve } \mathcal{K}\omega = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \omega \in [0,1] - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\ 2, & \text{eğer } \omega = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\mathfrak{I}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \kappa, (\kappa > 0), F(\alpha) = \ln \alpha \text{ ve } \mathfrak{U}(\omega) = \left(\frac{4}{15} \right)^k, (k \geq 1).$$

Ayrıca her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ için $\omega \geq \wp \geq 0$ olsun. Böylece aşağıdaki durumlar vardır.

Durum (i): $\omega = \wp = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $Q\omega = Q\wp = \frac{1}{32}$ ve $\mathcal{K}Q\wp = 0$ olur. O

halde Teorem 2.3.1 in ön koşulunda

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{k-1}} \min \left\{ \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{1}{32}, 0 \right) \right\} \leq \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right)$$

yazılır. Buradan basit hesaplamalar ile

$$\frac{1}{2^k} \min \left\{ \frac{15^k}{2^{5k}\rho}, \frac{1}{2^{5k}\rho} \right\} = \frac{1}{2^{6k}\rho} \leq \frac{15^k}{2^{5k}\rho}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde

$$\kappa + F \left(2^{2k-2} \xi_{\rho} \left(\frac{1}{32}, 0 \right) \right) \leq F \left(\mathcal{U} \left(\xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right) \right) \times \right. \\ \left. \max \left\{ \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{1}{32}, 0 \right), \frac{\xi_{2\rho} \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \xi_{2\rho} \left(\frac{1}{32}, \frac{1}{32} \right)}{2 \cdot 2^{k-1}} \right\} \right)$$

ifadesi yazılır. Benzer hesaplamalar ile

$$\kappa + F \left(\frac{1}{2^{3k+2}\rho} \right) \leq F \left(\frac{4^k}{15^k} \cdot \frac{15^k}{2^{5k}\rho} \right)$$

olur. Buradan $\kappa - \ln 2^{3k+2}\rho \leq \ln 4^k - \ln 2^{5k}\rho$ elde edilir ve $\kappa = \ln 4$ ile Teorem 2.3.1 in tüm koşulları sağlanmış olur.

Durum (ii): $\omega \neq \frac{1}{2}$, $\wp = \frac{1}{2}$ olsun. O halde $\mathcal{Q}\omega = \frac{\omega}{16}$, $\mathcal{Q}\wp = \frac{1}{32}$ ve $\mathcal{K}\mathcal{Q}\wp = 0$ olur.

Böylece

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{k-1}} \min \left\{ \xi_{\rho} \left(\omega, \frac{\omega}{16} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{1}{32}, 0 \right) \right\} \leq \xi_{\rho} \left(\omega, \frac{1}{32} \right)$$

dir ve

$$\frac{1}{2^k} \min \left\{ \frac{15^k}{2^{4k}\wp}, \frac{1}{2^{5k}\wp} \right\} = \frac{1}{2^{6k}\wp} \leq \frac{(32\omega - 1)^k}{2^{5k}\wp}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\kappa + F\left(2^{2k-2}\xi_\rho\left(\frac{\omega}{16}, 0\right)\right) \leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho\left(\omega, \frac{1}{32}\right)\right)\right. \\ \left.\text{maks}\left\{\xi_\rho\left(\omega, \frac{1}{32}\right), \xi_\rho\left(\omega, \frac{\omega}{16}\right), \xi_\rho\left(\frac{1}{32}, 0\right), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, 0) + \xi_{2\rho}\left(\frac{1}{32}, \frac{\omega}{16}\right)}{2 \cdot 2^{k-1}}\right\}\right)$$

olur. Buradan

$$\kappa + F\left(\frac{\omega}{2^{2k+2}\rho}\right) \leq F\left(\frac{4^k}{15^k} \cdot \frac{(32\omega - 1)^p}{2^{5k}\rho}\right)$$

dir ve $F(\alpha) = \ln \alpha$ olduğu uygulanırsa

$$\kappa \leq \ln \frac{4^k}{15^k} + \ln \frac{(32\omega - 1)^k}{\omega^k} + \ln \frac{2^{2k+2}\rho}{2^{5k}\rho} \leq \ln \left(\frac{16}{15}\right)^k 4$$

elde edilir. Sonuç olarak $\kappa = \ln 4$ için bu durumda da tüm koşullar sağlanır.

Durum (iii): $\omega \neq \frac{1}{2}$, $\wp \neq \frac{1}{2}$ ise $\mathcal{Q}\omega = \frac{\omega}{16}$, $\mathcal{Q}\wp = \frac{\wp}{16}$ ve $\mathcal{K}\mathcal{Q}\wp = 0$ olur. Bu takdirde

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{k-1}} \min\left\{\xi_\rho\left(\omega, \frac{\omega}{16}\right), \xi_\rho\left(\frac{\wp}{16}, 0\right)\right\} \leq \xi_\rho\left(\omega, \frac{\wp}{16}\right)$$

dir ve böylece

$$\frac{1}{2^k} \min\left\{\frac{15^k}{2^{4k}\rho}, \frac{\wp^k}{2^{4k}\rho}\right\} = \frac{\wp^k}{2^{5k}\rho} \leq \frac{(16\omega - \wp)^k}{2^{4k}\rho}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\omega > \frac{1}{2}$ ve $\wp < \frac{1}{2}$ olduğundan benzer şekilde

$$\kappa + F\left(2^{2k-2}\xi_\rho\left(\frac{\omega}{16}, 0\right)\right) \leq F\left(\mathcal{U}\left(\xi_\rho\left(\omega, \frac{\wp}{16}\right)\right)\right)$$

$$\text{maks} \left\{ \xi_{\rho} \left(\omega, \frac{\wp}{16} \right), \xi_{\rho} \left(\omega, \frac{\omega}{16} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{\wp}{16}, 0 \right), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, 0) + \xi_{2\rho} \left(\frac{\wp}{16}, \frac{\omega}{16} \right)}{2 \cdot 2^{k-1}} \right\}$$

bulunur. Basit hesaplamalar ile

$$\kappa + F \left(\frac{\omega}{2^{2k+2}\rho} \right) \leq F \left(\frac{4^k}{15^k} \cdot \frac{(16\omega - 1)^k}{2^{4k}\rho} \right).$$

olur. Bu ise

$$\kappa \leq \ln \frac{4^k}{15^k} + \ln \frac{(16\omega - \wp)^k}{\omega^k} + \ln \frac{2^{2k+2}\rho}{2^{4k}\rho} \leq \ln \left(\frac{16}{15} \right)^k 4$$

dir ve bu durum için de $\kappa = \ln 4$ için tüm koşullar sağlanmış olur.

Durum (iv): Son durumda $\omega = \frac{1}{2}$, $\wp \neq \frac{1}{2}$ olsun. O halde $Q\omega = \frac{1}{32}$, $Q\wp = \frac{\wp}{16}$ ve $KQ\wp = 0$ bulunur. Böylece

$$\frac{1}{2 \cdot 2^{k-1}} \min \left\{ \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{\wp}{16}, 0 \right) \right\} \leq \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{\wp}{16} \right)$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{2^k} \min \left\{ \frac{15^k}{2^{5k}\rho}, \frac{\wp^k}{2^{4k}\rho} \right\} = \frac{\wp^k}{2^{5k}\rho} \leq \frac{(16 - 2\wp)^k}{2^{5k}\rho}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde

$$\kappa + F \left(2^{2k-2} \xi_{\rho} \left(\frac{1}{32}, 0 \right) \right) \leq F \left(\upsilon \left(\xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{\wp}{16} \right) \right) \right)$$

$$\text{maks} \left\{ \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{\wp}{16} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{32} \right), \xi_{\rho} \left(\frac{\wp}{16}, 0 \right), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, 0) + \xi_{2\rho} \left(\frac{\wp}{16}, \frac{\omega}{16} \right)}{2 \cdot 2^{k-1}} \right\}$$

olur. Devamında

$$\kappa + F\left(\frac{1}{2^{3k+2}\rho}\right) \leq F\left(\frac{4^k}{15^k} \cdot \frac{(8-\wp)^k}{2^{4k}\rho}\right)$$

bulunur ve bu da

$$\kappa \leq \ln \frac{4^k}{15^k} + \ln(8-\wp)^k + \ln \frac{2^{3k+2}\rho}{2^{4k}\rho} \leq \ln \left(\frac{16}{15}\right)^k 4$$

eşitsizliğinin $\kappa = \ln 4$ ile sağlandığını gösterir.

Sonuç olarak Teorem 2.3.1 in tüm şartları tüm durumlar için sağlanmış olduğundan $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri ortak bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu noktanın $\omega = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 2.3.12. Eğer Örnek 5.2.7 de $k = 1$ alınırsa $\xi_\rho(\omega, \wp) = \frac{|\omega-\wp|}{\rho}$ olur. Böylece $(\mathcal{S}, \xi)$ modüler metrik uzayı elde edilir. Ayrıca bir önceki örnekte $F(\alpha) = \ln \alpha$, $\mathcal{U}(\omega) = \frac{4}{5}$ ve $\kappa = \ln 2$ seçilirse modüler metrik uzay için de yukarıdaki örnek sağlanmış olur.

2.4. Genelleştirilmiş Suzuki Berinde $\hat{\mathcal{Z}}_{\Psi^*}^\Theta$ –Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

İlk olarak bu kısımda kullanılacak olan bazı yardımcı fonksiyon sınıfları tanımlanacaktır.

Ψ^* sınıfı, $\varphi(\iota) = 1 \Leftrightarrow \iota = 1$ olan $[1, +\infty)$ üzerindeki tüm sürekli ve kesin artan φ dönüşümlerinin sınıfını temsil etsin.

Şimdi simülasyon fonksiyonların ailesini genişletecek olan yeni fonksiyon sınıfı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4.1. $\hat{\mathcal{Z}}$ kümesi $\eta: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olan tüm dönüşümlerin bir ailesi olsun ve $\varphi \in \Psi^*$ var olsun. Bu durumda $\lambda \geq 1$ katsayısı için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$(\eta_1) \eta(1,1) = 1 \text{ dır.}$$

$$(\eta_2) \eta(\iota, \nu) < \frac{\varphi(\nu)}{\varphi(\iota)}, \quad \forall \iota, \nu > 1 \text{ dır.}$$

$$(\eta_2') \eta(\iota, \nu) < \frac{\varphi(\nu)}{\varphi(\tau^\lambda \iota)}, \quad \forall \iota, \nu > 1 \text{ dir.}$$

$(\eta_3) \forall n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\iota_n \leq \nu_n$ olacak şekilde herhangi $\{\iota_n\}, \{\nu_n\} \subset (1, \infty)$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\iota_n, \nu_n) < 1$$

olsun.

η fonksiyonu $(\eta_2) - (\eta_3)$ koşullarını sağlarsa genelleştirilmiş Ψ^* –simülasyon fonksiyonu ve $(\eta_2') - (\eta_3)$ koşullarını sağlarsa genelleştirilmiş $\Psi^* - \tau$ simülasyon fonksiyonu olarak adlandırılır.

Ayrıca $t \geq 1$ için $\varphi(\iota) = \iota$ alınır ve $(\eta_1) - (\eta_2) - (\eta_3)$ koşulları sağlanırsa $\eta \in \mathcal{Z}$ fonksiyonu S. H. Cho [46] tarafından tanımlanan genelleştirilmiş simülasyon fonksiyon sınıfına indirgenir.

Genelleştirilmiş Ψ^* –simülasyon ve $\Psi^* - \tau$ simülasyon sınıflarına ait bazı örnekler aşağıdaki gibi verilir.

Örnek 2.4.2. $\eta_a, \eta_b, \eta_c, \eta_d: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(e_1) \text{ Her } \iota, \nu \geq 1 \text{ ve } \alpha \in (0, 1) \text{ için } \eta_a(\iota, \nu) = \frac{\alpha \varphi(\nu)}{\varphi(\tau \iota)} \text{ dir.}$$

$(e_2) \phi^{-1}(\{1\}) = 1$ olan $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ azalmayan ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\iota, \nu \geq 1$ ve $\lambda \geq 1$ sabiti için

$$\eta_b(\iota, \nu) = \frac{\varphi(\nu)}{\varphi(\tau^\lambda \iota) \phi(\nu)} \text{ dir.}$$

$(e_3) \text{ Her } \nu > 0 \text{ için } \phi(\nu) < \varphi(\nu) \text{ olan } \phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty) \text{ sürekli bir fonksiyon olsun.}$

$$\text{Bu durumda her } \iota, \nu \geq 1 \text{ ve } \lambda \geq 1 \text{ sabiti için } \eta_c(\iota, \nu) = \frac{\phi(\nu)}{\varphi(\tau^\lambda \iota)} \text{ dir.}$$

$(e_4) k \geq 1$ ve $p \in (0, 1)$ olmak üzere her $\iota, \nu \geq 1$ için

$$\eta_d(\iota, \nu) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \eta(\iota, \nu) = 1 \\ \frac{\varphi(\nu)}{k\varphi(\iota)} & \text{eğer } \nu < \iota \\ \frac{[\varphi(\nu)]^p}{\varphi(\iota)} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dir.

