



**MODÜLER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL
A-TOPLAM SÜRECİ VE KOROVKIN TEOREMİ**

SEVDA ORHAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL
A-TOPLAM SÜRECİ VE KOROVKIN TEOREMİ

SEVDA ORHAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ

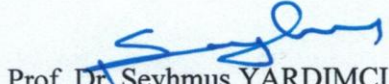
SİNOP – 2017

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Arş. Gör. Sevda ORHAN, tarafından hazırlanan “Modüler Uzaylarda İstatistiksel A-Toplam Süreci ve Korovkin Teoremi” başlıklı bu çalışma, 25.05.2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ
Jüri Başkanı



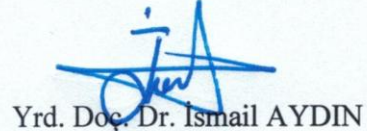
Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Jüri Üyesi



Doç. Dr. Cenap DUYAR
Jüri Üyesi

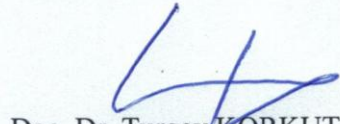


Doç. Dr. Murat OLGUN
Jüri Üyesi



Yrd. Doç. Dr. İsmail AYDIN
Jüri Üyesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.



Doç. Dr. Turgay KORKUT
Enstitü Müdürü

MODÜLER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL A-TOPLAM SÜRECİ VE KOROVKIN TEOREMİ

ÖZET

Bu doktora tezinde ilk olarak tez içerisinde kullanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler tanıtılmıştır. Bulgular bölümünün birinci kısmında tek indisli diziler için $\mathcal{B}$ -istatistiksel A -toplam süreci yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılmış ve bu yeni yaklaşım teoremini sağlayan bir örnek verilmiştir. Bulgular bölümünün ikinci kısmında ise, çift indisli diziler için istatistiksel modüler yakınsaklık kavramı verilmiş ve bu kavram yardımıyla Korovkin tipi teoremler elde edilmiştir. Daha sonra bu teoremin koşulunu sağlayan fakat çift indisli diziler için modüler Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamayan bir örnek verilmiştir. Bulgular bölümünün son kısmında ise, çift indisli diziler için istatistiksel A -toplam süreci yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılmış ve elde edilen sonuçların daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, pozitif lineer operatör, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, modüler uzay, çift indisli dizi, toplam süreci, modüler yakınsaklık.

STATISTICAL A-SUMMATION PROCESS AND KOROVKIN THEOREM ON MODULAR SPACES

ABSTRACT

In this doctoral thesis, some main definitions and theorems which were used in the study have been introduced primarily. In the first part of the findings section, Korovkin type approximation theorems have been studied with the help of $\mathcal{B}$ -statistical A-summation process for single sequences on modular spaces and an example which satisfies this new approximation theorem has been given. In the second part of the findings section, the concept of statistical modular convergence for double sequences has been given and Korovkin type theorems have been obtained with this concept. Then, an example that provides the condition of this theorem but does not provide for the modular Korovkin type theorem for double sequences has been given. In the last part of the findings, Korovkin type approximation theorems with the help of the statistical A-summation process for double sequences have been studied on modular spaces and an example showing that the results obtained have been stronger.

Key Words: Statistical convergence, positive linear operator, Korovkin type approximation theorem, modular space, double sequence, summation process, modular convergence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerilerini esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ'ye, çalışmalarımda yardımlarını ve desteğini esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Fadime DİRİK'e en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her zaman yanımda olan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen canım AİLEME sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez " TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Canım BABAMA...

Arş. Gör. Sevdâ ORHAN
Mayıs, 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Klasik Korovkin Teoremi	4
2.2. Tek İndisli Diziler İçin İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teorem	5
2.3. Toplanabilme Teorisi	9
2.4. Tek İndisli Diziler İçin $\mathcal{B}$ –İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teorem	11
2.5. Çift İndisli Diziler için İstatistiksel Korovkin Teoremi	14
2.6. Modüler Uzaylar ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi.....	18
3. MATERYAL VE YÖNTEM	22
4. BULGULAR	23
4.1. Modüler Uzaylarda Toplam Süreci Yardımıyla İstatistiksel Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri.....	23
4.2. Modüler Uzaylarda Çift İndisli Diziler için İstatistiksel Korovkin Teoremleri...	32
4.3. Modüler Uzaylarda Toplam Süreci Yardımıyla Çift İndisli Diziler için İstatistiksel Korovkin Tipi Teoremler	42
4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	57

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
δ_2	: Çift indisli yoğunluk fonksiyonu
$\delta_{\mathcal{B}}$	: $\mathcal{B}$ – Yoğunluk fonksiyonu
ρ	: Modüler fonksiyonu
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
c	: Yakınsak diziler uzayı
S	: Tüm diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
Ω	: Reel terimli çift indisli diziler uzayı
st_2	: İstatistiksel yakınsak çift indisli diziler uzayı
$ A $	: A kümesinin eleman sayısı
$h.h.$	: Hemen her yerde
$I = [a, b]$	: Lebesgue ölçülebilir, reel sayıların sınırlı alt aralığı
$X(I)$	: I üzerinde tanımlı, $h.h.$ eşitliğini sağlayan, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$C^\infty(I)$	: I üzerinde her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Klasik yaklaşım teorisi, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli her fonksiyona bir polinom fonksiyonu ile istenildiği kadar düzgün yaklaşılabilmesi üzerine dayanan, Weierstrass (1885) teoreminin ispatı ile başlamıştır. Bundan sonra P. P. Korovkin (1953) yalnızca $e_r(x) = x^r$, $r = 0, 1, 2$ test fonksiyonlarının düzgün yakınsaklığını kabul ederek, (L_k) pozitif lineer operatörlerinin dizisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşulları ele almıştır. Böylece yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Korovkin tipi yaklaşım teorisi ortaya çıkmıştır. Daha sonra birçok araştırmacı farklı uzaylar üzerinde tanımlı çeşitli operatörler için bu koşulları araştırmıştır. Klasik Korovkin tipi teoremden yakınsaklığın olmadığı durumlarda, yakınsaklık kaybını gidermek için matris toplanabilme metotlarının kullanılması etkilidir (Swetits, 1979). 1981 yılında Nishishiraho (1981; 1983) kompakt bir Hausdorff uzayı üzerinde A -toplam süreci kavramını tanımlayarak daha genel sonuçlar elde etmiştir. Daha sonra toplam süreci yardımıyla farklı uzaylarda Korovkin tipi teoremler çalışılmıştır (Atlıhan ve Orhan, 2008; Karakuş ve Demirci, 2011, 2012). 2007 yılında ise Korovkin tipi yaklaşım teoremleri Bardaro ve Mantellini tarafından L_p uzayları, Orlicz ve Musielak-Orlicz uzaylarını içeren modüler uzaylar üzerinde çalışılmıştır. Bu uzaylar detaylı olarak Musielak (1983) ve Kozłowski (1988) tarafından incelenmiştir.

Toplanabilme Teorisi, Fourier Serileri, Fonksiyonel Analiz ve Yaklaşım Teorisi’de önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez 1949 yılında Polonya’da yapılan bir konferansta Steinhaus tarafından tanıtılmış ve daha sonra 1951 yılında Fast tarafından geliştirilmiştir. İstatistiksel yakınsak diziler uzayının bazı topolojik özelliklerinin incelemesi ilk defa Šalát (1980) tarafından, daha sonra ise Connor (1985) tarafından ele alınmıştır. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık ölçü teorisi ve sayılar teorisi ile de ilgilidir. Bu ilişki Freedman ve Sember (1981) ve Connor (1990) tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık tanımı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teorisi için daha güçlü sonuçlar elde edilmiştir (Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman ve ark., 2003). Pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yaklaşımı ise modüler uzaylar üzerinde Karakuş, Demirci ve Duman (2010) tarafından ele alınarak daha önce elde edilen sonuçlardan kuvvetli olan istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verilmiştir.

Bu doktora tezinde ilk olarak tek indisli diziler için A -toplam süreci tanımı

verilerek bu kavram yardımıyla $\mathcal{B}$ –istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılacaktır ve bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir. Daha sonra çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylarda elde edilecek ve elde edilen sonuçların daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilecektir. Son olarak, çift indisli diziler için istatistiksel A –toplam süreci yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılacak ve elde edilen sonuçların daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilecektir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez içerisinde yararlanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler tanıtılacaktır.

Öncelikle bazı fonksiyon uzayları tanıtılsın:

$B[a, b]$ ($B(I)$, $I = [a, b]$), $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı tüm fonksiyonların uzayıdır ve $\|f\|_B = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

$C[a, b]$ ($C(I)$, $I = [a, b]$), $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır. a , b uç noktalarında bu uzayın elemanları sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır. $f \in C[a, b]$ için $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a, b]$ bir Banach uzayıdır.

$L_p[a, b]$ ($L_p(I)$, $I = [a, b]$), $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli p -inci mertebeden mutlak integrallenebilen fonksiyonların uzayıdır ve $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

Şimdi de sırasıyla operatör, lineer operatör ve lineer operatörler kümesi içinde önemli bir sınıf olan pozitif lineer operatör kavramları verilsin.

2.1. Tanım: X ve Y sırasıyla A ve B ($A, B \neq \emptyset$) üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı olsunlar. Eğer X 'den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y 'de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve L operatörünün $x \in B$ noktasındaki değeri $L(f; x) = g(x)$ şeklinde gösterilir.

X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Ayrıca $R(L) = \{g: L(f; x) = g(x), f \in D(L)\}$ kümesine de L operatörünün değer kümesi denir. $R(L) \subseteq Y$ dir.

Burada X uzayı lineer uzayı olduğunda lineer operatörün tanımı verilebilir.

2.2. Tanım: f_1 ve f_2 , X uzayında herhangi iki fonksiyon, $x \in B$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için L operatörü,

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir. Tanımdan da görülebileceği gibi L lineer operatörü için $L(0; x) = 0$ olur.

2.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0, t \in A\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0, x \in B\}$ olsun. X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne pozitif lineer operatör denir.

Örneğin, $S_k : C[0,1] \rightarrow B[0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$S_k(f; x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{k}\right) \frac{(kx)^n}{n!}, \quad x \in [0,1] \quad (2.1)$$

ile tanımlanan Szasz operatörü $\frac{(kx)^n}{n!} \geq 0$ ve $e^{-kx} \geq 0$ olduğundan bir pozitif lineer operatördür (Szasz, 1950).

L pozitif lineer operatörü için $LX^+ \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. Ayrıca pozitif lineer operatörler monotondur. Yani, $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f; x) \leq L(g; x)$ dır.

2.1. Klasik Korovkin Teoremi

Aşağıda birçok araştırmaya konu olmuş ve yaklaşım teorisinde önemli bir yeri olan Korovkin tipi teorem verilmiştir.

2.1.1. Teorem: Eğer $L_k : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi $r = 0, 1, 2$ için $e_r(x) = x^r$ olmak üzere

$$\lim_k \|L_k e_r - e_r\|_B = 0$$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_k \|L_k f - f\|_B = 0$$

dır (Korovkin, 1960).

(2.1) deki Szasz operatörü için $S_k(e_0; x) = e_0(x)$, $S_k(e_1; x) = e_1(x)$ ve $S_k(e_2, x) = e_2(x) + \frac{e_1(x)}{k}$ olduğundan 2.1.1. Teorem'in koşulları sağlandığından her $f \in C[0, 1]$ için $\lim_k \|S_k f - f\|_B = 0$ gerçekleşir.

2.2. Tek İndisli Diziler İçin İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teorem

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A ve $A_n := \{k \leq n : k \in A\}$ olsun. A_n kümesinin eleman sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.2.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için $\lim_l \frac{|A_l|}{l}$ limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

(a_k) pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere yoğunluk mevcut ise $\delta(A) = \lim_k \frac{k}{a_k}$ dir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Örneğin; $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{k^2 : k \in \mathbb{N}\}) = 0$, $\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ ve doğal sayıların her bir sonlu alt kümesinin de sıfır yoğunluklu olduğu yoğunluk tanımından kolaylıkla görülebilir. Ayrıca yoğunluğa sahip bir A kümesi için $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ dir.

2.2.2. Tanım: $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st - \lim_k x_k = L$ şeklinde gösterilir (Steinhaus, 1949; Fast, 1951).

Bir x dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması durumunda L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken, bu komşuluğun dışında ise, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabileceği istatistiksel yakınsaklık tanımından kolaylıkla görülebilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. O halde yakınsak diziler uzayını c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını st ile gösterecek olursak, $c \subset st$ dir. Yani, istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir.

Aşağıda bir dizinin istatistiksel yakınsak olmasını karakterize eden teorem verilmiştir.

2.2.3. Teorem: $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{k_n : n \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_n x_{k_n} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{k_n}) yakınsak alt dizisi vardır (Fridy, 1985).

2.2.4. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 2, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. $K = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ denirse $\delta(K) = 0$, $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1$ olup

$$(x_{k_n}) = (1, 1, \dots) \rightarrow 1, (k_n \in (\mathbb{N} \setminus K), n \in \mathbb{N})$$

olduğundan $st - \lim_k x_k = 1$ bulunur.

