



YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELİN ÇINAR

MODÜLER UZAYLARDA A-İSTATİSTİKSEL RELATİVE

KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

T.C
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLER UZAYLARDA A-İSTATİSTİKSEL RELATİVE
KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

SELİN ÇINAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

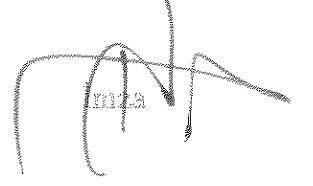
DANIŞMAN
PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ

SİNOP –2018

T.C
SİNOP ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Selin ÇINAR tarafından hazırlanan “Modüler Uzaylarda A-İstatistiksel Relative Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri” başlıklı bu çalışma, 12.07.2018 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan [Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ]
Sinop Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Üye [Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR]
Amasya Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Üye [Dr. Öğr. Üyesi Sevda YILDIZ]
Sinop Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

17. / 07 / 2018

[Doç. Dr. Turgay KÖRKÜT]

Enstitü Müdürü



MODÜLER UZAYLARDA A -İSTATİSTİKSEL RELATİVE KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrıldı. İkinci bölümde A -toplanabilme, istatistiksel yakınsaklık ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtıldı. Bunlara ilişkin örnekler ve bazı sonuçlar verildi. Üçüncü bölümün birinci kısmında relative modüler yakınsaklık kavramı verildi. İkinci kısmında bu yakınsaklık kullanılarak Korovkin tipi teorem çalışıldı. Üçüncü kısımda A -istatistiksel relative modüler yakınsaklık tanıtılarak dördüncü kısımda bu tanım aracılığıyla A -istatistiksel relative Korovkin tipi teorem incelendi. Ayrıca son olarak bu teoremi sağlayan fakat modüler uzaylardaki Korovkin tipi teoremi sağlamayan bir örnek verildi.

Anahtar kelimeler: Pozitif lineer operatör, istatistiksel yakınsaklık, A -istatistiksel yakınsaklık, modüler uzaylar, relative modüler yakınsaklık, Korovkin tipi teorem

A-STATISTICAL RELATIVE KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREM ON MODULAR SPACES

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. The first chapter has been devoted for the introduction. In the second chapter, the concepts of A -summability, statistical convergence, and A -statistical convergence have been recalled. Examples and some results concerning these concept have been given. In the first section of the third chapter, the concept of relative modular convergence has been given. In the second section, using this convergence, Korovkin type theorem has been studied. In the third section, A -statistical relative modular convergence has been introduced and in the fourth section, using this definition, A -statistical relative Korovkin type theorem has been investigated through this definition. Finally, an example has been given which provides this theorem but does not provide the Korovkin type theorem in modular spaces.

Key Words: Positive linear operator, statistical convergence, A -statistical convergence, modular spaces, relative modular convergence, Korovkin type theorem

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim, ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ (Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)’ e, ilgi ve önerilerini göstermekten kaçınmayan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sevda YILDIZ’ a ve Sayın Araş. Gör. Burçak KOLAY’ a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini her zaman hissettiğim ve hep yanımda olan annem Filiz YALÇIN’ a, babam Süleyman YALÇIN’ a ve Sedat ÇINAR’ a, eşim Melih ÇINAR’ a ve kızım Duru ÇINAR’ a sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. A-Toplanabilme	2
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık	3
2.3. A – İstatistiksel Yakınsaklık	5
2.4. Pozitif Lineer Operatörler	9
2.5. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri	11
2.5.1 Klasik Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi	11
2.5.2 A – İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem	14
2.6. Modüler Uzaylar	17
2.7. Relatively Düzgün Yakınsaklık	24
3. MATERYAL VE YÖNTEM	26
4. BULGULAR	27
4.1. Relative Modüler Yakınsaklık	27
4.2. Modüler Uzaylarda Relative Korovkin Tipi Teoremler	29
4.3. A – İstatistiksel Relative Modüler Yakınsaklık	34
4.4. Modüler Uzaylarda A – İstatistiksel Relative Korovkin Tipi Teoremler	36
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	46
6. KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	49

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
δ_A	: A-Yoğunluk fonksiyonu
ρ	: Modüler fonksiyonu
σ	: Skale fonksiyonu
χ_G	: G kümesinin karakteristik fonksiyonu
c	: Yakınsak diziler uzayı
S	: Tüm diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$ G $	: G kümesinin eleman sayısı
h.h.	: Hemen her yerde
$G = [a, b]$	: Lebesgue ölçülebilir, reel sayıların sınırlı alt aralığı
$X(G)$	: X bir vektör uzayı olmak üzere $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, h.h. eşitliğini sağlayan reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$C(G)$	: G üzerinde tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$C^\infty(G)$	: G üzerinde her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı

1.GİRİŞ

1951 yılında Fast, Toplanabilme Teorisi, Fourier Serileri, Fonksiyonel Analiz ve Yaklaşım Teorisi'nde önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. H. Bohman 1951 yılında toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyona yaklaşım problemini incelemiştir. P. P. Korovkin bu problemi 1960 yılında tekrar ele alarak daha genel halde gerçekleştirildiğini ispatlamıştır. 2002 yılında Gadjiev ve Orhan tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramından yararlanılarak, istatistiksel Korovkin tipi teorem ifade edilmiş ve sonrasında A -istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi incelenmiştir. Korovkin tipi teorem 2007 yılında Bardaro ve Mantellini tarafından modüler uzaylar üzerine genişletilmiştir. Bu uzaylar detaylı bir şekilde Musielak (1983) ve Kozłowski (1988) tarafından verilmiştir. Daha sonra 2010 yılında Karakuş, Demirci ve Duman pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yaklaşımını modüler uzaylar üzerinde incelemişlerdir. 2016 yılında ise Yılmaz, Demirci ve Orhan relative modüler yakınsaklık tanımını vermişlerdir. 2017 yılında Demirci ve Kolay modüler uzaylarda A -istatistiksel relative Korovkin tipi teoremi ispatlamışlardır.

Bu yüksek lisans tezinde ilk olarak A -toplanabilme kavramı ve bu kavram ile ilgili genel bilgiler verilecektir. Daha sonra yoğunluk tanımı yardımıyla istatistiksel yakınsaklık tanıtılacak ve bu tanım genişletilerek A -istatistiksel yakınsaklık verilecektir. Ardından pozitif lineer operatörler tanıtılarak sırasıyla klasik Korovkin tipi teorem ve A -istatistiksel Korovkin tipi teorem ifade edilecektir. Sonrasında modüler uzaylar ve özellikleri tanıtılarak A -istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramı verilecek ve modüler uzaylarda A -istatistiksel relative Korovkin tipi teorem incelenecektir (Demirci, Kolay, 2017) .

Bu yüksek lisans tezi yukarıdaki çalışmaların derlemesinden oluşmaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Aşağıda tezde ihtiyaç duyulacak A-toplanabilme kavramı ve bu kavram ile ilgili bazı bilgiler verilecektir.

2.1. A-Toplanabilme

2.1.1. Tanım: X ve Y tüm diziler uzayı olan S 'nin alt kümeleri ve $A = [a_{jn}]$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere $x = (x_n) \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

(i) $(Ax)_j := \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}x_n$ serisi yakınsak ise $Ax := ((Ax)_j)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir.

(ii) Eğer her $x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise $A = [a_{jn}]$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir.

(iii) Eğer bir x dizisinin Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak ise x dizisi L sayısına A -toplanabilirdir denir ve $A\text{-}\lim x = L$ şeklinde yazılır.

(iv) X dizi uzayını Y içine dönüştüren tüm matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir ve A, X 'den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ yazılır.

(v) Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile gösterilir.

(vi) c yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere özel olarak $X = Y = c$ seçilirse ve $A \in (c, c)$ ise A matrisine konservatif matris denir.

(vii) Eğer verilen bir $x = (x_n)$ dizisinin dönüşüm dizisi $Ax := ((Ax)_j)$ limiti koruyorsa yani, $\lim_n x_n = L$ olduğunda $\lim_j (Ax)_j = L$ gerçekleşiyorsa A matrisine regüler matris denir.

Aşağıda bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartları veren Silverman-Toeplitz teoremi ifade edilmiştir.

2.1.2. Teorem (Silverman-Toeplitz): Bir $A := [a_{jn}]$ matrisinin regüler olması için aşağıda verilen gerek ve yeter koşulları sağlamalıdır.

(i) $\|A\| := \sup_j \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty$, (ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_j a_{jn} = 0$, (iii) $\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$

(Hardy, 1949; Boos, 2000).

2.1.3. Örnek: Aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C_1 = (c_{jn})$

$$c_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j}, & 1 \leq n \leq j \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Cesáro matrisi regülerdir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı ifade edilerek, çeşitli tanım ve teoremlere yer verilecektir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A olmak üzere, $A_n := \{k \leq n : k \in A\}$ olsun. A_n kümesinin eleman sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.2.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için $\lim_n \frac{|A_n|}{n}$

limiti mevcutsa, bu limit değerine A kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

(a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere yoğunluk mevcut ise $\delta(A) = \lim_n \frac{n}{a_n}$ dir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Örneğin; $\delta(\mathbb{N})=1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\})=0$, $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımı göz önüne alındığında kolayca görülebilir. Ek olarak bir A kümesi yoğunluğa sahip ise, tümleyeni olan $\mathbb{N} \setminus A$ için $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ dır. Yine kolaylıkla görüleceği gibi doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de sıfır yoğunluklu olacaktır.