Bu durumda $\eta_a, \eta_b, \eta_c, \eta_d$ fonksiyonları genelleştirilmiş $\Psi^* - \tau$ simülasyon fonksiyondur. Ayrıca $\tau = 1$ alınırsa yukarıdaki örnekteki fonksiyonlar genelleştirilmiş $\Psi^* - \text{simülasyon}$ fonksiyonu olur.

Tanım 2.4.3. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi $\tau \geq 1$ sabiti ile modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$G(\omega, \wp) = \left(\xi_\rho(\omega, \wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp) + \xi_{2\rho}(\wp, \mathcal{Q}\omega)}{2\tau} \right)$$

ve

$$N(\omega, \wp) = \min\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\wp, \mathcal{Q}\omega)\}$$

iken

$$\eta\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp)\right), \left[\gamma(G(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp))\right]^k\right) \geq 1, \quad (2.69)$$

olan $\eta \in \hat{Z}$, $k \in (0,1)$, $p \geq 0$ sabiti, $\gamma \in \Theta$ ve $G \in \Delta_G$ varsa $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine genelleştirilmiş Suzuki Berinde $\hat{Z}_{\Psi^*}^\Theta$ –daralma adı verilir.

Teorem 2.4.4. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ genelleştirilmiş Suzuki Berinde $\hat{Z}_{\Psi^*}^\Theta$ –daralma olsun. (M_1) şartı da sağlanırsa $u \in C_{Fix}(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$ olan $u \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır. Ayrıca (M_2) şartı da eklenirse $C_{Fix}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}) = \{u\}$ olur.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\xi^*$ keyfi bir nokta ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{2n+1} = \mathcal{Q}\omega_{2n} \text{ ve } \omega_{2n+2} = \mathcal{K}\omega_{2n+1}$$

olarak tanımlansın. Bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\omega_{n_0} = \omega_{n_0+1}$ ise n_0 noktasına $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\omega_k \neq \omega_{k+1}$ olsun. Bu durumda her $\rho > 0$ için $\xi_\rho(\omega_k, \omega_{k+1}) > 0$ dir.

İspat dört adımda incelenecektir.

Adım (1): Her $\rho > 0$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_k, \omega_{k+1}) = 0$ olduğu gösterilsin.

İlk olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_\rho(\omega_{k+1}, \omega_{k+2}) < \xi_\rho(\omega_k, \omega_{k+1}) \quad (2.70)$$

olduğu göstermelidir. Bunun için bazı $n \in \mathbb{N}$ için $k = 2n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, \mathcal{Q}\omega_{2n}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \mathcal{K}\omega_{2n+1})\} \\ &= \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2})\} \\ &\leq \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \end{aligned}$$

dir ve böylece (2.69) ve (η_2') den

$$\begin{aligned} 1 &\leq \eta \left(\gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega_{2n}, \mathcal{K}\omega_{2n+1}) \right), (\gamma[G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + pN(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})])^k \right) \\ &< \frac{\varphi((\gamma[G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + pN(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})])^k)}{\varphi \left(\tau^\lambda \gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) \right) \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi \left(\tau^\lambda \gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) \right) \right) < \varphi((\gamma[G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + pN(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})])^k)$$

eşitsizliği kolayca yazılır. Ayrıca $\gamma \in \Theta$ ve $k \in (0,1)$ olduğundan φ fonksiyonunun özelliği de kullanılırsa

$$\tau^{4+\lambda} \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) < G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + pN(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \quad (2.71)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) &= \left(\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, Q\omega_{2n}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, K\omega_{2n+1}), \right. \\ &\quad \left. \frac{\xi_{2\rho}(\omega_{2n}, K\omega_{2n+1}) + \xi_{2\rho}(\omega_{2n+1}, Q\omega_{2n})}{2\tau} \right) \\ &= \left(\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}), \right. \\ &\quad \left. \frac{\xi_{2\lambda}(\omega_{2n}, \omega_{2n+2})}{2\tau} \right) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca (ξ_3) den $\xi_{2\rho}(\omega_{2n}, \omega_{2n+2}) \leq \tau[\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2})]$ olur. Böylece

$$G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) = \left(\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}), \right. \\ \left. \frac{\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2})}{2} \right)$$

bulunur. Şimdi $G \in \Delta_G$ olduğundan $\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \leq \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2})$ ise

$$\begin{aligned} G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) &= \left(\xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) \right) \\ &\leq \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} N(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) &= \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, Q\omega_{2n}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, K\omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, K\omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, Q\omega_{2n})\} \\ &= \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+2}), 0\} = 0 \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak son iki eşitsizlikten ve (2.71) den

$$\tau^{4+\lambda} \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) < \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2})$$

olur. Fakat $\tau, \lambda \geq 1$ olduğundan bu ifade bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olur. Yani (2.70) ifadesi k nın çift olduğu durumda sağlar. Benzer şekilde (2.70) ifadesi k nın tek olduğu durum içinde gösterilebilir. Böylece $\{\xi_\rho(\omega_n, \omega_{n+1})\}_{n \geq 1}$ dizisi azalmayan ve sıfır ile sınırlı bir dizidir. O halde $\rho > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) = \iota$ olan $\iota \geq 0$ reel sayısı vardır.

$\iota = 0$ olduğunu göstermek için $\iota > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki durum söz konusudur.

Durum (1): $\tau > 1$ olsun. (2.70) ifadesi sağlandığı için $G \in \Delta_G$ olduğundan

$$\begin{aligned} G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) &= (\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})) \\ &\leq \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.71) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\tau^{4+\lambda} \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) < \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})$$

olur. Eğer $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\tau^{4+\lambda} \iota < \iota$ bulunur. Fakat bu ifade bir çelişkidir.

Durum (2): $\tau = 1$ olsun. Bu durumda (2.69) ifadesinden

$$1 \leq \eta \left(\gamma \left(\xi_\rho(Q\omega_{2n}, \mathcal{K}\omega_{2n+1}) \right), (\gamma[G(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + pN(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})])^k \right)$$

olur. Benzer şekilde

$$1 \leq \eta \left(\gamma \left(\xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) \right), (\gamma[\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1})])^k \right) \quad (2.72)$$

bulunur ve böylece hem (η_2') özelliğinden hem de φ fonksiyonunun kesin artanlığından

$$\gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_{n+1}, \omega_{n+2})\right) < \left[\gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})\right)\right]^k \quad (2.73)$$

bulunur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\iota_n = \gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_{n+1}, \omega_{n+2})\right)$ ve $v_n = \left[\gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})\right)\right]^k$ olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1}) = \iota > 0$ olduğundan (γ_2) den $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})\right) \neq 1$ olur. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})\right) > 1$ dir. Buna göre (2.73) den

$$\iota_n = \gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_{n+1}, \omega_{n+2})\right) < \left[\gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})\right)\right]^k = v_n < \left[\gamma\left(\xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1})\right)\right]$$

bulunur. Buradan $n \rightarrow \infty$ için limit alınır $\gamma(r) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \gamma(r)$ elde edilir. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \gamma(r) > 1$ demektir. Böylece (η_3) şartından $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\iota_n, v_n) < 1$ olur. Fakat (2.72) den dolayı bu ifade bir çelişkidir.

Sonuç olarak her iki durumda da çelişkili bir sonuca ulaşılır. O halde $\iota = 0$ dir. Yani her $\rho > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\rho}(\omega_n, \omega_{n+1}) = 0 \quad (2.74)$$

dir.

Adım (2): $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğu göstermek için $\{\omega_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ξ –Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine $\{\omega_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ξ –Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için $n_q > m_q > q$ özelliğindeki pozitif tamsayıların $\{\omega_{2m_q}\}$ ve $\{\omega_{2n_q}\}$ alt dizileri

$$\xi_{\rho}\left(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q}\right) \geq \varepsilon \quad \text{ve} \quad \xi_{\rho}\left(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q-2}\right) < \varepsilon \quad (2.75)$$

ifadelerini her $\rho > 0$ için sağlasın. (2.75) ve modüler eşitsizliğinden

$$\varepsilon \leq \xi_{2\rho}\left(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q}\right) \leq \tau \xi_{\rho}\left(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q+1}\right) + \tau \xi_{2\rho}\left(\omega_{2n_q+1}, \omega_{2n_q}\right)$$

yazılır. Burada $q \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (2.74) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2n_q+1}, \omega_{2m_q}) \geq \frac{\varepsilon}{\tau} \quad (2.76)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2n_q}) &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2m_q}) + \tau^2 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q-2}) \\ &\quad + \tau^3 \xi_{\frac{\rho}{8}}(\omega_{2n_q-2}, \omega_{2n_q-1}) + \tau^3 \xi_{\frac{\rho}{8}}(\omega_{2n_q-1}, \omega_{2n_q}) \end{aligned}$$

olur ve $q \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2n_q}) \leq \tau^2 \varepsilon \quad (2.77)$$

dir. Dahası

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q}) &\leq \tau \xi_{\frac{\rho}{2}}(\omega_{2m_q}, \omega_{2n_q-2}) \\ &\quad + \tau^2 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\omega_{2n_q-2}, \omega_{2n_q-1}) + \tau^2 \xi_{\frac{\rho}{4}}(\omega_{2n_q-1}, \omega_{2n_q}) \end{aligned}$$

ifadesinde $q \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2n_q+1}) \leq \tau^2 \varepsilon \quad (2.78)$$

elde edilir. Ayrıca benzer yolla

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_\rho(\omega_{2m_q+1}, \omega_{2n_q+1}) \leq \tau^2 \varepsilon \quad (2.79)$$

olduğu kolayca gösterilir. $n_q > m_q > q$ olduğundan yeterince büyük $q \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} \min \left\{ \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, Q\omega_{2n_q} \right), \xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \mathcal{K}\omega_{2m_q-1} \right) \right\} \\ \leq \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

olduğu gösterilsin. Aslında $n_q > m_q$ ve $\{\xi_\rho(\omega_n, \omega_{n+1})\}_{n \geq 1}$ dizisi azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, Q\omega_{2n_q} \right) &= \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1} \right) \leq \xi_\rho \left(\omega_{2m_q+1}, \omega_{2m_q} \right) \\ &\leq \xi_\rho \left(\omega_{2m_q}, \omega_{2m_q-1} \right) = \xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \mathcal{K}\omega_{2m_q-1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} \min \left\{ \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, Q\omega_{2n_q} \right), \xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \mathcal{K}\omega_{2m_q-1} \right) \right\} &= \frac{1}{2\tau} \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, Q\omega_{2n_q} \right) \\ &= \frac{1}{2\tau} \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1} \right) \end{aligned}$$

olur. Şimdi yeterince büyük $q \in \mathbb{N}$ için $n_q > m_q > q$ ise

$$\xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1} \right) \leq \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right)$$

olduğu gösterilsin. (2.74) ifadesine göre herhangi $q > q_1$ için

$$\xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1} \right) < \frac{\varepsilon}{2\tau}$$

olan $q_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Benzer şekilde herhangi $q > q_2$ için

$$\xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2m_q} \right) < \frac{\varepsilon}{2\tau}$$

olan $q_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla herhangi $q > \max\{q_1, q_2\}$ ve $n_q > m_q > q$ için

$$\varepsilon \leq \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q} \right) \leq \tau \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) + \tau \xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2m_q} \right)$$

$$\leq \tau \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) + \tau \frac{\varepsilon}{2\tau}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\varepsilon}{2\tau} \leq \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right)$$

olur. Sonuç olarak herhangi $q > \max\{q_1, q_2\}$ ve $n_q > m_q > q$ için

$$\xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2\tau} \leq \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right)$$

ifadesi sağlanır. Yani (2.80) ifadesi sağlandığı ispatlanır. İspatın devamında (2.69) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \eta \left(\gamma \left(\tau^4 \xi_\rho \left(\mathcal{Q} \omega_{2n_q}, \mathcal{K} \omega_{2m_q-1} \right) \right), \left(\gamma \left[G \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) + pN \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) \right] \right)^k \right) \\ & \geq 1 \end{aligned}$$

olur. (η_2') özelliği kullanılır ve $k \in (0,1)$ ile φ ve γ fonksiyonlarının özellikleri de göz önünde bulundurulursa

$$\tau^{4+\lambda} \xi_\rho \left(\mathcal{Q} \omega_{2n_q}, \mathcal{K} \omega_{2m_q-1} \right) < G \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) + pN \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) \quad (2.81)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} & G \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right), \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \mathcal{Q} \omega_{2n_q} \right), \xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \mathcal{K} \omega_{2m_q-1} \right) \\ \frac{\xi_{2\rho} \left(\omega_{2n_q}, \mathcal{K} \omega_{2m_q-1} \right) + \xi_{2\rho} \left(\omega_{2m_q-1}, \mathcal{Q} \omega_{2n_q} \right)}{2\tau} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1} \right), \xi_\rho \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1} \right), \xi_\rho \left(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2m_q} \right) \\ \frac{\xi_{2\rho} \left(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q} \right) + \xi_{2\rho} \left(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2n_q+1} \right)}{2\tau} \end{array} \right) \end{aligned}$$

dir ve $q \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (2.74), (2.77), (2.78), (2.79) ifadeleri kullanılırsa