2.2.5. Örnek: $x = (x_k)$

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

dizisi için $st - \lim_k x_k = 0$ olduğu görülür.

Örneklerden de görülebileceği gibi bu diziler sınırlı ıraksak ve sınırsız ıraksak olmalarına rağmen istatistiksel yakınsaktırlar.

Bir x dizisinin bir L sayısına yakınsayan alt dizisi varsa L sayısı x dizisinin alışılmış limit noktasıdır. Bir alt dizisinin yoğunluğu göz önüne alınarak istatistiksel limit noktası tanımı Fridy (1993) tarafından verilmiştir.

2.2.6. Tanım: Reel terimli bir x dizisinin bir L sayısına yakınsayan ince olmayan alt dizisi varsa (alt dizinin indis kümesinin yoğunluğu sıfırdan büyük veya yoğunluğa sahip değil), L sayısına x dizisinin bir istatistiksel limit noktasıdır denir (Fridy, 1993).

Bir x dizisinin alışılmış limit noktalarının cümlesi L_x ile istatistiksel limit noktalarının cümlesi ise Λ_x ile gösterilir. 2.2.4. Örnek’de tanımlanan x dizisi için $L_x = \{1, 2\}$ ve $\Lambda_x = \{1\}$ dır.

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır.

2.2.7. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \varepsilon\}$ cümlesi sıfır yoğunluğa sahip değilse L sayısına x dizisinin bir istatistiksel değme noktası denir (Fridy, 1993).

Bir x dizisinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi Γ_x ile gösterilir. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Ayrıca, herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ fakat, Λ_x ve Γ_x cümleleri eşit değildir (Fridy, 1993).

Şimdi reel terimli bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0\},$$

$$C_x := \{a \in \mathbb{R} : \delta(\{k : x_k < a\}) \neq 0\},$$

olmak üzere istatistiksel üst limit ve alt limit kavramları verilsin. Burada $\delta(K) \neq 0$ olması $\delta(K) > 0$ veya K kümesi yoğunluğa sahip değil, anlamında alınacaktır.

2.2.8. Tanım: Bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel üst limiti

$$st - \limsup_k x_k := \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \\ -\infty, & B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Fridy ve Orhan, 1997).

Benzer şekilde bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel alt limiti

$$st - \liminf_k x_k := \begin{cases} \inf C_x, & C_x \neq \emptyset \\ +\infty, & C_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Fridy ve Orhan, 1997).

$st - \limsup_k x_k$, x dizisinin en büyük istatistiksel değme noktası, $st - \liminf_k x_k$, x dizisinin en küçük istatistiksel değme noktasıdır (Fridy ve Orhan, 1997).

Alışılmış üst limit ve alt limit kavramlarında olduğu gibi, reel terimli $x = (x_k)$ dizisi için

$$st - \liminf_k x_k \leq st - \limsup_k x_k$$

olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca

$$\liminf_k x_k \leq st - \liminf_k x_k \leq st - \limsup_k x_k \leq \limsup_k x_k.$$

Şimdi istatistiksel Korovkin tipi teorem verilsin.

2.2.9. Teorem: Eğer $L_k : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi ve $r = 0, 1, 2$ için $e_r(x) = x^r$ olmak üzere

$$st - \lim_k \|L_k e_r - e_r\|_B = 0$$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C[a, b]$ için

$$st - \lim_k \|L_k f - f\|_B = 0$$

dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

2.3. Toplanabilme Teorisi

Şimdi toplanabilme teorisiyle ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilsin.

2.3.1. Tanım: X ve Y , tüm diziler uzayı olan S 'in alt kümeleri ve $\mathcal{B} = (b_{lk})$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere $x = (x_k) \in X$ ve her $l \in \mathbb{N}$ için

$$(\mathcal{B}x)_l := \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} x_k$$

serisi yakınsak ise $\mathcal{B}x := ((\mathcal{B}x)_l)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $\mathcal{B}x$ dönüşüm dizisi mevcut ve $\mathcal{B}x \in Y$ ise $\mathcal{B} = (b_{lk})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $\mathcal{B} \in (X, Y)$ ile gösterilir. Eğer bir x dizisi için $\mathcal{B}x$ dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak ise x dizisi L sayısına $\mathcal{B}$ -toplanabilirdir denir ve $\mathcal{B}$ -lim $x = L$ şeklinde yazılır. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Eğer verilen bir $x = (x_k)$ dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_l (\mathcal{B}x)_l = L$ koşulu gerçekleşiyor ise $\mathcal{B}$ matrisine regüler matris denir. $X = Y = c$ olmak üzere regüler matrislerin sınıfı $(c, c; p)$ ile gösterilir (Hardy, 1949; Boos, 2000).

Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartları veren Silverman-Teopltiz Teoremi aşağıdaki gibidir:

2.3.2. Teorem (Silverman-Teopltiz): $\mathcal{B} = (b_{lk}) \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$(i) \quad \|\mathcal{B}\| := \sup_l \sum_{k=1}^{\infty} |b_{lk}| < \infty$$

$$(ii) \quad \text{Her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_l b_{lk} = 0$$

$$(iii) \quad \lim_l \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} = 1$$

olmasıdır (Hardy, 1949; Boos, 2000).

2.3.3. Örnek: Aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C_1 = (c_{lk})$

$$c_{lk} = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 1 \leq k \leq l \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Cesáro matrisi regülerdir.

Bell (1973), Stieglitz (1973) 2.3.1. Tanım'daki düşüncüyü kullanarak $\mathcal{B} = (b_{lk})$ matrisi yerine $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$, $(n \in \mathbb{N})$, matris dizisini alarak aşağıdaki tanımları vermişlerdir.

2.3.4. Tanım: $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $x = (x_j)$ reel sayıların dizisi ve tüm $k, n \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_k^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j$ serisi yakınsak ise $Ax := \{(Ax)_k^n : k, n \in \mathbb{N}\}$ çift indisli dizisine x dizisinin A -dönüşümü denir. Eğer

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j = L \quad (n \text{ ye göre düzgün})$$

koşulu gerçekleşiyorsa, x dizisi L değerine A -toplanabilir denir (Bell 1973, Stieglitz 1973).

2.3.5. Tanım: $x = (x_j)$ reel terimli sınırlı bir dizi olsun. $\lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} x_j = L$ (n ye göre düzgün), koşulunu sağlayan bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Eğer A bir matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} = A$ alınırsa, A -toplanabilme klasik matris toplanabilmeye ve I birim matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} = I$ alınırsa A -toplanabilme klasik yakınsamaya indirgenir. Eğer

$$(A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)}) \text{ matris dizisi yerine genel terimi } a_{kj}^{(n)} = \frac{1}{k+1}, \quad n \leq j \leq n+k, \quad (n=1, 2, \dots)$$

ve $a_{kj}^{(n)} = 0$, diğer durumlarda ile tanımlı matris dizisi alınırsa A -toplanabilme metodu hemen hemen yakınsaklığa indirgenir (Lorentz, 1948).

Şimdi de toplam süreci tanımı verilsin.

$T = (T_j)$ pozitif lineer operatörlerin $C[a, b]$ 'den $C[a, b]$ 'e bir dizisi olsun. Eğer her $f \in C[a, b]$ için $(T_j f)$, f 'ye A -toplanabilir ise yani, seri her bir k , n ve f için yakınsak olmak üzere

$$\lim_k \left\| \sum_j a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right\|_\infty = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}),$$

ise (T_j) pozitif lineer operatörler dizisi $C[a, b]$ de bir A -toplam sürecidir denir (Nishishiraho, 1983).

2.4. Tek İndisli Diziler İçin $\mathcal{B}$ -İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teorem

Freedman ve Sember 1981 yılında aşağıdaki düşüncüyü kullanarak istatistiksel yakınsaklık tanımındaki Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $\mathcal{B} = (b_{lk})$ sonsuz matrisini alarak istatistiksel yakınsaklığı $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklığa genişletmişlerdir.

Bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek her $\varepsilon > 0$ için $\lim_l \frac{1}{l} \left| \left\{ k \leq l : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$ olması demektir.

Ya da buna denk olarak $K := K(\varepsilon) = \{k \leq l : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\lim_l (C_1 \chi_K)_l = \lim_l \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$ olmasıdır.

2.4.1. Tanım: $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_l \sum_{k \in K} b_{lk} = \lim_l (\mathcal{B} \chi_K)_l$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin $\mathcal{B}$ -yoğunluğu denir ve $\delta_{\mathcal{B}}(K)$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Eğer bir K kümesi $\mathcal{B}$ -yoğunluğa sahip ise bu durumda $\delta_{\mathcal{B}}(\mathbb{N} - K) = 1 - \delta_{\mathcal{B}}(K)$ olacaktır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta_{\mathcal{B}}(K) = 0$ olacağı açıktır.

2.4.2. Tanım: $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K := K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_{\mathcal{B}}(K) = \lim_l \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = \lim_l \sum_{k \in K} b_{lk} = 0$$

gerçekleniyor ise bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\mathcal{B}}\text{-}\lim x = L$ şeklinde gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Kolk, 1993; Miller, 1995).

Bu tanımda eğer $\mathcal{B}$ matrisi yerine I birim matrisi alınırsa alışılmış anlamdaki yakınsaklık elde edilir. Yakınsak her dizi aynı limit değerine $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaktır. Ayrıca, Kolk (1993) $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler ve $\lim_l \max_k \{b_{lk}\} = 0$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu kanıtlamıştır.

$\mathcal{B}$ matrisi yerine C_1 Cesáro matrisi alındığında ise $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

2.2.3. Teorem'in bir benzeri $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklık için şu şekilde verilebilir.

2.4.3. Teorem: Bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_{\mathcal{B}}(\{k_n : n \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_n x_{k_n} = L$ olacak şekilde en az bir (k_n) indis dizisinin var olmasıdır (Kolk, 1993; Miller, 1995).

Reel terimli bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$D_x := \{d \in \mathbb{R} : \delta_{\mathcal{B}}(\{k : x_k > d\}) \neq 0\},$$

$$E_x := \{c \in \mathbb{R} : \delta_{\mathcal{B}}(\{k : x_k < c\}) \neq 0\},$$

olsun. Burada $\delta_{\mathcal{B}}(K) \neq 0$ olması $\delta_{\mathcal{B}}(K) > 0$ veya K kümesi yoğunluğa sahip değil, anlamında alınacaktır.

2.4.4. Tanım: Bir $x = (x_k)$ dizisinin $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limiti

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k x_k := \begin{cases} \sup D_x, & D_x \neq \emptyset \\ -\infty, & D_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Connor ve Kline, 1996; Demirci, 2000).

Benzer şekilde bir $x = (x_k)$ dizisinin $\mathcal{B}$ -istatistiksel alt limiti

$$st_{\mathcal{B}} - \liminf_k x_k := \begin{cases} \inf E_x, & E_x \neq \emptyset \\ +\infty, & E_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Connor ve Kline, 1996; Demirci, 2000).

Eğer $\mathcal{B} = C_1$ Cesáro matrisi alınırsa, yukarıdaki tanımlar sırasıyla Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilen istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramlarına indirgenir.

Alışılmış üst limit ve alt limit kavramlarında olduğu gibi, $x = (x_k)$ dizisi için

$$st_{\mathcal{B}} - \liminf_k x_k \leq st_{\mathcal{B}} - \limsup_k x_k$$

olduğu kanıtlanmıştır.

$\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak aşağıdaki Korovkin tipi teorem verilmiştir.

2.4.5. Teorem: $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer $L_k : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi ve $r = 0, 1, 2$ için $e_r(x) = x^r$ olmak üzere

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \|L_k e_r - e_r\|_B = 0$$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k f - f\|_B = 0$$

olur (Duman, Khan ve Orhan, 2003).

2.5. Çift İndisli Diziler için İstatistiksel Korovkin Teoremi

İki değişkenli çift indisli fonksiyon dizileri için istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi Dirik ve Demirci (2010) tarafından verilmiştir. Bu teoremden önce çift indisli dizi tanımı ve bazı özellikleri verilsin.

2.5.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(k, l) \rightarrow f(k, l) = x_{k,l}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna reel terimli çift indisli dizi denir. Reel terimli bütün çift indisli dizilerin cümlesi Ω ile gösterilip

$$\Omega = \{x = (x_{k,l}) : \text{her } k, l \in \mathbb{N} \text{ için } x_{k,l} \in \mathbb{R}\}$$

şeklindedir. Bu cümle her $x, y \in \Omega$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha x + \beta y = (\alpha x_{k,l} + \beta y_{k,l})$ işlemi ile bir lineer uzaydır.

2.5.2. Tanım: Bir $x = (x_{k,l})$ reel terimli çift indisli dizisi verilsin. Tüm $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ için

$|x_{k,l}| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa x dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim, 1900).

2.5.3. Tanım: $x = (x_{k,l})$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her

$k, l > N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_{k,l} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $x = (x_{k,l})$

dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsak, kısaca P -yakınsak denir ve

$P - \lim_{k,l} x_{k,l} = L$ şeklinde gösterilir (Pringsheim, 1900).

2.5.4. Örnek: $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisinin genel terimi

$$x_{k,l} = \begin{cases} l, & k=1 \\ k, & l=1 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

olsun. x çift indisli dizisi her $k, l \in \mathbb{N}$ için $|x_{k,l}| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı bulunamadığından sınırlı değildir. Buna rağmen $P\text{-}\lim_{k,l} x_{k,l} = 0$ dır.