2.2.2. Tanım: $x = (x_n)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st - \lim_n x_n = L$ şeklinde ifade edilir (Fast, 1951).

Yukarıdaki istatistiksel yakınsaklık tanımından da görüldüğü üzere, eğer bir x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, o halde L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum ise istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu göstermektedir. Bundan dolayı yakınsak diziler uzayı c ve istatistiksel yakınsak diziler uzayı st ile gösterilirse, $c \subset st$ olur.

Şimdi de bir dizinin istatistiksel yakınsak olup olmadığının kolayca görülebilmesini sağlayan ve Fridy tarafından 1985’de yapılan karakterizasyon verilsin.

2.2.3. Teorem: $x = (x_n)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) yakınsak alt dizisi vardır (Fridy, 1985).

Buradan, 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde (başka bir deyişle sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında) x dizisi L sayısına klasik (Cauchy) anlamda yakınsak ise x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. O halde bir x dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta(K) = 1$ olacak şekilde $K \subseteq \mathbb{N}$ ve alt kümesi $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in K$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2.2.4. Örnek: $x = (x_n)$ dizisinin genel terimi

$$x_n = \begin{cases} 1/2, & n = m^2 \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. $H_1 := \{n = m^2 : m \in \mathbb{N}\}$, $H_2 := \{n \neq m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(H_1) = 0$ ve $\delta(H_2) = 1$ olur ki 2.2.3. Teorem’den x dizisinin 0’a istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

2.2.5. Örnek: $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} n, & n = m^2 \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

genel terimi ile verilsin. Buradan $st - \lim_n x_n = 0$ olduğu görülür.

Yukarıdaki örnekler istatistiksel yakınsaklık ile bilinen anlamdaki yakınsaklık arasındaki ilişki hakkında bilgi verir. 2.2.2 Tanım'dan kolayca görülebileceği gibi bilinen anlamda yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır ama 2.2.4 Örnek'ten ve 2.2.5 Örnek'ten görüldüğü üzere diziler sırasıyla sınırlı ıraksak ve sınırsız ıraksak olmalarına rağmen istatistiksel yakınsak olabilmektedirler.

Ayrıca, not olarak verilebilir ki bilinen anlamdaki yakınsaklıkta olduğu gibi istatistiksel yakınsaklıkta da limit tektir ve istatistiksel yakınsaklık lineerdir.

2.3. A – İstatistiksel Yakınsaklık

1981 yılında Freedman ve Sember istatistiksel yakınsaklık tanımındaki Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $A = [a_{jn}]$ sonsuz matrisini alarak istatistiksel yakınsaklığı A – istatistiksel yakınsaklığa genişletmişlerdir.

Bir $x = (x_n)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek her $\varepsilon > 0$ için $\lim_j \frac{1}{j} |\{n \leq j : |x_n - L| \geq \varepsilon\}| = 0$ olması demektir. Ya da buna denk olarak $K := K(\varepsilon) = \{n \leq j : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\lim_j (C_1 \chi_K)_j = \lim_j \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j \chi_{K(\varepsilon)}(n) = 0$ olmasıdır. Burada χ_K , K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

Şimdi A – istatistiksel yakınsaklık kavramı, bu kavramın çeşitli özellikleri, önemli tanım ve teoremleri detaylı olarak verilsin.

2.3.1. Tanım: $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_j \sum_{n \in K} a_{jn} = \lim_j (A \chi_K)_j$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin A -yoğunluğu denir ve $\delta_A(K)$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Eğer bir K kümesi A yoğunluğa sahip ise bu durumda tümleyeni $\mathbb{N} \setminus K$ için $\delta_A(\mathbb{N} \setminus K) = 1 - \delta_A(K)$ olacaktır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta_A(K) = 0$ olacağı açıktır.

2.3.2. Örnek:

$$a_{jn} = \begin{cases} 1, & n=j^2 \\ 0, & n \neq j^2 \end{cases}, \quad (j=1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{jn})$ matrisi göz önüne alınsın. A matrisi negatif olmayan regüler bir matristir. Bu durumda $K_1 = \{n = j^2 : j \in \mathbb{N}\}$ ve $K_2 = \{n \neq j^2 : j \in \mathbb{N}\}$ kümeleri için $\delta_A(K_1) = 1$ ve $\delta_A(K_2) = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

2.3.3. Tanım: $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K := K(\varepsilon) = \{n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = \lim_j \sum_{n \in K} a_{jn} = 0$$

gerçekleniyor ise bu durumda $x = (x_n)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim_n x_n = L$ şeklinde gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Kolk, 1993; Miller, 1995).

A -istatistiksel yakınsaklık tanımındaki A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa bilinen anlamdaki yakınsaklık ve A matrisi yerine C_1 matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık elde edilmiş olur. Burada C_1 , Cesáro matrisini ifade etmektedir.

A – istatistiksel yakınsaklık için 2.2.3. Teorem’in bir benzeri verilebilir.

2.3.4. Teorem: Bir $x = (x_n)$ dizisinin L sayısına A – istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_A(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (n_k) indis dizisinin var olmasıdır (Kolk, 1993; Miller, 1995).

2.3.5. Örnek: $A := [a_{jn}]$ matrisi

$$a_{jn} = \begin{cases} 1, & n = j^2 + 1 \\ 0, & n \neq j^2 + 1 \end{cases}, j = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. A matrisi negatif olmayan regüler bir matristir. $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{5}, & n = j^2 + 1 \\ 0, & n \neq j^2 + 1 \end{cases}, j = 1, 2, 3, \dots$$

ile verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| x_n - \frac{1}{5} \right| \geq \varepsilon \right\}$ olmak üzere

$$\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \chi_{K(\varepsilon)}(n) = 0 \text{ olacağından } st_A - \lim_n x_n = \frac{1}{5} \text{ elde edilir.}$$

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere, $x = (x_n)$ dizisi bilinen anlamda yakınsak olmamasına rağmen A – istatistiksel yakınsaktır. Yani A – istatistiksel yakınsak bir dizi bilinen anlamda yakınsak olmayabilir.

Aşağıda A – istatistiksel üst limit ve A – istatistiksel alt limit kavramları ele alınsın.

$A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $x = (x_n)$ dizisi için

$$B_x := \left\{ b \in \mathbb{R} : \delta_A(\{n : x_n > b\}) \neq 0 \right\}$$

$$C_x := \left\{ a \in \mathbb{R} : \delta_A(\{n : x_n < a\}) \neq 0 \right\},$$

olsun. Burada $\delta_A(K) \neq 0$ olması demek $\delta_A(K) > 0$ anlamında ya da K kümesi bir A yoğunluğa sahip olmadığı anlamında kullanılacaktır.

2.3.6. Tanım: A negatif olmayan regüler bir matris olsun. $x = (x_n)$ dizisinin A -istatistiksel üst limiti aşağıdaki şekilde verilir.

$$st_A - \limsup_n x_n := \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \\ -\infty, & B_x = \emptyset \end{cases}$$

Benzer biçimde bir $x = (x_n)$ dizisinin A -istatistiksel alt limiti

$$st_A - \liminf_n x_n := \begin{cases} \inf C_x, & C_x \neq \emptyset \\ +\infty, & C_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Connor ve Kline 1996).

Alışılmış üst limit ve alt limit kavramlarında olduğu gibi

$$st_A - \liminf_n x_n \leq st_A - \limsup_n x_n$$

olduğu ispatlanmıştır.

2.3.7. Örnek : $A := [a_{jn}]$ matrisi negatif olmayan regüler sonsuz

$$a_{jn} = \begin{cases} \frac{j}{2(j+1)}, & n = j^2 + 1 \\ 1 - \frac{j}{2(j+1)}, & n = j^2 + 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ve $x = (x_n)$ dizisi de

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = j^2 + 1 \\ 2, & n = j^2 + 2 \\ n, & n = j^2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ile verilsin. Ayrıca,

$$D := \{n = j^2 : j = 1, 2, \dots\}$$

$$E := \{n = j^2 + 1 : j = 1, 2, \dots\}$$

$$F := \{n = j^2 + 2 : j = 1, 2, \dots\} \text{ kümeleri için,}$$

$$\delta_A(D) = \lim_j \sum_{n \in D} a_{jn} = 0,$$

$$\delta_A(E) = \lim_j \sum_{n \in E} a_{jn} = \lim_j \frac{j}{2(j+1)} = \frac{1}{2},$$

$$\delta_A(F) = \lim_j \sum_{n \in F} a_{jn} = \lim_j \left(1 - \frac{j}{2(j+1)}\right) = \frac{1}{2} \text{ dir. O halde,}$$

$$B_x = (-\infty, 2) \text{ ve } C_x = (0, \infty) \text{ olup,}$$

$$st_A - \limsup_n x_n = 2 \text{ ve } st_A - \liminf_n x_n = 0 \text{ dır.}$$

2.4. Pozitif Lineer Operatörler

Bu bölümde tez için ihtiyaç duyulacak tanımlara ve teoremlere yer verilecektir.

$B[a, b]$ **Uzayı** : $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı tüm fonksiyonların uzayıdır.

Ayrıca,

$$\|f\|_B = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

normu ile $B[a, b]$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$C[a, b]$ **Uzayı** : $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır. a, b uç noktalarında bu uzayın elemanları sırasıyla sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır. $f \in C[a, b]$ için

$$\|f\|_{C[a, b]} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a, b]$ bir Banach uzayıdır.

$L_p[a, b]$ **Uzayı** : $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli p – inci mertebeden mutlak integrallenebilen fonksiyonların uzayıdır.