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} G(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1}) \leq \left(\tau^2 \varepsilon, 0, 0, \frac{\tau \varepsilon + \tau^2 \varepsilon}{2\tau} \right) \leq \tau^2 \varepsilon \quad (2.82)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} N(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1}) &= \min \left\{ \xi_\rho(\omega_{2n_q}, Q\omega_{2n_q}), \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, K\omega_{2m_q-1}), \right. \\ &\quad \left. \xi_\rho(\omega_{2n_q}, K\omega_{2m_q-1}), \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, Q\omega_{2n_q}) \right\} \\ &= \min \left\{ \xi_\rho(\omega_{2n_q}, \omega_{2n_q+1}), \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2m_q}), \right. \\ &\quad \left. \xi_\rho(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q}), \xi_\rho(\omega_{2m_q-1}, \omega_{2n_q+1}) \right\} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} N(\omega_{2n_q}, \omega_{2m_q-1}) = 0 \quad (2.83)$$

olur. Sonuç olarak (2.76), (2.82) ve (2.83) ifadeleri dikkate alındığında (2.81) ifadesinde $q \rightarrow \infty$ için limit alınır $\tau^{4+\lambda} \frac{\varepsilon}{\tau} < \tau^2 \varepsilon + p_0$ bulunur. Fakat bu bir çelişkidir. O halde $\{\omega_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir ξ -Cauchy dizisidir. Böylece $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinde ξ -Cauchy dizisidir. Ayrıca $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayının ξ -tamlığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = u$$

olan $u \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır.

Adım (3): $u \in C_{Fix}(Q, K)$ olduğu gösterilsin.

İlk olarak $u \in Fix(K)$ olduğu göstermek için $u \notin Fix(K)$ olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için aşağıdaki ifadelerin en az biri sağlansın.

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) \leq \xi_\rho(\omega_{2n}, u), \quad (2.84)$$

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \omega_{2n+2}) \leq \xi_\rho(\omega_{2n}, u). \quad (2.85)$$

Bazı $n_0 \geq 0$ için yukarıdaki eşitsizliklerin her ikisi de sağlanmasın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \xi_\rho(\omega_{2n_0}, \omega_{2n_0+1}) &\leq \tau \xi_\rho(\omega_{2n_0}, u) + \tau \xi_\rho(u, \omega_{2n_0+1}) \\ &< \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2n_0}, \omega_{2n_0+1}) + \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2n_0+1}, \omega_{2n_0+2}) \\ &< \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2n_0}, \omega_{2n_0+1}) + \frac{1}{2} \xi_\rho(\omega_{2n_0}, \omega_{2n_0+1}) \\ &= \xi_\rho(\omega_{2n_0}, \omega_{2n_0+1}) \end{aligned}$$

olur. Fakat bu bir çelişkidir. O halde eşitsizlikler doğrudur. Bu noktada aşağıdaki iki durum vardır.

Durum (3.1): Sonsuz çoklukta $n \geq 0$ için (2.84) sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, Q\omega_{2n}), \xi_\rho(u, \mathcal{K}u)\} &= \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(u, \mathcal{K}u)\} \\ &\leq \xi_\rho(\omega_{2n}, u) \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$\eta\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega_{2n}, \mathcal{K}u)\right), (\gamma[G(\omega_{2n}, u) + pN(\omega_{2n}, u)])^k\right) \geq 1$$

elde edilir. Benzer şekilde $k \in (0,1)$ ile $\varphi \in \Psi^*$ ve $\gamma \in \Theta$ olduğu dikkate alınır

$$\tau^{4+\lambda} \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \mathcal{K}u) < G(\omega_{2n}, u) + pN(\omega_{2n}, u), \quad (2.86)$$

bulunur. Bu ifade de

$$G(\omega_{2n}, u) = G\left(\begin{array}{c} \xi_\rho(\omega_{2n}, u), \xi_\rho(\omega_{2n}, Q\omega_{2n}), \xi_\rho(u, \mathcal{K}u), \\ \frac{\xi_{2\rho}(\omega_{2n}, \mathcal{K}u) + \xi_{2\rho}(u, Q\omega_{2n})}{2\tau} \end{array}\right)$$

$$= G \left(\frac{\xi_\rho(\omega_{2n}, u), \xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}), \xi_\rho(u, \mathcal{K}u), \tau[\xi_\rho(\omega_{2n}, \omega_{2n+1}) + \xi_\rho(\omega_{2n+1}, \mathcal{K}u)] + \xi_{2\rho}(u, \omega_{2n+1})}{2\tau} \right)$$

dir ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} G(u, \omega_{2n+1}) = G \left(0, 0, \xi_\rho(u, \mathcal{K}u), \frac{\xi_\rho(u, \mathcal{K}u)}{2} \right) \leq \xi_\rho(u, \mathcal{K}u) \quad (2.87)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} N(\omega_{2n}, u) &= \min\{\xi_\rho(\omega_{2n}, Q\omega_{2n}), \xi_\rho(u, \mathcal{K}u), \xi_\rho(\omega_{2n}, \mathcal{K}u), \xi_\rho(u, Q\omega_{2n})\} \\ &= \min\{\xi_\rho(x_{2n}, x_{2n+1}), \xi_\rho(u, \mathcal{K}u), \xi_\rho(\omega_{2n}, \mathcal{K}u), \xi_\rho(u, \omega_{2n+1})\} \end{aligned}$$

dir ve böylece

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} N(\omega_{2n}, u) = \min\{0, \xi_\rho(u, Qu), \xi_\rho(u, Qu), 0, 0\} = 0 \quad (2.88)$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.87) ve (2.88) ifadeleri ile $n \rightarrow \infty$ için (2.86) ifadesinde limit alınırsa $\tau^{4+\lambda}\xi_\rho(u, Qu) < \xi_\rho(u, Qu)$ çelişkili durumu ortaya çıkar. Dolayısıyla $u \in \text{Fix}(\mathcal{K})$ dir. Benzer yöntemle $u \in \text{Fix}(Q)$ olduğu da kolayca gösterilebilir.

Durum (3.2): (2.84) eşitsizliği sadece sonlu sayıda $n \geq 0$ için sağlansın. Bu durumda herhangi $n \geq 0$ için (2.85) ifadesinin sağlandığı $n_0 \geq 0$ bulunur. Fakat Durum (3.1) de olduğu gibi $u \in \text{Fix}(Q)$ veya $u \in \text{Fix}(\mathcal{K})$ olmadıkça (2.85) ayrıca bir çelişkiye sebep olur.

Sonuç olarak her iki durumda da $u \in C_{\text{Fix}}(Q, \mathcal{K})$ dir.

Adım (4): $\{u\} = C_{\text{Fix}}(Q, \mathcal{K})$ dir. Yani $C_{\text{Fix}}(Q, \mathcal{K})$ kümesinin tek elemanlı olduğu gösterilmelidir. Aksine $\{u, r\} = C_{\text{Fix}}(Q, \mathcal{K})$ olan $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayında $r \neq u$ olsun. Bu durumda

$$0 = \frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(u, Qu), \xi_\rho(r, \mathcal{K}r)\} \leq \xi_\rho(u, r)$$

dir ve böylece

$$\eta \left(\gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(Qu, \mathcal{K}r) \right), (\gamma[G(u, r) + pN(u, r)])^k \right) \geq 1 \quad (2.89)$$

olur. Burada

$$G(u, r) = G \left(\xi_\rho(u, r), \xi_\rho(u, Qu), \xi_\rho(r, \mathcal{K}r), \frac{\xi_{2\rho}(u, \mathcal{K}r) + \xi_{2\rho}(r, Qu)}{2\tau} \right) \leq \xi_\rho(u, r)$$

dir ve ayrıca

$$\begin{aligned} N(u, r) &= \min\{\xi_\rho(u, Qu), \xi_\rho(r, \mathcal{K}r), \xi_\rho(u, \mathcal{K}r), \xi_\rho(r, Qu)\} \\ &= \min\{0, 0, \xi_\rho(u, r), \xi_\rho(u, r)\} = 0 \end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak (η_2') özelliği kullanılır ve $k \in (0, 1)$ sabiti ile $\varphi \in \Psi^*$ ve $\gamma \in \Theta$ olduğu göz önüne alınırsa (2.89) eşitsizliğinden

$$\tau^{4+\lambda} \xi_\rho(u, r) < G(u, r) + pN(u, r)$$

elde edilir. Son olarak $G(u, r)$ ve $N(u, r)$ ifadelerinde bulunanlar yerine yazılırsa $\tau^{4+\lambda} \xi_\rho(u, r) < \xi_\rho(u, r)$ çelişkili durumu ortaya çıkar. Dolayısıyla $u = r$ ve $C_{Fix}(Q, \mathcal{K}) = \{u\}$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.4.4 den elde edilen birkaç sonuç verilecektir. Ayrıca bu sonuçlar literatürde elde edilmiş olan bazı sonuçları kapsar ve Teorem 2.4.4 ün uygulanabilirliğini ve geçerliliği ortaya koyar niteliktedir.

İlk olarak

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp)$$

ön koşulu kaldırılırsa aşağıdaki sonuç doğrudan Teorem 2.4.4 den elde edilir.

Sonuç 2.4.5. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\eta \left(\gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right), \left[\gamma(G(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)) \right]^k \right) \geq 1$$

olan $\eta \in \hat{Z}$, $k \in (0,1)$, $p \geq 0$ sabiti, $\gamma \in \Theta$ ve $G \in \Delta_G$ var olsun ve $G(\omega, \wp)$ ile $N(\omega, \wp)$ ifadeleri de Teorem 2.4.4 de tanımlandığı gibi olsun. O halde (M_1) şartı sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi en az bir elemana sahiptir. Ayrıca (M_2) şartı da eklenirse $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemana sahiptir.

Teorem 2.4.4 de $Q = \mathcal{K}$ alınırsa bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.6. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \xi_\rho(\omega, Q\omega) \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$G(\omega, \wp) = \left(\xi_\rho(\omega, \wp), \xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, Q\wp) + \xi_{2\rho}(\wp, Q\omega)}{2\tau} \right),$$

$$N(\omega, \wp) = \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, Q\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)\}$$

iken

$$\eta \left(\gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, Q\wp) \right), \left[\gamma(G(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)) \right]^k \right) \geq 1$$

olan $\eta \in \hat{Z}$, $k \in (0,1)$, $p \geq 0$ sabiti, $\gamma \in \Theta$ ve $G \in \Delta_G$ vardır. (M_1) şartı sağlanırsa $Fix(Q)$ kümesi en az bir elemana sahiptir. Ayrıca (M_1) şartının yanında (M_2) şartı da sağlanırsa $Fix(Q)$ kümesi tek elemandan oluşur.

Sonuç 2.4.7. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$G(\omega, \wp) = \max\left\{\xi_\rho(\omega, \wp), \xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp) + \xi_{2\rho}(\wp, \mathcal{K}\omega)}{2\tau}\right\},$$

$$N(\omega, \wp) = \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, Q\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)\}$$

iken

$$\eta\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, Q\wp)\right), \left[\gamma(G(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp))\right]^k\right) \geq 1$$

olan $\eta \in \hat{Z}$, $k \in (0,1)$, $p \geq 0$ sabiti, $\gamma \in \Theta$ ve $G \in \Delta_G$ var olsun. (M_1) şartı sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi en az bir elemana sahiptir. Ayrıca (M_2) şartı da eklenirse $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemana sahiptir.

İspat. Eğer $G \in \Delta_G$, $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \max\{\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4\}$ olarak alınırsa Teorem 2.4.4 e benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç 2.4.7 de olduğu gibi $G \in \Delta_G$, $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \iota_1$ olarak alınırsa bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.8. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$N(\omega, \wp) = \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)\}$$

iken

$$\eta\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)\right), \left[\gamma\left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)\right)\right]^k\right) \geq 1$$

olan $\eta \in \hat{\mathbb{Z}}$, $k \in (0,1)$, $p \geq 0$ sabiti, $\gamma \in \Theta$ ve $G \in \Delta_G$ var olsun. (M_1) ve (M_2) şartları sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemana sahiptir.