Bilindiği gibi tek indisli bir dizi yakınsak ise sınırlıdır, ancak yukarıdaki örnekten de görülebileceği gibi P -yakınsak çift indisli dizilerin sınırlı olması gerekmez.

2.5.5. Teorem: Bir çift indisli dizinin Pringsheim limiti tektir (Pringsheim, 1900).

2.5.6. Teorem: $x = (x_{k,l}), y = (y_{k,l}) \in \Omega$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P\text{-}\lim_{k,l} x_{k,l} = a$ ve $P\text{-}\lim_{k,l} y_{k,l} = b$ olsun.

- (i) $P\text{-}\lim_{k,l} (x_{k,l} + y_{k,l}) = a + b,$
- (ii) $P\text{-}\lim_{k,l} \lambda x_{k,l} = \lambda a,$
- (iii) $P\text{-}\lim_{k,l} (x_{k,l} \cdot y_{k,l}) = a \cdot b,$
- (iv) $b \neq 0$ ise $P\text{-}\lim_{k,l} \left(\frac{1}{y_{k,l}} \right) = \frac{1}{b}$ ve $P\text{-}\lim_{k,l} \left(\frac{x_{k,l}}{y_{k,l}} \right) = \frac{a}{b},$

gerçeklenir (Pringsheim, 1900).

2.5.7. Tanım: $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisi verilsin.

- $P\text{-}\liminf_{k,l} x_{k,l} = \sup_{m \geq 1} \left\{ \inf_{k,l \geq m} x_{k,l} \right\}$ ifadesine $(x_{k,l})$ çift indisli dizisinin alt limiti,
- $P\text{-}\limsup_{k,l} x_{k,l} = \inf_{m \geq 1} \left\{ \sup_{k,l \geq m} x_{k,l} \right\}$ ifadesine $(x_{k,l})$ çift indisli dizisinin üst limiti denir.

Başka bir ifade ile dizinin alt dizilerinin limitlerinin en küçüğüne dizinin alt limiti, en büyüğüne ise dizinin üst limiti denir (Pringsheim, 1900).

Volkov 1957 yılında pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi için Korovkin teoremi ispatlamıştır.

$$f_0(x, y) = 1, \quad f_1(x, y) = x, \quad f_2(x, y) = y, \quad f_3(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt alt kümesi verilsin.

2.5.8. Teorem: Eğer $L_{k,l} : C(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$$P\text{-}\lim_{k,l} \|L_{k,l} f_r - f_r\|_B = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3),$$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C(D)$ fonksiyonu için

$$P\text{-}\lim_{k,l} \|L_{k,l} f - f\|_B = 0$$

dır (Volkov, 1957).

$E \subset \mathbb{N}^2$ pozitif tamsayıların iki boyutlu bir alt kümesi, $E_{i,j}$ ile $\{(k,l) \in E : k \leq i, l \leq j\}$ kümesi ve $E_{i,j}$ kümesinin eleman sayısı $|E_{i,j}|$ ile verilsin. E kümesinin çift indisli yoğunluğu $\delta_2(E) := P\text{-}\lim_{i,j} \frac{1}{ij} |E_{i,j}|$ dır.

2.5.9. Tanım: $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$E := E_{i,j}(\varepsilon) := \{k \leq i, l \leq j : |x_{k,l} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sıfır yoğunluğa sahip ise x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_2\text{-}\lim_{k,l} x_{k,l} = L$ ile gösterilir (Moricz, 2003).

Bir P -yakınsak çift indisli dizi istatistiksel yakınsaktır ancak tersi doğru değildir. Ayrıca, istatistiksel yakınsak bir çift indisli dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin genel terimi,

$$x_{k,l} = \begin{cases} kl, & k, l \text{ tam kare,} \\ 1, & \text{d.d.} \end{cases}$$

olan $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisi göz önüne alınsın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \{(k,l) : |x_{k,l} - 1| \geq \varepsilon\} \right| \leq \sqrt{k} \sqrt{l} \text{ olduğundan } st_2\text{-}\lim_{k,l} x_{k,l} = 1 \text{ olduğu kolaylıkla görülebilir.}$$

Bununla beraber x dizisi ne P -yakınsak ne de sınırlıdır.

Ayrıca bir çift indisli $x = (x_{k,l})$ dizisinin L değerine yakınsak olması Moricz (2003) tarafından aşağıdaki şekilde karakterize edilmiştir:

$$st_2\text{-}\lim_{k,l} x_{k,l} = L \text{ olması için gerek ve yeter koşul } P\text{-}\lim_{k,l \rightarrow \infty \text{ ve } (k,l) \in E} x_{k,l} = L \text{ ve } \delta_2(E) = 1$$

olacak şekilde $E \subset \mathbb{N}^2$ olmasıdır.

Çift indisli diziler için istatistiksel üst limit ve alt limit kavramları Çakan ve Altay (2006) tarafından tanıtılmıştır.

Herhangi bir reel terimli $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisi için

$$G_x := \{e \in \mathbb{R} : \delta_2((k,l) : x_{k,l} > e) \neq 0\},$$

$$F_x := \{d \in \mathbb{R} : \delta_2((k,l) : x_{k,l} < d) \neq 0\},$$

olsun. Burada $\delta_2(K) \neq 0$ olması $\delta_2(K) > 0$ veya K kümesi çift yoğunluğa sahip değil, anlamında alınacaktır.

2.5.10. Tanım: Bir $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisinin istatistiksel üst limiti

$$st_2 - \limsup_{k,l} x_{k,l} := \begin{cases} \sup G_x, & G_x \neq \emptyset \\ -\infty, & G_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Çakan ve Altay, 2006).

Benzer şekilde bir $x = (x_{k,l})$ çift indisli dizisinin istatistiksel alt limiti

$$st_2 - \liminf_{k,l} x_{k,l} := \begin{cases} \inf F_x, & F_x \neq \emptyset \\ +\infty, & F_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Çakan ve Altay, 2006).

Şimdi Dirik ve Demirci (2010) tarafından çalışılan iki değişkenli çift indisli fonksiyon dizileri için istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

2.5.11. Teorem: $L_{k,l} : C(D) \rightarrow C(D)$ pozitif lineer operatörler dizisi verilsin.

Her $f \in C(D)$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \|L_{k,l} f - f\|_{\infty} = 0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$st_2 - \lim_{k,l} \|L_{k,l} f_r - f_r\|_\infty = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

olmasıdır (Dirik ve Demirci, 2010).

Aşağıda toplanabilme teorisiyle alakalı bazı temel tanımlar verilmiştir.

2.5.12. Tanım: $\mathcal{B} = (b_{k,l,i,j})$ negatif olmayan reel dört boyutlu sonsuz matris olsun.

Verilen bir çift indisli $x = (x_{i,j})$ dizisi için x 'in $\mathcal{B}x := ((\mathcal{B}x)_{k,l})$ ile ifade edilen

$\mathcal{B}$ -dönüşüm dizisi, her $k, l \in \mathbb{N}$ için $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} b_{k,l,i,j} x_{i,j}$ serisi Pringsheim anlamında

yakınsak olmak üzere

$$(\mathcal{B}x)_{k,l} := \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} b_{k,l,i,j} x_{i,j}$$

ile verilir. Eğer, x 'in $\mathcal{B}$ -dönüşümü mevcut ve Pringsheim anlamında yakınsak ise, yani

$$P - \lim_{p,q} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_{k,l,i,j} x_{i,j} = y_{k,l} \text{ ve } P - \lim_{k,l} y_{k,l} = L$$

ise x dizisi L 'ye $\mathcal{B}$ -toplanabilirdir denir (Robison, 1926; Moricz ve Rhoades, 1988).

2.5.13. Tanım: $A := (A^{(m,n)}) = (a_{k,l,i,j}^{(m,n)})$, $(m, n \in \mathbb{N})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz

matrislerin bir çift indisli dizisi olsun. $x = (x_{i,j})$ reel sayıların çift indisli dizisi için

$$P - \lim_{k,l} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} x_{i,j} = L \quad (m, n \text{ ye göre düzgün})$$

ise $x = (x_{i,j})$ L 'ye A -toplanabilirdir denir (Karakuş ve Demirci, 2011).

Eğer A bir dört boyutlu matris olmak üzere $A^{(m,n)} = A$ alınırsa, A -toplanabilme çift indisli diziler için klasik matris toplanabilmeye indirgenir.

2.6. Modüler Uzaylar ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Klasik Korovkin tipi teorem 2007 yılında Bardaro ve Mantellini tarafından modüler uzaylar üzerinde genişletilmiştir. Bu uzaylar ve bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

2.6.1. Tanım: Herhangi bir $\rho : X(I) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli

- (i) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ h.h.,
- (ii) Her $f \in X(I)$ için $\rho(f) = \rho(-f)$,
- (iii) Her $f, g \in X(I)$ ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için
$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g),$$

koşullarını sağlıyorsa ρ 'ya $X(I)$ üzerinde bir modüler denir. Eğer her $f, g \in X(I)$ ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq N\alpha\rho(Nf) + N\beta\rho(Ng),$$

olacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa ρ 'ya N -quasi konveks modüler denir. Özel olarak $N=1$ alınırse ρ 'ya konveks modüler denir. Her $f \in X(I)$ ve $a \in (0,1]$ için
$$\rho(af) \leq Na\rho(Nf)$$

olacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa ρ 'ya N -quasi yarı konveks modüler denir. Buradan her N -quasi konveks modülerin, N -quasi yarı konveks modüler olduğu kolaylıkla görülebilir.

Şimdi ρ modülleri ile verilen $X(I)$ uzayının bazı alt vektör uzayları göz önüne alınsın.

$$L^\rho(I) := \left\{ f \in X(I) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\},$$

$$E^\rho(I) := \left\{ f \in L^\rho(I) : \text{her } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < \infty \right\}.$$

Burada $L^\rho(I)$ 'ya ρ modülleri ile oluşturulan modüler uzay ve $E^\rho(I)$ ya da $L^\rho(I)$ 'ın sonlu elemanlarının uzayı denir. Eğer ρ , N -quasi yarı konveks modüler ise
$$L^\rho(I) = \left\{ f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < \infty \right\}.$$

2.6.2. Örnek: $(X(I), \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $\|\cdot\|$ norm fonksiyonu bir modülerdir.

2.6.3. Örnek: $I = [a, b]$ olmak üzere $1 \leq p < \infty$ için $L_p(I)$ uzayı konveks modüler uzaydır.

Şimdi modüler uzaylardaki bazı yakınsaklık türleri verilsin.

2.6.4. Tanım: (f_k) terimleri $L^p(I)$ 'da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^p(I)$ olsun.

Bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_k \rho(\lambda_0(f_k - f)) = 0$$

oluyorsa (f_k) dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsaktır denir.

2.6.5. Tanım: (f_k) terimleri $L^p(I)$ 'da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^p(I)$ olsun.

Her $\lambda > 0$ için

$$\lim_k \rho(\lambda(f_k - f)) = 0$$

oluyorsa (f_k) dizisi f fonksiyonuna F-norm (kuvvetli) yakınsaktır denir.

2.6.6. Lemma: Modüler yakınsaklık ile F-norm yakınsaklığın denk olması için gerek ve yeter şart Δ_2 -şartının sağlanmasıdır yani, her $f \in X(I)$ için $\rho(2f) \leq M\rho(f)$ eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabiti vardır (Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003; Musielak, 1993).

2.6.7. Tanım:

1. $|f| \leq |g|$ için $\rho(f) \leq \rho(g)$ ise, ρ monotondur denir.
2. χ_I , I aralığının karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\chi_I \in L^p(I)$ ise, ρ sonludur denir.
3. Eğer ρ sonlu ve her $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ için $\mu(B) < \delta$ özellikli herhangi ölçülebilir $B \subset I$ altkümesi için $\rho(\lambda\chi_B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa, ρ mutlak sonludur denir.
4. $\chi_I \in E^p(I)$ ise, ρ kuvvetli sonludur denir.
5. $\rho(f) < \infty$ özellikli her $f \in X(I)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan $\alpha > 0$ varsa ρ mutlak süreklidir denir:
her $\varepsilon > 0$ için B , $\mu(B) < \delta$ özellikli I aralığının herhangi ölçülebilir alt kümesi olmak üzere $\rho(\alpha f \chi_B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Eğer ρ monoton ve sonlu bir modüler ise, $C(I) \subset L^\rho(I)$ dır. Benzer şekilde eğer, ρ monoton ve kuvvetli sonlu ise, $C(I) \subset E^\rho(I)$ (Bardaro ve Mantellini, 2007).

İstatistiksel Korovkin tipi teorem 2010 yılında Karakuş, Demirci ve Duman tarafından modüler uzaylara genişletilmiştir.