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu ile $L_p[a, b]$ uzayı bir Banach uzayıdır.

2.4.1. Tanım: X ve Y reel değerli fonksiyonların uzayı olsunlar. Eğer X 'den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y 'de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu durum $g(x) = L(f; x)$ şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t); x)$ gösterimi yerine $L(f; x)$ yazılacaktır.

X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Ayrıca $R(L) = \{g: L(f; x) = g(x), f \in D(L)\}$ kümesine de L operatörünün değer kümesi denir. $R(L) \subseteq Y$ dir.

X uzayının lineer bir uzay olduğu durumda aşağıdaki lineer operatör tanımı ifade edilebilir.

2.4.2. Tanım: f_1 ve f_2 , X uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için L operatörü,

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x)$$

şartını sağlıyorsa bu durumda L operatörüne lineer operatör denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere L lineer operatörü için $L(0; x) = 0$ olur.

Aşağıda lineer operatörler kümesi içinde önemli yer tutan pozitif lineer operatörler tanıtılsın.

2.4.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise o takdirde L operatörüne pozitif lineer operatör denir.

Örneğin, $a \in [0, 1)$ olmak üzere

$\forall f \in C[0, a] \subset C[0, 1]$ için

$$M_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \binom{k+n}{k} x^k, \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.4.1)$$

ile tanımlanan Meyer-König ve Zeller operatörü $\binom{k+n}{k} x^k \geq 0$ ve $(1-x)^{n+1} \geq 0$ olduğundan pozitif lineer bir operatördür (Meyer-König ve Zeller, 1960).

L pozitif lineer operatörü için $LX^+ \subset Y^+$ sağlanır. Böylelikle $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. Ek olarak $f(x) \leq g(x)$ olduğu durumda $L(f; x) \leq L(g; x)$ dır. Başka bir deyiş ile pozitif lineer operatörler monotondur.

Yaklaşım teorisinin gelişmesinde büyük bir etkiye sahip olan ve birçok matematikçinin üzerinde çalıştığı Korovkin tipi teoremler aşağıda verilmiştir. Burada $e_i(x) = x^i$ test fonksiyonları kullanacaktır.

2.5. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

2.5.1. Klasik Korovkin Tipi Teorem: Eğer $L_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi olmak üzere

$$\lim_n \|L_n e_i - e_i\|_B = 0, \quad (i = 0, 1, 2)$$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_n \|L_n f - f\|_B = \lim_n \sup_{x \in [a, b]} |L_n(f, x) - f(x)| = 0$$

dır (Korovkin, 1960).

İspat: $f \in C[a, b]$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu sürekli ve kapalı bir aralıkta sürekli her fonksiyon sınırlıdır. O halde

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M$$

olacak şekilde bir $M = \|f\|_B$ pozitif sayısı bulunabilir. f sürekli olduğundan

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ öyle ki $|t - x| < \delta$ olduğunda $\forall x, t \in [a, b]$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Ayrıca $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olduğundan $\frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2 \geq 2M$ olur.

O halde bu durumda

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.5.1)$$

elde edilir. Şimdi kabul edilsin ki $\lim_n \|L_n e_i - e_i\|_B = 0$ koşulu sağlansın. L_n operatörü pozitif lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \\ &\leq |L_n(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \\ &\leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)| + M |L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

olup, $x \in [a, b]$ üzerinden supremum alınırsa

$$\|L_n f - f\|_B \leq \|L_n (|f(t) - f(\cdot)|)\|_B + M \|L_n e_0 - e_0\|_B \quad (2.5.2)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.5.1)' den $B = \max\{|a|, |b|\}$ seçilirse

$$\begin{aligned} L_n (|f(t) - f(x)|) &\leq L_n \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) \\ &= \varepsilon L_n (1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n (t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= \varepsilon + \varepsilon (L_n (1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} (L_n (t^2; x) - x^2) \\ &\quad - \frac{4M}{\delta^2} B (L_n (t; x) - x) + \frac{2M}{\delta^2} B^2 (L_n (1; x) - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada bulunan eşitsizlik (2.5.2)' de yerine yazılır ve gerekli işlemler

yapılırsa $E_1 = \varepsilon + \frac{2MB^2}{\delta^2} + M$, $E_2 = \frac{4MB}{\delta^2}$, $E_3 = \frac{2M}{\delta^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|L_n f - f\|_B &\leq \varepsilon + E_1 \|L_n e_0 - e_0\|_B \\ &\quad + E_2 \|L_n e_1 - e_1\|_B + E_3 \|L_n e_2 - e_2\|_B \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi (2.4.1) ile verilen Meyer-König ve Zeller operatörü göz önüne alınsın ve 2.5.1 Teorem'in koşullarının sağlandığı gösterilsin.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad M_n (1; x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^k = (1-x)^{n+1} (1-x)^{-n-1} = 1 \\ \text{(ii)} \quad M_n (t; x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+n} \binom{k+n}{k} x^k = (1-x)^{n+1} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} x^{k-1} \\ &= (1-x)^{n+1} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+n} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^k + (1-x)^{n+1} \frac{x}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^k \\ &= (1-x)^{n+1} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^k = (1-x)^{n+1} x (1-x)^{-n-1} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad M_n(t^2; x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(k+n)^2} \binom{k+n}{k} x^k \\
&= (1-x)^{n+1} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+n} \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} x^{k-1} \\
&= (1-x)^{n+1} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k+n} \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} x^{k-1} + (1-x)^{n+1} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+n} \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} x^{k-1} \\
&= (1-x)^{n+1} x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+n} \frac{(k+n-1)!}{n!(k-2)!} x^{k-2} + (1-x)^{n+1} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+n+1} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^k \\
&= (1-x)^{n+1} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^k + (1-x)^{n+1} \frac{x}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!k!} x^k \\
&= x^2 + \frac{x}{n+1}
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\lim_n \|M_n e_i - e_i\|_B = 0 \quad (i=0,1,2)$$

olduğundan Korovkin tipi teoremin koşulları sağlanır. Dolayısıyla her $f \in C[0, a]$ için

$$\lim_n \|M_n f - f\|_B = 0$$

gerçeklenir.

Şimdi A – istatistiksel Korovkin tipi teorem verilsin.

2.5.2. A – İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem: $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer $L_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$(i) \quad st_A - \lim_n \|L_n e_0 - e_0\|_B = 0$$

$$(ii) \quad st_A - \lim_n \|L_n e_1 - e_1\|_B = 0$$

$$(iii) \quad st_A - \lim_n \|L_n e_2 - e_2\|_B = 0$$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f - f\|_B = 0$$

olur (Duman, Khan ve Orhan, 2003).

İspat: (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlansın. $f \in C[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ sabit olsun. $f \in C[a, b]$ 'de olduğundan bir $M > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \quad (2.5.2.1)$$

yazılabilir. Yine, $f \in C[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ (2.5.2.2)

olur. (2.5.2.1) ve (2.5.2.2) eşitsizliklerinden dolayı her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 \quad (2.5.2.3)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Çünkü $|t - x| < \delta$ ise (2.5.2.3) eşitsizliği $\frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2$ ifadesi

pozitif olduğu için sağlanır. $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t - x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olduğundan

$$\frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 \geq 2M \quad \text{olur ki (2.5.2.1) eşitsizliğinden dolayı (2.5.2.3) eşitsizliği}$$

gerçeklenir.

Diğer taraftan L_n operatörünün pozitif lineer operatör olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f; x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \\ &\leq |L_n(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1| \\ &\leq |L_n(f(t) - f(x); x)| + M |L_n(1; x) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $\varepsilon > 0$ için $c := \max\{|a|, |b|\}$ olduğu ve (2.5.2.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M |L_n(1; x) - 1| \\
&\leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) + M |L_n(1; x) - 1| \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) + M |L_n(1; x) - 1| \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)) + M |L_n(1; x) - 1| \\
&\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2\right) |L_n(1; x) - 1| + \frac{4M}{\delta^2} c |L_n(t; x) - x| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} |L_n(t^2; x) - x^2|
\end{aligned}$$

olur ki $K = \max\left\{\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2, \frac{4M}{\delta^2} c, \frac{2M}{\delta^2}\right\}$ seçilirse

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + K \left\{ |L_n(1; x) - 1| + |L_n(t; x) - x| + |L_n(t^2; x) - x^2| \right\}$$

bulunur. O halde $x \in [a, b]$ üzerinden supremum alınırsa

$$\|L_n f - f\|_B \leq \varepsilon + K \left\{ \|L_n e_0 - e_0\|_B + \|L_n e_1 - e_1\|_B + \|L_n e_2 - e_2\|_B \right\}$$

elde edilir. Şimdi verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $\varepsilon < r$ olsun. O zaman

$$D := \left\{ n : \|L_n(f; x) - f(x)\|_B \geq r \right\}$$

$$D_1 := \left\{ n : \|L_n(1; x) - 1\|_B \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ n : \|L_n(t; x) - x\|_B \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ n : \left\| L_n(t^2; x) - x^2 \right\|_B \geq \frac{r - \varepsilon}{3K} \right\}$$

ise $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kolayca görülebilir. Buradan

$$\sum_{n \in D} a_{jn} \leq \sum_{n \in D_1} a_{jn} + \sum_{n \in D_2} a_{jn} + \sum_{n \in D_3} a_{jn}$$

olmak üzere $j \rightarrow \infty$ limiti alınırsa (i), (ii) ve (iii)'den

$$\text{st}_A - \lim_n \left\| L_n(f; x) - f(x) \right\|_B = 0$$

elde edilir.