Şimdi genelleştirilmiş $\Psi^* - \tau$ simülasyon fonksiyonunun seçimine bağlı olarak ortaya çıkan yeni sonuçlar verilecektir.

İlk olarak Suzuki (φ, γ) –daralma dönüşümü olarak adlandırılan yeni bir kavram tanımlanacaktır.

Tanım 2.4.9. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi $\tau \geq 1$ sabiti ile modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$\varphi\left(\tau\gamma\left(\tau^4\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)\right)\right) \leq \alpha\varphi\left(\left[\gamma\left(\xi_\rho(\omega, \wp)\right)\right]^k\right) \quad (2.90)$$

olan $k \in (0,1)$ sabiti, $\varphi \in \Psi^*$, $\gamma \in \Theta$ ve $\alpha \in (0,1)$ varsa Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine Suzuki (φ, γ) –daralma dönüşümü adı verilir.

Sonuç 2.4.10. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ Suzuki (φ, γ) –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda (M_1) şartı sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi en az bir elemana sahiptir. Ayrıca (M_2) şartı da eklenirse $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemanlıdır.

İspat: Her $\iota, v > 1$ ve $\alpha \in (0,1)$ için $\eta(\iota, v) = \frac{\alpha\varphi(v)}{\varphi(\tau\iota)}$ olsun. Ayrıca $G \in \Delta_G$, $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \iota_1$ ve $p = 0$ alınırsa istenilen sonuç Teorem 2.4.4 den kolayca elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuç Suzuki (φ, γ) –daralma dönüşümünün bir genelleştirilmesidir ve Teorem 2.4.4 den kolayca elde edilebilir.

Sonuç 2.4.11. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$G(\omega, \wp) = \max \left\{ \xi_\rho(\omega, \wp), \xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp) + \xi_{2\rho}(\wp, \mathcal{K}\omega)}{2\tau} \right\}$$

iken

$$\varphi \left(\tau \gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right) \right) \leq \alpha \varphi \left([\gamma(G(\omega, \wp))]^k \right)$$

olan $k \in (0,1)$ sabiti, $\varphi \in \Psi^*$, $\gamma \in \Theta$, $G \in \Delta_G$ ve $\alpha \in (0,1)$ var olsun. Bu durumda (M_1) şartı sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi boş değildir. Ayrıca (M_2) şartı da eklenirse $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemanlıdır.

İspat. Sonuç 2.4.10 un ispatında olduğu gibi sadece $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \max\{\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4\}$ olarak alınırsa ispat açıktır. ■

Suzuki (φ, ϕ, γ) –daralma olarak adlandırılan yeni bir kavram daha verilecektir.

Tanım 2.4.12. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesi $\tau \geq 1$ sabiti ile modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$\varphi \left(\tau^\lambda \gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right) \right) \leq \phi \left([\gamma(\xi_\rho(\omega, \wp))]^k \right)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$, $\varphi \in \Psi^*$, $\gamma \in \Theta$ ve her $v > 0$ için $\phi(v) < \varphi(v)$ koşulunu sağlayan $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sürekli dönüşümü varsa Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümlerine Suzuki (φ, ϕ, γ) –daralma dönüşümü adı verilir.

Sonuç 2.4.13. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ Suzuki (φ, ϕ, γ) –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda (M_1) ve (M_2) şartları sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemanlıdır.

İspat. Her $\iota, v > 1$ için $\eta(\iota, v) = \frac{\phi(v)}{\varphi(\tau^\lambda \iota)}$ olsun. $G \in \Delta_G$, $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \iota_1$ ve $p = 0$ alınırsa Teorem 2.4.4 den ispat benzer şekilde yapılabilir. ■

Sonuç 2.4.14. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$G(\omega, \wp) = \max\left\{\xi_\rho(\omega, \wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \frac{\xi_{2\rho}(\omega, \mathcal{K}\wp) + \xi_{2\rho}(\wp, \mathcal{K}\omega)}{2\tau}\right\}$$

iken

$$\varphi\left(\tau^\lambda \gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp)\right)\right) \leq \phi\left([\gamma(G(\omega, \wp))]^k\right)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$, $\varphi \in \Psi^*$, $G \in \Delta_G$, $\gamma \in \Theta$ ve her $v > 0$ için $\phi(v) < \varphi(v)$ koşulunu sağlayan $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sürekli dönüşümü var olsun. Bu durumda (M_1) ve (M_2) şartları ile $\mathcal{C}_{Fix}(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$ kümesi tek elemandan oluşur.

İspat. Sonuç 2.4.13 de olduğu gibi $G \in \Delta_G$, $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \max\{\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4\}$ olarak seçilirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Diğer yandan aşağıdaki teoremden Sonuç 2.4.8 in ifadesindeki k sabiti kaldırılırsa benzer sonuç elde edilir.

Teorem 2.4.15. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow$$

$$N(\omega, \wp) = \min\{\xi_\rho(\omega, \mathcal{Q}\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\omega, \mathcal{K}\wp), \xi_\rho(\wp, \mathcal{Q}\omega)\}$$

iken

$$\eta\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{K}\wp)\right), \gamma[\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)]\right) \geq 1 \quad (2.91)$$

olan $\eta \in \Psi^*$, $\gamma \in \Theta$ ve $p \geq 0$ sabiti var olsun. Bu durumda (M_1) şartı sağlanırsa $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi en az bir elemana sahiptir. Ayrıca (M_2) şartı da eklenirse $C_{Fix}(Q, \mathcal{K})$ kümesi tek elemana sahiptir.

İspat: (2.90) ifadesinden ve $\varphi \in \Psi^*$ olduğundan

$$\varphi\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)\right)\right) \leq \varphi\left(\left[\gamma\left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)\right)\right]^k\right)$$

elde edilir. $k \in (0,1)$ olduğundan

$$\varphi\left(\gamma\left(\tau^4 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)\right)\right) \leq \varphi\left(\gamma\left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)\right)\right)$$

bulunur. Böylece aynı koşullar altında yukarıdaki eşitsizlik (2.91) ifadesinden de elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı Sonuç 2.4.8 de ki gibi benzer adımlarla tamamlanır. ■

Örnek 2.4.16. $\mathcal{S}_\xi^* = [0,1]$ olsun. Her $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\rho > 0$ için modüler b –metriği

$$\xi_\rho(\omega, \wp) = \frac{|\omega - \wp|^2}{\rho}$$

ile tanımlansın. $\mathcal{S}_\xi^*$ kümesinin $\tau = 2$ sabiti ile ξ –tam modüler b –metrik uzay olduğu açıktır. Ayrıca $Q, \mathcal{K}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ dönüşümleri

$$Q\omega = \frac{\omega}{4} \text{ ve } \mathcal{K}\wp = 2\wp$$

olsun. Her $\iota, \nu > 1$ ve $\alpha \in (0,1)$ için $\eta(\iota, \nu) = \frac{\psi(\nu)^\alpha}{\psi(\iota)}$ ve $\psi \in \Psi^*$, $\psi(\iota) = \frac{\iota}{2}$ olarak seçilirse

$$\frac{1}{2\tau} \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp)\} \leq \xi_\rho(\omega, \wp) \Rightarrow \quad (2.92)$$

$$N(\omega, \wp) = \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, Q\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)\}$$

iken

$$\eta\left(\gamma\left(\tau^4\xi_\rho(Q\omega,\mathcal{K}\wp)\right),\gamma\left[\xi_\rho(\omega,\wp)+pN(\omega,\wp)\right]\right)\geq 1, \quad (2.93)$$

koşullarının sağlandığı sırası ile gösterilecektir. Ayrıca seçilen η fonksiyonunun genelleştirilmiş Ψ^* –simülasyon (ayrıca $\Psi^* - \tau$ simülasyon) fonksiyon sınıfına ait olduğu açıktır.

Diğer yandan $\gamma: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu $\gamma(\iota) = e^\iota$ ile tanımlansın. Şimdi (2.92) ifadesinin verilen fonksiyonlar altında sağlandığı gösterilsin. Bu durumda

$$\xi_\rho(\omega, Q\omega) = \frac{|\omega - Q\omega|^2}{\rho} = \frac{\left|\omega - \frac{\omega}{4}\right|^2}{\rho} = \frac{9\omega^2}{16\rho}$$

ve

$$\xi_\rho(\wp, \mathcal{K}\wp) = \frac{|\wp - \mathcal{K}\wp|^2}{\rho} = \frac{|\wp - 2\wp|^2}{\rho} = \frac{\wp^2}{\rho}$$

dir. Buradan (2.92) ifadesi

$$\frac{1}{4} \min\left\{\frac{9\omega^2}{16\rho}, \frac{\wp^2}{\rho}\right\} = \min\left\{\frac{9\omega^2}{64\rho}, \frac{\wp^2}{4\rho}\right\} \leq \frac{|\omega - \wp|^2}{\rho} \quad (2.94)$$

olur. $\omega > \wp \geq 0$ olduğunda aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Durum (1): $\min\left\{\frac{9\omega^2}{64\rho}, \frac{\wp^2}{4\rho}\right\} = \frac{\wp^2}{4\rho}$ olsun. Böylece (2.94) eşitsizliğinden

$$\frac{\wp^2}{4\rho} \leq \frac{(\omega - \wp)^2}{\rho} \Leftrightarrow \frac{\wp}{2} \leq |\omega - \wp| = \omega - \wp \Leftrightarrow \wp \leq \frac{2}{3}\omega < \omega$$

bulunur. $\wp < \omega$ olduğundan bu ifade sağlanır.

Durum (2): $\min\left\{\frac{9\omega^2}{64\rho}, \frac{\wp^2}{4\rho}\right\} = \frac{9\omega^2}{64\rho}$ ise (2.94) ifadesinden

$$\frac{9\omega^2}{64\rho} \leq \frac{(\omega - \wp)^2}{\rho} \Leftrightarrow \frac{3\omega}{8} \leq |\omega - \wp| = \omega - \wp \Leftrightarrow \wp \leq \frac{5}{8}\omega < \omega$$

dir ve $\wp < \omega$ olduğundan doğrudur.

Sonuç olarak her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve $\rho > 0$ için (2.92) ifadesi sağlanır.

Şimdi (2.93) ifadesinin de sağlandığı gösterilsin. Buna göre verilen modüler b –metrik tanımını ile Q ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri dikkate alınırsa

$$\xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) = \frac{|Q\omega - \mathcal{K}\wp|^2}{\rho} = \frac{\left|\frac{\omega}{4} - 2l\right|^2}{\rho} = \frac{(\omega - 8l)^2}{16\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} N(\omega, \wp) &= \min\{\xi_\rho(\omega, Q\omega), \xi_\rho(\wp, Q\wp), \xi_\rho(\omega, Q\wp), \xi_\rho(\wp, Q\omega)\} \\ &= \min\left\{\frac{\left|\omega - \frac{\omega}{4}\right|^2}{\rho}, \frac{|\wp - 2l|^2}{\rho}, \frac{|\omega - 2l|^2}{\rho}, \frac{\left|\wp - \frac{\omega}{4}\right|^2}{\rho}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{9\omega^2}{16\rho}, \frac{\wp^2}{\rho}, \frac{|\omega - 2l|^2}{\rho}, \frac{|4l - \omega|^2}{16\rho}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{\wp^2}{\rho}, \frac{|4l - \omega|^2}{16\rho}\right\} \end{aligned} \tag{2.95}$$

bulunur. Şimdi bu kısım için olası durumlar göz önüne alınsın.

Durum (3): $\omega < 4\wp$ olsun. O halde $|4\wp - \omega| = 4\wp - \omega$ olur. Dolayısıyla (2.95) ifadesi

$$\min\left\{\frac{\wp^2}{\rho}, \frac{|4l - \omega|^2}{16\rho}\right\} = \frac{(4l - \omega)^2}{16\rho}$$

olur. Böylece (2.93) ifadesi

$$\begin{aligned}
& \eta \left(\gamma \left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right), \gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp) \right) \right) \\
&= \frac{\Psi \left(\gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp) \right) \right)^\alpha}{\Psi \left(\gamma \left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right) \right)} \\
&= 2^{1-\alpha} \frac{e^{[\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)]\alpha}}{e^{\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)}} \\
&= 2^{1-\alpha} \frac{e^{\left[\frac{(\omega-\wp)^2}{\rho} + p \frac{(4l-\omega)^2}{16\rho} \right]\alpha}}{e^{2^3 \frac{(\omega-8l)^2}{16\rho}}} \\
&= 2^{1-\alpha} e^{\left[\frac{(\omega-\wp)^2}{\rho} + p \frac{(4l-\omega)^2}{16\rho} \right]\alpha - \frac{(\omega-8l)^2}{2\rho}} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $p = 2^4$ ve $\alpha = \frac{1}{2} \in (0,1)$ ile istenilen sonuçtur.