ρ , $X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. ρ , monoton ve sonlu bir modüler olduğundan böyle bir küme seçilebilir. Kabul edilsin ki X_T , $C^\infty(I)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $T = (T_k)$, D 'den $X(I)$ 'ya tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$\text{st} - \limsup_k \rho(\lambda(T_k h)) \leq R\rho(\lambda h) \quad (2.6.1)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

2.6.8. Teorem: ρ , $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_k)$, D 'den $X(I)$ 'ya (2.6.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2$ için $e_r(x) = x^r$ olmak üzere

$$\text{st} - \lim_k \rho(\lambda(T_k e_r - e_r)) = 0$$

olsun. Şimdi $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\text{st} - \lim_k \rho(\lambda_0(T_k f - f)) = 0$$

dır (Karakuş, Demirci ve Duman, 2010).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünün birinci kısmında tek indisli diziler için $\mathcal{B}$ –istatistiksel A –toplam süreci yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılmıştır.

İkinci kısımda çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık yöntemi kullanılarak Korovkin teoremleri modüler uzaylarda elde edilmiştir.

Son olarak, bulgular bölümünün üçüncü kısmında çift indisli diziler için istatistiksel A –toplam süreci yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılmıştır.



4. BULGULAR

4.1. Modüler Uzaylarda Toplam Süreci Yardımıyla İstatistiksel Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde modüler uzaylarda A –toplam süreci tanımı yapılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri $\mathcal{B}$ –istatistiksel A –toplam süreci yardımıyla verilecektir.

$A := (A^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi, $\rho, X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler, $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Kabul edilsin ki $T = (T_j)$, D ‘den $X(I)$ ‘ya tanımlı ve

$$A_{k,n}^T(f) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f,$$

serisi, tüm $k, n \in \mathbb{N}$, $f \in D$ için Lebesgue ölçüsüne göre h.h. yerde mutlak yakınsak olsun. Eğer her $f \in D$ için $(T_j f)$, f ‘ye A –toplanabilir (ρ modülerine göre) ise yani, bazı $\gamma > 0$ için

$$\lim_k \rho \left(\gamma \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0, (n \text{ ye göre düzgün}),$$

ise (T_j) pozitif lineer operatörler dizisi D üzerinde bir A –toplam sürecidir denir.

Ayrıca, kabul edilsin ki $X_T, C^\infty(I)$ ‘ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda \left(A_{k,n}^T(h) \right) \right) \leq R \rho(\lambda h), (n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.1.1)$$

olsun.

4.1.1. Teorem: $A := (A^{(n)})$ sonsuz, negatif olmayan reel matrislerin bir dizisi ve ρ , $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N –quasi yarı konveks bir modüler ve ayrıca, $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $T = (T_j)$, D ‘den $X(I)$ ‘ya (4.1.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2$ için $e_r(x) = x^r$ olmak üzere

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_r - e_r \right) \right) = 0 (n \text{ ye göre düzgün}). \quad (4.1.2)$$

Şimdi $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_{\mathcal{S}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.1.3)$$

dır.

İspat: İlk olarak $g \in C(I) \cap D$ ve her $\eta > 0$ için

$$st_{\mathcal{S}} - \lim_k \rho \left(\eta \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g - g \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.1.4)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(I) \cap D$ olsun. g , I 'da sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $|y - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $x, y \in I$ için

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon \quad (4.1.5)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|y - x| > \delta$ koşulunu sağlayan tüm $x, y \in I$ için

$M := \sup_{x \in I} |g(x)|$ olmak üzere

$$|g(y) - g(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (y - x)^2 \quad (4.1.6)$$

elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.6)'dan

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (y - x)^2$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. T_j lineer ve pozitif olduğundan, $c := \max\{|a|, |b|\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (g; x) - g(x) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (g(y); x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (g(x); x) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (g(x); x) - g(x) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (g(y) - g(x); x) + g(x) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (|g(y) - g(x)|; x) + |g(x)| \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (y-x)^2; x \right) + |g(x)| \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j \left((y-x)^2; x \right) + M \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + M) \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| + \frac{2M}{\delta^2} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (y^2; x) - x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - 2x \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (y; x) - x \right) + x^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right) \right] \\
&\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2} \right) \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| \\
&\quad + \frac{4Mc}{\delta^2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (y; x) - x \right| + \frac{2M}{\delta^2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (y^2; x) - x^2 \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten her $\eta > 0$ için, $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\eta \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (g; x) - g(x) \right| &\leq \eta \varepsilon + \eta K \left\{ \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (e_0; x) - e_0(x) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (y; x) - x \right| + \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (y^2; x) - x^2 \right| \right\}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho \left(\eta \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g - g \right) \right) &\leq \rho \left(\eta \varepsilon + \eta K \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_0 - e_0 \right| + \eta K \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_1 - e_1 \right| \right. \\
&\quad \left. + \eta K \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_2 - e_2 \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\rho \left(\eta \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g - g \right) \right) \leq \rho(4\eta\varepsilon) + \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_0 - e_0 \right) \right) + \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_1 - e_1 \right) \right)$$

$$+ \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_2 - e_2 \right) \right).$$

ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\begin{aligned} \rho \left(\eta \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g - g \right) \right) &\leq N\varepsilon \rho(4\eta N) + \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_0 - e_0 \right) \right) \\ &+ \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_1 - e_1 \right) \right) + \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_2 - e_2 \right) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Verilmiş bir $\varepsilon^* > 0$ için bir $\varepsilon \in (0, 1]$ seçilsin öyle ki $N\varepsilon \rho(4\eta N) < \varepsilon^*$. Şimdi $r = 0, 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$\begin{aligned} S_{\eta} &:= \left\{ k : \rho \left(\eta \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g - g \right) \right) \geq \varepsilon^* \right\}, \\ S_{\eta,r} &:= \left\{ k : \rho \left(4\eta K \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_r - e_r \right) \right) \geq \frac{\varepsilon^* - N\varepsilon \rho(4\eta N)}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Buradan $S_{\eta} \subseteq \bigcup_{r=0}^2 S_{\eta,r}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, tüm $l \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k \in S_{\eta}} b_{lk} \leq \sum_{k \in S_{\eta,0}} b_{lk} + \sum_{k \in S_{\eta,1}} b_{lk} + \sum_{k \in S_{\eta,2}} b_{lk}$$

yazılabilir. (4.1.2) hipotezi kullanılarak, yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_l \sum_{k \in S_{\eta}} b_{lk} = 0,$$

elde edilir, böylece (4.1.4) gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.1.4) eşitliği $C^{\infty}(I) \subset C(I) \cap D$ olduğundan her $g \in C^{\infty}(I)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^{\rho}(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^{\infty}(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(I) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan, ρ modülerinin $X(I)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu görülebilir. ρ modülerinin bu özellikleri kullanılarak $C^{\infty}(I)$ uzayının $L^{\rho}(I)$ 'de modüler yoğun olduğu görülür (Mantellini, 1998; Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003). Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için

$$\lim_k \rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) = 0$$

olacak şekilde bir $(g_k) \subset C^\infty(I)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) < \varepsilon. \quad (4.1.7)$$

Diğer taraftan, T_j operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden, her $x \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_0^* \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(f; x) - f(x) \right| &\leq \lambda_0^* \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(f - g_{k_0}; x) \right| + \lambda_0^* \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g_{k_0}; x) - g_{k_0}(x) \right| \\ &\quad + \lambda_0^* |g_{k_0}(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Son eşitsizliğe ρ modülleri uygulanıp, ρ 'un monotonluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) &\leq \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (f - g_{k_0}) \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g_{k_0} - g_{k_0} \right) \right) \\ &\quad + \rho(3\lambda_0^*(g_{k_0} - f)). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Böylece, (4.1.7) ve (4.1.8)'den

$$\begin{aligned} \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) &\leq \varepsilon + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j (f - g_{k_0}) \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g_{k_0} - g_{k_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Dolayısıyla, (4.1.9)'da her iki tarafın $k \rightarrow \infty$ için $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0} \in C^\infty(I)$ olması kullanılarak, (4.1.1)'den

$$\begin{aligned} st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) &\leq \varepsilon + R\rho(3\lambda_0^*(f - g_{k_0})) \\ &\quad + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g_{k_0} - g_{k_0} \right) \right), \end{aligned}$$

buradan da

$$\begin{aligned} st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) \\ \leq \varepsilon(R+1) + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g_{k_0} - g_{k_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

olur. (4.1.4)'den, $st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g_{k_0} - g_{k_0} \right) \right) = 0$ (n ye göre düzgün),

olduğundan

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j g_{k_0} - g_{k_0} \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.1.11)$$

elde edilir. (4.1.10) ve (4.1.11)'den

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) \leq \varepsilon (R+1)$$

sonucuna ulaşılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}),$$

bulunur. Dahası, tüm $k, n \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}),$$

olduğu kolaylıkla görülebilir, bu ise ispatı tamamlar.

Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, 4.1.1. Teorem'den ilk olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

4.1.2. Teorem: $A := (A^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi, $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $T = (T_j)$ ve ρ 4.1.1. Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

i. Her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2$ için

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j e_r - e_r \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}),$$

ii. Her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(I)$ ve her

$$\lambda > 0 \text{ için } st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0 \quad (n \text{ ye göre düzgün}).$$

Eğer $\mathcal{B}$ ve $A^{(n)}$ ($n \geq 1$) matrisleri yerine birim matris alınır, (4.1.1) koşulu her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$\limsup_j \rho(\lambda(T_j h)) \leq R\rho(\lambda h) \quad (4.1.12)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.1.1. Teorem ve 4.1.2. Teorem'den Bardaro ve Mantellini (2007) tarafından verilen aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.1.3. Sonuç: ρ , $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_j)$, D 'den $X(I)$ 'ya (4.1.12) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Eğer $r = 0, 1, 2$ için $(T_j e_r)$, e_r 'ye kuvvetli yakınsak ise, $(T_j f)$, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde ki $L^\rho(I)$ 'ya ait herhangi bir f fonksiyonuna modüler yakınsaktır (Bardaro ve Mantellini, 2007).

4.1.4. Sonuç: $T = (T_j)$ ve ρ 4.1.3. Sonuç'daki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 -şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $r = 0, 1, 2$ için $(T_j e_r)$, e_r 'ye kuvvetli yakınsak,
- ii. $(T_j f)$, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekildeki $L^\rho(I)$ 'ya ait herhangi bir f fonksiyonuna kuvvetli yakınsak (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Şimdi 4.1.1. Teorem'in koşullarını sağlayan bir örnek verilsin.

4.1.5. Örnek: $I = [0, 1]$ ve $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

- φ konveks,
- $\varphi(0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Her $f \in X(I)$ için

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx$$

ile $X(I)$ üzerinde tanımlanan ρ^φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. Bu durumda ρ^φ , $X(I)$ üzerinde konveks bir modülerdir. φ fonksiyonu ile oluşturulan Orlicz uzayı gözönüne alınsın:

$$L_\varphi^\rho(I) := \{f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty\}.$$

Buradan $x \in I$ için

$$U_j(f; x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \int_{k/j+1}^{(k+1)/(j+1)} f(t) dt \quad (4.1.13)$$

ile tanımlanan $L_\varphi^\rho(I)$ uzayı üzerinde $U := (U_j)$ klasik Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. U_j , $L_\varphi^\rho(I)$ 'dan $L_\varphi^\rho(I)$ 'ya giden bir operatördür. Dahası, $X_U := L_\varphi^\rho(I)$ seçilmesiyle (4.1.12) özelliği gerçekleşir. Buradan, 4.1.3. Sonuç'tan, biliniyor ki, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho(I)$ için $(U_j f)$, f 'ye modüler yakınsaktır.

Eğer $x \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa, $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$ olur. Ayrıca $\rho^\varphi(f) = \|f\|_p^p$ elde edilir.