2.6. Modüler Uzaylar

2007 yılında modüler uzaylar üzerinde klasik Korovkin tipi teorem Bardaro ve Mantellini tarafından genişletilmiştir. Daha sonra ise 2010 yılında Karakuş, Demirci ve Duman tarafından verilen modüler uzaylarda A -istatistiksel Korovkin tipi teoremler daha güçlü sonuçların elde edilmesini sağlamıştır.

Bu bölümde modüler fonksiyon, modüler uzaylar ve modüler uzaylardaki bazı yakınsaklık kavramları tanıtılıp aralarındaki ilişkiler ve bazı özellikleri incelenecektir.

2.6.1. Tanım: Herhangi bir $\rho : X(G) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli

- (i) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ h.h.},$
- (ii) Her $f \in X(G)$ için $\rho(f) = \rho(-f),$
- (iii) Her $f, g \in X(G)$ ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g),$$

koşullarını sağlıyorsa ρ 'ya $X(G)$ üzerinde bir modüler denir. Eğer her $f, g \in X(G)$ ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq N\alpha\rho(Nf) + N\beta\rho(Ng),$$

olacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa ρ 'ya N –quasi konveks modüler denir. Özel olarak $N=1$ alınırsa ρ 'ya konveks modüler denir. Her $f \in X(G)$ ve $a \in (0,1]$

$$\rho(af) \leq Na\rho(Nf)$$

olacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa ρ 'ya N –quasi yarı konveks modüler denir. Buradan her N –quasi konveks modülerin, N –quasi yarı konveks modüler olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi ρ modülleri ile verilen $X(G)$ uzayının bazı alt vektör uzayları göz önüne alınsın.

$$L^\rho(G) := \left\{ f \in X(G) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\},$$

$$E^\rho(G) := \left\{ f \in L^\rho(G) : \text{her } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < \infty \right\}.$$

Burada $L^\rho(G)$ 'ye ρ modülleri ile oluşturulan modüler uzay ve $E^\rho(G)$ 'ye ise $L^\rho(G)$ 'nin sonlu elemanlarının uzayı denir.

2.6.2. Lemma: Eğer ρ modülleri N –quasi yarı konveks ise

$$L^\rho(G) = \left\{ f \in X(G) : \text{bazı } \lambda_0 > 0 \text{ için } \rho(\lambda_0 f) < \infty \right\} \text{ dır.}$$

İspat: ρ , N –quasi yarı konveks ise tanımdan her $f \in X(G)$ ve $a \in (0,1]$

$$\rho(af) \leq Na\rho(Nf) \text{ için}$$

$\rho(af) \leq Na\rho(Nf)$ eşitsizliğini sağlayan $N \geq 1$ sabiti vardır. ρ ile oluşturulan modüler uzay

$$L^\rho(G) := \left\{ f \in X(G) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\},$$

olmak üzere

$$A = \left\{ f \in X(G) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < +\infty \right\}$$

için $L^p(G)$ 'nin A 'ya denk olduğu gösterilsin. Bu durumda $A \subset L^p(G)$ ve $L^p(G) \subset A$ olmalıdır. İlk olarak $A \subset L^p(G)$ olduğu gösterilsin.

Herhangi $f \in A$ için, bazı $\lambda > 0$ ve $\rho(\lambda f) < \infty$. ρ , N -quasi yarı konveks olduğundan $f \in X(G)$ ve $\lambda \in (0,1]$ için

$$\rho(\lambda f) \leq N\lambda\rho(Nf)$$

eşitsizliğini sağlayan $N \geq 1$ sabiti vardır. Her iki taraftan limit alınırsa

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} N\lambda\rho(Nf)$$

elde edilir. $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} N\lambda\rho(Nf) = 0$ olup sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0$$

bulunur. Modüler uzay tanımından $f \in L^p(G)$ dir. Buradan

$$A \subset L^p(G) \tag{2.6.1}$$

olur. Şimdi $f \in L^p(G)$ olsun. Modüler uzay tanımından

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \text{ dır. Limit tanımından } \rho(\lambda_n f) \rightarrow 0, \lambda_n \rightarrow 0^+ \text{ olur. Fakat bazı } \lambda_n \rightarrow 0^+$$

için $\rho(\lambda_n f) = +\infty$ olabilir. Bilindiği gibi sonlu sayıda eleman yakınsamayı etkilemediğinden bazı $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda f) < +\infty$ sağlanır. O halde $f \in A$ olup

$$L^p(G) \subset A \tag{2.6.2}$$

dır. (2.6.1) ve (2.6.2)'den istenilen elde edilir.

2.6.3. Örnek: $(X(G), \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Şimdi $\|\cdot\|$ norm fonksiyonunun bir modüler olduğu gösterilsin. Bunun için $f \in X(G)$ olmak üzere

$$\rho: X(G) \rightarrow [0, \infty]$$

$$f \rightarrow \rho(f) = \|f\|$$

olsun. Modüler olma şartlarının sağlanıp sağlanmadığına bakılacak olursa,

$$(i) \rho(f) = \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0, \text{ h.h.}$$

$$(ii) \rho(-f) = \|-f\| = |-1|\|f\| = \|f\| = \rho(f)$$

(iii) Her $f, g \in X(G)$ için ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) = \|\alpha f + \beta g\|$$

$$\leq |\alpha|\|f\| + |\beta|\|g\| = \alpha\|f\| + \beta\|g\|$$

$$\leq \|f\| + \|g\| = \rho(f) + \rho(g)$$

olur. Buradan

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$$

eşitsizliği elde edilir. $\|\cdot\|$ norm fonksiyonu (i), (ii), (iii) koşullarını sağladığı için modülerdir.

2.6.4. Örnek: $G = [a, b]$ olmak üzere $1 \leq p < \infty$ için L_p uzayı konveks modüler uzaydır.

Şimdi modüler uzaylardaki bazı yakınsaklık türleri tanıtılsın.

2.6.5 Tanım: $(f_n) \subset L^p(G)$ ve $f \in L^p(G)$ olsun. Bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_n \rho(\lambda_0(f_n - f)) = 0$$

oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsaktır denir.

2.6.6. Tanım: $(f_n) \subset L^p(G)$ ve $f \in L^p(G)$ olsun. Her $\lambda > 0$ için

$$\lim_n \rho(\lambda(f_n - f)) = 0$$

oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna F – norm (kuvvetli) yakınsaktır denir.

2.6.7 Lemma: Modüler yakınsaklık ile F – norm yakınsaklığın denk olması için gerek ve yeter koşul Δ_2 – şartının sağlanmasıdır yani, her $f \in X(G)$ için

$$\rho(2f) \leq M \rho(f)$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabiti vardır (Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003; Musielak, 1993).

İspat : (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna kuvvetli yakınsak olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için bu yakınsaklık sağlanır. Modüler yakınsaklık ise bazı $\lambda > 0$ için sağlandığından kuvvetli yakınsak ise modüler yakınsaktır.

Şimdi (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsak olsun. (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna kuvvetli yakınsaklığı $N = 1, 2, \dots$ ve bazı $\lambda > 0$ için

$$\lim_n \rho(2^N \lambda (f_n - f)) = 0$$

koşuluna denktir. Gerçekten bazı $\lambda > 0$ değerleri için geçerli ise $\lambda := \frac{\lambda}{2^N}$ $N = 1, 2, \dots$, seçilirse

$$\lim_n \rho\left(2^N \frac{\lambda}{2^N} (f_n - f)\right) = \lim_n \rho(\lambda (f_n - f))$$

eşitliği elde edilir. ρ , Δ_2 -şartını sağladığından her $f \in X(I)$ ve tüm $N = 1, 2, \dots$ için

$$\rho(2^N f) \leq M^N \rho(f)$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabiti vardır. O halde

$0 \leq \lim_n \rho(2^N \lambda (f_n - f)) \leq \lim_n M^N \rho(\lambda (f_n - f))$ yazılabilir. (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsak olduğundan bazı $\lambda > 0$ için tüm $N = 1, 2, \dots$ için $\lim_n \rho(2^N \lambda (f_n - f))$ bulunur. Yani modüler yakınsak ise kuvvetli yakınsaktır.

Şimdi ρ modülleri ile ilgili tezde de kullanılacak olan bazı tanımlar verilsin.

2.6.8 Tanım:

- 1) $|f| \leq |g|$ için $\rho(f) \leq \rho(g)$ ise ρ monotondur denir.
- 2) χ_G , G aralığının karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\chi_G \in L^p(G)$ ise ρ sonludur denir.
- 3) $\chi_G \in E^p(G)$ ise ρ kuvvetli sonludur denir.
- 4) Eğer ρ sonlu ve her $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ için $\mu(B) < \delta$ özellikli herhangi ölçülebilir $B \subset G$ alt kümesi için $\rho(\lambda \chi_B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa ρ mutlak sonludur denir.
- 5) $\rho(f) < \infty$ özellikli her $f \in X(G)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan $a > 0$ varsa ρ mutlak süreklidir denir:

Her $\varepsilon > 0$ için B , $\mu(B) < \delta$ özellikli G 'nin herhangi bir ölçülebilir alt kümesi olmak üzere

$$\rho(a f \chi_B) < \varepsilon \text{ olacak şekilde } \delta > 0 \text{ vardır.}$$

Şimdi bazı içerme teoremleri verilsin.

2.6.9 Teorem: ρ monoton ve sonlu bir modüler olsun. O halde $C(G) \subset L^p(G)$ dır

(Bardaro ve Mantellini, 2007).