Durum (4): $4\wp < \omega$ olsun. Böylece $|4\wp - \omega| = \omega - 4\wp$ dir. Bu takdirde

$$\frac{\wp^2}{\rho} = \frac{|4l - \omega|^2}{16\rho}$$

olur. Şimdi aşağıdaki durumlar incelensin.

Durum (4.1): Eğer $\omega > 8\wp$ ise (2.95) ifadesi

$$\min \left\{ \frac{\wp^2}{\rho}, \frac{|4l - \omega|^2}{16\rho} \right\} = \frac{\wp^2}{\rho}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \eta \left(\gamma \left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right), \gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp) \right) \right) \\
&= \frac{\Psi \left(\gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp) \right) \right)^\alpha}{\Psi \left(\gamma \left(\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp) \right) \right)} \\
&= 2^{1-\alpha} \frac{e^{[\xi_\rho(\omega, \wp) + pN(\omega, \wp)]\alpha}}{e^{\tau^3 \xi_\rho(Q\omega, \mathcal{K}\wp)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{1-\alpha} \frac{e^{\left[\frac{(\omega-\wp)^2}{\rho} + p\frac{\wp^2}{\rho}\right]\alpha}}{e^{\frac{2^3(\omega-81)^2}{16\rho}}} \\
&= 2^{1-\alpha} e^{\left[\frac{(\omega-\wp)^2}{\rho} + p\frac{\wp^2}{\rho}\right]\alpha - \frac{(\omega-81)^2}{2\rho}} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

bulunur.

Durum (4.2): $\omega < 8\wp$ olması durumunda (2.95) ifadesi

$$\min \left\{ \frac{\wp^2}{\rho}, \frac{|41 - \omega|^2}{16\rho} \right\} = \frac{(41 - \omega)^2}{16\rho}$$

olur. Fakat bu ifadenin sağlandığı Durum (3) de açıktır.

Sonuç olarak her $\iota, \nu > 1$ ve $\alpha \in (0,1)$ için $\eta(\iota, \nu) = \frac{\psi(\nu)^\alpha}{\psi(\iota)}$ ve $\psi \in \Psi^*$, $\psi(\iota) = \frac{\iota}{2}$ olarak seçilirse $\mathcal{Q}$ ve $\mathcal{K}$ dönüşümleri Teorem 2.4.15 in tüm şartlarını sağlar ve $C_{Fix}(\mathcal{Q}, \mathcal{K}) = \{0\}$ dir.

2.4.1. İntegral Denklemler Üzerine Bir Uygulama

İlk olarak lineer olmayan denklemlere uygulanabilen yeni bir sonuca yer verilecektir.

Sonuç 2.4.17. $\mathcal{S}_\xi^*$ uzayı $\tau \geq 1$ ile ξ –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{Q}: \mathcal{S}_\xi^* \rightarrow \mathcal{S}_\xi^*$ bir dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\xi^*$ ve her $\rho > 0$ için

$$\eta \left(\gamma \left(\tau^4 \xi_\rho(\mathcal{Q}\omega, \mathcal{Q}\wp) \right), \left[\gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) \right) \right]^k \right) \geq 1$$

olan $\eta \in \Psi^*$, $\gamma \in \Theta$ ve $k \in (0,1)$ var olsun. Bu durumda (M_1) şartı sağlanırsa $Fix(\mathcal{Q})$ kümesi en az bir elemana sahiptir. Ayrıca (M_1) şartının yanında (M_2) şartı da sağlanırsa $Fix(\mathcal{Q})$ kümesi tek elemandan oluşur.

İspat. Eğer Suzuki ön koşulu olmaksızın $G \in \Delta_G$, $G(\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = \iota_1$ ve ayrıca, Teorem 2.4.4 de $p = 0$ ve $\mathcal{Q} = \mathcal{K}$ alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

■

Sonuç 2.4.17 dikkate alınarak aşağıdaki lineer olmayan integral denkleminin çözümü için bir varlık teoremi aşağıdaki şekilde verilir.

$\hat{a} < \hat{b}$ ile $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$, $\omega \in C[\hat{a}, \hat{b}]$ (burada $[\hat{a}, \hat{b}]$ den $\mathbb{R}$ ye olan tüm sürekli fonksiyonların kümesi) ve $\mathfrak{I}: [\hat{a}, \hat{b}] \times [\hat{a}, \hat{b}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü için

$$\omega(\iota) = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathfrak{I}(\iota, \nu, \omega(\nu)) d\nu \quad (2.96)$$

integral denklemi verilsin. $\mathcal{S}_{\xi}^* = C[\hat{a}, \hat{b}]$ ve her $x, y \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ için modüler b – metriği

$$\xi_{\rho}(x, y) = \frac{|x(\iota) - y(\iota)|^p}{\rho}, (p > 1)$$

ile tanımlansın. $\mathcal{S}_{\xi}^*$ kümesi $\tau = 2^{p-1}$ ile ξ – tam modüler b – metrik uzay olduğu açıktır.

Dahası $f: \mathcal{S}_{\xi}^* \rightarrow \mathcal{S}_{\xi}^*$ fonksiyonu her $x, y \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ ve $\iota \in [\hat{a}, \hat{b}]$ için

$$f(\omega(\iota)) = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathfrak{I}(\iota, \nu, \omega(\nu)) d\nu$$

ile tanımlansın. Buna göre (2.96) ifadesindeki çözümün varlığı f fonksiyonunun sabit noktasının varlığına denktir.

Teorem 2.4.18. (2.96) lineer olmayan integral denklemi için aşağıdaki koşullar sağlansın.

- (i) $\mathfrak{I}: [\hat{a}, \hat{b}] \times [\hat{a}, \hat{b}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve azalmayandır,
- (ii) Her $\iota, \nu \in [\hat{a}, \hat{b}]$ ve her $w \in [\hat{a}, \hat{b}]$ de $\omega(w) \leq \wp(w)$ koşulu ile $\omega, \wp \in \mathcal{S}_{\xi}^*$ için

$$|\mathfrak{I}(\iota, \nu, \omega(\nu)) - \mathfrak{I}(\iota, \nu, \wp(\nu))| \leq \sigma(\iota, \nu) |\omega(\nu) - \wp(\nu)| \quad (2.97)$$

olan $p > 1$ vardır ve burada $\sigma: [\hat{a}, \hat{b}] \times [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\sup_{\iota \in [\hat{a}, \hat{b}]} \left(\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \sigma(\iota, v)^p dv \right) \leq \frac{k}{2^{4p-4}}, \quad (k \in (0,1)) \quad (2.98)$$

biçiminde tanımlansın.

Bu durumda (2.96) lineer olmayan integral denklemi bir çözüme sahiptir.

İspat. (2.97) ve (2.98) dikkate alındığında her $\iota \in [\hat{a}, \hat{b}]$ için

$$\begin{aligned} e^{2^{4p-4} \xi_\rho(f(\omega(\iota)), f(\wp(\iota)))} &= e^{2^{4p-4} p \frac{|f(\omega(\iota)) - f(\wp(\iota))|^p}{\rho}} \\ &= e^{2^{4p-4} \cdot p \cdot \frac{1}{\rho} \left| \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \Im(\iota, v, \omega(v)) dv - \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \Im(\iota, v, \wp(v)) dv \right|^p} \\ &\leq e^{2^{4p-4} \cdot p \cdot \frac{1}{\rho} \left| \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\Im(\iota, v, \omega(v)) - \Im(\iota, v, \wp(v))] dv \right|^p} \\ &\leq e^{2^{4p-4} \cdot p \cdot \frac{1}{\rho} \left(\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |\Im(\iota, v, \omega(v)) - \Im(\iota, v, \wp(v))| dv \right)^p} \\ &\leq e^{2^{4p-4} \cdot p \cdot \frac{1}{\rho} \left(\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \sigma(\iota, v) |\omega(v) - \wp(v)| dv \right)^p} \\ &\leq e^{2^{4p-4} \cdot p \cdot \left(\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \sigma(\iota, v)^p dv \right) \frac{|\omega(v) - \wp(v)|^p}{\rho}} \\ &\leq e^{2^{4p-4} \cdot p \cdot \frac{k}{2^{4p-4}} \xi_\rho(\omega(\iota), \wp(\iota))} \\ &= \left[(e^{\xi_\rho(\omega(\iota), \wp(\iota))})^k \right]^p \end{aligned}$$

bulunur $\eta(x, y) < \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}, (\forall x, y > 1)$ ve burada $\varphi \in \Psi^*$, $\varphi(q) = q^p, (q > 1)$ ile tanımlansın. Ayrıca $\gamma \in \Theta$, $\gamma(\alpha) = e^\alpha, (\alpha > 0)$ olarak alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi \left(\gamma \left(2^{4p-4} \xi_\rho \left(f(\omega(\iota)), f(\wp(\iota)) \right) \right) \right) &= \left(\gamma \left(2^{4p-4} \xi_\rho \left(f(\omega(\iota)), f(\wp(\iota)) \right) \right) \right)^p \\ &= e^{2^{4p-4} \xi_\rho(f(\omega(\iota)) - f(\wp(\iota)))^p} \\ &\leq \left[(e^{\xi_\rho(\omega(\iota), \wp(\iota))})^k \right]^p \\ &= \left(\left[\gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) \right) \right]^k \right)^p \end{aligned}$$

$$= \varphi \left(\left[\gamma \left(\xi_\rho(\omega, \wp) \right) \right]^k \right)$$

ifadesinden Sonuç 2.4.17 nin tüm koşullarının sağlandığı açıktır. Sonuç olarak $\omega \in \text{Fix}(f)$ olan bir tek $\omega \in \mathcal{S}_\xi^*$ vardır. Dolayısıyla ω noktası (2.96) lineer olmayan integral denklemin tek çözümüdür.

2.5. Genelleştirilmiş Simülasyon Θ_E^β –Daralma Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Sonuçları

Tanım 2.5.1. $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ kümesi $\tau \geq 1$ sabiti ile $\mathfrak{B}\mathcal{M}_b$ (Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzay) ve $Q: \mathcal{S}_\mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}_\mathfrak{B}$ iki dönüşüm olsun. Her farklı $\omega, \wp \in \mathcal{S}_\mathfrak{B}$ ve her $\rho > 0$ için

$$e(\omega, \wp) = \frac{1}{\tau} [d(\omega, \wp) + |d(\omega, Q\omega) - d(\wp, Q\wp)|]$$

iken

$$\zeta \left(\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(Q\omega, Q\wp) \right), \left[\gamma \left(\beta(e(\omega, \wp))e(\omega, \wp) \right) \right]^k \right) \geq 1 \quad (2.99)$$

olan $\zeta \in \mathcal{Z}$, $\gamma \in \widehat{\Theta}$, $k \in (0,1)$ ve $\beta \in B_\tau$ varsa Q dönüşümüne genelleştirilmiş simülasyon $\widehat{\Theta}_E^\beta$ –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.5.2. $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ uzayı $\mathfrak{B}$ –tam $\mathfrak{B}\mathcal{M}_b$ ve $Q: \mathcal{S}_\mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}_\mathfrak{B}$ genelleştirilmiş simülasyon $\widehat{\Theta}_E^\beta$ –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda Q dönüşümü $\mathcal{S}_\mathfrak{B}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\omega_0 \in \mathcal{S}_\mathfrak{B}$ keyfi bir nokta olsun ve $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $n \geq 0$ için $\omega_{n+1} = Q\omega_n$ ile tanımlansın. Bu durumda $\omega_{n_0} = \omega_{n_0+1}$ olan ω_{n_0} elemanı varsa bu nokta Q dönüşümünün sabit noktası olur. $n \geq 0$ için $\omega_n \neq \omega_{n+1}$ olsun.

İspat beş adımda tamamlanacaktır.

Adım 1: $n \rightarrow \infty$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) \rightarrow 0$ mıdır?

(2.99) ifadesinden

$$\zeta \left(\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(Q\omega_{n-1}, Q\omega_n) \right), \left[\gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n)) \mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n) \right) \right]^k \right) \geq 1$$

dir ve (ζ_2) den yukarıdaki ifade

$$1 \leq \frac{\left[\gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n)) \mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n) \right) \right]^k}{\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) \right)}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) \right) &\leq \left[\gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n)) \mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n) \right) \right]^k \\ &< \gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n)) \mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n) \right), \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n) &= \frac{1}{\tau} \left[\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) + \left| \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, Q\omega_{n-1}) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_n, Q\omega_n) \right| \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) + \left| \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) \right| \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\kappa_n = \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n)$ olsun. O halde (2.100) ifadesinde $\kappa_n \leq \kappa_{n+1}$ alınır ve $\beta \in B_\tau$ olduğu dikkate alınır

$$\gamma(\kappa_{n+1}) \leq \tau \gamma(\kappa_{n+1}) < \left[\gamma \left(\beta \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\tau} \right) \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\tau} \right) \right) \right]^k$$

bulunur. Böylece yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın logaritması alınır

$$\ln[\gamma(\kappa_{n+1})] \leq k \ln \left[\beta \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\tau} \right) \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\tau} \right) \right]$$

olur. Fakat $k \in (0,1)$ için bu ifade bir çelişkidir. Dolayısıyla $\kappa_n < \kappa_{n+1}$ dir ve $\mathbf{e}(\omega_{n-1}, \omega_n) = \frac{1}{\tau} [2\kappa_n - \kappa_{n+1}]$ bulunur.

Sonuç olarak $\kappa_n = \{\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n)\}$ reel sayıların pozitif artmayan bir dizisidir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) = r$ olan $r \geq 0$ reel sayısı vardır. $r = 0$ olduğu göstermek için iki muhtemel durum vardır.

Durum 1: $\tau > 1$ olsun. Bu durumda (2.99) ifadesinden

$$1 \leq \kappa \left(\tau \gamma(\kappa_{n+1}), \left[\gamma \left(\beta \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \right) \right]^k \right)$$

olur ve (ζ_2) den

$$1 \leq \frac{\left[\gamma \left(\beta \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \right) \right]^k}{\tau \gamma(\kappa_{n+1})}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \tau \gamma(\kappa_{n+1}) &\leq \left[\gamma \left(\beta \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \right) \right]^k \\ &< \gamma \left(\beta \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \right) \\ &< \gamma \left(\frac{2\kappa_n - \kappa_{n+1}}{\tau} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $n \rightarrow \infty$ için yukarıdaki ifadede limit alınırsa $\tau \gamma(r) < \gamma\left(\frac{r}{\tau}\right)$ çelişkisi elde edilir.

Durum 2: $\tau = 1$ ise (2.99) dan

$$1 \leq \kappa \left(\gamma(\kappa_{n+1}), \left[\gamma \left(\beta(2\kappa_n - \kappa_{n+1})(2\kappa_n - \kappa_{n+1}) \right) \right]^k \right)$$

bulunur. Burada $\iota_n = \gamma(\kappa_{n+1})$ ve $\nu_n = \left[\gamma \left(\beta(2\kappa_n - \kappa_{n+1})(2\kappa_n - \kappa_{n+1}) \right) \right]^k$ yazılır. O halde $\{\iota_n\}$ ve $\{\nu_n\}$ dizilerinin limiti birbirine eşit ve $\gamma(r)$ dir. Çünkü

$$\begin{aligned}
\gamma(\kappa_{n+1}) = \iota_n &\leq [\gamma(\beta(2\kappa_n - \kappa_{n+1})(2\kappa_n - \kappa_{n+1}))]^k = v_n \\
&< \gamma(\beta(2\kappa_n - \kappa_{n+1})(2\kappa_n - \kappa_{n+1})) \\
&< \gamma(2\kappa_n - \kappa_{n+1}),
\end{aligned}$$

ifadesinde limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\kappa_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(2\kappa_n - \kappa_{n+1})$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\gamma(r) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \gamma(r)$$

olur. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \gamma(r) > 1$ dir. O halde (ζ_3) den

$$1 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(\iota_n, v_n) < 1$$

çelişkisi ortaya çıkar. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+1}) \rightarrow 0 \tag{2.101}$$

bulunur.

Adım 2: $n \rightarrow \infty$ için $\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+2}) \rightarrow 0$ olsun. Bunu gösterebilmek için aksi düşünölsün. Bu durumda (2.99) dan

$$1 \leq \zeta\left(\tau\gamma\left(\mathfrak{B}_\rho(\mathcal{Q}\omega_{n-1}, \mathcal{Q}\omega_{n+1})\right), \left[\gamma\left(\beta(e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}))e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1})\right)\right]^k\right)$$

olur ve (ζ_2) ifadesinden

$$\tau\gamma\left(\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+2})\right) < \left[\gamma\left(\beta(e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}))e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1})\right)\right]^k,$$

$$\begin{aligned}
e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}) &= \frac{1}{\tau} [\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \mathcal{Q}\omega_{n-1}) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n+1}, \mathcal{Q}\omega_{n+1})|] \\
&= \frac{1}{\tau} [\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n+1}, \omega_{n+2})|]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\mathfrak{B}_3)$ koşulu kullanılarak ve $\beta \in B_\tau$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\tau\gamma(\omega_n, \omega_{n+2}) &< \gamma\left(\beta(e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}))e(\omega_{n-1}, \omega_{n+1})\right) \\
&< \gamma\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}(\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_{n+1}) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n+1}, \omega_{n+2})|)\right)\right] \\
&< \gamma\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\left(\tau\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) + \tau\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+2}) + \tau\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n+2}, \omega_{n+1})\right) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n-1}, \omega_n) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n+1}, \omega_{n+2})|\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Eğer bu ifadede her iki taraftan limit alınırsa bir çelişki ortaya çıkar. O halde $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \omega_{n+2}) = 0 \quad (2.102)$$

olur.

Adım 3. $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{B}$ –Cauchy dizisidir.

Aksine $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{B}$ –Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $n_k > m_k \geq k$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayıların $\{\omega_{m_k}\}$ ve $\{\omega_{n_k}\}$ alt dizileri

$$\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \geq \varepsilon \text{ ve } \mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k-1}) < \varepsilon \quad (2.103)$$

ifadeleri her $\rho > 0$ için sağlasın. Bu durumda (2.103) ve $(\mathfrak{B}_3)$ ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \\
&\leq \tau\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{m_k+1}) + \tau\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k+1}, \omega_{n_k+1}) + \tau\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n_k+1}, \omega_{n_k})
\end{aligned}$$

dir ve (2.101) ifadesi dikkate alınarak limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k+1}, \omega_{n_k+1}) \geq \frac{\varepsilon}{\tau} \quad (2.104)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\varepsilon \leq \mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \leq \tau \mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k-1}) + \tau \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n_k-1}, \omega_{n_k-2}) + \tau \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n_k-2}, \omega_{n_k})$$

olur. (2.101) ve (2.102) ifadelerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \leq \tau \varepsilon \quad (2.105)$$

elde edilir. (2.99) eşitsizliğinden

$$1 \leq \zeta \left(\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\mathcal{Q}\omega_{m_k}, \mathcal{Q}\omega_{n_k}) \right), \left[\gamma \left(\beta \left(\mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) \mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) \right]^k \right)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) &= \frac{1}{\tau} [\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \mathcal{Q}\omega_{m_k}) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n_k}, \mathcal{Q}\omega_{n_k})|] \\ &= \frac{1}{\tau} [\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k}, \omega_{m_k+1}) - \mathfrak{B}_\rho(\omega_{n_k}, \omega_{n_k+1})|] \end{aligned}$$

olur. (2.101) ve (2.105) ifadelerinden bir üstteki ifadede limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \leq \varepsilon \quad (2.106)$$

bulunur. (2.104), (2.106), $\gamma \in \widehat{\Theta}$ ve $\beta \in B_\tau$ ifadeleri ile (ζ_2) özelliğinden

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma \left(\beta \left(\mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) \mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) - \tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\mathcal{Q}\omega_{m_k}, \mathcal{Q}\omega_{n_k}) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\gamma \left(\beta \left(\mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) \mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) - \tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k+1}, \omega_{n_k+1}) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \gamma \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{e}(\omega_{m_k}, \omega_{n_k}) \right) - \liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\omega_{m_k+1}, \omega_{n_k+1}) \right) \\
&\leq \gamma \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \right) - \tau \gamma \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

çelişkisi ortaya çıkar. Bu durumda $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir $\mathfrak{B}$ –Cauchy dizisidir ve uzayın $\mathfrak{B}$ –tamlığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \mathfrak{z}$$

olan $\mathfrak{z} \in \mathcal{S}_\mathfrak{B}$ vardır.

Adım 4: $Q\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ olduğu gösterilsin. Yani $\mathfrak{z}$ noktası Q dönüşümünün sabit noktası mıdır?

$Q\mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}$ olsun. Bu durumda (2.99) ifadesinden

$$1 \leq \zeta \left(\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(Q\omega_n, Q\mathfrak{z}) \right), \left[\gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z})) \mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z}) \right) \right]^k \right)$$

olur ve (ζ_2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
&\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\omega_{n+1}, Q\mathfrak{z}) \right) < \left[\gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z})) \mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z}) \right) \right]^k < \gamma \left(\beta(\mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z})) \mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z}) \right), \\
&\mathbf{e}(\omega_n, \mathfrak{z}) = \frac{1}{\tau} \left[\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, \mathfrak{z}) + |\mathfrak{B}_\rho(\omega_n, Q\omega_n) - \mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, Q\mathfrak{z})| \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte limit alınır ve (2.101) ifadesi dikkate alınırsa

$$\tau \gamma \left(\mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, Q\mathfrak{z}) \right) < \gamma \left(\frac{1}{\tau^2} \mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, Q\mathfrak{z}) \right)$$

çelişkili ifadesi bulunur. Sonuç olarak $Q\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ dir.

Adım 5: Son olarak $\mathfrak{z}$ noktasının Q dönüşümünün tek sabit noktası olduğu göstermek için $\mathfrak{z}^* \neq \mathfrak{z}$ olan $\mathfrak{z}^* = Q\mathfrak{z}^*$ özellikli bir nokta var olsun. Bu durumda (2.99) ifadesinden

$$\tau\gamma\left(\mathfrak{B}_\rho(\mathcal{Q}\mathfrak{z}, \mathcal{Q}\mathfrak{z}^*)\right) < \gamma\left(\beta(\mathfrak{e}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^*))\mathfrak{e}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^*)\right),$$

$$\mathfrak{e}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^*) = \frac{1}{\tau} [\mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^*) + |\mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, \mathcal{Q}\mathfrak{z}) - \mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}^*, \mathcal{Q}\mathfrak{z}^*)|]$$

elde edilir. Fakat benzer şekilde bu ifade de limit alınırsa

$$\tau\gamma\left(\mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^*)\right) < \gamma\left(\frac{1}{\tau^2}\mathfrak{B}_\rho(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^*)\right)$$

eşitsizliği çelişkiye sebep olur. Yani $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^*$ dir. Böylece $\mathcal{Q}$ dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında modüler b –metrik uzaylar ve Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzaylar üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezin ilk kısmı olan genel bilgiler bölümünde sabit nokta kavramının doğuşu ve süreci hakkında bilgi verilmiştir. Metrik uzay kavramı ve metrik sabit nokta kavramı ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Son olarak graf teorisi, homotopi teorisi, integral denklemler ve genelleştirilmiş bazı metrik uzay kavramlarından bahsedilmiştir.

İkinci kısım olan ve bu tezin orijinal çalışmalarını içeren yapılan çalışmalar bölümünde ise sırası ile aşağıdaki sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

Tam modüler b –metrik uzaylarda öncelikle E –daralma dönüşüm dört dönüşüm için tanımlanarak Suzuki daralma ve simülasyon fonksiyonlarını da kullanılarak bu dönüşümler için ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. İki ve tek dönüşüm için bazı sonuçlar verilmiştir. Elde edilen sonuçlar graf teorisine uygulanmıştır. Ayrıca, E –daralma dönüşümü ile Banach daralma dönüşümü ispatlanmış ve sonuçları homotopi teorisine uygulanmıştır.

Modüler b –metrik uzaylarda Ξ tipindeki daralma dönüşümü dört dönüşüm ve τ katsayısı düşünülerek tekrar tanımlanmış ve C –sınıfı daralma dönüşümleri kullanılarak dört dönüşüm için tam modüler b –metrik uzaylarda ortak sabit nokta teoremi ispatlanmış ve sonuçları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar graf teorisine ve integral tipi daralma dönüşümlerine uygulanmıştır.

Tam modüler b –metrik uzaylarda F –daralma dönüşümü ve Suzuki tipindeki daralma dönüşümü göz önüne alınarak çarpımsal ifadeler içeren ortak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçların literatürde geçerliliğini göstermek için örnekler verilmiştir.