Şimdi $\mathcal{B} = C_1 = (c_{lk})$, bir boyutlu Cesaro matrisi alınsın. Bu durumda C_1 - istatistiksel yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklık olduğu ve st -lim ile gösterildiği biliniyor. $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$, $a_{kj}^{(n)} = \frac{1}{k+1}$, $n \leq j \leq n+k$, $(n=1,2,\dots)$ ve $a_{kj}^{(n)} = 0$, diğer durumlarda, ile tanımlı sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. Bir pozitif C sabiti için $\|U_j f\|_p \leq C \|f\|_p$ (Ditzian ve Totik, 1987) olduğundan

$$st - \limsup_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j f \right\|_p^p \leq C^p \|f\|_p^p \quad (n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. Şimdi

$$st - \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_r - e_r \right\|_p^p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün}), \quad r = 0, 1, 2, \quad (4.1.14)$$

olduğu gösterilsin. İlk olarak bilindiği gibi $U_j(e_0; x) = 1$, $U_j(e_1; x) = \frac{jx}{j+1} + \frac{1}{2(j+1)}$ ve

$$U_j(e_2; x) = \frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} + \frac{2jx}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} \text{ dir. Dolayısıyla,}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_0 - e_0 \right\|_p = \left\| \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} U_j e_0 - e_0 \right\|_p = \|1 - 1\|_p = 0,$$

olduğu görülebilir, böylece

$$st - \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_0 - e_0 \right\|_p^p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir ki bu da $r = 0$ için (4.1.14) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_1 - e_1 \right\|_p &= \left\| \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} U_j e_1 - e_1 \right\|_p \\
&= \left\| x \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{j+1} + \frac{1}{2(k+1)} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{j+1} - x \right\|_p \\
&\leq \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{j+1} - 1 \right) \|e_1\|_p + \left(\frac{1}{2(k+1)} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{j+1} \right) \|e_0\|_p \\
&= \frac{1}{(p+1)^{1/p}} \left(-\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{j+1} \right) + \left(\frac{1}{2(k+1)} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{j+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{j+1} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(p+1)^{1/p}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_k \left(\sup_n \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{j+1} \right) = 0$ olduğundan,

$$\lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_1 - e_1 \right\|_p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün}) \text{ bulunur. Böylece}$$

$$\lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_1 - e_1 \right\|_p^p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün}) \text{ olur.}$$

Son olarak,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_2 - e_2 \right\|_p &= \left\| \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} U_j e_2 - e_2 \right\|_p \\
&= \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left(\frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} + \frac{2jx}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} \right) - x^2 \right\|_p \\
&\leq \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right) \|e_2\|_p + \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{2j}{(j+1)^2} \|e_1\|_p \\
&\quad + \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{3(j+1)^2} \|e_0\|_p \\
&= \frac{1}{(2p+1)^{1/p}} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(p+1)^{1/p}} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{2j}{(j+1)^2} \right) + \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{3(j+1)^2} \\
& = \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{(j+1)^2} \right) \left(\frac{2}{(p+1)^{1/p}} - \frac{3}{(2p+1)^{1/p}} \right) \\
& + \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{(j+1)^2} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2p+1)^{1/p}} \right),
\end{aligned}$$

olur. $st - \lim_k \left(\sup_n \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{(j+1)^2} \right) = 0$ ve $st - \lim_k \left(\sup_n \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{(j+1)^2} \right) = 0$

olduğundan,

$$st - \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_2 - e_2 \right\|_p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün}) \text{ bulunur. Böylece}$$

$$st - \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j e_2 - e_2 \right\|_p^p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün}) \text{ olur.}$$

Buradan (4.1.14) eşitliği $r = 0, 1, 2$ için doğru olur. (U_j) , 4.1.1 Teorem'in koşullarını sağlar ve tüm $f \in L_p(I)$ için $I = [0,1]$ üzerinde

$$st - \lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} U_j f - f \right\|_p^p = 0, \quad (n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir.

4.2. Modüler Uzaylarda Çift İndisli Diziler için İstatistiksel Korovkin Teoremleri

Bu bölümde çift indisli dizilerin istatistiksel modüler yakınsaklığı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verilecektir.

$I^2 = [a,b] \times [a,b]$, $(f_{k,l})$ terimleri $L^p(I^2)$ 'de olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^p(I^2)$ olmak üzere, bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho(\lambda_0(f_{k,l} - f)) = 0$$

ise $(f_{k,l})$ çift indisli dizisi f fonksiyonuna *istatistiksel modüler yakınsaktır* denir.

Ayrıca her $\lambda > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho(\lambda(f_{k,l} - f)) = 0$$

ise $(f_{k,l})$ çift indisli dizisi f fonksiyonuna *istatistiksel F-norm (kuvvetli) yakınsaktır* denir.

$\rho, X(I^2)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(I^2) \subset D \subset L^\rho(I^2)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. ρ , monoton ve sonlu bir modüler olduğundan böyle bir küme seçilebilir. $X_T, C^\infty(I^2)$ 'i içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $T = (T_{k,l})$, D 'den $X(I^2)$ 'e tanımlı her $h \in X_T, \lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho(\lambda(T_{k,l}h)) \leq R\rho(\lambda h) \quad (4.2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir çift indisli dizisi olsun.

4.2.1. Teorem: $\rho, X(I^2)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N – quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_{k,l})$, D 'den $X(I^2)$ 'ye (4.2.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi olsun. Kabul edelim ki her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2, 3$ için $f_0(x, y) = 1, f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y, f_3(x, y) = x^2 + y^2$ olmak üzere

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho(\lambda(T_{k,l}f_r - f_r)) = 0 \quad (4.2.2)$$

olsun.

Şimdi $f \in L^\rho(I^2)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho(\lambda_0(T_{k,l}f - f)) = 0 \quad (4.2.3)$$

dır.

İspat: İlk olarak $g \in C(I^2) \cap D$ ve her $\eta > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho(\eta(T_{k,l}g - g)) = 0 \quad (4.2.4)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(I^2) \cap D$ olsun. g , I^2 'de sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $|u - x| < \delta$ ve $|v - y| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $(u, v), (x, y) \in I^2$ için

$$|g(u, v) - g(x, y)| < \varepsilon \quad (4.2.5)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|u - x| > \delta$ ve $|v - y| > \delta$ koşulunu sağlayan tüm $(u, v), (x, y) \in I^2$ için $M := \sup_{(x, y) \in I^2} |g(x, y)|$ olmak üzere

$$|g(u, v) - g(x, y)| \leq \frac{2M}{\delta^2} \{(u - x)^2 + (v - y)^2\} \quad (4.2.6)$$

elde edilir. (4.2.5) ve (4.2.6)'dan

$$|g(u, v) - g(x, y)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \{(u - x)^2 + (v - y)^2\}$$

yani,

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \{(u - x)^2 + (v - y)^2\} \leq g(u, v) - g(x, y) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \{(u - x)^2 + (v - y)^2\}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $T_{k,l}$ lineer ve pozitif olduğundan, her $x, y \in I$ ve $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & -\varepsilon T_{k,l}(f_0; x, y) - \frac{2M}{\delta^2} T_{k,l}((u - x)^2 + (v - y)^2; x, y) \\ & \leq T_{k,l}(g; x, y) - g(x, y) T_{k,l}(f_0; x, y) \leq \varepsilon T_{k,l}(f_0; x, y) + \frac{2M}{\delta^2} T_{k,l}((u - x)^2 + (v - y)^2; x, y) \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} |T_{k,l}(g; x, y) - g(x, y)| & \leq \varepsilon T_{k,l}(f_0; x, y) + M |T_{k,l}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \\ & \quad + \frac{2M}{\delta^2} T_{k,l}((u - x)^2 + (v - y)^2; x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. $E := \max\{|x|, |y|\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |T_{k,l}(g; x, y) - g(x, y)| & \leq \varepsilon + \left\{ \varepsilon + M + \frac{4M}{\delta^2} E^2 \right\} |T_{k,l}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| \\ & \quad + \frac{4M}{\delta^2} E |T_{k,l}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| + \frac{4M}{\delta^2} E |T_{k,l}(f_2; x, y) - f_2(x, y)| \\ & \quad + \frac{2M}{\delta^2} |T_{k,l}(f_3; x, y) - f_3(x, y)|. \end{aligned}$$

Bu son eşitsizlikten her $\eta > 0$ için,

$$\eta |T_{k,l}(g; x, y) - g(x, y)| \leq \eta \varepsilon + \eta K \left\{ |T_{k,l}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| + |T_{k,l}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| \right. \\ \left. + |T_{k,l}(f_2; x, y) - f_2(x, y)| + |T_{k,l}(f_3; x, y) - f_3(x, y)| \right\}$$

olur.

Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\rho(\eta(T_{k,l}g - g)) \leq \rho(\eta \varepsilon + \eta K |T_{k,l}f_0 - f_0| + \eta K |T_{k,l}f_1 - f_1| + \eta K |T_{k,l}f_2 - f_2| \\ + \eta K |T_{k,l}f_3 - f_3|)$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\rho(\eta(T_{k,l}g - g)) \leq \rho(5\eta \varepsilon) + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_0 - f_0)) + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_1 - f_1)) \\ + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_2 - f_2)) + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_3 - f_3)).$$

ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\rho(\eta(T_{k,l}g - g)) \leq N\varepsilon \rho(5\eta N) + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_0 - f_0)) + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_1 - f_1)) \\ + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_2 - f_2)) + \rho(5\eta K (T_{k,l}f_3 - f_3))$$

bulunur. Verilmiş bir $\gamma > 0$ için bir $\varepsilon \in (0, 1]$ seçilsin öyle ki $N\varepsilon \rho(5\eta N) < \gamma$. Şimdi $r = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$G_\eta := \{(k, l) : \rho(\eta(T_{k,l}g - g)) \geq \gamma\}$$

$$G_{\eta,r} := \left\{ (k, l) : \rho(5\eta K (T_{k,l}f_r - f_r)) \geq \frac{\gamma - N\varepsilon \rho(5\eta N)}{4} \right\}.$$

O halde $G_\eta \subseteq \bigcup_{r=0}^3 G_{\eta,r}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$\delta_2(G_\eta) \leq \sum_{r=0}^3 \delta_2(G_{\eta,r}) \text{ yazılabilir. (4.2.2) hipotezi kullanılarak } \delta_2(G_\eta) = 0 \text{ elde edilir,}$$

böylece (4.2.4) gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.2.4) eşitliği $C^\infty(I^2) \subset C(I^2) \cap D$

olduğundan her $g \in C^\infty(I^2)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^p(I^2)$ fonksiyonu, her

$g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(I^2) < \infty$ ve ρ ,

kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan, ρ modüllerinin $X(I^2)$ üzerinde mutlak

sonlu olduğu görülebilir. ρ modülerinin bu özellikleri kullanılarak $C^\infty(I^2)$ uzayının $L^\rho(I^2)$ 'de modüler yoğun olduğu görülür (Mantellini, 1998; Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003). Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için

$$P\text{-}\lim_{k,l} \rho(3\lambda_0^*(g_{k,l} - f)) = 0$$

olacak şekilde bir $(g_{k,l}) \subset C^\infty(I^2)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k, l \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_{k,l} - f)) < \varepsilon. \quad (4.2.7)$$

Diğer taraftan, $T_{k,l}$ operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden her $x, y \in I$ ve $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_0^* |T_{k,l}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \lambda_0^* |T_{k,l}(f - g_{k_0, k_0}; x, y)| + \lambda_0^* |T_{k,l}(g_{k_0, k_0}; x, y) - g_{k_0, k_0}(x, y)| \\ &\quad + \lambda_0^* |g_{k_0, k_0}(x, y) - f(x, y)|. \end{aligned}$$

Son eşitsizliğe ρ modülleri uygulanırsa ve ρ 'un monotonluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho(\lambda_0^*(T_{k,l}f - f)) &\leq \rho(3\lambda_0^*T_{k,l}(f - g_{k_0, k_0})) + \rho(3\lambda_0^*(T_{k,l}g_{k_0, k_0} - g_{k_0, k_0})) \\ &\quad + \rho(3\lambda_0^*(g_{k_0, k_0} - f)). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Böylece, (4.2.7) ve (4.2.8)'den

$$\rho(\lambda_0^*(T_{k,l}f - f)) \leq \varepsilon + \rho(3\lambda_0^*T_{k,l}(f - g_{k_0, k_0})) + \rho(3\lambda_0^*(T_{k,l}g_{k_0, k_0} - g_{k_0, k_0})). \quad (4.2.9)$$

Dolayısıyla, (4.2.9)'da her iki tarafın $k, l \rightarrow \infty$ için istatistiksel üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0, k_0} \in C^\infty(I^2)$ olması kullanılarak, (4.2.1)'den

$$\begin{aligned} st_2\text{-}\limsup_{k,l} \rho(\lambda_0^*(T_{k,l}f - f)) &\leq \varepsilon + R\rho(3\lambda_0^*(f - g_{k_0, k_0})) \\ &\quad + st_2\text{-}\limsup_{k,l} \rho(3\lambda_0^*(T_{k,l}g_{k_0, k_0} - g_{k_0, k_0})), \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} st_2\text{-}\limsup_{k,l} \rho(\lambda_0^*(T_{k,l}f - f)) &\leq \varepsilon(R+1) \\ &\quad + st_2\text{-}\limsup_{k,l} \rho(3\lambda_0^*(T_{k,l}g_{k_0, k_0} - g_{k_0, k_0})). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

(4.2.4)'den, $st_2\text{-}\lim_{k,l} \rho(3\lambda_0^*(T_{k,l}g_{k_0, k_0} - g_{k_0, k_0})) = 0$ olduğundan

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(3\lambda_0^* (T_{k,l} g_{k_0, k_0} - g_{k_0, k_0}) \right) = 0 \quad (4.2.11)$$

elde edilir. (4.2.10) ve (4.2.11)'den

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* (T_{k,l} f - f) \right) \leq \varepsilon (R+1)$$

sonucuna varılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* (T_{k,l} f - f) \right) = 0$$

bulunur. Dahası, tüm $k, l \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* (T_{k,l} f - f) \right)$ pozitif olduğundan,

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* (T_{k,l} f - f) \right) = 0,$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir, bu ise ispatı tamamlar.

Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, 4.2.1. Teorem'den ilk olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

4.2.2. Teorem: $T = (T_{k,l})$ ve ρ 4.2.1. Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. Her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2, 3$ için $st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\lambda (T_{k,l} f_r - f_r) \right) = 0$,
- ii. Her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^\rho(I^2)$ ve her $\lambda > 0$ için $st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\lambda (T_{k,l} f - f) \right) = 0$.

Eğer istatistiksel limit yerine Pringsheim limit alınır, (4.2.1) şartı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$P - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda (T_{k,l} h) \right) \leq R \rho(\lambda h) \quad (4.2.12)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.2.1. ve 4.2.2. Teorem'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.2.3. Sonuç: $\rho, X(I^2)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_{k,l})$, D 'den $X(I^2)$ 'ye (4.2.12) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin çift indisli dizisi olsun. Eğer $r = 0, 1, 2, 3$ için $(T_{k,l} f_r)$, f_r 'ye kuvvetli yakınsak ise, $(T_{k,l} f)$, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde ki $L^\rho(I^2)$ 'ye ait herhangi bir f fonksiyonuna modüler yakınsaktır.