İspat: $f \in C(G)$ olsun. Bu durumda $\lambda > 0$ için $\lambda f \in C(G)$ ve $|\lambda f| \in C(G)$ olur.

Buradan

$$|\lambda f| \leq |\lambda \|f\|_\infty| \leq |\lambda \|f\|_\infty \chi_G|$$

yazılabilir. Böylece

$$|\lambda f| \leq |\lambda \|f\|_\infty \chi_G|$$

olup ρ modüleri monoton artan olduğundan

$$\rho(\lambda f) \leq \rho(\lambda \|f\|_{\infty} \chi_G)$$

olur. ρ sonlu olduğundan $\chi_G \in L_{\rho}(G)$ olup

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda \|f\|_{\infty} \chi_G)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0$ olur ve modüler uzay tanımından $f \in L^{\rho}(G)$ olur. Buradan

$C(G) \subset L^{\rho}(G)$ elde edilir.

Benzer biçimde eğer, ρ monoton ve kuvvetli sonlu ise $C(G) \subset E^{\rho}(G)$ olduğu gösterilebilir (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Şimdi modüler uzaylarda ilk olarak Korovkin tipi teorem daha sonra A -istatistiksel Korovkin tipi teorem verilsin.

ρ , $X(G)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^{\infty}(G) \subset D \subset L^{\rho}(G)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Böyle bir D kümesi, ρ monoton ve sonlu bir modüler olduğundan seçilebilir. Kabul edilsin ki X_T , $C^{\infty}(G)$ 'yi içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $T = (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$\limsup_n \rho(\lambda(T_n h)) \leq R \rho(\lambda h) \quad (2.6.3)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

2.6.10 Teorem: ρ , $X(G)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye (2.6.3) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\lim_n \rho(\lambda(T_n e_i - e_i)) = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

olsun. Ayrıca $f \in L^p(G)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_n \rho(\lambda_0(T_n f - f)) = 0$$

dır (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Şimdi A -istatistiksel yakınsaklık yardımıyla çalışılan Korovkin tipi teoremleri verilsin.

Yukarıda $T = (T_n)$ dizisi için verilen (2.6.3) koşulu yerine $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere

$$st_A - \limsup_n \rho(\lambda(T_n h)) \leq R\rho(\lambda h) \quad (2.6.4)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda A -istatistiksel Korovkin tipi teorem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

2.6.11 Teorem: $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve $\rho, X(G)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modül olsun. $T = (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye (2.6.4) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$st_A - \lim_n \rho(\lambda(T_n e_i - e_i)) = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

olsun. Ayrıca $f \in L^p(G)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_A - \lim_n \rho(\lambda_0(T_n f - f)) = 0$$

dır (Karakuş ve ark., 2010)

2.7. Relatively Düzgün Yakınsaklık

Bulgular kısmında verilecek olan ve Yılmaz, Demirci ve Orhan tarafından tanımlanan relative modül yakınsaklık kavramı, aşağıdaki şekilde ifade edilmiş olan fonksiyon dizileri için relatively düzgün yakınsaklık tanımı göz önüne alınarak geliştirilmiştir. Bu tanım 1910 yılında Moore tarafından verilmiş olup, 1919 yılında Chittenden tarafından geliştirilmiştir.

2.7.1. Tanım: (f_n) fonksiyon dizisi bir $G \equiv (a \leq x \leq b)$ aralığında tanımlı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon$ var $\ni$ her $n > n_\varepsilon$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon |\sigma(x)| \quad (G \text{ üzerinde } x \text{ 'e göre düzgün})$$

olacak şekilde bir $\sigma(x)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi f limit fonksiyonuna relatively düzgün yakınsaktır denir. Burada $\sigma(x)$ fonksiyonu skale fonksiyon olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanımdan görüldüğü üzere, düzgün yakınsaklık $\sigma(x)$ skale fonksiyonunun sıfırdan farklı bir sabit seçimiyle relatively düzgün yakınsaklığın özel bir halidir.

Şimdi, relatively düzgün yakınsaklığın, düzgün yakınsaklığı gerektirmediği bir örnek ile gösterilsin.

2.7.2. Örnek: Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2},$$

şeklinde tanımlansın. (f_n) fonksiyon dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak

olmamasına rağmen $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ skale fonksiyonuna göre relatively

düzgün yakınsaktır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünün ilk kısmında Yılmaz, Demirci ve Orhan (2016)'ın çalışmasındaki relative modüler yakınsaklık tanımı verilmiş ve ikinci kısımda ise bu çalışmadaki yöntemler kullanılarak yakınsaklık kavramı yardımıyla modüler uzaylarda relative Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır. Üçüncü kısımda ise relative modüler yakınsaklık tanımı istatistiksel yaklaşım yardımıyla geliştirilerek A -istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramı Demirci ve Kolay (2017)'in çalışmasındaki gibi ifade edilmiştir.

Bulgular bölümünün son kısmında ise Demirci ve Kolay (2017)'in verdiği A -istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramından yararlanılarak A -istatistiksel relative Korovkin tipi teorem incelenmiştir.

4. BULGULAR

4.1. Relative Modüler Yakınsaklık

2016 yılında Yılmaz, Demirci ve Orhan relatively düzgün yakınsaklık kavramını geliştirerek relative modüler yakınsaklık tanımını vermişlerdir. Daha sonra relative modüler yakınsaklık tanımını modüler uzaylarda Korovkin tipi yaklaşım teorisine uygulamışlardır.

4.1.1 Tanım: $(f_n) \subset L^p(G)$ ve $f \in L^p(G)$ olsun. Eğer bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_n - f}{\sigma} \right) \right) = 0$$

olacak şekilde mutlak değeri sıfırdan farklı olan bir $\sigma \in X(G)$ skale fonksiyonu bulunabiliyor ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna relatively modüler yakınsaktır denir (Yılmaz, Demirci ve Orhan, 2016).

4.1.2. Tanım : $(f_n) \subset L^p(G)$ ve $f \in L^p(G)$ olsun. Eğer her $\lambda > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{f_n - f}{\sigma} \right) \right) = 0$$

olacak şekilde mutlak değeri sıfırdan farklı olan bir $\sigma \in X(G)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna relatively kuvvetli yakınsaktır denir (Yılmaz, Demirci ve Orhan, 2016).

Yukarıdaki 4.1.1 Tanım'dan görülebileceği gibi, $\sigma(x) = a \neq 0$ (a sabit) olursa modüler yakınsaklık relative modüler yakınsaklığın özel bir halidir. Ayrıca skale fonksiyonu sınırlı ise relative modüler yakınsaklık modüler yakınsaklığı gerektirir. Ancak skale fonksiyonu sınırlı değil ise bu gerektirme doğru değildir. Bu durum aşağıdaki örnek ile verilsin.

4.1.3 Örnek: $G = [0,1]$ ve $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

(i) φ konveks,

(ii) $\varphi(0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Her $f \in X(G)$ için

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx$$

ile $X(G)$ üzerinde tanımlanan ρ^φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. Bu durumda ρ^φ , $X(G)$ üzerinde konveks bir modülerdir. φ fonksiyonu ile oluşturulan Orlicz uzayı göz önüne alınsın,

$$L_\varphi^\rho(G) := \{f \in X(G) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty\}.$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g_n(x) = \begin{cases} n(1-nx), & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x=0 \text{ veya } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ ise $L_\varphi^\rho(G) = L_p(G)$ olur.

(Bardaro ve ark., 2003). Ayrıca herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho(G)$ için $\rho^\varphi(f) = \|f\|_p^p$ dir.

Kolaylıkla görülebilir ki $L_1(G)$ üzerinde (g_n) fonksiyon dizisi $g=0$ fonksiyonuna

modüler yakınsak olmamasına karşın, $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ skale fonksiyonuna göre

relatively modüler yakınsaktır. Gerçekten, bazı $\lambda_0 > 0$ 'lar için $p=1$ seçimiyle

$\rho^\varphi(f) = \|f\|_1$ dır. O halde

$$\rho(\lambda_0(g_n - g)) = \|\lambda_0(g_n - g)\|_1 = \lambda_0 \int_0^{\frac{1}{n}} |n(1-nx)| dx = \frac{\lambda_0}{2}$$

ve dolayısıyla

$\lim_n \|\lambda_0(g_n - g)\|_1 \neq 0$ dır. Şimdi skale fonksiyonunu kullanarak

$$\left(\lambda_0 \left(\frac{g_n - g}{\sigma} \right) \right) = \left\| \lambda_0 \left(\frac{g_n - g}{\sigma} \right) \right\|_1 = \lambda_0 \int_0^1 \left| \frac{n(1-nx)}{\frac{1}{x}} \right| dx = \lambda_0 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} \right) = \frac{\lambda_0}{6n}$$

ve $\lim_n \left(\frac{\lambda_0}{6n} \right) = 0$ olduğundan $\lim_n \left\| \lambda_0 \left(\frac{g_n - g}{\sigma} \right) \right\|_1 = 0$ olduğu görülür.

4.2. Modüler Uzaylarda Relative Korovkin Tipi Teorem

Şimdi de modüler uzaylarda relative Korovkin tipi teorem verilsin.