Simülasyon fonksiyon sınıfının bir genelleştirmesi olan $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon sınıfını kapsayan yeni bir genelleştirilmiş Ψ^* –simülasyon ve $\Psi^* - \tau$ simülasyon sınıfları tanımlanmıştır ve örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, $\Psi^* - \tau$ simülasyon sınıfı ve Θ –daralma dönüşümü göz önüne alınarak genelleştirilmiş Suzuki Berinde $\hat{Z}_{\Psi^*}^{\Theta}$ –daralma dönüşümü ifade edilmiştir. Modüler b –metrik uzaylarda genelleştirilmiş Suzuki Berinde $\hat{Z}_{\Psi^*}^{\Theta}$ –daralma dönüşümünü sağlayan ortak sabit nokta teoremi ispatlanmış ve literatürde

bilinen bazı sabit nokta sonuçlarının bir genelleştirmesi olan bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçların integral denklemlere uygulaması verilmiştir.

Branciari metrik ve modüler b –metrik uzay kavramları beraber düşünülerek Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzayı tanımlanmıştır ve bu uzayda bazı örnekler verilmiştir. Bu uzay üzerindeki topolojik kavramlardan bahsedilmiştir. Diğer yandan Z –simülasyon fonksiyon, Θ –daralma E –daralma ve Geraghty daralmalar göz önüne alınarak genelleştirilmiş simülasyon $\widehat{\Theta}_E^\beta$ –daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzayda genelleştirilmiş simülasyon $\widehat{\Theta}_E^\beta$ –daralma dönüşümünü sağlayan sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Sonuç olarak bu tezde ilk kez tanımlanmış olan $\widehat{Z}$ –simülasyon fonksiyon sınıfı aracılığı ile literatürde bulunan pek çok çalışma, metrik uzaylarda veya çeşitli genelleştirilmiş soyut metrik uzaylarda daha genel olarak elde edilebilir ve sabit (ortak) nokta teoremleri kurulabilir.

Ayrıca, ilk kez ortaya koyulan Branciari uzaklık fonksiyonu ile donatılmış modüler b –metrik uzay ile elde edilen örneklerin ve ispatlanan sabit nokta sonuçlarının ile bu alanda çalışmayı düşünen araştırmacılar için öncü ve yardımcı olacağı düşünülmektedir. Bu yeni kavramın literatür bilgisinin gelişmesinde ortaya koyulacak olan farklı yaklaşımlar ile gelecekte yeni bir çalışma alanı olacağı umut edilmektedir.

4. KAYNAKLAR

1. Brouwer, L. E. J., Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen, 71, 598 (1912) 97-115.
2. Kakutani, S., A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Mathematical Journal, 8, 3 (1941) 457–459.
3. Schauder, J. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. Studia Mathematica. 1930, 2, 171-180.
4. Şuhubi, E., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.
5. Sintunavarant, W., Fixed point theory and applications, Lecture Notes, 2020.
6. Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press., 1970.
7. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and New York, 1978.
8. Jain, P. K., Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.
9. Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, 2002.
10. Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Verlag, 2007.
11. V. W. Bryant, A remark on a fixed point theorem for iterated mappings, Am. Math. Mon 75 (1968) 399–400.
12. M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, J. Lond. Math. Soc. 37, (1962) 74–79,
13. Kannan, R: Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, (1968) 71-76
14. V. Subrahmanyam, Completeness and fixed-points, Monatsh. Math., 80, (1975), 325–330.
15. R. M. T. Bianchini, Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, Boll. Un. Mat. Ital., 5, (1972) 3–10.
16. Chatterjea, S. K., Fixed point theorem, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25, (1972) 727-730.
17. Reich, S., Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull. 14, (1971) 121–124.
18. Hardy, G. E. ve Rogers, T. D., A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 16, (1973) 201-206.
19. Ćirić, L., On contraction type mappings, Math. Balcanica, 1, (1971) 52–57.
20. Berinde, V., On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, Carpathian J. Math., 19, 1(2003) 722-732.
21. Babu, G.V.R., Sandhya, M.L. ve Kameswari, M.V.R., A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions, Carpathian J. Math., 24, 1 (2008) 8-12.

22. Suzuki, T., A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proceedings of the American Math. Soc., 136, (2008) 1861-1869.
23. Suzuki, T., A new type of fixed point theorem in metric spaces, Nonlinear Anal., 71, (2009) 5313–5317.
24. Jungck, G., Rhoades, B. E., Fixed Point for Set Valued Functions Without Continuity, Indian J. Pure Applied Math., 29, 3 (1998) 227-238.
25. Jungck, G., Commuting Mappings and Fixed Points, Amer. Math. Monthly, 83, (1976) 261-263.
26. Sessa, S., On a Weak Commutativity Condition of Mappings in Fixed Point Considerations, Publ. Inst. Math., 32, (1982) 149-153.
27. Chugh, R. ve Kumar, S., Common Fixed Points for Weakly Compatible Maps, Proc. Indian Acad. Sci., 111, 2 (2001) 241-247.
28. Ćirić, L., Abbas, M., Saadati, R. ve Hussain, N., Common fixed point of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces, Appl., Math., Comput., 217, (2011) 5784-5789.
29. Geraghty, M., On contractive mappings, Proceedings of American Math. Soc., 40, (1973) 604–608.
30. Huang, H., Paunovic L. ve Radenovic, S., On some new fixed point results for rational Geraghty contractive mappings in ordered b-metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, (2015) 800-807.
31. Branciari, A., A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, Int. J. Math. Math. Sci., 29, (2002) 531–536.
32. Liu, Z., Li, X., Kang, S. M. ve Cho, S. Y., Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type and applications, Fixed Point Theory and App., 64, (2011) 1-18.
33. Wardowski, D., Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 94, (2012) 1–6.
34. Minak, G., Helvacı, A. ve Altun, I., Ćirić type generalized F-contractions on Complete Metric Spaces and Fixed Point Results, Filomat, 28, 6 (2014) 1143-1151.
35. Hussain, N. ve Salimi, P., Suzuki–Wardowski type fixed point theorems for α -GF-contractions, Taiwanese J. Math., 18, 6 (2014) 1879–1895.
36. Ansari, A. H., Note on $\varphi - \psi$ – contractive type mappings and related fixed point, In The 2nd Regional Conference on Mathematics and Applications, 2014, Payame Noor University, 377–380.
37. Jleli, M. ve Samet, B., New generalization of the Banach contraction principle, J. Inequal. Appl., 38, (2014) 1-8.
38. Ahmad J., Al-Mazrooei, A. E., Yeol Je Cho, Y. J. ve Yang, Y. O., Fixed point results for generalized θ –contractions, J. Nonlinear Sci. Appl., 10, (2017) 2350–2358.
39. Khojasteh, F., Shukla, S. ve Radenovic, S., A new approach to the study of fixed point theorems for simulation functions, Filomat, 29, (2015) 1189–1194.

40. Argoubi, H., Samet, B. ve Vetro, C., Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, (2015) 1082–1094.
41. Roldan-Lopez-de-Hierro, A., F., Karapınar, E., Roldan-Lopez-de-Hierro, C. ve Martínez-Moreno, J., Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions, J. Comput. Appl. Math., 275, (2015) 345–355.
42. Joonaghany, G., H., Farajzadeh, A., Azhini, M. ve F. Khojasteh, A new common fixed point theorem for Suzuki type contractions via generalized Ψ –simulation functions, Sahand Com. in Math. Anal. (SCMA), 16, 1 (2019) 129–148.
43. Zoto, K., Mlaiki, N. ve Aydi, H., Related fixed point theorems via general approach of simulation functions, Journal of Mathematics, 2020, (2020) 1–12.
44. Isik, H., Gungor, N. B., Park, C. ve Jang, S. Y., Fixed Point Theorems for Almost Z –Contractions with an Application, Mathematics, 6, 3, 37 (2018) 1–8.
45. Mongkolkeha, C., Cho, Y., J. ve Kumam, P., Fixed point theorems for simulation functions in b –metric spaces via the w_t –distance, Applied General Topology, 1, 18 (2017) 91–105.
46. Cho, S., H., Fixed point theorem for Z –contraction generalized metric spaces, Abstract and Applied Analysis, 2018, (2018) 1–6.
47. Fulga, A. ve Proca, A., M., Fixed point for Geraghty ϑ_E –ontractions, J. Nonlinear Sci. Appl., 10, (2017) 5125–5131.
48. Fulga, A. ve Proca, A., M., A new Generalization of Wardowski fixed point theorem in complete metric spaces, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl., 1, (2017) 57–63.
49. Fulga, A. ve Karapınar, E., Some results on S –contractions of type E, Mathematics, 195, 6 (2018) 1–9.
50. Proca, A., M., Fixed point theorem for φ_M –Geraghty contraction, Scientific Research and Education in the Air Force–AFASES2018, (2018) 1–6.
51. Proca, A., M., New fixed point theorem for generalized contractions, Bull. Transilv. Univ. Bras. III: Math. Inform. Phys., 12, 61 (2019) 435–442.
52. Zoto, K., ve Sulaj, A., Related Fixed Point Theorems via a General Approach to Simulation Mappings in b –metric-like Spaces, AIP Conference Proceedings, 2333, 1 (2021) 1-9.
53. Jachymski, J., The contraction principle for mappings on a metric space endowed wit a graph, Proc. Amer. Math. Soc., 136, (2008) 1359-1373.
54. Johnsonbaugh, R., Discrete Mathematics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997.
55. Garnier, R. ve Taylor, J., Discrete mathematics for new technology, Adam Hilger Publishing, 1992.
56. Toroczkai, Z., Complex Networks The Challenge of Interaction Topology, Los Alamos Science, 29, 2005.
57. Aksoy, Y., İntegral denklemler, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım Yayın, Cilt: 1, 1998.

58. Vetro, C., ve Vetro F., A Homotopy Fixed Point Theorem in 0 –Complete Partial Metric Space, Filomat, 29, 9 (2015) 2037–2048.
59. Agarwal, P., Meehan, M. ve O'Regan, D., Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, United Kingdom, 2004.
60. Bakhtin, I., A., The contraction mapping principle in quasimetric spaces, Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst., 30, (1989) 26–37.
61. Czerwik, S., Contraction mappings in b –metric spaces, Acta. Math. Inform. Univ. Ostrav., 1, 1 (1993) 5–11.
62. Czerwik, S., Nonlinear set-valued contraction mappings in b –metric spaces, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, 46, (1998) 263–276.
63. Yamaod, O., Fixed Point and Common Fixed Point Theorems Using New Generalized Simulation Functions and CLR-Property With Applications, Doktora Tezi, Thammasat Üniversitesi, Fen Bilimleri, Tayland, 2017.
64. Aghajani, A., Abbas, M. ve Roshan, J., R., Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b –metric spaces, Math. Slovaca, 64, 4 (2014) 941–960.
65. Branciari, A., A fixed point theorem of Banach–Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, Publ. Math. Debrecen, 57, (2000) 31–37.
66. Chen, C. M., Common Fixed-Point Theorems in Complete Generalized Metric Spaces, J. Appl. Math., 2012, (2012) 1–14
67. Sharma, I. R., Rao, J. M. ve Rao, S. S., Contractions Over Generalized Metric Spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 2, 3 (2009) 180–182.
68. Samet, B., Discussion on “A fixed point theorem of Banach Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces” by A. Branciari, Publ. Math. Debrecen, 76, 4 (2010) 493–494.
69. George, R., Radenovic, S., Reshma, K. P. ve Shukla, S., Rectangular b –metric spaces and contraction principle, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, (2015) 1005–1013.
70. Gülyaz, S., Erhan, İ. M. ve Karapınar, E., Generalized α –Meir-Keeler Contraction Mappings on Branciari b –metric Spaces, Filomat, 31, 17 (2017) 5445–5456.
71. Chistyakov, V., V., Modular metric spaces, I: Basic concepts, Nonlinear Anal., 72, (2010) 1–14.
72. Chistyakov, V., V., Modular metric spaces, II: Application to superposition operators, Nonlinear Anal., 72, (2010) 15–30.
73. Chistyakov, V., V., Modular metric spaces generated by F –modulars, Folia Math., 15, (2008) 3–24.
74. Migdalas, A. ve Karakitsiou, A., Optimization, Control, and Applications in the Information Age, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2015.
75. Chistyakov, V. V., Metric Modular Spaces Theory and Applications, Springer, 2015.

76. Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W. ve Kumam, P., Fixed Point Theorems for Contraction Mappings in Modular Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl., 93, (2011) 1–9.
77. Abdou, A., A., N., Fixed points of Kannan maps in modular metric spaces, AIMS Mathematics, 5, 6 (2020) 6395–6403.
78. Aksoy, U., Karapınar, E. ve Erhan, I., M., Fixed Point Theorems in Complete Modular Metric Spaces and an Application to Anti-periodic Boundary Value Problems, Filomat, 31, 17 (2017) 5475–5488.
79. Aksoy, Ü., Karapınar, E., Erhan, I. M. ve Rakocevic, V., Meir–Keeler Type Contractions on Modular Metric Spaces, Filomat, 32, 10 (2018) 3697–3707.
80. Azadifar, B., Sadeghi, G., Saadati, R. ve Park, C., Integral type contractions in modular metric spaces, J. Inequalities Appl., 483, (2013) 1–14.
81. Chistyakov, V., V., Fixed points of modular contractive maps, Dokl. Math., 86, (2012) 515–518.
82. Ege, M., E. ve Alaca, C., Fixed point results and an application to homotopy in modular metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, 6 (2015) 900–908.
82. Girgin, E. ve Öztürk, M., $(\alpha, \beta) - \psi$ –(Type Contraction in Non–Archimedean Quasi Modular Metric Spaces and Applications, Journal of Mathematical Analysis, 10, 1 (2019) 19–30.
83. Girgin, E. ve Öztürk, M., Modified Suzuki–Simulation type contractive mapping in Non–Archimedean Quasi Modular Metric Spaces and application to graph theory, Mathematics, 7, 9 (2019) 1–14.
84. Hosseinzadeh, H. ve Parvaneh, V., Meir–Keeler type contractive mappings in modular and partial modular metric spaces, Asian–European Journal of Mathematics, 13, 5 (2020) 2050087.
85. Jleli, M., Karapınar, E. ve Samet, B., A best proximity point result in modular spaces with the Fatou property, Abstract and Applied Analysis, (2013) Article Id: 329451.
86. Lael, F., Saleem, N., Guran, L. ve Bota, M., F., Nadler’s theorem on incomplete modular space, Mathematics, 9, 16 (2021) 1927.
87. Okeke, G., A., Francis, D. ve De la Sen, M., Some fixed point theorems for mappings satisfying rational inequality in modular metric spaces with applications, Heliyon, 6, 8 (2020) e04785.
88. Ege, M., E. ve Alaca, C., Some results for modular b –metric spaces and an application to system of linear equations, Azerbaijan Journal of Mathematics, 8, 1 (2018) 3–14.
89. Parvaneh, V., Hussain, N., Khorshidi, M., Mlaiki, N. ve Aydi, H., Fixed point results for generalized F –contractions in modular b –metric spaces with applications, Mathematics, 7, 10 (2019) 1–16.
90. Büyükkaya, A. ve Öztürk, M., Generalized Simulative Geraghty Type E Contraction Mappings in Modular b –Metric Spaces Endowed with a Branciari Distance, ICRAPAM, Eylül 2021, Muğla, Bildiriler kitabı, 11-23.

91. Banach, S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales, Fund. Math., 1 (2012) 133–181.
92. Afshari, H., Aydi, H. ve Karapınar, E., On generalized α, ψ –Geraghty contractions on b –metric spaces, Georgian Math. Journal, 27, 1 (2020) 9–21.
93. Agarwal, R., P. ve Karapınar, E., Interpolative Rus–Reich–Ciric type contractions via simulation functions, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 27, 3 (2019) 137–152.
94. Alqahtani, B., Fulga, A. ve Karapınar, E., A short note on the common fixed points of the Geraghty contraction of type $E_{S,T}$, Demonstr. Math., 51, (2018) 233–240.
95. Alsulami, H. H., Karapınar, E. ve Piri, H., Fixed points of generalized F –Suzuki type contraction in complete b –metric spaces, Discrete Dyn. Nat. Soc., 2015 (2015) Article ID 969726, 1–8.
96. Antal, S. ve Gairola, U., C., Generalized Suzuki type Z –contraction in b –metric space, J. Nonlinear Sci. Appl., 13, (2020) 212–222.
97. Arshad, M., Ameer, E. ve Karapınar E., Generalized contractions with triangular α –orbital admissible mapping on Branciari metric spaces, J. Inequal. Appl., 2016, 63 (2016) 1–21.
98. Aydi, H., Bota, M., F., Karapınar, E. ve Moradi, S., A common fixed point for weak ϕ –contractions on b –metric spaces, Fixed Point Theory, 13, 2 (2012) 337–346.
99. Aydi, H., Felhi, A., Karapınar, E. ve Sahmim, S., A Nadler–type fixed point theorem in dislocated spaces and applications, Miskolc. Math. Notes, 19, (2018) 111–124.
100. Aydi, H., Karapınar, E. ve Rakocevic, V., Nonunique fixed point theorems on b –metric spaces via simulation functions, Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS), 12, 3 (2019) 265–288.
102. Babu, G., V., R. ve Mosissa, D., T., Fixed point in b –metric space via simulation function, Novi Sad J. Math., 47, (2017) 133–147.
103. Babu, G., V., R. ve Ratna Babu, D., Common Fixed Points of Geraghty–Suzuki Type Contraction Maps in b –Metric Spaces, Proceedings of International Mathematical Sciences, 1, (2020) 26–47
104. Bashir, S., Saleem, N. ve Husnine, S., M., Fixed point results of a generalized reversed F –contraction mapping and its application, AIMS Mathematics, 6, 8 (2021) 8728–8741.
105. Bashir, S., Saleem, N., Aydi, H., Husnine S., M. ve Rwaily, A., A., Developments of some new results that weaken certain conditions of fractional type differential equations, Advances in Difference Equations, 1, (2021) 1–25.
106. Chandok, S., Chanda, A., Dey, L., K., Pavlovic, M. ve Radenovic, S., Simulation Functions and Geraghty Type Results, Bol. Soc. Paran. Mat., ISSN-2175-1188, (2018) 1–16.
107. Ciric, L., On contraction type mappings, Math. Balcanica, 1, (1971) 52–57.
108. Dung, N., V. ve Hang, V., T., L., A Fixed Point Theorem for Generalized F –Contractions on Complete Metric Spaces, Vietnam J. Math., 43, (2015) 743–753.

109. Gopal, D., Vetro, C., Abbas, M. ve Patel, D., K., Some coincidence and periodic points results in a metric space endowed with a graph and applications, Banach J. Math. Anal., 9, (2015) 128–140.
110. Huang, H., Paunovic, L. ve Radenovic, S., On some new fixed point results for rational Geraghty contractive mappings in ordered b –metric spaces, J. Nonlinear Science and Appl., 8, (2015) 800–807.
111. Hussain, N., Arshad, M., Abbas, M. ve Hussain, A., Generalized dynamic process for generalized (f, L) –almost F –Contractions with applications, J. Nonlinear Sci. Appl., 9, (2016) 1702–1715.
112. Hussain, A., Arshad, M. ve Nazam, M., Connection of Ciric type F –Contraction involving Fixed Point on Closed Ball, Gazi University Journal of Science, 30, 1 (2017) 283–291.
113. Işık, H., Parvaneh, V., Mohammadi, B. ve Altun, I., Common fixed point results for generalized Wardowski type contractive multi-valued mappings, Mathematics, 7, 11, 1130 (2019) 1–12.
114. Kalsoom, A., Saleem, N., Işık, H., Al-Shami, T., M., Bibi, A. ve Khan, H., Fixed point approximation of monotone nonexpansive mappings in hyperbolic spaces, Journal of Function Spaces, 2021, Article ID 3243020 (2021) 1–14.
115. Karapınar, E. ve Samet, B., Generalized $(\alpha-\psi)$ -contractive type mappings and related fixed point theorems with applications, Abstr. Appl. Anal., 2012 (2012) 1–17
116. Karapınar, E., Kumam, P. ve Salimi, P., On $\alpha - \Psi$ –Meir–Keeler contractive mappings, Fixed Point Theory Appl., 2013 (2013), 1–12.
117. Karapınar, E., Fixed Points Results via Simulation Functions, Filomat, 30, 8 (2016) 2343–2350.
118. Karapınar, E. ve Khojasteh, F., An approach to best proximity points results via simulation functions, J. Fixed Point Theory Appl., 19, (2017) 1983–1995.
119. Karapınar, E. ve Chifu, C., Results in wt-distance over b –metric spaces, Mathematics, 8, 2 (2020), 220.
120. Karapınar, E., Fulga, A. ve A. Petrusel, On Istratescu type contractions in b -metric spaces., Mathematics, 8, 388 (2020) 1–11.
121. Minak, G., Helvacı, A. ve Altun, I., Ciric type generalized b –contractions on complete metric spaces and fixed point results, Filomat, 28, (2014) 1143–1151.
122. Parvaneh, V., Hussain, N. ve Kadelburg, Z., Generalized Wardowski type fixed point theorems via α –admissible FG –contractions in b –metric spaces, Acta Mathematica Scientia, 36, 5 (2016) 1445–1456.
123. Parvaneh, V., Mohammadi, B. ve Aydi, H., On Geraghty–Wardowski type contractions and an application, Afrika Matematika, 32, (2021) 697–1708.
124. Piri, H. ve Kumam, P., Fixed point theorems for generalized F –Suzuki-contraction mappings in complete b –metric spaces, Fixed Point Theory and Appl., 2016, 90 (2016) 1–13.
125. Popescu, O., Some new fixed point theorems for α –Geraghty contraction type maps in metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 2014, (2014) 190.

126. Proinov, P., Fixed point theorems for generalized contractive mappings in metric spaces, J. Fixed Point Theory Appl., 22, (2020) 21.
127. Qawaqneh, H., Noorani, M., S., M., Shatanawi, W. ve Alsamir, H., Common fixed points for pairs of triangular α –admissible mappings, J. Nonlinear Sci. Appl., 10 (2017) 6192–6204.
128. Radenovic, S. ve Chandok, S., Simulation type functions and coincidence point results, Filomat, 32, (2018) 141–147.
129. Saleem, N., Abbas, M., Ali, B. ve Raza, Z., Fixed points of Suzuki–type generalized multivalued (f, θ, L) –almost contractions with applications, Filomat, 33, 2 (2019) 499–518.
130. Saleem, N., Abbas, M. ve Raza, Z., Fixed fuzzy point results of generalized Suzuki type F –contraction mappings in ordered metric spaces, Georgian Mathematical Journal, 27, 2 (2020) 307–320.
131. Saleem, N., De la Sen, M. ve Farooq, S., Coincidence best proximity point results in Branciari metric spaces with applications, Journal of Function Spaces, 2020, Article ID 4126025 (2020) 1–17.
132. Saleem, N., Iqbal, I., Iqbal, B. ve Radenovic, S., Coincidence and fixed points of multivalued F –contractions in generalized metric space with application, J. Fixed Point Theory Appl., 22, 81 (2020) 1–24.
133. Samet, B., Vetro, C. ve Vetro, P., Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ –contractive mappings, Nonlinear Anal., 75, (2012) 2154–2165.
134. Wang, Y. ve Chen, C., Two New Geraghty Type Contractions in G_b –Metric Spaces, Hindawi, 10, (2019) 1–9.
135. Wardowski, D. ve Dung, N., V., Fixed points of F –weak contractions on complete metric spaces, Demonstr. Math., 47, 1 (2014) 146–155.
136. Yu, D., Chen, C. ve Wang, H., Common fixed point theorems for $(T, g)_F$ –contraction in b –metric like spaces, J. Inequal. Appl., 222, (2018) 1–10.

ÖZGEÇMİŞ

Abdurrahman Büyükkaya, İlk ve orta eğitimini Giresun’ un Keşap ilçesinde tamamladı. 2004 yılında Giresun Lisesi’ nde başladığı lise eğitimini 2007 yılında tamamladı. 2009 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2013 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2016 yılında “Bazı Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri” başlıklı yüksek lisans tezini sunmasının ardından Topoloji Bilim Dalında doktora eğitime başladı. Haziran 2016 da yatay geçiş ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında eğitimine devam etti. Yabancı dili İngilizcedir.

Bu tezden üretilen bilimsel makaleler:

1. Öztürk, M. ve Büyükkaya, A., Fixed point results for Suzuki–type Σ –contractions via simulation functions in modular b –metric spaces, Math Meth Appl Sci., (2021) 1–17. <https://doi.org/10.1002/mma.7634>.
2. Öztürk, M. and Büyükkaya, A., Some fixed point results for Suzuki W –contractions involving quadratic terms in modular b – metric spaces, Fixed Point Theory and Fractional Calculus-Recent Advances and Applications, Springer, Singapore, p:63-92, 2022.
3. Büyükkaya, A. and Öztürk, M, Generalized simulative Geraghty type E contraction mappings in Modular b –Metric Spaces Endowed with a Branciari Distance, ICRA-PAM 2021 Proceeding Book, 11-23, 2021, ISBN:978-605-68969-1-0
4. Öztürk, M. and Büyükkaya, A., On Some Fixed Point Theorems for $\mathcal{G}(\Phi, \vartheta, \Xi)$ –Contractions in Modular b –metric spaces, submitted.
5. Öztürk, M., Paunovic, M., Büyükkaya, A. and Parvaneh V., Generalized almost simulative $\hat{Z}_{\Psi^*}^{\Theta}$ –contraction mappings in modular b –metric spaces, submitted.