4.2.4. Sonuç: $T = (T_{k,l})$ ve ρ 4.2.3. Sonuç'daki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $r = 0, 1, 2, 3$ için $(T_{k,l} f_r)$, f_r 'ye kuvvetli yakınsak,
- ii. $(T_{k,l} f)$, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekildeki $L^\rho(I^2)$ 'ya ait herhangi bir f fonksiyonuna kuvvetli yakınsak.

Şimdi 4.2.1. Teorem'in 4.2.3. Sonuç'tan kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin:

4.2.5. Örnek: $I = [0,1]$ ve $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

- φ konveks,
- $\varphi(0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Her $f \in X(I^2)$ için

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \int_0^1 \varphi(|f(x,y)|) dx dy$$

ile $X(I^2)$ üzerinde tanımlanan ρ^φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. Bu durumda ρ^φ , $X(I^2)$ üzerinde konveks bir modülerdir. φ fonksiyonu ile oluşturulan Orlicz uzayı gözönüne alınsın:

$$L_\varphi^\rho(I^2) := \{f \in X(I^2) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty\}.$$

Buradan $p_{i,j}^{(k,l)}(x,y) = \binom{k}{i} \binom{l}{j} x^i y^j (1-x)^{k-i} (1-y)^{l-j}$ olmak üzere $x, y \in I$ için

$$U_{k,l}(f; x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l p_{i,j}^{(k,l)}(x, y) (k+1)(l+1) \int_{i/(k+1)}^{(i+1)/(k+1)} \int_{j/(l+1)}^{(j+1)/(l+1)} f(t, s) ds dt \quad (4.2.13)$$

ile tanımlanan $L_\varphi^\rho(I^2)$ uzayı üzerinde $U := (U_{k,l})$ iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. Ayrıca

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l p_{i,j}^{(k,l)}(x, y) = 1 \quad (4.2.14)$$

dir. $U_{k,l}$, $L_\varphi^\rho(I^2)$ 'yi $L_\varphi^\rho(I^2)$ 'ye dönüştürür. (4.2.14)'den Lemma 5.1. (Bardaro, Mantellini, 2007)'in ispatında olduğu gibi Jensen eşitsizliği kullanılabilir ve her $f \in L_\varphi^\rho(I^2)$, $k, l \in \mathbb{N}$ ve bir mutlak pozitif M sabiti için

$$\rho^\varphi(U_{k,l}f) \leq M \rho^\varphi(f)$$

elde edilir. Dahası, $X_U := L_\varphi^\rho(I^2)$ seçilmesiyle (4.2.12) özelliği gerçekleşir. Buradan,

4.2.3. Sonuç'tan, biliniyor ki, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi

bir $f \in L_\varphi^\rho(I^2)$ için $(U_{k,l}f)$, f 'ye modüler yakınsaktır. Şimdi $(s_{k,l})$ dizisi

$$s_{k,l} = \begin{cases} 0 & , k, l \text{ tam kare} \\ 1 & , \text{d.d.} \end{cases} \quad (4.2.15)$$

olsun. Buradan, $(s_{k,l})$ dizisi için $st_2 - \lim_{k,l} s_{k,l} = 1$ dir. Buna rağmen $(s_{k,l})$ Pringsheim anlamında yakınsak değildir.

Bu durumda, $U_{k,l}$ operatörleri kullanılarak, $L_\varphi^\rho(I^2)$ üzerinde $V := (V_{k,l})$ pozitif lineer operatörleri, $s = (s_{k,l})$, (4.2.15) ile verilen çift indisli dizi olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın. $f \in L_\varphi^\rho(I^2)$, $x, y \in [0,1]$ ve $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$V_{k,l}(f; x, y) = s_{k,l} U_{k,l}(f; x, y). \quad (4.2.16)$$

Lemma 5.1. (Bardaro, Mantellini, 2007)'de olduğu gibi, her $h \in X_V := L_\varphi^\rho(I^2)$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$\rho^\varphi(\lambda V_{k,l}h) = \rho^\varphi(\lambda s_{k,l} U_{k,l}h) = s_{m,n} \rho^\varphi(\lambda U_{k,l}h) \leq R s_{k,l} \rho^\varphi(\lambda h)$$

elde edilir. Bu durumda $st_2 - \limsup_{k,l} s_{k,l} = st_2 - \lim_{k,l} s_{k,l} = 1$ olması kullanılarak

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho^\varphi(\lambda V_{k,l}h) \leq R \rho^\varphi(\lambda h) \quad (4.2.17)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2.1) koşulu $X_V = X_U = L_\varphi^\rho(I^2)$ seçilerek (4.2.16) ile verilen

$V_{k,l}$ operatörleri için gerçekleşir. Şimdi her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2, 3$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi(\lambda_0 (V_{k,l}f_r - f_r)) = 0 \quad (4.2.18)$$

olduğu gösterilsin. İlk olarak

$$V_{k,l}(f_0; x, y) = s_{k,l},$$

$$V_{k,l}(f_1; x, y) = s_{k,l} \left(\frac{kx}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)} \right),$$

$$V_{k,l}(f_2; x, y) = s_{k,l} \left(\frac{ly}{l+1} + \frac{1}{2(l+1)} \right),$$

$$V_{k,l}(f_3; x, y) = s_{k,l} \left(\frac{k(k-1)x^2}{(k+1)^2} + \frac{2kx}{(k+1)^2} + \frac{1}{3(k+1)^2} + \frac{l(l-1)y^2}{(l+1)^2} + \frac{2ly}{(l+1)^2} + \frac{1}{3(l+1)^2} \right)$$

bulunur. Buradan, her $\lambda > 0$ için

$$\lambda |V_{k,l}(f_0; x, y) - f_0(x, y)| = \lambda(1 - s_{k,l})$$

olduğu görülür ve $(s_{k,l})$ 'nin tanımından

$$\begin{aligned} \rho^\varphi(\lambda(V_{k,l}f_0 - f_0)) &= \rho^\varphi(\lambda(1 - s_{k,l})) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(\lambda(1 - s_{k,l})) dx dy \\ &= \varphi(\lambda(1 - s_{k,l})) = (1 - s_{k,l})\varphi(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. $st_2 - \lim_{k,l} (1 - s_{k,l}) = 0$ olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi(\lambda(V_{k,l}f_0 - f_0)) = 0$$

olup (4.2.18) koşulu $r = 0$ için sağlanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \lambda |V_{k,l}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| &= \lambda \left\{ x \left(1 - \frac{ks_{k,l}}{k+1} \right) + \frac{s_{k,l}}{2(k+1)} \right\} \\ &\leq \lambda \left\{ \left(1 - \frac{ks_{k,l}}{k+1} \right) + \frac{s_{k,l}}{2(k+1)} \right\} \\ &= \lambda \left\{ (1 - s_{k,l}) + \frac{3s_{k,l}}{2(k+1)} \right\} \end{aligned}$$

olduğundan, $(s_{k,l})$ ve ρ^φ 'in tanımından

$$\begin{aligned} \rho^\varphi(\lambda(V_{k,l}f_1 - f_1)) &\leq \rho^\varphi \left(\lambda \left\{ (1 - s_{k,l}) + \frac{3s_{k,l}}{2(k+1)} \right\} \right) \\ &\leq \rho^\varphi(2\lambda(1 - s_{k,l})) + \rho^\varphi \left(\frac{3\lambda s_{k,l}}{(k+1)} \right) \\ &= \varphi(2\lambda(1 - s_{k,l})) + \varphi \left(\frac{3\lambda s_{k,l}}{(k+1)} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir, her $\lambda > 0$ için

$$\rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f_1 - f_1) \right) \leq (1 - s_{k,l}) \varphi(2\lambda) + s_{k,l} \varphi \left(\frac{3\lambda}{k+1} \right). \quad (4.2.19)$$

φ sürekli olduğundan

$$P - \lim_{k,l} \varphi \left(\frac{3\lambda}{k+1} \right) = \varphi \left(P - \lim_{k,l} \frac{3\lambda}{k+1} \right) = \varphi(0) = 0.$$

Ayrıca $st_2 - \lim_{k,l} s_{k,l} = 1$ olduğundan, (4.2.19)'dan her $\lambda > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f_1 - f_1) \right) = 0$$

olup (4.2.18) koşulu $r=1$ için sağlanır. Benzer şekilde her $\lambda > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f_2 - f_2) \right) = 0$$

elde edilir, (4.2.18) koşulu $r=2$ için de sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned} \lambda |V_{k,l} (f_3; x, y) - f_3(x, y)| &= \lambda \left\{ x^2 \left(1 - \frac{k(k-1)s_{k,l}}{(k+1)^2} \right) + x \left(\frac{2ks_{k,l}}{(k+1)^2} \right) + \frac{s_{k,l}}{3(k+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + y^2 \left(1 - \frac{l(l-1)s_{k,l}}{(l+1)^2} \right) + y \left(\frac{2ls_{k,l}}{(l+1)^2} \right) + \frac{s_{k,l}}{3(l+1)^2} \right\} \\ &\leq \lambda \left\{ \left(1 - \frac{k(k-1)s_{k,l}}{(k+1)^2} \right) + \left(\frac{2ks_{k,l}}{(k+1)^2} \right) + \frac{s_{k,l}}{3(k+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{l(l-1)s_{k,l}}{(l+1)^2} \right) + \left(\frac{2ls_{k,l}}{(l+1)^2} \right) + \frac{s_{k,l}}{3(l+1)^2} \right\} \\ &= \lambda \left\{ 2(1 - s_{k,l}) + s_{k,l} \left(\frac{15k+4}{3(k+1)^2} \right) + s_{k,l} \left(\frac{15l+4}{3(l+1)^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f_3 - f_3) \right) &\leq \rho^\varphi \left(6\lambda(1 - s_{k,l}) \right) + \rho^\varphi \left(3\lambda s_{k,l} \left(\frac{15k+4}{3(k+1)^2} \right) \right) \\ &\quad + \rho^\varphi \left(3\lambda s_{k,l} \left(\frac{15l+4}{3(l+1)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

olur ki

$$\begin{aligned} \rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f_3 - f_3) \right) &\leq (1 - s_{k,l}) \varphi(6\lambda) + s_{k,l} \varphi \left(3\lambda \left(\frac{15k+4}{3(k+1)^2} \right) \right) \\ &\quad + s_{k,l} \varphi \left(3\lambda \left(\frac{15l+4}{3(l+1)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. φ sürekli olduğundan ve son eşitsizlikten her $\lambda > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f_3 - f_3) \right) = 0$$

olup, (4.2.18) koşulunun $r = 0, 1, 2, 3$ için sağlandığı gösterilmiş olur. O halde (4.2.17) ve (4.2.18)'den (4.2.16) ile tanımlanan $V := (V_{k,l})$ dizisi 4.2.1. Teorem'in tüm koşullarını sağlar. Bu nedenle her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho(I^2)$ ve bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda_0 (V_{k,l} f - f) \right) = 0$$

elde edilir. Buna rağmen aynı f ve herhangi $\lambda > 0$ için

$$\rho^\varphi \left(\lambda (V_{k,l} f - f) \right) = \rho^\varphi \left(\lambda (s_{k,l} U_{k,l} f - f) \right) = \begin{cases} \rho^\varphi(\lambda f) & , \quad k, l \text{ tam kare} \\ \rho^\varphi(\lambda (U_{k,l} f - f)) & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

olduğundan $(\rho^\varphi(\lambda (V_{k,l} f - f)))$ dizisi farklı limit noktaları olan iki alt diziye sahiptir.

Diğer bir deyişle $k, l \rightarrow \infty$ için $(\rho^\varphi(\lambda (V_{k,l} f - f)))$ dizisi sıfıra yakınsak olacak şekilde herhangi bir $\lambda > 0$ mevcut değildir. Buradan $(V_{k,l} f)$ 'nin f 'ye modüler yakınsak olmadığı kolaylıkla söylenir. Dolayısıyla, 4.2.3. Sonuç $V := (V_{k,l})$ çift indisli dizisi için sağlanmaz.

4.3. Modüler Uzaylarda Toplam Süreci Yardımıyla Çift İndisli Diziler için İstatistiksel Korovkin Tipi Teoremler

Bu bölümde modüler uzaylarda çift indisli diziler için A –toplam süreci tanımı yapılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri çift indisli diziler için istatistiksel A –toplam süreci yardımıyla verilecektir.

$A := (A^{(m,n)})$ negatif olmayan reel dört boyutlu sonsuz matrislerin bir dizisi, ρ , $X(I^2)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler, D kümesi $C^\infty(I^2) \subset D \subset L^\rho(I^2)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. $T = (T_{i,j})$ pozitif lineer operatörlerin D den $X(I^2)$ ' ye bir çift indisli dizisi olsun. Eğer her $f \in D$ için $(T_{i,j}f)$, f 'ye A -toplantabilir (ρ modülerine göre) ise yani, bazı $\gamma > 0$ için $A_{k,l,m,n}^T(f) := \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j}f$ ve bu seri tüm $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, $f \in D$ için Lebesgue ölçüsüne göre hemen her yerde mutlak yakınsak olmak üzere,

$$P\text{-}\lim_{k,l} \rho(\gamma(A_{k,l,m,n}^T(f) - f)) = 0, (m, n \text{ ye göre düzgün}),$$

ise $(T_{i,j})$ pozitif lineer operatörler dizisi D üzerinde bir A -toplantı sürecidir denir.