$G = [a, b]$ olmak üzere ρ , $X(G)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(G) \subset D \subset L^p(G)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Böyle bir D kümesi ρ 'nun monoton ve sonlu olması nedeniyle seçilebilir (Bardaro ve Mantellini, 2007). Kabul edilsin ki X_T , $C^\infty(G)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $\sigma \in X(G)$, $\sigma(x) \neq 0$ koşulunu sağlayan sınırsız bir fonksiyon olmak üzere $T := (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif P sabiti için

$$\limsup_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n h}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h) \quad (4.2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

4.2.1. Teorem: ρ , $X(G)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler ve $T = (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye (4.2.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Diğer yandan $\sigma_i(x)$ sınırsız bir fonksiyon ve $|\sigma_i(x)| \geq d_i > 0 (i = 0, 1, 2)$ şartı sağlansın. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0, (i = 0, 1, 2) \quad (4.2.2)$$

sağlansın. Ayrıca $f \in L^p(G)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için, $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|, i = 0, 1, 2\}$ olmak üzere

$$\lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0 \text{ dir (Yılmaz, Demirci ve Orhan, 2016).}$$

İspat: İlk olarak $g \in C(G) \cap D$ ve her $\mu > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) = 0 \quad (4.2.3)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(G) \cap D$ olsun. g , G 'de sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in G$ için

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon \quad (4.2.4)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|t - x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in G$ için $M := \sup_{x \in G} |g(x)|$ olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 \quad (4.2.5)$$

elde edilir. (4.2.4) ve (4.2.5)' den

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2$$

olduğu görülür. T_n lineer ve pozitif olduğundan, her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon T_n(e_0; x) + M |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2} T_n((t - x)^2; x)$$

elde edilir. $c := \max |x|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |T_n(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2 \right\} |T_n(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\quad + \frac{4M}{\delta^2} c |T_n(e_1; x) - e_1(x)| \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} |T_n(e_2; x) - e_2(x)|. \end{aligned}$$

Burada $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ denirse

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + K \left\{ |T_n(e_0) - e_0| + |T_n(e_1) - e_1| + |T_n(e_2) - e_2| \right\}$$

yazılır ve son eşitsizliğin her iki taraf $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılırsa

$$\left| \frac{T_n(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \frac{K}{|\sigma(x)|} \left\{ |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + |T_n(e_1; x) - e_1(x)| + |T_n(e_2; x) - e_2(x)| \right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte her $\mu > 0$ için,

$$\mu \left\{ \left| \frac{T_n(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \right\} \leq \frac{\mu\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \mu K \left\{ \left| \frac{T_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| + \left| \frac{T_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma_1(x)} \right| + \left| \frac{T_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma_2(x)} \right| \right\}$$

olur. Şimdi eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{\mu\varepsilon}{\sigma} + \mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) + \mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) + \mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) &\leq \rho \left(\frac{4\mu\varepsilon}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right). \end{aligned}$$

ρ , N -quasi yarıkonveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq N\varepsilon \rho \left(\frac{4\mu N}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right)$$

$$+ \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right)$$

bulunur. Böylece (4.2.2) hipotezi kullanılarak her $\lambda > 0$ ve her sabit $\mu > 0$ için

$$0 \leq \lim_n \rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq N \varepsilon \rho \left(\frac{4\mu N}{\sigma} \right)$$

elde edilir. Böylece (4.2.3) gösterilmiş olur. Ayrıca (4.2.3) eşitliği $C^\infty(G) \subset C(G) \cap D$ olduğundan her $g \in C^\infty(G)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^p(G)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(G) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan ρ modüllerinin $X(G)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu görülebilir. ρ modüllerinin bu özellikleri kullanılarak $g \in C^\infty(G)$ uzayının $L^p(G)$ 'de modüler yoğun olduğu görülür yani $\overline{C^\infty(G)} = L^p(G)$ eşitliği vardır (Mantellini, 1998; Bardaro ve ark., 2003). O halde, bazı $\lambda_0^* > 0$ için $\lim_k \rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) = 0$ olacak şekilde bir $(g_k) \subset C^\infty(G)$ dizisi vardır. O halde, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) < \varepsilon. \quad (4.2.6)$$

Diğer taraftan, T_n operatörünün lineer ve pozitif olmasından dolayı her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_0^* |T_n(f; x) - f(x)| \leq \lambda_0^* |T_n(f - g_{k_0}; x)| + \lambda_0^* |T_n(g_{k_0}; x) - g_{k_0}(x)| + \lambda_0^* |g_{k_0}(x) - f(x)|$$

olup, son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılıp, elde edilen eşitsizliğe ρ

modülleri uygulanırsa ve ρ 'nun monotonluğu kullanılırsa

$$\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{T_n(f - g_{k_0})}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{g_{k_0} - f}{\sigma} \right) \right).$$

Bu durumda $|\sigma| \geq d > 0$ ($d = \max\{d_i : i = 0, 1, 2\}$) olduğu ve yine ρ 'nun monoton olması göz önünde bulundurulursa

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(\frac{3\lambda_0^*}{d}(g_{k_0} - f)\right) \quad (4.2.7)$$

olur. Böylece (4.2.6) ve (4.2.7)'den

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right). \quad (4.2.8)$$

Dolayısıyla (4.2.8)'de her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0} \in C^\infty(G)$ olması kullanılarak (4.2.1)'den

$$\begin{aligned} \limsup_n \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \varepsilon + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\leq \varepsilon + P\rho\left(3\lambda_0^*(f - g_{k_0})\right) + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right), \end{aligned}$$

ve buradan

$$\limsup_n \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon (P+1) + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \quad (4.2.9)$$

elde edilir. (4.2.3)'den $\lim_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0$ olması nedeniyle

$$\limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0 \quad (4.2.10)$$

elde edilir. (4.2.9) ve (4.2.10)'dan

$$\limsup_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon (P+1)$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$\limsup_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0$$

bulunur. Dahası, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$\lim_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olduğu görülür ve bu ise ispatı tamamlar.

4.2.2 Teorem: $T = (T_n)$, ρ ve σ 4.2.1 Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 -şartını sağlıyorsa aşağıdaki ifadeler denktir:

a) Her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0,$

b) Her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(G)$ ve her $\lambda > 0$ için $\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0$ (Yılmaz ve ark., 2016).

4.3. A – İstatistiksel Relative Modüler Yakınsaklık

Şimdi A – istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramı verilsin

4.3.1 Tanım: $f_n \in L^p(G)$ ve $f \in L^p(G)$ olsun. Ayrıca $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_A - \lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_n - f}{\sigma} \right) \right) = 0$$

olacak şekilde mutlak değeri sıfırdan farklı olan bir $\sigma \in X(G)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna A -istatistiksel relatively modüler yakınsaktır denir (Demirci ve Kolay, 2017).

4.3.2 Tanım: $f_n \in L^p(G)$ ve $f \in L^p(G)$ olsun. Ayrıca $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer her $\lambda_0 > 0$ için

$$st_A - \lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_n - f}{\sigma} \right) \right) = 0$$

olacak şekilde mutlak değeri sıfırdan farklı olan bir $\sigma \in X(G)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna A -istatistiksel relatively kuvvetli yakınsaktır denir (Demirci ve Kolay, 2017).

Şimdi istatistiksel modüler yakınsak olmayan fakat istatistiksel relatively modüler yakınsak olan bir örnek verilsin.

4.3.3. Örnek: $G = [0,1]$, φ , ρ^φ ve φ ile oluşturulan Orlicz uzayı $L_\varphi^p(G)$ 4.1.3. Örnek' deki gibi olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g_n(x) = \begin{cases} 2 & n = k^2 \\ n^3 x, & 0 < x < \frac{1}{n}, n \neq k^2 \\ 0, & x = 0 \text{ veya } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, n \neq k^2 \end{cases}, k = 1, 2, \dots \quad (4.3.1)$$

şeklinde tanımlansın. Bilindiği gibi $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa $L_\varphi^p(G) = L_p(G)$ olur (Bardaro, Musielak and Vinti, 2003) ve herhangi bir $f \in L_\varphi^p$ için $\rho^\varphi(f) = \|f\|_p^p$ dir. Şimdi $A = C_1$ Cesáro matrisi seçilsin. Kolaylıkla görülebilir ki $L_1(G)$ üzerinde (g_n) fonksiyon dizisi $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel modüler yakınsak değildir buna karşın

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

skale fonksiyonu seçimiyle istatistiksel relatively modüler yakınsaktır. Gerçekten bazı

$\lambda_0 > 0$ ' lar için $p=1$ seçimiyle $\rho^p(f) = \|f\|_1$ elde edilir ve

$$\rho(\lambda_0(g_n - g)) = \|\lambda_0(g_n - g)\|_1 = \begin{cases} 2\lambda_0, & n = k^2 \\ \frac{\lambda_0 n}{2}, & n \neq k^2 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3.2)$$

ve dolayısıyla $\lim_n \frac{\lambda_0 n}{2} \neq 0$ olduğundan $st\text{-}\lim_n \|\lambda_0(g_n - g)\|_1 \neq 0$ dır. Şimdi σ skale fonksiyonunu kullanarak

$$\rho\left(\lambda_0\left(\frac{g_n - g}{\sigma}\right)\right) = \left\|\lambda_0\left(\frac{g_n - g}{\sigma}\right)\right\|_1 = \begin{cases} \frac{2\lambda_0}{3}, & n = k^2 \\ \frac{\lambda_0}{4n}, & n \neq k^2 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ve $\lim_n \frac{\lambda_0}{4n} = 0$ olduğundan $st\text{-}\lim_n \left\|\lambda_0\left(\frac{g_n - g}{\sigma}\right)\right\|_1 = 0$ olduğu görülür.