Ayrıca, kabul edilsin ki X_T , $C^\infty(I^2)$ ' i içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$st_2\text{-}\limsup_{k,l} \rho(\lambda(A_{k,l,m,n}^T(h))) \leq R\rho(\lambda h), (m, n \text{ ye göre düzgün}). \quad (4.3.1)$$

Şimdi çift indisli pozitif lineer operatörler dizisi için istatistiksel Korovkin tipi teoremler toplam süreci yardımıyla verilsin.

4.3.1. Teorem: $A := (A^{(m,n)})$ negatif olmayan dört boyutlu sonsuz reel matrislerin bir dizisi ve ρ , $X(I^2)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_{i,j})$, D 'den $X(I^2)$ 'e (4.3.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2, 3$ için

$$st_2\text{-}\lim_{k,l} \rho(\lambda(A_{k,l,m,n}^T(f_r) - f_r)) = 0 (m, n \text{ ye göre düzgün}). \quad (4.3.2)$$

Şimdi $f \in L^\rho(I^2)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_2\text{-}\lim_{k,l} \rho(\lambda_0(A_{k,l,m,n}^T(f) - f)) = 0 (m, n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.3.3)$$

dır.

İspat: İlk olarak $g \in C(I^2) \cap D$ ve her $\eta > 0$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\eta \left(A_{k,l,m,n}^T (g) - g \right) \right) = 0 \quad (m, n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.3.4)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(I^2) \cap D$ olsun. g, I^2 'de sürekli olduğundan

verilen bir $\varepsilon > 0$ ve tüm $(u, v), (x, y) \in I^2$ için, $M := \sup_{(x,y) \in I^2} |g(x, y)|$ olmak üzere

$$|g(u, v) - g(x, y)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ (u-x)^2 + (v-y)^2 \right\}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $T_{i,j}$ lineer ve pozitif olduğundan,

$c := \max \left\{ |f_1(x, y)|, |f_2(x, y)| \right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (g; x, y) - g(x, y) \right| \\ &= \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (g(\cdot, \cdot) - g(x, y); x, y) + g(x, y) \left(\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right) \right| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} \left(|g(\cdot, \cdot) - g(x, y)|; x, y \right) + |g(x, y)| \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left\{ (\cdot - x)^2 + (\cdot - y)^2 \right\}; x, y \right) + |g(x, y)| \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right| \\ &\leq \varepsilon + (\varepsilon + M) \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right| + \frac{2M}{\delta^2} \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_3; x, y) - f_3(x, y) \right| \\ &\quad + \frac{4M}{\delta^2} \left(|f_1(x, y)| \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_1; x, y) - f_1(x, y) \right| + |f_2(x, y)| \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_2; x, y) - f_2(x, y) \right| \right) \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} |f_3(x, y)| \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right| \\ &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{4Mc^2}{\delta^2} \right) \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right| + \frac{4Mc}{\delta^2} \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_1; x, y) - f_1(x, y) \right| \\ &\quad + \frac{4Mc}{\delta^2} \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_2; x, y) - f_2(x, y) \right| + \frac{2M}{\delta^2} \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_3; x, y) - f_3(x, y) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten her $\eta > 0$ için, $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{4Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \eta \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (g; x, y) - g(x, y) \right| \\
& \leq \eta \varepsilon + \eta K \left\{ \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_0; x, y) - f_0(x, y) \right| + \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_1; x, y) - f_1(x, y) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_2; x, y) - f_2(x, y) \right| + \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} (f_3; x, y) - f_3(x, y) \right| \right\}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho \left(\eta \left(\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} g - g \right) \right) & \leq \rho \left(\eta \varepsilon + \eta K \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} f_0 - f_0 \right| + \eta K \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} f_1 - f_1 \right| \right. \\
& \quad \left. + \eta K \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} f_2 - f_2 \right| + \eta K \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j} f_3 - f_3 \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\begin{aligned}
\rho \left(\eta \left(A_{k,l,m,n}^T (g) - g \right) \right) & \leq \rho(5\eta \varepsilon) + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_0) - f_0 \right) \right) + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_1) - f_1 \right) \right) \\
& \quad + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_2) - f_2 \right) \right) + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_3) - f_3 \right) \right).
\end{aligned}$$

ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\begin{aligned}
\rho \left(\eta \left(A_{k,l,m,n}^T (g) - g \right) \right) & \leq N\varepsilon \rho(5\eta N) + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_0) - f_0 \right) \right) + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_1) - f_1 \right) \right) \\
& \quad + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_2) - f_2 \right) \right) + \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_3) - f_3 \right) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Verilmiş bir $\varepsilon^* > 0$ için bir $\varepsilon \in (0, 1]$ seçilsin öyle ki $N\varepsilon \rho(5\eta N) < \varepsilon^*$. Şimdi

$r = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$G_\eta := \left\{ (k, l) : \rho \left(\eta \left(A_{k,l,m,n}^T (g) - g \right) \right) \geq \varepsilon^* \right\},$$

$$G_{\eta,r} := \left\{ (k, l) : \rho \left(5\eta K \left(A_{k,l,m,n}^T (f_r) - f_r \right) \right) \geq \frac{\varepsilon^* - N\varepsilon \rho(5\eta N)}{4} \right\}.$$

Buradan $G_\eta \subseteq \bigcup_{r=0}^3 G_{\eta,r}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, $\delta_2(G_\eta) \leq \sum_{r=0}^3 \delta_2(G_{\eta,r})$

yazılabilir. (4.3.2) hipotezi kullanılarak $\delta_2(G_\eta) = 0$ elde edilir, böylece (4.3.4)

gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.3.4) eşitliği $C^\infty(I^2) \subset C(I^2) \cap D$ olduğundan her $g \in C^\infty(I^2)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^\rho(I^2)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(I^2) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan, ρ modülerinin $X(I^2)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu görülebilir. ρ modülerinin bu özellikleri kullanılarak $C^\infty(I^2)$ uzayının $L^\rho(I^2)$ 'de modüler yoğun olduğu görülür (Mantellini, 1998; Bardaro, Musielak ve Vinti, 2003).

Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için

$$P\text{-}\lim_{k,l} \rho(3\lambda_0^*(g_{k,l} - f)) = 0$$

olacak şekilde bir $(g_{k,l}) \subset C^\infty(I^2)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k, l \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_{k,l} - f)) < \varepsilon. \quad (4.3.5)$$

Diğer taraftan, $T_{i,j}$ operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden, her $x, y \in I$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_0^* \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j}(f; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \lambda_0^* \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j}(f - g_{k_0,k_0}; x, y) \right| \\ &\quad + \lambda_0^* \left| \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l,i,j}^{(m,n)} T_{i,j}(g_{k_0,k_0}; x, y) - g_{k_0,k_0}(x, y) \right| \\ &\quad + \lambda_0^* |g_{k_0,k_0}(x, y) - f(x, y)|, \end{aligned}$$

son eşitsizliğe ρ modülleri uygulanırsa ve ρ 'un monotonluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho(\lambda_0^*(A_{k,l,m,n}^T(f) - f)) &\leq \rho(3\lambda_0^* A_{k,l,m,n}^T(f - g_{k_0,k_0})) + \rho(3\lambda_0^*(A_{k,l,m,n}^T(g_{k_0,k_0}) - g_{k_0,k_0})) \\ &\quad + \rho(3\lambda_0^*(g_{k_0,k_0} - f)). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Böylece, (4.3.5) ve (4.3.6)'dan

$$\rho(\lambda_0^*(A_{k,l,m,n}^T(f) - f)) \leq \varepsilon + \rho(3\lambda_0^* A_{k,l,m,n}^T(f - g_{k_0,k_0})) + \rho(3\lambda_0^*(A_{k,l,m,n}^T(g_{k_0,k_0}) - g_{k_0,k_0})). \quad (4.3.7)$$

Dolayısıyla, (4.3.7)'de her iki tarafın $k, l \rightarrow \infty$ için istatistiksel üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0,k_0} \in C^\infty(I^2)$ olması kullanılarak, (4.3.1)'den

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right) \leq \varepsilon + R \rho \left(3\lambda_0^* \left(f - g_{k_0,k_0} \right) \right) \\ + st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(3\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (g_{k_0,k_0}) - g_{k_0,k_0} \right) \right),$$

buradan da

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right) \\ \leq \varepsilon (R+1) + st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(3\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (g_{k_0,k_0}) - g_{k_0,k_0} \right) \right). \quad (4.3.8)$$

(4.3.4)'den, $st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(3\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (g_{k_0,k_0}) - g_{k_0,k_0} \right) \right) = 0$ (m, n ye göre düzgün),

olduğundan

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(3\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (g_{k_0,k_0}) - g_{k_0,k_0} \right) \right) = 0 \quad (m, n \text{ ye göre düzgün}), \quad (4.3.9)$$

elde edilir. (4.3.8) ve (4.3.9)'dan

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right) \leq \varepsilon (R+1)$$

sonucuna varılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right) = 0 \quad (m, n \text{ ye göre düzgün}),$$

bulunur. Dahası, tüm $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\lambda_0^* \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right) = 0 \quad (m, n \text{ ye göre düzgün}),$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir, bu ise ispatı tamamlar.

Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, 4.3.1. Teorem'den ilk olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

4.3.2. Teorem: $A := (A^{(m,n)})$ negatif olmayan dört boyutlu sonsuz reel matrislerin bir dizisi ve $T = (T_{i,j})$ ve ρ 4.3.1. Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. Her $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2, 3$ için $st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^T (f_r) - f_r \right) \right) = 0$ (m, n ye göre düzgün),
- ii. Her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(I^2)$ ve her $\lambda > 0$ için $st_2 - \lim_{k,l} \rho \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^T (f) - f \right) \right) = 0$ (m, n ye göre düzgün).

Eğer $A^{(m,n)}$ ($m, n \geq 1$) matrisleri yerine birim matris ve P –limit alınır, (4.3.1)

koşulu her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif R sabiti için

$$P\text{--}\limsup_{i,j} \rho(\lambda(T_{i,j}h)) \leq R\rho(\lambda h) \quad (4.3.10)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.3.1. Teorem ve 4.3.2. Teorem’den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.3.3. Sonuç: ρ , $X(I^2)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_{i,j})$, D ’den $X(I^2)$ ’ye (4.3.10) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Eğer $r = 0, 1, 2, 3$ için $(T_{i,j}f_r)$, f_r ‘ye kuvvetli yakınsak ise, $(T_{i,j}f)$, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde ki $L^\rho(I^2)$ ‘ye ait herhangi bir f fonksiyonuna modüler yakınsaktır.

4.3.4. Sonuç: $T = (T_{i,j})$ ve ρ 4.3.3. Sonuç’daki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 – şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $r = 0, 1, 2, 3$ için $(T_{i,j}f_r)$, f_r ‘ye kuvvetli yakınsak,
- ii. $(T_{i,j}f)$, her $g \in C^\infty(I^2)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekildeki $L^\rho(I^2)$ ‘ya ait herhangi bir f fonksiyonuna kuvvetli yakınsak.

Şimdi 4.3.1. Teorem’in koşullarını sağlayan ancak 4.3.3. Sonuç’un koşullarını sağlamayan bir örnek verilsin.

4.3.5. Örnek: $I = [0,1]$ ve $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

- φ konveks,
- $\varphi(0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Her $f \in X(I^2)$ için

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \int_0^1 \varphi(|f(x,y)|) dx dy$$

ile $X(I^2)$ üzerinde tanımlanan ρ^φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. Bu durumda ρ^φ , $X(I^2)$ üzerinde konveks bir modülerdir. φ fonksiyonu ile oluşturulan Orlicz uzayı gözönüne alınsın:

$$L_{\varphi}^{\rho}(I^2) := \left\{ f \in X(I^2) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^{\varphi}(\lambda f) < +\infty \right\}.$$

Buradan $p_{k,l}^{(i,j)}(x,y) = \binom{i}{k} \binom{j}{l} x^k y^l (1-x)^{i-k} (1-y)^{j-l}$ olmak üzere, $x, y \in I$ için

$$U_{i,j}(f; x, y) = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j p_{k,l}^{(i,j)}(x, y) (i+1)(j+1) \int_{k/(i+1)}^{(k+1)/(i+1)} \int_{l/(j+1)}^{(l+1)/(j+1)} f(t, s) ds dt$$

ile tanımlanan $L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ uzayı üzerinde $U := (U_{i,j})$ klasik Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. $U_{i,j}$, $L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ 'dan $L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ 'ye giden bir operatördür. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j p_{k,l}^{(i,j)}(x, y) = 1 \text{ olduğundan, Lemma 5. 1 (Bardaro ve Mantellini, 2007) 'in}$$

ispatında olduğu gibi ve 4.2.5. Örnek'e benzer olarak, her $f \in L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ ve $i, j \in \mathbb{N}$, bir mutlak pozitif M sabiti için

$$\rho^{\varphi}(U_{i,j} f) \leq M \rho^{\varphi}(f)$$

elde edilir. O halde, bilindiği gibi, $X_U := L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ seçilmesiyle, her $g \in C^{\infty}(I^2)$ için $f - g \in X_U$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ için $(U_{i,j} f)$, f 'ye modüler yakınsaktır.