4.4. Modüler Uzaylarda A -İstatistiksel Relative Korovkin Tipi Teoremler

ρ , $X(G)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler, $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve D kümesi $C^\infty(G) \subset D \subset L^p(G)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Kabul edilsin ki X_T , $C^\infty(G)$ 'yi içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $\sigma \in X(G)$, $\sigma(x) \neq 0$ koşulunu sağlayan sınırsız bir fonksiyon olmak üzere $T = (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif P sabiti için

$$st_A\text{-}\limsup_n \rho\left(\lambda\left(\frac{T_n h}{\sigma}\right)\right) \leq P\rho(\lambda h) \quad (4.4.1)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

4.4.1. Teorem: $A := [a_{jn}]$ negatif olmayan regüler bir matris ve ρ , $X(G)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler ve $T = (T_n)$, D 'den $X(G)$ 'ye (4.4.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi

olsun. Öte yandan $\sigma_i(x)$ sınırsız bir fonksiyon ve $|\sigma_i| \geq d_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$) şartını sağlasın.

Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\text{st}_A - \lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.4.2)$$

sağlansın. Ayrıca $f \in L^p(G)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için, $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|, i = 0, 1, 2\}$ olmak üzere

$$\text{st}_A - \lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0 \quad (4.4.3)$$

dır (Demirci ve Kolay, 2017).

İspat: İlk olarak $g \in C(G) \cap D$ ve her $\mu > 0$ için

$$\text{st}_A - \lim_n \rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) = 0 \quad (4.4.4)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(G) \cap D$ olsun. g , G 'de sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in G$ için

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon \quad (4.4.5)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|t - x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in G$ için

$M := \sup_{x \in G} |g(x)|$ olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2 \quad (4.4.6)$$

elde edilir. (4.4.5) ve (4.4.6)'dan

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2$$

olduğu kolayca görülebilir. T_n lineer ve pozitif bir operatör olduğundan, her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon T_n(e_0; x) + M |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2} T_n((t - x)^2; x)$$

elde edilir. $c := \max |x|$ olmak üzere

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2 \right\} |T_n(e_0; x) - e_0(x)|$$

$$+ \frac{4M}{\delta^2} c |T_n(e_1; x) - e_1(x)|$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2} |T_n(e_2; x) - e_2(x)|.$$

Burada $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ denirse

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + K \left\{ |T_n(e_0) - e_0(x)| + |T_n(e_1) - e_1(x)| + |T_n(e_2) - e_2(x)| \right\}$$

ve son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılırsa

$$\left| \frac{T_n(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \frac{K}{|\sigma(x)|} \left\{ |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + |T_n(e_1; x) - e_1(x)| + |T_n(e_2; x) - e_2(x)| \right\}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten her $\mu > 0$ için,

$$\mu \left\{ \left| \frac{T_n(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \right\} \leq \frac{\mu \varepsilon}{|\sigma(x)|} + \mu K \left\{ \left| \frac{T_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| \right.$$

$$\left. + \left| \frac{T_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma_1(x)} \right| + \left| \frac{T_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma_2(x)} \right| \right\}$$

olur. Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{\mu \varepsilon}{\sigma} + \mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) + \mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) + \mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{4\mu \varepsilon}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right)$$

$$+ \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right).$$

ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq N \varepsilon \rho \left(\frac{4\mu N}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right)$$

$$+ \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right).$$

bulunur. Verilmiş bir $r > 0$ için bir $\varepsilon \in (0,1]$ seçilsin öyle ki $N\varepsilon\rho\left(\frac{4\mu N}{\sigma}\right) < r$ olsun.

Şimdi $i = 0,1,2$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$R_n := \left\{ n : \rho\left(\mu\left(\frac{T_n g - g}{\sigma}\right)\right) \geq r \right\}$$

$$R_{n,i} := \left\{ n : \rho\left(4\mu K\left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i}\right)\right) \geq \frac{r - N\varepsilon\rho\left(\frac{4\mu N}{\sigma}\right)}{3} \right\}.$$

Buradan $R_n = \bigcup_{i=0}^2 R_{n,i}$ olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı,

$$\delta_A(R_n) \leq \sum_{i=0}^2 \delta_A(R_{n,i})$$

şeklinde gösterilebilir. (4.4.2) hipotezi kullanılarak $\delta_A(R_n) = 0$ elde edilir, böylelikle (4.4.4) gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.4.4) eşitliği $C^\infty(G) \subset C(G) \cap D$ olması sebebiyle $\forall g \in C^\infty(G)$ için de sağlanmış olur. Şimdi $f \in L^\rho(G)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(G) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olması sebebiyle, ρ modüllerinin $X(G)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu söylenebilir. ρ modüllerinin bu özelliklerinden yararlanılarak $C^\infty(G)$ uzayının $L^\rho(G)$ 'de modüler yoğun olduğu görülür yani $\overline{C^\infty(G)} = L^\rho(G)$ eşitliği vardır (Mantellini, 1998; Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003). Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için

$$\lim_k \rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) = 0$$

olacak şekilde bir $(g_k) \subset C^\infty(G)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) < \varepsilon. \quad (4.4.7)$$

Diğer taraftan, T_n operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_0^* |T_n(f; x) - f(x)| \leq \lambda_0^* |T_n(f - g_{k_0}; x)| + \lambda_0^* |T_n(g_{k_0}; x) - g_{k_0}(x)|$$

$$+ \lambda_0^* |g_{k_0}(x) - f(x)|.$$

Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılıp, elde edilen eşitsizliğe ρ modülleri

uygulanırsa ve ρ 'nun monotonluğu kullanılırsa

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(f - g_{k_0})}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{g_{k_0} - f}{\sigma}\right)\right).$$

Böylelikle $|\sigma| \geq d > 0$ ($d = \max\{d_i : i = 0, 1, 2\}$) olduğu göz önüne alınarak ve yine ρ 'nun monoton olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad + \rho\left(\frac{3\lambda_0^*}{d}(g_{k_0} - f)\right) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

olur. Böylece, (4.4.7) ve (4.4.8)'den

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right). \quad (4.4.9)$$

Dolayısıyla, (4.4.9)'da her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için A -istatistiksel üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0} \in C^\infty(G)$ olması kullanılarak, (4.4.1)'den

$$\begin{aligned} st_A - \limsup_n \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \varepsilon + st_A - \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad + st_A - \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\leq \varepsilon + P\rho\left(3\lambda_0^*(f - g_{k_0})\right) + st_A - \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

ve buradan

$$st_A - \limsup_n \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon(P+1) + st_A - \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \quad (4.4.10)$$

elde edilir. (4.4.4)'den, $st_A - \lim_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0$ olduğundan

$$st_A - \limsup_n \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma} \right) \right) = 0 \quad (4.4.11)$$

elde edilir. (4.4.10) ve (4.4.11) 'den

$$st_A - \limsup_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = \varepsilon (P+1)$$

sonucuna ulaşılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$st_A - \limsup_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0$$

bulunur. Dahası, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$st_A - \lim_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olduğu kolayca görülür, bu ise ispatı tamamlar.

4.4.2. Teorem: $A := [a_{jn}]$, $T = (T_n)$, ρ ve σ 4.4.1. Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri için Δ_2 - şartı sağlanıyor ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

$$a) \text{ Her } \lambda > 0 \text{ ve } i = 0, 1, 2 \text{ için } st_A - \lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0,$$

b) Her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(G)$ ve her

$$\lambda > 0 \text{ için } st_A - \lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0.$$

Eğer σ skale fonksiyonu $\sigma(x) = a \neq 0$ (a sabit) seçilirse (4.4.1) eşitsizliği (2.6.4)'e indirgenir. Şöyle ki her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$st_A - \limsup_n \rho(\lambda(T_n h)) \leq P\rho(\lambda h)$$

eşitsizliğine dönüşmüş olur ve böylelikle 4.4.1. Teorem'den Karakuş, Demirci ve Duman (2010) tarafından verilen 2.6.11. Teoremi elde edilmiş olur. Skale fonksiyonunun bu özel seçimi ile birlikte $A = I$ birim matrisi seçilirse, (4.4.1) eşitsizliği (2.6.3)'e indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_n \rho(\lambda(T_n h)) \leq P\rho(\lambda h)$$

eşitsizliğine dönüşmüş olur ve böylelikle 4.4.1. Teorem' den Bardaro ve Mantellini (2007) tarafından ifade edilen 2.6.10. Teorem'i elde edilmiş olur. Son olarak $A=I$ seçimi yapılmış olursa (4.4.1) eşitsizliği (4.2.1)'e indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n h}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h)$$

eşitsizliğine dönüşmüş olur ve böylelikle 4.4.1. Teorem'den Yılmaz, Demirci ve Orhan (2016) tarafından ifade edilen 4.2.1. Teorem'i elde edilmiş olur.

Şimdi 4.4.1. Teorem'in 2.6.10. Teorem ve 4.2.1. Teorem'den güçlü olduğunu gösteren bir örnek verilsin.

4.4.3. Örnek: $G=[0,1]$ ve φ , ρ^φ ve $L_\varphi^\rho(G)$ 4.3.3. Örnek'deki gibi olsun. Ayrıca A matrisi birinci dereceden Cesáro matrisi olsun. Buradan $x \in G$ için

$$U_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t) dt \quad (4.4.12)$$

ile tanımlanan $L_\varphi^\rho(G)$ uzayı üzerinde $U := (U_n)$ Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. U_n , $L_\varphi^\rho(G)$ Orlicz uzayını $L_\varphi^\rho(G)$ 'ye dönüştürür. Dahası, $X_U := L_\varphi^\rho(G)$ seçilmesiyle (2.6.3) özelliği gerçekleşir. Buradan, 2.6.10. Teorem'den, görülebilir ki, her $g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho(G)$ için $(U_n f)$, f 'ye modüler yakınsaktır. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa $L_\varphi^\rho(G) = L_p(G)$ olduğu ve $p=1$ seçimiyle $\rho^\varphi(f) = \|f\|_1$ elde edildiği daha önce de belirtilmişti.