Şimdi $(s_{i,j})$ çift indisli dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, & i, j \text{ tamkare} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

$$\text{Buradan } st_2 - \lim_{i,j} s_{i,j} = 0 \text{ dır. Ayrıca, } A := (A^{(m,n)}) = (a_{k,l,i,j}^{(m,n)}), \quad a_{k,l,i,j}^{(m,n)} = \frac{1}{kl},$$

$m \leq i \leq m+k-1$, $n \leq j \leq n+l-1$ ($m, n = 1, 2, \dots$) ve $a_{k,l,i,j}^{(m,n)} = 0$, diğer durumlarda ile

tanımlı dört boyutlu sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. Buradan $U_{i,j}$ operatörleri

kullanılarak $L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$ üzerinde aşağıdaki pozitif lineer operatörlerin $V := (V_{i,j})$ dizisi

tanımlansın: $f \in L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$, $x, y \in I$ ve $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$$V_{i,j}(f; x, y) = (1 + s_{i,j}) U_{i,j}(f; x, y). \quad (4.3.11)$$

Lemma 5. 1 (Bardaro ve Mantellini, 2007) 'in ispatında olduğu gibi ve φ

fonksiyonunun konveksliği kullanılarak, her $h \in X_V := L_{\varphi}^{\rho}(I^2)$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak

pozitif M sabiti için

$$st_2 - \limsup_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee(h) \right) \right) \leq M \rho^\varphi(\lambda h), \quad (m,n \text{ ye göre düzgün}),$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.3.1) şartı $X_V = X_U = L_\varphi^\rho(I^2)$ seçilmesiyle, (4.3.11) ile

tanımlanan $V_{i,j}$ operatörleri için sağlanır. Şimdi her $\lambda > 0$, $r=0, 1, 2, 3$ için

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee(f_r) - f_r \right) \right) = 0 \quad (m,n \text{ ye göre düzgün}). \quad (4.3.12)$$

olduğu gösterilsin. Bilindiği gibi

$$U_{i,j}(f_0; x, y) = 1,$$

$$U_{i,j}(f_1; x, y) = \frac{ix}{i+1} + \frac{1}{2(i+1)},$$

$$U_{i,j}(f_2; x, y) = \frac{jy}{j+1} + \frac{1}{2(j+1)},$$

$$U_{i,j}(f_3; x, y) = \frac{i(i-1)x^2}{(i+1)^2} + \frac{2ix}{(i+1)^2} + \frac{1}{3(i+1)^2} + \frac{j(j-1)y^2}{(j+1)^2} + \frac{2jy}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2}.$$

O halde

$$\begin{aligned} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee(f_0) - f_0 \right) \right) &= \rho^\varphi \left(\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1 + s_{i,j}) - 1 \right) \right) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \varphi \left(\left| \lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1 + s_{i,j}) - 1 \right) \right| \right) dx dy \\ &= \varphi \left(\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1 + s_{i,j}) - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} (1 + s_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i, j \text{ tam kare} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$, $m, n = 1, 2, \dots$

olduğundan ve φ 'nin de sürekliliği kullanılarak,

$$st_2 - \lim_{k,l} \varphi \left(\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1 + s_{i,j}) - 1 \right) \right) = 0, \quad (m,n \text{ ye göre düzgün}) \quad (4.3.13)$$

ve dolayısıyla

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee(f_0) - f_0 \right) \right) = 0, \quad (m,n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir ki bu da $r=0$ için (4.3.12) 'nin doğru olduğunu garanti eder. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee (f_1) - f_1 \right) \right) &= \rho^\varphi \left(\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1+s_{i,j}) \left(\frac{ix}{i+1} + \frac{1}{2(i+1)} \right) - x \right) \right) \\
&\leq \rho^\varphi \left(3\lambda \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{i}{i+1} - 1 \right) \right) + \rho^\varphi \left(3\lambda \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{2(i+1)} \right) \right) \\
&\quad + \rho^\varphi \left(3\lambda \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} s_{i,j} \left(\frac{i}{i+1} + \frac{1}{2(i+1)} \right) \right) \right) \\
&= \varphi \left(3\lambda \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{i}{i+1} - 1 \right) \right) + \varphi \left(3\lambda \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{2(i+1)} \right) \right) \\
&\quad + \varphi \left(3\lambda \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} s_{i,j} \left(\frac{i}{i+1} + \frac{1}{2(i+1)} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

olur.

$$st_2 - \lim_{k,l} \left(\sup_{m,n} \left(\frac{1}{kl} \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{i}{i+1} - 1 \right) \right) \right) = 0, \quad st_2 - \lim_{k,l} \left(\sup_{m,n} \left(\frac{1}{kl} \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{2(i+1)} \right) \right) \right) = 0$$

$$\text{ve } st_2 - \lim_{k,l} \left(\sup_{m,n} \left(\frac{1}{kl} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} s_{i,j} \left(\frac{i}{i+1} + \frac{1}{2(i+1)} \right) \right) \right) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee (f_1) - f_1 \right) \right) = 0, \quad (m, n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. (4.3.12), $r=1$ için doğrudur. Benzer şekilde

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee (f_2) - f_2 \right) \right) = 0, \quad (m, n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned}
&\rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee (f_3) - f_3 \right) \right) \\
&= \rho^\varphi \left(\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1+s_{i,j}) \left(\frac{i(i-1)x^2}{(i+1)^2} + \frac{2ix}{(i+1)^2} + \frac{1}{3(i+1)^2} + \frac{j(j-1)y^2}{(j+1)^2} + \frac{2jy}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} - (x^2 + y^2) \right) \right) \right) \\
&\leq \rho^\varphi \left(3\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1+s_{i,j}) \left(\frac{i(i-1)}{(i+1)^2} - 1 \right) \right) \right) + \rho^\varphi \left(3\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1+s_{i,j}) \left(\frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right) \right) \right) \\
&\quad + \rho^\varphi \left(3\lambda \left(\sum_{i=m}^{m+k-1} \sum_{j=n}^{n+l-1} \frac{1}{kl} (1+s_{i,j}) \left(\frac{2i}{(i+1)^2} + \frac{1}{3(i+1)^2} \frac{2j}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee (f_3) - f_3 \right) \right) = 0, (m,n \text{ ye göre düzgün})$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

O halde (4.3.12), $r = 0, 1, 2, 3$ için doğru olur. $V := (V_{i,j})$ çift indisli dizisi 4.3.1.

Teorem'in tüm hipotezlerini sağladığından $f \in L_\varphi^\rho(I^2)$ için I^2 üzerinde

$$st_2 - \lim_{k,l} \rho^\varphi \left(\lambda \left(A_{k,l,m,n}^\vee (f) - f \right) \right) = 0, (m,n \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. $(s_{i,j})$ çift indisli dizisi P -yakınsak olmadığından 4.3.3. Sonuç sağlanmaz.



4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hazırlanan doktora tezinde istatistiksel yakınsaklık ve toplam süreci kavramları modüler uzaylar üzerinde, tek ve çift indisli diziler için, Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde etmede kullanılmıştır. Böylece daha kuvvetli sonuçlar elde edilerek bu alanda yapılan çalışmalar genişletilmiştir. Bu nedenle hazırlanan doktora tezine modüler uzaylar üzerinde çalışılması düşünülen yeni problemler için kaynak olarak başvurulabilir.



KAYNAKLAR

- Atlıhan, Ö. G. and Orhan C., 2008. Summation process of positive linear operators. Computers & Mathematics with Applications 56 (5): 1188-1195.
- Bardaro, C., Mantellini, I. 2007. Korovkin theorem in modular spaces. Commentationes Math., 47 (2) : 239-253.
- Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G. 2003. Nonlinear integral operators and applications. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis And Applications 9, Walter de Gruyter Publ., Berlin, 199 s.
- Bell, H. T. 1973. Order summability and almost convergence. Proc. Am. Math. Soc., 38: 548-553.
- Boos. J. 2000. Classical and modern in summability. Oxford Science Publications.
- Connor, J. 1985. Some applications of functional analysis to summability theory. Ph. D. Thesis, Kent State Univ., USA.
- Connor, J. 1990. Two valued measures and summability. Analysis, 10: 373-385.
- Connor, J., Kline J. 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. , 197: 392-399.
- Çakan, C., Altay, B. 2006. Statistically Boundedness and Statistical Core of Double Sequences. J. Math. Anal. Appl. 317: 690-697.
- Demirci, K. 2000. A-Statistical core of a sequence. Demonstratio Math. 33: 343-353.
- Dirik, F. ve Demirci, K. 2010. Korovkin type approximation theorem for functions of two variables in statistical sense. Turk. J. Math. 34: 73-83.
- Ditzian, Z., Totik, V. 1987. Moduli of Smoothness. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 9, Springer, New York.
- Duman, O., Khan, K. ve Orhan, C. 2003. A-Statistical convergence of approximating operators. Math. Ineq. Appl., 6: 689-699.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math. , 2: 241-44.
- Freedman, A. R., Sember, J. J. 1981. Density and summability. Pasific J. Math. , 95: 293-305.
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence. Analysis, 5: 301-313.
- Fridy, J. A. 1993. Statistical limit points. Proc. Amer. Math. Soc., 118; 1187-1192.
- Fridy, J. A. ve Orhan, C. 1997. Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc., 125: 3625-3631.
- Gadjiev, A. D., Orhan, C. 2002. Some Approximation Theorems Statistical Convergence. Rocky Mountain J. Math., 32: 129-138.

- Hardy, G. H. 1949. Divergent series. Oxford Univ. Press, London.
- Karakus, S., Demirci, K., Duman, O. 2010. Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. *Positivity*. 14: 321-334.
- Karakus, S. ve Demirci, K. 2011. Summation process of Korovkin type approximation theorem. *Miskolc Math. Notes*. 12: 75-85.
- Karakuş, S. and Demirci, K. 2012. A-summation process and Korovkin type approximation theorem for double sequences of positive linear operators. *Mathematica Slovaca*. 62 (2): 281-292.
- Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistical convergent sequences. *Analysis*, 13: 77-83.
- Korovkin, P.P. 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Spaces of Continuous Functions. *Dokl. Akad. Nauk*. 90: 961-969.
- Korovkin, P. P. 1960. Linear operators and approximation theory. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Kozłowski, W. M. 1988. Modular function spaces. *Pure Appl. Math.*, 122, Marcel Dekker, Inc., New York, 252 s.
- Lorentz, G. G. 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math*, 80: 167-190.
- Mantellini, I. 1998. Generalized sampling operators in modular spaces. *Commentationes Math.*, 38: 77-92.
- Miller, H. I. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347: 1811-1819.
- Moricz, F. 2003. Statistical convergence of multiple sequences. *Arch. Math. (Basel)* 81: 82-89.
- Moricz, F., Rhoades, B. E. 1988. Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices. *Math. Proc. of the Cambridge Philos.Soc.* 104: 283-294.
- Musielak, J. 1983. Orlicz spaces and modular spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol., 1034, Springer-Verlag, Berlin, 222 s.
- Musielak, J. 1993. Nonlinear approximation in some modular function spaces I. *Math. Japon*, 38: 83-90.
- Nishishiraho, T. 1981. Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces, *Tohoku Math. J.* 33: 109-126.

- Nishishiraho, T. 1983. Convergence of positive linear approximation processes, *Tohoku Math. J.* 35: 441-458.
- Niven, I., Zuckerman, H.S. 1980. An introduction on the theory of numbers. John Waley & Sons, 4th ed. New York.
- Pringsheim, A. 1900. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. *Math. Ann.* 53: 289-321.
- Robison, G.M. 1926. Divergent double sequences and series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 28: 50-73.
- Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, 30 (no:2): 139-150.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 2: 73-74.
- Stieglitz, M. 1973. Eine verallgemeinerung des begriffs festkonvergenz. *Math. Japonica*, 18: 53-70.
- Swetits, J.J. 1979. On summability and positive linear operators. *J. Approx. Theory*, 25: 186-188.
- Szasz, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's Polynomials to The Infinite Interval. *Journ. of Resarch of the Nat. Bureau of Stand.*, 45: 239-245.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633-639, 789-805.
- Volkov, V.I. 1957. On the convergence of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions of two variables. (Russian) , *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 115: 17-19.

ÖZGEÇMİŞ

Sevda ORHAN 1987 yılında Ankara’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 2005 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2009 yılında fakülte birincisi olarak mezun oldu. 2009 yılında, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve 2011 yılında mezun oldu. 2012 yılında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.

Bu tezden elde edilen yayınlar:

1. Statistical A –summation process and Korovkin type approximation theorem on modular spaces. Positivity (18) (2014), 669-686. **(SCI-Expanded)**
2. Statistical approximation by double sequences of positive linear operators on modular spaces. Positivity (19) (2015), 23-36. **(SCI-Expanded)**
3. Korovkin type approximation for double sequences via statistical A –summation process on modular spaces (Yayına sunuldu).