Şimdi U_n operatörleri kullanılarak, $L_1(G)$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin $V := (V_n)$ dizisi, (g_n) , (4.3.1) ile verilen dizi olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f \in L_1(G)$, $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_n(f; x) = (1 + g_n(x)) U_n(f; x). \quad (4.4.13)$$

C pozitif sabiti için $\|U_j(f; x)\|_p \leq C \|f\|_p$ (Ditzian and Totik, 1987) eşitsizliğinden ve

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \text{ olmak üzere } \sigma_i(x) = \sigma(x) \ (i = 0, 1, 2) \text{ seçimiyle her } \lambda > 0 \text{ için}$$

$$st - \limsup_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n f}{\sigma} \right) \right\|_1 \leq C \|\lambda f\|_1$$

olduğu kolay bir şekilde görülebilir.

Şimdi her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_i - e_i}{\sigma} \right) \right\|_1 = 0 \quad (4.4.14)$$

olduğu gösterilsin. Biliniyor ki

$$U_n(e_0; x) = e_0,$$

$$U_n(e_1; x) = \frac{nx}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)},$$

$$U_n(e_2; x) = \frac{n(n-1)x^2}{(n+1)^2} + \frac{2nx}{(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2},$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan, her $\lambda > 0$ ve $i = 0$ için

$$\left\| \lambda \left(\frac{V_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 = \left\| \lambda \left(\frac{1 + g_n(x) - 1}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 = \left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1$$

olduğu görülür ve (g_n) 'nin tanımından

$$\left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 = \begin{cases} \frac{2\lambda}{3}, & n = k^2 \\ \frac{\lambda}{4n}, & n \neq k^2 \end{cases}, k = 1, 2, \dots \quad (4.4.15)$$

elde edilir. $\lim_n \frac{\lambda}{4n} = 0$ olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$st - \lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_0 - e_0}{\sigma} \right) \right\|_1 = 0$$

olup (4.4.14) $i = 0$ için sağlanır. Ayrıca $i = 1$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \lambda \left(\frac{V_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 &= \left\| \lambda \left(\frac{(1 + g_n(x))U_n(e_1; x)}{\sigma(x)} - \frac{x}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 \\
&\leq \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \left(\frac{nx}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \right) \right\|_1 + \left\| \lambda \frac{x - 2x^2}{2(n+1)} \right\|_1 \\
&< \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right\|_1 + \frac{\lambda}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

olur. (4.4.15)' den $st - \lim_n \left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 = 0$ ve $\lim_n \frac{\lambda}{2(n+1)} = 0$ olduğundan

$$st - \lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_1 - e_1}{\sigma} \right) \right\|_1 = 0$$

elde edilir, (4.4.14) $i = 1$ için de sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned}
\left\| \lambda \left(\frac{V_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 &= \left\| \lambda \frac{(1 + g_n(x))U_n(e_2; x)}{\sigma(x)} - \frac{\lambda x^2}{\sigma(x)} \right\|_1 \\
&\leq \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \left(\frac{n(n-1)x^2}{(n+1)^2} + \frac{2nx}{(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} \right) \right\|_1 \\
&\quad + \left\| \lambda \left(\frac{(3n+1)x^3}{(n+1)^2} + \frac{2nx^2}{(n+1)^2} + \frac{x}{3(n+1)^2} \right) \right\|_1 \\
&< 3 \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right\|_1 + \frac{3\lambda}{n+1} + \frac{2\lambda n}{(n+1)^2} + \frac{\lambda}{3(n+1)^2}
\end{aligned}$$

olup, yine (4.4.15)'den $st - \lim_n \left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 = 0$, $\lim_n \frac{3\lambda}{n+1} = 0$, $\lim_n \frac{2\lambda n}{(n+1)^2} = 0$ ve

$$\lim_n \frac{\lambda}{3(n+1)^2} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$st - \lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_2 - e_2}{\sigma} \right) \right\|_1 = 0$$

elde edilir, (4.4.14) $i = 2$ için de sağlandığı görülür.

Bu durumda hipotezden (4.4.13) ile tanımlanan $V := (V_n)$ dizisi 4.4.1. Teorem'in bütün şartlarını sağlamış olur. Bu sebeple $\forall g \in C^\infty(G)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^p(G)$ ve bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st - \lim_n \left\| \lambda_0 \left(\frac{V_n f - f}{\sigma} \right) \right\|_1 = 0$$

bulunur. Buna karşın aynı f ve herhangi $\lambda > 0$ için

$$\left\| \lambda \left(\frac{V_n e_0 - e_0}{\sigma(x)} \right) \right\|_1 \text{ birbirinden farklı limit noktaları olan iki alt diziye sahip olduğu için}$$

$(V_n f)$ 'nin f 'ye relatively modüler yakınsak olmadığı kolayca söylenir. Dolayısıyla,

4.2.1. Teorem $V := (V_n)$ operatörü için sağlanmaz. Ayrıca denklem (4.3.2) 'den

$$\left\| \lambda (V_n e_0 - e_0) \right\|_1 = \left\| \lambda g_n(x) \right\|_1 = \begin{cases} 2\lambda_0, & n = k^2 \\ \frac{\lambda_0 n}{2}, & n \neq k^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ve $\lim_n \frac{\lambda_0 n}{2} \neq 0$ olup 2.6.10. Teorem $V := (V_n)$ operatörü için sağlanmaz. Yani $(V_n f)$, f 'ye istatistiksel modüler yakınsak değildir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında modüler yakınsaklıktan daha kuvvetli olan relative modüler yakınsaklık kavramı ve buradan istatistiksel yaklaşım yardımıyla geliştirilmiş olan A –istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramı çalışılmıştır. Korovkin tipi teoreme uygulanmış ve modüler uzaylarda A –istatistiksel Korovkin tipi teoremden daha kuvvetli olan A –istatistiksel relative Korovkin tipi teoremin elde edildiği gösterilmiştir. Bu nedenle bu yüksek lisans tezinde konuya ait makaleler incelenerek doktora çalışmasına hazırlık yapılmıştır. Daha kuvvetli sonuçlar elde edebilmek için A –istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramı kullanılarak farklı uzaylar üzerinde daha az koşul altında Korovkin tipi teorem incelenebilir.



6. KAYNAKLAR

- Bardaro, C., Mantellini, I. 2007. Korovkin theorem in modular spaces. *Commentationes Math.*, 47 (2) : 239-253.
- Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G. 2003. Nonlinear integral operators and applications. *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis And Applications* 9, Walter de Gruyter Publ., Berlin, 199 s.
- Boos. J. 2000. Classical and modern in summability. Oxford Science Publications.
- Chittenden, E. W. 1919. On the limit functions of sequences of continuous functions converging relatively uniformly. *Trans. AMS.* 20: 179-184.
- Connor J.S., Kline J. 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. *J Math Anal Appl* 197:392–399.
- Ditzian, Z., Totik, V. 1987. *Moduli of Smoothness*. Springer series in computational mathematics 9. Springer, New York.
- Duman, O., Khan, K. ve Orhan, C. 2003. A–Statistical convergence of approximating operators. *Math. Ineq. Appl.*, 6: 689-699.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2: 241-44.
- Freedman, A. R., Sember, J. J. 1981. Density and summability. *Pacific J. Math.*, 95: 293-305.
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence. *Analysis*, 5: 301-313.
- Gadjiev, A. D., Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.*, 32: 129-138.
- Hardy, G. H. 1949. *Divergent series*. Oxford Univ. Press, London.
- Karakus, S., Demirci, K., Duman, O. 2010. Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. *Positivity*, 14: 321-334.
- Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistical convergent sequences. *Analysis*, 13:77-83.
- Korovkin, P. P. 1960. *Linear operators and approximation theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Kozłowski, W. M. 1988. *Modular function spaces*. 122. Pure Appl. Math., Dekker, Inc., New York, 252 s.

- Mantellini I. 1998. Generalized sampling operators in modular spaces. *Commentationes Math.*, 38: 77 – 92.
- Meyer-König W.K. (1960) . Zeller Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Math.*, 19, 89 – 94.
- Miller, H. I. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347: 1811-1819.
- Moore, E. H. 1910. An introduction to a form of general analysis, The New Haven Mathematical Colloquium, Yale University Press, New Haven.
- Musielak, J. 1983. Orlicz spaces and modular spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol., 1034, Springer – Verlag, Berlin, 222 s.
- Musielak, J. 1993. Nonlinear approximation in some modular function spaces I. *Math. Japon*, 38: 83-90.
- Niven, I., Zuckerman, H.S. 1980. An introduction on the theory of numbers. John Waley & Sons, 4th ed. New York.
- Yilmaz B., Demirci K., Orhan S. 2016. Relative modular convergence of positive linear operators. *Positivity* 20: 565–577.
- Demirci K., Kolay B., 2017. A – statistical relative modular convergence of positive linear operators. *Positivity* 21: 847-863.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Selin ÇINAR
Doğum Tarihi ve Yeri	:12.07.1990 / SİNOP
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:selin_yalcin@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Sinop Üniversitesi	Devam Ediyor
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2015

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2015-2016	Özel Kavram Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni
2016-2018	Sinop Sınav Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni