



DOKTORA TEZİ

BURÇAK KOLAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MODÜLER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL RELATİVE
YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER**

**T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**MODÜLER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL RELATİVE
YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER**

BURÇAK KOLAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

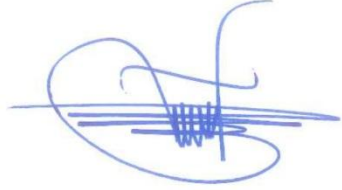
**DANIŞMAN
PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ**

SİNOP – 2018

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Arş. Gör. Burçak KOLAY tarafından hazırlanan “Modüler Uzaylarda İstatistiksel Relative Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teoremler ” başlıklı bu çalışma, 10.07.2018 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **DOKTORA tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan [Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM]
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Üye (Danışman) [Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ]
Sinop Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Üye [Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI]
Ankara Üniversitesi
Fen Fakültesi



Üye [Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM]
Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Fakültesi



Üye [Doç. Dr. İsmail AYDIN]
Sinop Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylıyorum.

16. / 07 / 2018

Doç. Dr. Turgay KORKUT
Enstitü Müdürü



MODÜLER UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL RELATİVE YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

ÖZET

Bu doktora tezinde relative modüler yakınsaklık, istatistiksel relative modüler yakınsaklık ve relative toplam süreci kavramları kullanılmıştır.

İlk olarak tez içerisinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bulgular bölümünün ilk kısmında relative modüler yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve bu yakınsaklık türü aracılığı ile modüler uzaylarda Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır. Sonrasında, elde edilen sonucun daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilmiştir.

İkinci kısımda, $\mathcal{B}$ -istatistiksel relative modüler yakınsaklık kullanılarak modüler uzaylar üzerinde bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremin şartlarını sağlayan fakat daha önce verilmiş modüler ve istatistiksel modüler Korovkin tipi teoremlerin koşullarını sağlamayan bir örnek sunulmuştur.

Bulgular bölümünün son kısmında ise, $\mathcal{B}$ -istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri relative A -toplam süreci kavramı yardımıyla modüler uzaylar üzerinde çalışılmış ve bu yeni tip yaklaşımı sağlayan bir örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pozitif lineer operatör, Korovkin teoremi, modüler uzay, istatistiksel yakınsaklık, modüler yakınsaklık, relatively düzgün yakınsaklık, toplam süreci.

STATISTICAL RELATIVE CONVERGENCE AND KOROVKIN TYPE THEOREMS ON MODULAR SPACES

ABSTRACT

In this doctoral thesis, the concepts of relative modular convergence, statistical relative modular convergence and relative summation process have been used.

Firstly, some main definitions and theorems used in the thesis have been given.

In the first part of the findings section, the concept of relative modular convergence has been presented and via this type of convergence, Korovkin type approximation theorem has been studied on modular spaces. Then, an example, showing that the result obtained has been stronger, is given.

In the second part, using $\mathcal{B}$ –statistical relative modular convergence, a Korovkin type approximation theorem has been obtained on modular spaces. Also, an example which satisfies the conditions of this theorem but does not provide the conditions of the modular and statistical modular Korovkin type theorems, given previously, has been presented.

In the last part of the findings section, with the help of relative A – summation process, $\mathcal{B}$ –statistical Korovkin type approximation theorems have been studied on modular spaces and an example satisfying this new type approximation has been given.

Key Words: Positive linear operator, Korovkin theorem, modular space, statistical convergence, modular convergence, relatively uniform convergence, summation process.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında önerileriyle beni yönlendiren, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ'ye en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen sevgili eşim Erdiñ KOLAY'a ve her zaman yanımda olan canım aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Arş. Gör. Burçak KOLAY
Temmuz, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Pozitif Lineer Operatörler.....	3
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem	4
2.3. Toplanabilme Teorisi.....	7
2.4. $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Yakınsaklık ve $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem.....	9
2.5. Modüler Uzay ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri	13
2.6. Relatively Düzgün Yakınsaklık.....	19
3. MATERYAL VE YÖNTEM	21
4. BULGULAR	22
4.1. Relative Modüler Yakınsaklık ve Modüler Korovkin Tipi Teorem.....	22
4.2. Modüler Uzaylarda $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Relative Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi.....	34
4.3. Modüler Uzaylarda Relative A – Toplam Süreci Yardımıyla $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi.....	48
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ	69

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
$\delta_{\mathcal{B}}$	: $\mathcal{B}$ - Yoğunluk fonksiyonu
ρ	: Modüler fonksiyonu
$\sigma(x)$	: Skale fonksiyonu
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\mathcal{C}$	: Yakınsak diziler uzayı
$\mathcal{S}$	: Tüm diziler uzayı
$\mathcal{st}$	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$ A $	: A kümesinin eleman sayısı
μ	: Ölçü fonksiyonu
$h.h.$	: Hemen her yerde
$I = [a, b]$	: Lebesgue ölçülebilir, reel sayıların sınırlı alt aralığı
$X(I)$	: X bir vektör uzayı olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, h.h. eşitliğini sağlayan reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$L^{\rho}(I)$	: ρ modüler fonksiyonu tarafından oluşturulan modüler uzay
$C(I)$	: I üzerinde tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$B(I)$	: I üzerinde tüm reel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı
$C^{\infty}(I)$	: I üzerinde her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı
$L_p(I)$	: I üzerinde reel değerli p – inci merteben mutlak integrallenebilen fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_{L_p}$: $L_p(I)$ uzayı üzerinde $\|f\|_{L_p} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı norm

$\|\cdot\|_{\infty}$: $C(I)$ uzayındaki $\|\cdot\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |\cdot|$ ile tanımlı norm

$\|\cdot\|_B$: $B(I)$ uzayındaki $\|\cdot\|_B = \sup_{x \in I} |\cdot|$ ile tanımlı norm



1. GİRİŞ

Reel değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinin kökeni Chebyshev'in (1859) çalışmasına ve ayrıca kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ifade eden Weierstrass (1885) teoremine dayanır. Pozitif lineer operatörler ise yaklaşımlar teorisinde ilk kez P. P. Korovkin (1953) tarafından kullanılmış olup, kompakt bir aralıkta, bir pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağına dair şartları belirler. Burada pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsamaması durumunda yakınsaklık kaybını gidermek için Cesàro tipli toplanabilme metotları kullanılabilir (Swetits, 1979). Bilindiği üzere toplanabilme metotlarının kullanılmasının asıl amacı ıraksak bazı sonsuz serileri toplamak ya da yakınsak olmayan bir diziye yakınsak yapmaktır. Nishishiraho (1981, 1983) bir matris toplanabilme metodu kullanarak Korovkin tipli yaklaşım teoremlerini incelemiştir ve daha sonra bu çalışmalar farklı uzaylar üzerine taşınmıştır (Atlıhan ve Orhan, 2008; Karakuş ve Demirci, 2011, 2012; Orhan ve Demirci, 2014). Yine klasik Korovkin teoremleri çeşitli uzaylar üzerinde ele alınmış olup bunlardan biri modüler uzaylardır ve özel olarak L^p , Orlicz ve Musielak-Orlicz uzaylarını içermektedir (Bardaro ve Mantellini, 2007). Bu uzaylar Musielak (1983) ve Kozłowski (1988) tarafından detaylı olarak incelenmiştir. Burada Bardaro ve Mantellini (2007) ve aynı zamanda Orhan ve Demirci (2014) tarafından verilen Korovkin tipi teoremler geliştirilerek verilecektir.

Regüler bir toplanabilme metodu olan istatistiksel yakınsaklık ise ilk olarak Steinhaus (1951) tarafından tanıtılmış olup aynı yıl Fast (1951) tarafından çalışılmıştır. Salat (1980) ve daha sonra Connor (1985) istatistiksel yakınsak diziler uzayının bazı topolojik özelliklerini ele almışlardır. Bu yakınsaklık türü Korovkin tipi yaklaşım teorisinde de kullanılarak daha kuvvetli sonuçlar elde edilmiştir (Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman ve ark., 2003). Modüler uzaylar üzerinde istatistiksel yaklaşım kullanılarak, istatistiksel modüler Korovkin tipi teorem Karakuş, Demirci ve Duman (2010) tarafından verilmiş olup burada bu teoremin de bir genelleştirilmesi verilecektir.

Hazırlanan bu doktora tezinde önce relative modüler yakınsaklık tanımı verilecek ve bu tanım yardımıyla relative modüler Korovkin tipi teorem çalışılacaktır. Daha sonra $\mathcal{B}$ -istatistiksel modüler yakınsaklık kullanılarak modüler uzaylar üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilecektir. Son olarak, relative A -toplam süreci kavramı

yardımıyla istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri modüler uzaylar üzerinde çalışılacaktır. Bu yeni tip yaklaşım teoremlerini sağlayan birer örnek verilerek daha önce verilen çalışmalardaki sonuçlardan daha kuvvetli sonuçlar elde edildiği gösterilecektir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Pozitif Lineer Operatörler

Burada öncelikle lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve sağladığı temel özellikler incelenecektir.

2.1.1 Tanım: X ve Y sırasıyla boştan farklı A ve B kümeleri üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı olsunlar. Eğer X ’den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y ’de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve operatörün x noktasındaki değeri $L(f(t);x) = g(x)$ ile gösterilir.

Burada $L(f(t);x)$ gösterimi yerine $L(f;x)$ yazılacaktır.

X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X=D(L)$ ile gösterilir. Ayrıca $R(L) = \{g: L(f;x) = g(x), f \in D(L)\}$ kümesine de L operatörünün değer kümesi denir. $R(L) \subseteq Y$ dir.

Burada X uzayı lineer uzay olduğunda lineer operatörün tanımı verilebilir.

2.1.2. Tanım: f_1 ve f_2 , X uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için L operatörü,

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x),$$

koşulunu sağlıyorsa bu takdirde L operatörüne lineer operatör denir. Tanımdan da görüleceği gibi L lineer operatörü için $L(0;x) = 0$ olur.

Şimdi de lineer operatörler kümesi içinde önemli bir sınıf olan pozitif lineer operatörler verilsin.

2.1.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0, t \in A\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0, x \in B\}$ olsun. X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f

fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne pozitif lineer operatör denir.

2.1.4. Örnek: $B_n : C[0,1] \rightarrow B[0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1], \quad f \in C[0,1], \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1.1)$$

ile tanımlanan Bernstein polinomları $f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} > 0$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için pozitif lineer bir operatördür (Bernstein, 1912).

L pozitif lineer operatörü için $LX^+ \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. Ayrıca $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f; x) \leq L(g; x)$ dır. Yani pozitif lineer operatörler monotondur.

Şimdi 1960 yılında Korovkin tarafından verilen yaklaşım teorisinde önemli bir yeri olan ve literatürde “Korovkin Teoremi” olarak bilinen teorem verilsin.

2.1.5. Teorem: $L_n : C[a,b] \rightarrow B[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi $i = 0, 1, 2$ için $f_i(t) = t^i$, $(t \in [a,b])$ olmak üzere $\lim_n \|L_n f_i - f_i\|_B = 0$ koşulunu sağlıyor ise her $f \in C[a,b]$ için $\lim_n \|L_n f - f\|_B = 0$ dır (Korovkin, 1960).

(2.1.1)’deki Bernstein operatörü için $B_n(1; x) = 1$, $B_n(t; x) = x$ ve $B_n(t^2; x) = x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n}$ olup, 2.1.5. Teorem’in koşulları sağlandığından her $f \in C[0,1]$ için $\lim_n \|B_n f - f\|_B = 0$ gerçekleşir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bazı temel özellikleri tanıtılacak ve ayrıca Korovkin teoremi istatistiksel yaklaşım ile verilecektir.

2.2.1. Tanım: Bir $E \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi için $E_n := \{k \leq n : k \in E\}$ olmak üzere E_n kümesinin eleman sayısı $|E_n|$ ile gösterilsin. Eğer

$$\lim_n \frac{|E_n|}{n},$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine E kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(E)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

(a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere yoğunluk mevcut ise $\delta(E) = \lim_n \frac{n}{a_n}$ dir (Niven ve Zuckerman, 1980). Örneğin; $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımından elde edilebilir. Hatta doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunlukludur. Ayrıca bir E kümesi yoğunluğa sahip ise, bu durumda $\delta(\mathbb{N} \setminus E) = 1 - \delta(E)$ olur.

2.2.2. Tanım: $x = (x_n)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = \lim_n \frac{1}{n} |\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st - \lim_n x_n = L$ şeklinde gösterilir (Steinhaus, 1951; Fast, 1951).

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı gibi, eğer bir x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla yakınsak diziler uzayı c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayı st ile gösterilirse, $c \subset st$ dir. Yani, istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir.

Şimdi bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşulu veren teorem verilsin.

2.2.3. Teorem: $x = (x_n)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) yakınsak alt dizisi vardır (Salat, 1980).

2.2.4. Örnek: $x = (x_n)$ dizisinin genel terimi

$$x_n = \begin{cases} 1/2, & n = m^2 \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ dersek $\delta(K) = 0$ ve $\mathbb{N} \setminus K := \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1$ olup $(x_{n_k}) = (0, 0, \dots) \rightarrow 0$ 'dır. Bu ise $st - \lim_n x_n = 0$ olduğunu gösterir.

2.2.5. Örnek: $x = (x_n)$,

$$x_n = \begin{cases} n, & n = m^2 \\ 1, & n \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots,$$

dizisi için $st - \lim_n x_n = 1$ olduğu görülür.

Örneklerden, sırasıyla sınırlı ıraksak ve sınırsız ıraksak dizilerin istatistiksel yakınsak olabileceği görülmektedir.

Şimdi istatistiksel Korovkin tipi teorem verilsin.

2.2.6. Teorem: Eğer $L_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi için $i = 0, 1, 2$ için $f_i(t) = t^i$ ($t \in [a, b]$) olmak üzere $st - \lim_n \|L_n f_i - f_i\|_B = 0$ koşulu sağlanıyor ise her $f \in C[a, b]$ için $st - \lim_n \|L_n f - f\|_B = 0$ dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

2.3. Toplanabilme Teorisi

Bu bölümde matris toplanabilme metodu ve buna ilişkin bazı sonuçlardan bahsedilecektir. Daha sonra A – toplam süreci kavramı tanıtılacaktır.

2.3.1. Tanım: X ve Y , tüm diziler uzayı olan S ’nin alt kümeleri ve $\mathcal{B} = (b_{lk})$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere $x = (x_k) \subset X$ ve her $l \in \mathbb{N}$ için

$$(\mathcal{B}x)_l := \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} x_k,$$

serisi yakınsak ise $\mathcal{B}x := ((\mathcal{B}x)_l)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $\mathcal{B}x$ dönüşüm dizisi mevcut ve $\mathcal{B}x \in Y$ ise $\mathcal{B} = (b_{lk})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir. Eğer bir x dizisinin $\mathcal{B}x$ dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak ise x dizisi L sayısına $\mathcal{B}$ – toplanabilirdir denir ve $\mathcal{B} - \lim x = L$ şeklinde yazılır. Eğer verilen bir (x_k) dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_l (\mathcal{B}x)_l = L$ koşulu gerçekleşiyor ise $\mathcal{B}$ matrisine regüler matris denir.

Bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter şartları veren teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

2.3.2. Teorem (Silverman-Toeplitz): Bir $\mathcal{B} = (b_{lk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul,

$$(i) \quad \|\mathcal{B}\| := \sup_l \sum_{k=1}^{\infty} |b_{lk}| < \infty,$$

$$(ii) \quad \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_l b_{lk} = 0,$$

$$(iii) \quad \lim_l \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} = 1$$

olmasıdır (Hardy, 1949; Boos, 2000).

2.3.3. Örnek: Aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C_1 = (c_{lk})$

$$c_{lk} = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 1 \leq k \leq l \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Cesàro matrisi regülerdir.

$\mathcal{B}$, X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü ise $\mathcal{B} \in (X, Y)$ ile gösterilir.

Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Eğer özel olarak

$X = Y = c$ olmak üzere $\mathcal{B} \in (c, c)$ ise $\mathcal{B}$ matrisine konservatif matris denir. Ayrıca

$\mathcal{B} \in (c, c; p)$ ise $\mathcal{B}$ matrisi regüler bir matristir (Hardy, 1949; Boos, 2000).

Bell (1973) ve Stieglitz (1973) 2.3.1. Tanım'daki düşünceyi kullanarak $\mathcal{B} = (b_{lk})$ matrisi yerine $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$, $(n \in \mathbb{N})$, matris dizisini alarak aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

2.3.4. Tanım: $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir

dizisi olsun. $x = (x_j)$ reel sayıların dizisi ve tüm $k, n \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_k^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j$ serisi

yakınsak ise $Ax := \{(Ax)_k^n : k, n \in \mathbb{N}\}$ çift indisli dizisine x dizisinin A -dönüşümü denir. Eğer

$$\lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j = L \quad (n \text{ 'ye göre düzgün}),$$

koşulu sağlanıyorsa, x dizisi L değerine A -toplanabilir denir (Bell 1973, Stieglitz 1973).

2.3.5. Tanım: $x = (x_j)$ reel terimli sınırlı bir dizi olsun.

$$\lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} x_j = L \quad (n \text{ 'ye göre düzgün}),$$

koşulunu sağlayan bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Eğer A bir matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} = A$ alınırsa, A – toplanabilme klasik matris toplanabilmeye ve I birim matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} = I$ alınırsa A – toplanabilme klasik yakınsamaya indirgenir. Eğer $(A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$ matris dizisi yerine genel terimi

$$a_{kj}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & n \leq j \leq n+k, \quad (n=1, 2, \dots), \\ 0 & , \text{ diğ er durumlarda,} \end{cases}$$

ile tanımlı matris dizisi alınırsa A – toplanabilme metodu hemen hemen yakınsaklığa indirgenir (Lorentz, 1948).

Şimdi de A – toplam süreci kavramı verilsin.

2.3.6. Tanım: $T = (T_j)$ pozitif lineer operatörlerin $C[a, b]$ ’den $C[a, b]$ ’ye bir dizisi olsun. Eğer her $f \in C[a, b]$ için $(T_j f)$, f ’ye A – toplanabilir ise yani, seri her bir k, n ve f için yakınsak olmak üzere

$$\lim_k \left\| \sum_j a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right\|_{\infty} = 0 \quad (n \text{ 'ye göre düzgün})$$

ise (T_j) pozitif lineer operatörler dizisi $C[a, b]$ ’de bir A – toplam sürecidir denir (Nishishiraho, 1983).

2.4. $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Yakınsaklık ve $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

Freedman ve Sember, 1981 yılında aşağıdaki düşünciyi kullanarak istatistiksel yakınsaklık tanımındaki Cesàro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $\mathcal{B} = (b_{lk})$ sonsuz matrisini alarak istatistiksel yakınsaklığı $\mathcal{B}$ – istatistiksel yakınsaklığa genişletmişlerdir.

Bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması, daha önce verilen tanıma denk olarak, $K := K(\varepsilon) = \{k \leq l : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\lim_l (C_1 \chi_K)_l = \lim_l \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$ olması demektir. Burada χ_K , K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.

2.4.1. Tanım: $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_l \sum_{k \in K} b_{lk} = \lim_l (\mathcal{B} \chi_K)_l,$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin $\mathcal{B}$ -yoğunluğu denir ve $\delta_{\mathcal{B}}(K)$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Eğer bir K kümesi $\mathcal{B}$ -yoğunluğa sahip ise bu durumda $\delta_{\mathcal{B}}(\mathbb{N} - K) = 1 - \delta_{\mathcal{B}}(K)$ olacaktır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta_{\mathcal{B}}(K) = 0$ olacağı açıkça görülür.

2.4.2. Tanım: $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K := K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_{\mathcal{B}}(K) = \lim_l \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = \lim_l \sum_{k \in K} b_{lk} = 0$$

gerçekleniyor ise bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaktır denir. $st_{\mathcal{B}} - \lim x = L$ şeklinde gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Kolk, 1993; Miller, 1995).

Bu tanımda eğer $\mathcal{B}$ matrisi yerine I birim matrisi alınırsa alışılmış anlamdaki (Cauchy anlamında) yakınsaklık elde edilir. Ayrıca bir $x = (x_k)$ dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $st_{\mathcal{B}} - \lim_k x_k = L$ olur. $\mathcal{B}$ matrisi yerine C_1 Cesàro matrisi alındığında ise $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

2.2.3. Teorem'in bir benzeri $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsaklık için şu şekilde verilebilir.

2.4.3. Teorem: Bir x dizisinin L sayısına $\mathcal{B}$ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_{\mathcal{B}}(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (n_k) indis dizisinin var olmasıdır (Kolk, 1993; Miller, 1995).

Bir x dizisinin bir L sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa L sayısı x dizisinin alışılmış limit noktasıdır. Bir alt dizinin yoğunluğu göz önüne alınarak $\mathcal{B}$ -istatistiksel limit noktası tanımı Connor ve Kline tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

2.4.4. Tanım: Reel terimli bir x dizisinin bir L sayısına yakınsayan $\mathcal{B}$ -ince olmayan alt dizisi varsa (alt dizinin indis kümesinin $\mathcal{B}$ -yoğunluğu sıfırdan büyük veya $\mathcal{B}$ -yoğunluğa sahip değil), L sayısına x dizisinin bir $\mathcal{B}$ -istatistiksel limit noktasıdır denir (Connor ve Kline, 1996).

Bir x dizisinin alışılmış limit noktalarının cümlesi L_x ile $\mathcal{B}$ -istatistiksel limit noktalarının cümlesi ise $\Lambda_x^{\mathcal{B}}$ ile gösterilir.

2.4.5. Örnek: $b_{lk} = \begin{cases} 1, & k = l^2, (l = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ ile tanımlı $\mathcal{B} = (b_{lk})$ matrisi alınsın.

$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$ dizisi için $L_x = \{0, 1\}$ ve $\Lambda_x^{\mathcal{B}} = \{1\}$ şeklindedir.

$\mathcal{B}$ -istatistiksel limit noktalarının cümlesi ile alışılmış limit noktalarının cümlesi birbirinden çok farklı olabilir.

2.4.6. Örnek: $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ değer cümlesi tüm rasyonel sayılar cümlesi olan bir dizi

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2, (n = 1, 2, \dots), \\ r_k, & k \neq n^2, \end{cases}$$

ve

$$b_{lk} = \begin{cases} 1, & k = l^2, \quad (l = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olmak üzere $\Lambda_x^{\mathcal{B}} = \emptyset$ ve $L_x = \mathbb{R}$ dir.

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x^{\mathcal{B}} \subseteq L_x$ olacağı kolaylıkla görülür.

2.4.7. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ cümlesi sıfır $\mathcal{B}$ -yoğunluğa sahip değilse γ sayısına x dizisinin bir $\mathcal{B}$ -istatistiksel değme noktasıdır denir (Connor ve Kline, 1996). $\mathcal{B}$ -istatistiksel değme noktaları cümlesi $\Gamma_x^{\mathcal{B}}$ ile gösterilir.

Yine herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x^{\mathcal{B}} \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Ayrıca herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x^{\mathcal{B}} \subseteq \Gamma_x^{\mathcal{B}}$ kapsamı mevcuttur.

Eğer $\mathcal{B} = C_1$ Cesàro matrisi olarak alınırsa $\mathcal{B}$ -istatistiksel limit noktası istatistiksel limit noktasına, $\mathcal{B}$ -istatistiksel değme noktası ise istatistiksel değme noktasına indirgenir (Fridy, 1993).

Şimdi $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limit ve alt limit kavramları verilsin.

$\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $x = (x_k)$ dizisi için

$$D_x := \{d \in \mathbb{R} : \delta_{\mathcal{B}}(\{k : x_k > d\}) \neq 0\},$$

$$E_x := \{e \in \mathbb{R} : \delta_{\mathcal{B}}(\{k : x_k < e\}) \neq 0\},$$

olsun. Burada $K := \{k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta_{\mathcal{B}}(K) \neq 0$ olması $\delta_{\mathcal{B}}(K) > 0$ veya K kümesi yoğunluğa sahip değil, anlamında alınacaktır.

2.4.8. Tanım: $\mathcal{B}$ negatif olmayan regüler bir matris ve x dizisinin $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limiti

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k x_k := \begin{cases} \sup D_x, & D_x \neq \emptyset, \\ -\infty, & D_x = \emptyset, \end{cases}$$

ile verilir. Benzer şekilde bir x dizisinin $\mathcal{B}$ -istatistiksel alt limiti

$$st_{\mathcal{B}} - \liminf_k x_k := \begin{cases} \inf E_x, & E_x \neq \emptyset, \\ +\infty & , E_x = \emptyset, \end{cases}$$

ile verilir (Connor ve Kline, 1996; Demirci, 2000).

Eğer $\mathcal{B} = C_1$ Cesàro matrisi olarak alınırsa $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limiti tanımı istatistiksel üst limit, $\mathcal{B}$ -istatistiksel alt limit tanımı ise istatistiksel alt limit tanımına indirgenir (Fridy ve Orhan, 1997).

Alışılmış üst limit ve alt limit kavramlarında olduğu gibi, $x = (x_k)$ dizisi için

$$st_{\mathcal{B}} - \liminf_k x_k \leq st_{\mathcal{B}} - \limsup_k x_k$$

olduğu kanıtlanmıştır.

Ayrıca belirtilsin ki en sağdaki $\mathcal{B}$ -istatistiksel değme noktası $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limite ve en soldaki $\mathcal{B}$ -istatistiksel değme noktası $\mathcal{B}$ -istatistiksel alt limite eşittir.

Şimdi $\mathcal{B}$ - istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

2.4.9. Teorem: $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer $L_k : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörlerin dizisi için $i = 0, 1, 2$ için $f_i(t) = t^i$ ($t \in [a, b]$) olmak üzere $st_{\mathcal{B}} - \lim_k \|L_k f_i - f_i\|_B = 0$ koşulu sağlanıyor ise her $f \in C[a, b]$ için $st_{\mathcal{B}} - \lim_k \|L_k f - f\|_B = 0$ dır (Duman ve ark., 2003).

2.5. Modüler Uzak ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

Bardaro ve Mantellini (2007) klasik Korovkin tipi teoremi modüler uzaylar üzerine genişletmişlerdir. Daha sonra Karakuş, Demirci ve Duman (2010) modüler uzaylarda $\mathcal{B}$ -istatistiksel Korovkin tipi teoremleri vererek daha kuvvetli sonuçlar elde etmişlerdir. Şimdi gerekli olan bazı fonksiyon uzayları tanıtılsın ve ardından modüler uzak kavramı ve bazı özellikleri verilsin.

$I = [a, b]$: Lebesgue ölçülebilir, reel sayıların sınırlı alt aralığı

$X(I)$: X bir vektör uzayı olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, h.h. eşitliğini sağlayan reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayı

$C(I)$: I üzerinde tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı

$C^\infty(I)$: I üzerinde her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayı

2.5.1. Tanım: Herhangi bir $\rho : X(I) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli

$$(i) \quad \rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ h.h.},$$

$$(ii) \quad \text{Her } f \in X(I) \text{ için } \rho(f) = \rho(-f),$$

$$(iii) \quad \text{Her } f, g \in X(I) \text{ ve } \alpha + \beta = 1 \text{ özellikli herhangi } \alpha, \beta \geq 0 \text{ için}$$
$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g),$$

koşullarını sağlıyorsa ρ 'ya $X(I)$ üzerinde bir modüler denir. Eğer her $f, g \in X(I)$ ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq N\alpha\rho(Nf) + N\beta\rho(Ng)$$

olacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa ρ 'ya N -quasi konveks modüler denir. Özel olarak $N = 1$ alınırsa ρ 'ya konveks modüler denir. Her $f \in X(I)$ ve $a \in (0, 1]$ için

$$\rho(af) \leq Na\rho(Nf)$$

olacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa ρ 'ya N -quasi yarı konveks modüler denir. Buradan her N -quasi konveks modülerin, N -quasi yarı konveks modüler olduğu kolaylıkla görülebilir.

ρ modülleri ile verilen $X(I)$ uzayının bazı alt vektör uzayları aşağıdaki gibidir:

$$L^\rho(I) := \left\{ f \in X(I) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\},$$

$$E^\rho(I) := \left\{ f \in L^\rho(I) : \text{her } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < \infty \right\}.$$

Burada $L^\rho(I)$ 'ya ρ modülleri ile oluşturulan modüler uzay ve $E^\rho(I)$ 'ya ise $L^\rho(I)$ 'nın sonlu elemanlarının uzayı denir. Eğer ρ , N -quasi yarı konveks modüler ise $L^\rho(I) = \{f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < \infty\}$ olur.

2.5.2. Örnek: $(X(I), \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $\|\cdot\|$ norm fonksiyonu bir modülerdir.

2.5.3. Örnek: $I = [a, b]$ olmak üzere $1 \leq p < \infty$ için L_p uzayı modüler uzaydır.

Şimdi modüler uzaylardaki bazı yakınsaklık türleri tanıtılsın.

2.5.4. Tanım: (f_k) terimleri $L^\rho(I)$ 'da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^\rho(I)$ olsun.

Bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_k \rho(\lambda_0(f_k - f)) = 0$$

oluyorsa (f_k) dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsaktır denir.

2.5.5. Tanım: (f_k) terimleri $L^\rho(I)$ 'da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^\rho(I)$ olsun.

Her $\lambda > 0$ için

$$\lim_k \rho(\lambda(f_k - f)) = 0$$

oluyorsa (f_k) dizisi f fonksiyonuna F -norm (kuvvetli) yakınsaktır denir.

2.5.6. Lemma: Modüler yakınsaklık ile F -norm yakınsaklığın denk olması için gerek ve yeter şart Δ_2 -şartının sağlanmasıdır yani, her $f \in X(I)$ için $\rho(2f) \leq M\rho(f)$ eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabiti vardır (Bardaro ve ark., 2003; Musielak, 1993).

2.5.7. Tanım:

1. $|f| \leq |g|$ için $\rho(f) \leq \rho(g)$ ise, ρ monotondur denir.
2. χ_I , I aralığının karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\chi_I \in L^\rho(I)$ ise, ρ sonludur denir.
3. Eğer ρ sonlu ve her $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ için $\mu(B) < \delta$ özellikli herhangi ölçülebilir $B \subset I$ alt kümesi için $\rho(\lambda\chi_B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa, ρ mutlak sonludur denir.

4. $\chi_I \in E^\rho(I)$ ise, ρ kuvvetli sonludur denir.

5. $\rho(f) < \infty$ özellikli her $f \in X(I)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan $\alpha > 0$ varsa ρ mutlak süreklidir denir:

Her $\varepsilon > 0$ için B, I aralığının $\mu(B) < \delta$ özellikli herhangi ölçülebilir alt kümesi olmak üzere $\rho(\alpha f \chi_B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Eğer ρ monoton ve sonlu bir modüler ise, $C(I) \subset L^\rho(I)$ dır. Yine aynı şekilde eğer ρ monoton ve kuvvetli sonlu ise, $C(I) \subset E^\rho(I)$ (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Şimdi sırasıyla modüler ve istatistiksel modüler Korovkin tipi teoremler verilsin. $\rho, X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. ρ , monoton ve sonlu bir modüler olduğundan böyle bir D kümesi seçilebilir. Kabul edilsin ki $X_T, C^\infty(I)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $T = (T_k)$, D 'den $X(I)$ 'ya tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif R sabiti için

$$\limsup_k \rho(\lambda(T_k h)) \leq R\rho(\lambda h), \quad (2.5.1)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

2.5.8. Teorem: $\rho, X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_k)$, D 'den $X(I)$ 'ya (2.5.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $f_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\lim_k \rho(\lambda(T_k f_i - f_i)) = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

olsun. Ayrıca $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_k \rho(\lambda_0(T_k f - f)) = 0,$$

dır (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Yukarıda verilen $T = (T_k)$ dizisi, (2.5.1) şartı yerine $\mathcal{B} = (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho(\lambda(T_k h)) \leq R\rho(\lambda h), \quad (2.5.2)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda $\mathcal{B}$ – istatistiksel Korovkin tipi teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

2.5.9. Teorem: $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris ve $\rho, X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler olsun. $T = (T_k)$, D ’den $X(I)$ ’ya (2.5.2) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $f_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho(\lambda(T_k f_i - f_i)) = 0 \quad (i = 0, 1, 2),$$

olsun. Ayrıca $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho(\lambda_0(T_k f - f)) = 0,$$

dır (Karakuş ve ark., 2010).

Şimdi de modüler uzaylarda A – toplam süreci kavramı tanıtılsın.

2.5.10. Tanım: $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $\rho, X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^p(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Kabul edilsin ki $T = (T_j)$, D ’den $X(I)$ ’ya tanımlı ve

$$A_{k,n}^T(f) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f,$$

serisi, her $f \in D$ ve her $k, n \in \mathbb{N}$ için Lebesgue ölçüsüne göre hemen her yerde mutlak yakınsak olsun. Eğer her $f \in D$ için $(T_j f)$, f 'ye A – toplanabilir (ρ modülerine göre) ise yani, bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_k \rho \left(\lambda_0 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0 \quad (n \text{ 'ye göre düzgün})$$

ise (T_j) pozitif lineer operatörler dizisi D üzerinde bir A – toplam sürecidir denir (Orhan ve Demirci, 2014).

Şimdi kabul edilsin ki $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris ve X_T , $C^\infty(I)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif P sabiti için

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda \left(A_{k,n}^T(h) \right) \right) \leq P \rho(\lambda h) \quad (n \text{ 'ye göre düzgün}) \quad (2.5.3)$$

olsun.

2.5.11. Teorem: $A := (A^{(n)})$ sonsuz, negatif olmayan reel matrislerin bir dizisi olsun ve ρ , $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N – quasi yarı konveks bir modüler ve ayrıca, $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris olsun. $T = (T_j)$, D 'den $X(I)$ 'ya (2.5.3) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $f_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f_i - f_i \right) \right) = 0, \quad (n \text{ 'ye göre düzgün}), \quad (2.5.4)$$

sağlansın. Ayrıca $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için,

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f - f \right) \right) = 0, \quad (n\text{'ye göre düzgün}) \quad (2.5.5)$$

dır (Orhan ve Demirci, 2014).

2.6. Relatively Düzgün Yakınsaklık

Fonksiyon dizileri için relatively düzgün yakınsaklık tanımı ilk olarak 1910 yılında Moore tarafından verilmiş, daha sonra Chittenden (1919) bu tanımı geliştirerek aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

2.6.1. Tanım: (f_n) fonksiyon dizisi bir $I \equiv (a \leq x \leq b)$ aralığında tanımlı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_ε vardır öyleki her $n > n_\varepsilon$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon |\sigma(x)| \quad (I \text{ üzerinde } x\text{'e göre düzgün}),$$

koşulunu sağlayan bir $\sigma(x)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi bir f limit fonksiyonuna relatively düzgün yakınsaktır denir. Burada $\sigma(x)$ fonksiyonu skale fonksiyonu olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanımdan düzgün yakınsaklığın $\sigma(x)$ skale fonksiyonunun $a \neq 0$ sabiti seçimi ile relatively düzgün yakınsaklığın özel bir hali olduğu görülür.

2.6.2. Örnek: Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2},$$

şeklinde tanımlansın. (f_n) fonksiyon dizisi $f=0$ 'a düzgün yakınsak olmamasına

karşın $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ skale fonksiyonuna göre relatively düzgün yakınsaktır.

Gerçekten,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{1}{nx} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{1}{x} \right|,$$

koşulunu sağlayan $\sigma(x)$ skale fonksiyonu vardır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünün ilk kısmında relative modüler yakınsaklık kavramı tanıtılarak bu yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi teorem modüler uzaylar üzerinde ele alınmıştır.

İkinci kısımda relative modüler yakınsaklık kavramı istatistiksel yaklaşım yardımıyla geliştirilerek modüler uzaylarda $\mathcal{B}$ –istatistiksel relative Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır.

Son kısımda ise relative A – toplam süreci yardımıyla modüler uzaylar üzerinde istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır.



4. BULGULAR

Bu kısımda modüler yakınsaklık kavramı bir skale fonksiyonu yardımıyla relative modüler yakınsaklık kavramına geliştirilecektir. Bu yakınsaklık tanımı yapılırken, 1910 yılında Moore tarafından tanımlanan ve Chittenden (1919) tarafından geliştirilen relatively düzgün yakınsaklıktan esinlenilmiştir. Ayrıca relative modüler yakınsaklık istatistiksel yaklaşım ile ele alınacak ve bunun yanı sıra modüler uzaylarda relative A – toplam süreci kavramı verilecektir. Elde edilen yeni kavramlar ışığında modüler uzaylar üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremleri çalışılacaktır.

4.1. Relative Modüler Yakınsaklık ve Modüler Korovkin Tipi Teorem

Bu bölümde önce relative modüler yakınsaklık kavramı tanıtılacaktır. Daha sonra Bardaro ve Mantellini (2007) tarafından modüler uzaylarda verilen Korovkin tipi teoremin genelleştirilmiş hali ispatlanacaktır.

4.1.1. Tanım: (f_n) terimleri $L^p(I)$ 'da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^p(I)$ olsun. Eğer bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_n - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olacak şekilde $|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $\sigma \in X(I)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa, (f_n) dizisi f fonksiyonuna relatively modüler yakınsaktır denir.

Ayrıca her $\lambda > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{f_n - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olacak şekilde $|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $\sigma \in X(I)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa, (f_n) dizisi f fonksiyonuna relatively kuvvetli yakınsaktır denir.

Yukarıdaki tanımdan modüler yakınsaklığın $\sigma(x)$ skale fonksiyonunun sıfırdan farklı olan bir sabit seçimi ile relative modüler yakınsaklığın özel bir hali olduğu görülür. Ayrıca eğer $\sigma(x)$ sınırlı ise relative modüler yakınsaklık modüler yakınsaklığı gerektirir. Halbuki $\sigma(x)$ sınırlı bir fonksiyon değilse bu gerektirme doğru değildir. Bu durumu aşağıdaki örnek ile verilsin.

4.1.2. Örnek: $I = [0,1]$ ve $\varphi: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

- φ konveks,
- $\varphi(0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = \infty$.

Her $f \in X(I)$ için

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx$$

ile $X(I)$ üzerinde tanımlanan ρ^φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. Bu durumda ρ^φ , $X(I)$ üzerinde konveks bir modülerdir. φ fonksiyonu ile oluşturulan Orlicz uzayı göz önüne alınsın:

$$L_\varphi^\rho(I) := \{f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty\}.$$

Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$ olur (Bardaro ve ark., 2003). Ayrıca herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho$ için $\rho^\varphi(f) = \|f\|_{L_p}^p$ dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g_n(x) = \begin{cases} n(1-nx), & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & x = 0 \text{ veya } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlansın. Kolaylıkla görülebilir ki, $L_1(I)$ üzerinde (g_n) fonksiyon dizisi

$$g = 0 \text{ 'a modüler yakınsak olmamasına karşın } \sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \text{ skale}$$

fonksiyonuna göre relatively modüler yakınsaktır. Gerçekten bazı $\lambda_0 > 0$ 'lar için $p=1$ seçimiyle $\rho^\sigma(f) = \|f\|_{L_1}$ elde edilir ve

$$\rho(\lambda_0(g_n - g)) = \|\lambda_0(g_n - g)\|_{L_1} = \lambda_0 \int_0^{\frac{1}{n}} |n(1-nx)| dx = \frac{\lambda_0}{2}$$

ve dolayısıyla $\lim_n \|\lambda_0(g_n - g)\|_{L_1} \neq 0$ dır. Şimdi σ skale fonksiyonunu kullanarak

$$\rho\left(\lambda_0\left(\frac{g_n - g}{\sigma}\right)\right) = \left\|\lambda_0\left(\frac{g_n - g}{\sigma}\right)\right\|_{L_1} = \lambda_0 \int_0^{\frac{1}{n}} \left|\frac{n(1-nx)}{1/x}\right| dx = \lambda_0 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}\right) = \lambda_0 \frac{1}{6n}$$

ve $\lim_n \lambda_0 \frac{1}{6n} = 0$ olduğundan $\lim_n \left\|\lambda_0\left(\frac{g_n - g}{\sigma}\right)\right\|_{L_1} = 0$ olduğu görülür.

Şimdi yukarıdaki yakınsaklık kullanılarak modüler uzaylarda aşağıdaki Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanacaktır.

$I = [a, b]$ olmak üzere $\rho, X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^p(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. ρ , monoton ve sonlu bir modüler olduğundan böyle bir D kümesi seçilebilir (Bardaro ve Mantellini, 2007). Kabul edilsin ki $X_T, C^\infty(I)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $\sigma \in X(I)$, $\sigma(x) \neq 0$ koşulunu sağlayan sınırsız bir fonksiyon olmak üzere $T := (T_n)$, D 'den $X(I)$ 'ya tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif P sabiti için

$$\limsup_n \rho\left(\lambda\left(\frac{T_n h}{\sigma}\right)\right) \leq P \rho(\lambda h), \quad (4.1.2)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

4.1.3. Teorem: $\rho, X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler ve $T = (T_n)$, D 'den $X(I)$ 'ya (4.1.2) özelliğini

sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Diğer bir yandan $\sigma_i(x)$, $|\sigma_i(x)| \geq a_i > 0$ ($i=0,1,2$) şartını sağlayan sınırsız bir fonksiyon olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i=0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0, (i=0, 1, 2), \quad (4.1.3)$$

sağlansın. Ayrıca $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için, $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|, i=0,1,2\}$ olmak üzere

$$\lim_n \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \quad (4.1.4)$$

dır.

İspat: İlk olarak $g \in C(I) \cap D$ ve her $\mu > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) = 0, \quad (4.1.5)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(I) \cap D$ olsun. g , I 'da sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in I$ için

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon, \quad (4.1.6)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|t - x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in I$ için

$M := \sup_{x \in I} |g(x)|$ olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2, \quad (4.1.7)$$

elde edilir. (4.1.6) ve (4.1.7)'den

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2,$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. T_n lineer ve pozitif olduğundan, her $x \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon T_n(e_0; x) + M |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2} T_n((t-x)^2; x),$$

elde edilir. $c := \max |x|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |T_n(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2 \right\} |T_n(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\quad + \frac{4M}{\delta^2} c |T_n(e_1; x) - e_1(x)| \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} |T_n(e_2; x) - e_2(x)| \end{aligned}$$

dır. Burada $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ denirse

$$|T_n(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + K \left\{ |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + |T_n(e_1; x) - e_1(x)| + |T_n(e_2; x) - e_2(x)| \right\}$$

yazılır. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılırsa

$$\left| \frac{T_n(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \frac{K}{|\sigma(x)|} \left\{ |T_n(e_0; x) - e_0(x)| + |T_n(e_1; x) - e_1(x)| + |T_n(e_2; x) - e_2(x)| \right\},$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten her $\mu > 0$ için,

$$\mu \left\{ \left| \frac{T_n(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \right\} \leq \frac{\mu \varepsilon}{|\sigma(x)|} + \mu K \left\{ \left| \frac{T_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| + \left| \frac{T_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma_1(x)} \right| + \left| \frac{T_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma_2(x)} \right| \right\},$$

olur. Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{\mu \varepsilon}{\sigma} + \mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) + \mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) + \mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right),$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{4\mu \varepsilon}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right).$$

olur. ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq N \varepsilon \rho \left(\frac{4\mu N}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_n e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right)$$

bulunur. (4.1.2) hipotezi kullanılarak her $\lambda > 0$ ve her sabit $\mu > 0$ için

$$\lim_n \rho \left(\mu \left(\frac{T_n g - g}{\sigma} \right) \right) \leq N \varepsilon \rho \left(\frac{4\mu N}{\sigma} \right),$$

elde edilir, böylece (4.1.5) gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.1.5) eşitliği $C^\infty(I) \subset C(I) \cap D$ olduğundan her $g \in C^\infty(I)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(I) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan, ρ modülerinin $X(I)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu görülebilir. ρ modülerinin bu özellikleri kullanılarak $C^\infty(I)$ uzayının $L^\rho(I)$ 'da modüler yoğun olduğu görülür yani $\overline{C^\infty(I)} = L^\rho(I)$ eşitliği vardır (Mantellini, 1998; Bardaro ve ark., 2003). Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için

$$\lim_k \rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) = 0,$$

olacak şekilde bir $(g_k) \subset C^\infty(I)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) < \varepsilon \quad (4.1.8)$$

yazılır. Diğer taraftan, T_n operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden her $x \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_0^* |T_n(f; x) - f(x)| \leq \lambda_0^* |T_n(f - g_{k_0}; x)| + \lambda_0^* |T_n(g_{k_0}; x) - g_{k_0}(x)| + \lambda_0^* |g_{k_0}(x) - f(x)|$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılıp, elde edilen eşitsizliğe ρ modüleri uygulanırsa ve ρ 'nun monotonluğu kullanılırsa

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(f - g_{k_0})}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{g_{k_0} - f}{\sigma}\right)\right)$$

bulunur. Böylelikle $|\sigma| \geq a > 0$ ($a = \max\{a_i : i = 0, 1, 2\}$) olduğu göz önünde bulundurularak ve yine ρ 'nun monoton olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad + \rho\left(\frac{3\lambda_0^*}{a}(g_{k_0} - f)\right) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

olur. Böylece, (4.1.8) ve (4.1.9)'dan

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \quad (4.1.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.1.10)'da her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0} \in C^\infty(I)$ olması kullanılarak, (4.1.2)'den

$$\begin{aligned} \limsup_n \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \varepsilon + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\leq \varepsilon + P\rho\left(3\lambda_0^*(f - g_{k_0})\right) + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right), \end{aligned}$$

buradan

$$\limsup_n \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_n f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon(P+1) + \limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right), \quad (4.1.11)$$

elde edilir. (4.1.5)'ten, $\lim_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0$ olduğundan

$$\limsup_n \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_n g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0, \quad (4.1.12)$$

elde edilir. (4.1.11) ve (4.1.12)'den

$$\limsup_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon (P+1),$$

sonucuna varılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$\limsup_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

bulunur. Dahası, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$\lim_n \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olduğu kolaylıkla görülür, bu ise ispatı tamamlar.

Eğer ρ modülleri Δ_2 -şartını sağlıyorsa, $C^\infty(I)$ uzayı $L^p(I)$ uzayında kuvvetli yoğundur (Bardaro ve Mantellini, 2007) ve $(T_n f)$, f 'ye kuvvetli yakınsar ve buradan $(T_n f)$, f 'ye relatively kuvvetli yakınsar. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

4.1.4. Teorem: $T = (T_n)$, ρ ve σ , 4.1.3. Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 -şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

a) Her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0,$

b) Her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(I)$ ve her

$\lambda > 0$ için $\lim_n \rho \left(\lambda \left(\frac{T_n f - f}{\sigma} \right) \right) = 0.$

Eğer σ skale fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olarak seçilirse (4.1.2) koşulu denklem (2.5.1)'e indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_n \rho(\lambda(T_n h)) \leq P\rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.1.3. Teorem'den Bardaro ve Mantellini (2007) tarafından elde edilen 2.5.8. Teorem elde edilir.

Şimdi 4.1.3. Teorem'in 2.5.8 Teorem'den kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin.

4.1.5. Örnek: $I = [0,1]$ ve φ , ρ^φ ve $L_\varphi^\rho(I)$ 4.1.2. Örnek'teki gibi olsun.

Buradan $x \in I$ için

$$U_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (n+1) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t) dt, \quad (4.1.13)$$

ile tanımlanan $L_\varphi^\rho(I)$ uzayı üzerinde $U := (U_n)$ Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. (U_n) , $L_\varphi^\rho(I)$ Orlicz uzayını $L_\varphi^\rho(I)$ 'ya dönüştürür. Dahası, $X_U := L_\varphi^\rho(I)$ seçilmesiyle (2.5.1) özelliği gerçekleşir. Buradan, 2.5.8 Teorem'den, biliniyor ki, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_U$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho(I)$ için $(U_n f)$, f 'ye modüler yakınsaktır. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$ olduğu ve $p = 1$ seçimiyle $\rho^\varphi(f) = \|f\|_{L_1}$ elde edildiği daha önce de belirtilmişti.

Şimdi U_n operatörleri kullanılarak, $L_1(I)$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin $V := (V_n)$ dizisi, (g_n) , (4.1.1) ile verilen dizi olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın.
 $f \in L_1(I)$, $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_n(f; x) = (1 + g_n(x)) U_n(f; x) \quad (4.1.14)$$

olsun. C pozitif sabiti için $\|U_j(f; x)\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}$ (Ditzian ve Totik, 1987) eşitsizliğinden her $\lambda > 0$ için

$$\limsup_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n f}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \leq C \|\lambda f\|_{L_1},$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi her $\lambda > 0$ ve $\sigma_i(x) = \sigma(x)$ ($i = 0, 1, 2$) seçimiyle

$$\lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_i - e_i}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0 \quad (i = 0, 1, 2), \quad (4.1.15)$$

olduğu gösterilsin. Bilindiği gibi,

$$U_n(e_0; x) = e_0(x),$$

$$U_n(e_1; x) = \frac{nx}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)},$$

$$U_n(e_2; x) = \frac{n(n-1)x^2}{(n+1)^2} + \frac{2nx}{(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2},$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan, her $\lambda > 0$ ve $i = 0$ için

$$\left\| \lambda \left(\frac{V_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \left(\frac{1 + g_n(x) - 1}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1},$$

olduğu görülür ve (g_n) 'nin tanımından

$$\left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = \lambda \int_0^1 \left| \frac{n(1-nx)}{1/x} \right| dx = \lambda \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} \right) = \lambda \frac{1}{6n}, \quad (4.1.16)$$

elde edilir. $\lim_n \lambda \frac{1}{6n} = 0$ olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$\lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_0 - e_0}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

olup (4.1.15) $i = 0$ için sağlanır. Ayrıca $i = 1$ için

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \left(\frac{V_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \left(\frac{(1 + g_n(x))U_n(e_1; x)}{\sigma(x)} - \frac{x}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} \\ &\leq \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \left(\frac{nx}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \right) \right\|_{L_1} + \left\| \lambda \frac{x - 2x^2}{2(n+1)} \right\|_{L_1} \\ &< \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right\|_{L_1} + \frac{\lambda}{2(n+1)}, \end{aligned}$$

olur. (4.1.16)'dan $\lim_n \left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = 0$ ve $\lim_n \frac{\lambda}{2(n+1)} = 0$ olduğundan

$$\lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_1 - e_1}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

elde edilir, (4.1.15) $i = 1$ için de sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \left(\frac{V_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \frac{(1 + g_n(x))U_n(e_2; x)}{\sigma(x)} - \frac{\lambda x^2}{\sigma(x)} \right\|_{L_1} \\ &\leq \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \left(\frac{n(n-1)x^2}{(n+1)^2} + \frac{2nx}{(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\ &\quad + \left\| \lambda \left(\frac{(3n+1)x^3}{(n+1)^2} + \frac{2nx^2}{(n+1)^2} + \frac{x}{3(n+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\ &< 3 \left\| \lambda \frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right\|_{L_1} + \frac{3\lambda}{n+1} + \frac{2\lambda n}{(n+1)^2} + \frac{\lambda}{3(n+1)^2}, \end{aligned}$$

olup, yine (4.1.16)'dan $\lim_n \left\| \lambda \left(\frac{g_n(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = 0$, $\lim_n \frac{3\lambda}{n+1} = 0$, $\lim_n \frac{2\lambda n}{(n+1)^2} = 0$ ve

$$\lim_n \frac{\lambda}{3(n+1)^2} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_n \left\| \lambda \left(\frac{V_n e_2 - e_2}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

elde edilir, (4.1.15) $i = 2$ için de sağlandığı görülür.

O halde hipotezden (4.1.14) ile tanımlanan $V := (V_n)$ dizisi 4.1.3. Teorem'in tüm koşullarını sağlar. Bu nedenle her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_U$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_1(I)$ ve bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_n \left\| \lambda_0 \left(\frac{V_n f - f}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

elde edilir. Buna rağmen herhangi $\lambda > 0$ için

$$\lim_n \left\| \lambda (V_n e_0 - e_0) \right\|_{L_1} = \lim_n \left\| \lambda g_n(x) \right\|_{L_1} = \lim_n \frac{\lambda}{2} \neq 0$$

olduğundan $(V_n f)$ 'nin f 'ye modüler yakınsak olmadığı kolaylıkla söylenir.

Dolayısıyla, 2.5.8 Teorem $V := (V_n)$ operatörü için sağlanmaz.

4.2. Modüler Uzaylarda $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Relative Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde önce $\mathcal{B}$ – istatistiksel relative modüler yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve bu yakınsak kullanılarak modüler uzaylarda Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

4.2.1. Tanım: (f_k) terimleri $L^\rho(I)$ 'da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^\rho(I)$ olsun. Ayrıca $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matrisi verilsin.

Eğer bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olacak şekilde $|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $\sigma \in X(I)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa (f_k) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{B}$ -istatistiksel relatively modüler yakınsaktır denir.

Ayrıca her $\lambda > 0$ için

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{f_k - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olacak şekilde $|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $\sigma \in X(I)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa (f_k) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{B}$ -istatistiksel relatively kuvvetli yakınsaktır denir.

4.2.2 Örnek: φ , ρ ve $L^\rho_\varphi(I)$ 4.1.2. Örnek'teki gibi olsun.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $g_k : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g_k(x) = \begin{cases} 2 & k = n^2, \\ k^3 x, & 0 < x < \frac{1}{k}, k \neq n^2, \\ 0, & x = 0 \text{ veya } \frac{1}{k} \leq x \leq 1, k \neq n^2, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa 4.1.2. Örnek'ten

bilindiği gibi $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$ ve herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho$ için $\rho^\sigma(f) = \|f\|_{L_p}^p$ olduğu biliniyor (Bardaro ve ark., 2003). Şimdi $\mathcal{B} = C_1$ Cesàro matrisi seçilsin. Bu durumda C_1 – istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır. Kolaylıkla görülebilir ki $L_1(I)$ üzerinde (g_k) fonksiyon dizisi $g=0$ 'a istatistiksel modüler yakınsak

olmamasına karşın $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x=0, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ skale fonksiyonuna göre istatistiksel

relatively modüler yakınsaktır. Gerçekten bazı $\lambda_0 > 0$ 'lar için $p=1$ seçimiyle $\rho^\sigma(f) = \|f\|_{L_1}$ elde edilir ve

$$\rho(\lambda_0(g_k - g)) = \|\lambda_0(g_k - g)\|_{L_1} = \begin{cases} 2\lambda_0, & k = n^2, \\ \frac{\lambda_0 k}{2}, & k \neq n^2, \end{cases} \quad n=1, 2, \dots, \quad (4.2.2)$$

ve dolayısıyla $\lim_k \frac{\lambda_0 k}{2} \neq 0$ olduğundan $st\text{-}\lim_k \|\lambda_0(g_k - g)\|_{L_1} \neq 0$ dır. Şimdi σ skale fonksiyonunu kullanarak

$$\rho\left(\lambda_0\left(\frac{g_k - g}{\sigma}\right)\right) = \left\|\lambda_0\left(\frac{g_k - g}{\sigma}\right)\right\|_{L_1} = \begin{cases} \frac{2\lambda_0}{3}, & k = n^2 \\ \frac{\lambda_0}{4k}, & k \neq n^2 \end{cases}, \quad n=1, 2, \dots,$$

ve $\lim_k \frac{\lambda_0}{4k} = 0$ olduğundan $st\text{-}\lim_k \left\|\lambda_0\left(\frac{g_k - g}{\sigma}\right)\right\|_{L_1} = 0$ olduğu görülür.

Şimdi yukarıdaki yakınsaklık kullanılarak modüler uzaylarda aşağıdaki Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanacaktır.

ρ , $X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler, $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^p(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Kabul edilsin ki X_T , $C^\infty(I)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve $\sigma \in X(I)$,

$|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan sınırsız bir fonksiyon olmak üzere $T = (T_k)$, D 'den $X(I)$ 'ya tanımlı her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif P sabiti için

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda \left(\frac{T_k h}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h), \quad (4.2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

4.2.3. Teorem: $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris ve ρ , $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N -quasi yarı konveks bir modüler ve $T = (T_k)$, D 'den $X(I)$ 'ya (4.2.3) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Diğer bir yandan $\sigma_i(x)$, $|\sigma_i| \geq a_i > 0$ ($i=0,1,2$) şartını sağlayan sınırsız bir fonksiyon olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i=0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{T_k e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0 \quad (i=0, 1, 2), \quad (4.2.4)$$

sağlansın. Ayrıca $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için, $\sigma(x) = \max \{|\sigma_i(x)|, i=0,1,2\}$ olmak üzere

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0 \left(\frac{T_k f - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \quad (4.2.5)$$

dır.

İspat: İlk olarak $g \in C(I) \cap D$ ve her $\mu > 0$ için

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\mu \left(\frac{T_k g - g}{\sigma} \right) \right) = 0, \quad (4.2.6)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(I) \cap D$ olsun. g , I 'da sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in I$ için

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon, \quad (4.2.7)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|t - x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in I$ için

$$M := \sup_{x \in I} |g(x)| \text{ olmak üzere}$$

$$|g(t) - g(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2, \quad (4.2.8)$$

elde edilir. (4.2.7) ve (4.2.8)'den

$$|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t - x)^2,$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. T_k lineer ve pozitif olduğundan, her $x \in I$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$|T_k(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon T_k(e_0; x) + M |T_k(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2} T_k((t - x)^2; x),$$

elde edilir. $c := \max |x|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |T_k(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2 \right\} |T_k(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\quad + \frac{4M}{\delta^2} c |T_k(e_1; x) - e_1(x)| \\ &\quad + \frac{2M}{\delta^2} |T_k(e_2; x) - e_2(x)|. \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ denirse

$$|T_k(g;x) - g(x)| \leq \varepsilon + K \left\{ |T_n(e_0;x) - e_0(x)| + |T_n(e_1;x) - e_1(x)| + |T(e_2;x) - e_2(x)| \right\},$$

ve son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılırsa

$$\left| \frac{T_k(g;x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \frac{K}{|\sigma(x)|} \left\{ |T_k(e_0;x) - e_0(x)| + |T_k(e_1;x) - e_1(x)| + |T_k(e_2;x) - e_2(x)| \right\},$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten her $\mu > 0$ için,

$$\mu \left\{ \left| \frac{T_k(g;x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \right\} \leq \frac{\mu\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \mu K \left\{ \left| \frac{T_k(e_0;x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| + \left| \frac{T_k(e_1;x) - e_1(x)}{\sigma_1(x)} \right| + \left| \frac{T_k(e_2;x) - e_2(x)}{\sigma_2(x)} \right| \right\},$$

olur. Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\rho \left(\mu \left(\frac{T_k g - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{\mu\varepsilon}{\sigma} + \mu K \left(\frac{T_k e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) + \mu K \left(\frac{T_k e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) + \mu K \left(\frac{T_k e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right),$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\begin{aligned} \rho \left(\mu \left(\frac{T_k g - g}{\sigma} \right) \right) &\leq \rho \left(\frac{4\mu\varepsilon}{\sigma} \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_k e_0 - e_0}{\sigma_0} \right) \right) + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_k e_1 - e_1}{\sigma_1} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(4\mu K \left(\frac{T_k e_2 - e_2}{\sigma_2} \right) \right) \end{aligned}$$

olup, ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\begin{aligned} \rho\left(\mu\left(\frac{T_k g - g}{\sigma}\right)\right) &\leq N\varepsilon\rho\left(\frac{4\mu N}{\sigma}\right) + \rho\left(4\mu K\left(\frac{T_k e_0 - e_0}{\sigma_0}\right)\right) + \rho\left(4\mu K\left(\frac{T_k e_1 - e_1}{\sigma_1}\right)\right) \\ &\quad + \rho\left(4\mu K\left(\frac{T_k e_2 - e_2}{\sigma_2}\right)\right) \end{aligned}$$

bulunur. Verilmiş bir $r > 0$ için bir $\varepsilon \in (0, 1]$ seçilsin öyle ki $N\varepsilon\rho\left(\frac{4\mu N}{\sigma}\right) < r$ olsun.

Şimdi $i = 0, 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$\begin{aligned} G_k &:= \left\{ k : \rho\left(\mu\left(\frac{T_k g - g}{\sigma}\right)\right) \geq r \right\}, \\ G_{k,i} &:= \left\{ n : \rho\left(4\mu K\left(\frac{T_k e_i - e_i}{\sigma_i}\right)\right) \geq \frac{r - N\varepsilon\rho\left(\frac{4\mu N}{\sigma}\right)}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Buradan $G_k = \bigcup_{i=0}^2 G_{k,i}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$\delta_{\mathcal{F}}(G_k) \leq \sum_{i=0}^2 \delta_{\mathcal{F}}(G_{k,i}),$$

yazılabilir. (4.2.4) hipotezi kullanılarak $\delta_{\mathcal{F}}(G_k) = 0$ elde edilir, böylece (4.2.6) gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.2.6) eşitliği $C^\infty(I) \subset C(I) \cap D$ olduğundan her $g \in C^\infty(I)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(I) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan, ρ modülerinin $X(I)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu görülebilir. ρ modülerinin bu özellikleri kullanılarak $C^\infty(I)$ uzayının $L^p(I)$ 'da modüler yoğun olduğu görülür yani $\overline{C^\infty(I)} = L^p(I)$ eşitliği vardır (Mantellini, 1998; Bardaro ve ark.,

2003). Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için $\lim_k \rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) = 0$ olacak şekilde bir $(g_k) \subset C^\infty(I)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_k - f)) < \varepsilon \quad (4.2.9)$$

yazılır. Diğer taraftan, T_k operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden her $x \in I$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_0^* |T_k(f; x) - f(x)| \leq \lambda_0^* |T_k(f - g_{k_0}; x)| + \lambda_0^* |T_k(g_{k_0}; x) - g_{k_0}(x)| + \lambda_0^* |g_{k_0}(x) - f(x)|$$

olup, son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılıp, elde edilen eşitsizliğe ρ modülleri uygulanırsa ve ρ 'nun monotonluğu kullanılırsa

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_k f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k(f - g_{k_0})}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{g_{k_0} - f}{\sigma}\right)\right).$$

Böylelikle $|\sigma| \geq a > 0$ ($a = \max\{a_i : i = 0, 1, 2\}$) olduğu göz önünde bulundurularak ve yine ρ 'nun monoton olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_k f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad + \rho\left(\frac{3\lambda_0^*}{a}(g_{k_0} - f)\right), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

olur. Böylece, (4.2.9) ve (4.2.10)'dan

$$\rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_k f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \quad (4.2.11)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.2.11)'den her iki tarafın $k \rightarrow \infty$ için $\mathcal{B}$ - istatistiksel üst limiti alınarak ve ayrıca $g_{k_0} \in C^\infty(I)$ olması kullanılarak, (4.2.3)'ten

$$\begin{aligned} st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_k f - f}{\sigma}\right)\right) &\leq \varepsilon + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k(g_{k_0} - f)}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \\ &\leq \varepsilon + P\rho\left(3\lambda_0^*\left(f - g_{k_0}\right)\right) + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

ve buradan

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_k f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon(P+1) + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right), \quad (4.2.12)$$

elde edilir. (4.2.6)'dan $st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0$ olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(3\lambda_0^*\left(\frac{T_k g_{k_0} - g_{k_0}}{\sigma}\right)\right) = 0, \quad (4.2.13)$$

elde edilir. (4.2.12) ve (4.2.13)'ten

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho\left(\lambda_0^*\left(\frac{T_k f - f}{\sigma}\right)\right) \leq \varepsilon(P+1),$$

sonucuna varılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_k f - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

bulunur. Dahası, tüm $k \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_k f - f}{\sigma} \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{T_k f - f}{\sigma} \right) \right) = 0,$$

olduğu kolaylıkla görülür, bu ise ispatı tamamlar.

4.2.4. Teorem: $\mathcal{B} := (b_{lk}), T = (T_k), \rho$ ve σ 4.2.3. Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- a) Her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{T_k e_i - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0,$
- b) Her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(I)$ ve her $\lambda > 0$ için $st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{T_k f - f}{\sigma} \right) \right) = 0.$

Eğer σ skale fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olarak seçilirse (4.2.3) koşulu denklem (2.5.2)'ye indirgenir. Yani her $h \in X_T, \lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho(\lambda(T_k h)) \leq P\rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.2.3. Teorem'den Karakuş, Demirci ve Duman (2010) tarafından elde edilen 2.5.9. Teorem elde edilir. Skale fonksiyonunun bu özel seçiminin yanı sıra $\mathcal{B} = I$ birim matrisi seçilirse, (4.2.3) koşulu denklem (2.5.1)'e indirgenir. Yani her $h \in X_T, \lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_k \rho(\lambda(T_k h)) \leq P\rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.2.3. Teorem'den Bardaro ve Mantellini (2007) tarafından elde edilen 2.5.8. Teorem elde edilir. Son olarak yalnızca $\mathcal{B} = I$ seçimi yapılırsa (4.2.3) koşulu denklem (4.1.2)'ye indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_k \rho \left(\lambda \left(\frac{T_k h}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.2.3. Teorem'den 4.1.3. Teorem elde edilir.

Şimdi 4.2.3. Teorem'in 2.5.8. , 2.5.9 ve 4.1.3. Teorem'den kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin.

4.2.5. Örnek: $I = [0,1]$ ve φ , ρ^φ ve $L_\varphi^\rho(I)$, 4.1.5. Örnek'teki gibi olsun. Ayrıca $\mathcal{B}$ matrisi birinci mertebeden Cesàro matrisi olsun. Buradan $x \in I$ için

$$U_k(f; x) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n} (k+1)^{\frac{(n+1)(k+1)}{n/(k+1)}} \int_{n/(k+1)}^{\frac{(n+1)(k+1)}{n/(k+1)}} f(t) dt, \quad (4.2.14)$$

ile tanımlanan $L_\varphi^\rho(I)$ uzayı üzerinde $U := (U_k)$ Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. U_k , $L_\varphi^\rho(I)$ Orlicz uzayını $L_\varphi^\rho(I)$ 'ye dönüştürür. Dahası, $X_U := L_\varphi^\rho(I)$ seçilmesiyle (2.5.1) özelliği gerçekleşir. Buradan, 2.5.8. Teorem'den, biliniyor ki, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_U$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^\rho(I)$ için $(U_k f)$, f 'ye modüler yakınsaktır. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$ olduğu ve $p=1$ seçimiyle $\rho^\varphi(f) = \|f\|_{L_1}$ elde edildiği daha önce de belirtilmişti.

Şimdi U_k operatörleri kullanılarak, $L_1(I)$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin $V := (V_k)$ dizisi, (g_k) , (4.2.1) denklemi ile verilen dizi olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın. $f \in L_1(I)$, $x \in [0,1]$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$V_k(f; x) = (1 + g_k(x))U_k(f; x). \quad (4.2.15)$$

Şimdi $\mathcal{B} = C_1$ Cesàro matrisi olarak seçilsin. C pozitif sabiti için

$\|U_j(f; x)\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}$ (Ditzian ve Totik, 1987) eşitsizliğinden ve

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \text{ olmak üzere her } \lambda > 0 \text{ için}$$

$$st - \limsup_k \left\| \lambda \left(\frac{V_k f}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \leq C \|\lambda f\|_{L_1},$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi her $\lambda > 0$ için $\sigma_i(x) = \sigma(x)$ ($i = 0, 1, 2$) seçimiyle

$$st - \lim_k \left\| \lambda \left(\frac{V_k e_i - e_i}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.2.16)$$

olduğu gösterilsin. Bilindiği üzere,

$$U_k(e_0; x) = e_0(x),$$

$$U_k(e_1; x) = \frac{kx}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)},$$

$$U_k(e_2; x) = \frac{k(k-1)x^2}{(k+1)^2} + \frac{2kx}{(k+1)^2} + \frac{1}{3(k+1)^2},$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan, her $\lambda > 0$ ve $i = 0$ için

$$\left\| \lambda \left(\frac{V_k(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \left(\frac{1 + g_k(x) - 1}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \left(\frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1},$$

olduğu görülür ve (g_k) dizisinin tanımından

$$\left\| \lambda \left(\frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = \begin{cases} \frac{2\lambda}{3}, & k = n^2, \\ \frac{\lambda}{4k}, & k \neq n^2, \end{cases} \quad n=1, 2, \dots, \quad (4.2.17)$$

elde edilir. $\lim_k \frac{\lambda}{4k} = 0$ olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$st - \lim_k \left\| \lambda \left(\frac{V_k e_0 - e_0}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

olup (4.2.16) $i = 0$ için sağlanır.

Ayrıca $i = 1$ için

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \left(\frac{V_k(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \left(\frac{(1 + g_k(x))U_k(e_1; x)}{\sigma(x)} - \frac{x}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} \\ &\leq \left\| \lambda \frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \left(\frac{kx}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)} \right) \right\|_{L_1} + \left\| \lambda \frac{x - 2x^2}{2(k+1)} \right\|_{L_1} \\ &< \left\| \lambda \frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \right\|_{L_1} + \frac{\lambda}{2(k+1)}, \end{aligned}$$

olur. (4.2.17)'den $st - \lim_k \left\| \lambda \left(\frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = 0$ ve $\lim_k \frac{\lambda}{2(k+1)} = 0$ olduğundan

$$st - \lim_k \left\| \lambda \left(\frac{V_k e_1 - e_1}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

elde edilir, (4.2.16) $i = 1$ için de sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned}
\left\| \lambda \left(\frac{V_k(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \frac{(1 + g_k(x))U_k(e_2; x)}{\sigma(x)} - \frac{\lambda x^2}{\sigma(x)} \right\|_{L_1} \\
&\leq \left\| \lambda \frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \left(\frac{k(k-1)x^2}{(k+1)^2} + \frac{2kx}{(k+1)^2} + \frac{1}{3(k+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\
&\quad + \left\| \lambda \left(\frac{(3k+1)x^3}{(k+1)^2} + \frac{2kx^2}{(k+1)^2} + \frac{x}{3(k+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\
&< 3 \left\| \lambda \frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \right\|_{L_1} + \frac{3\lambda}{k+1} + \frac{2\lambda k}{(k+1)^2} + \frac{\lambda}{3(k+1)^2},
\end{aligned}$$

olup, yine (4.2.17)'den $st - \lim_k \left\| \lambda \left(\frac{g_k(x)}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1} = 0$, $\lim_k \frac{3\lambda}{k+1} = 0$, $\lim_k \frac{2\lambda k}{(k+1)^2} = 0$ ve

$\lim_k \frac{\lambda}{3(k+1)^2} = 0$ olduğundan

$$st - \lim_k \left\| \lambda \left(\frac{V_k e_2 - e_2}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

elde edilir, (4.2.16)'nın $i = 2$ için de sağlandığı görülür.

O halde hipotezden (4.2.15) ile tanımlanan $V := (V_k)$ dizisi 4.2.3. Teorem'in tüm koşullarını sağlar. Bu nedenle her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_V$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_p(I)$ ve bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st - \lim_k \left\| \lambda_0 \left(\frac{V_k f - f}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} = 0,$$

elde edilir. Buna rağmen herhangi $\lambda > 0$ için $\left\| \lambda \left(\frac{V_k e_0 - e_0}{\sigma(x)} \right) \right\|_{L_1}$, farklı limit noktaları

olan iki alt diziye sahip olduğundan $(V_k f)$ 'nin f 'ye relatively modüler yakınsak

olmadığı kolaylıkla söylenir. Dolayısıyla, 4.1.3. Teorem $V := (V_k)$ operatörü için sağlanmaz. Ayrıca denklem (4.2.2)'den

$$\|\lambda(V_k e_0 - e_0)\|_{L_1} = \|\lambda g_k(x)\|_{L_1} = \begin{cases} 2\lambda_0, & k = n^2, \\ \frac{\lambda_0 k}{2}, & k \neq n^2, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

ve $\lim_k \frac{\lambda_0 k}{2} \neq 0$ olup 2.5.9. Teorem ve dolayısıyla 2.5.8. Teorem $V := (V_k)$ operatörü için sağlanmaz. Yani $(V_k f)$, f 'ye istatistiksel modüler yakınsak ve modüler yakınsak değildir.

4.3. Modüler Uzaylarda Relative A – Toplam Süreci Yardımıyla $\mathcal{B}$ – İstatistiksel Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde modüler uzaylarda relative A – toplam süreci kavramı tanıtılarak, bu kavram vasıtasıyla istatistiksel Korovkin tipi teorem verilecek ve daha genel sonuçlar elde edilecektir.

4.3.1. Tanım: $A := (A^{(n)})$ negatif olmayan, sonsuz ve reel terimli matris dizisi olsun. ρ , $X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu bir modüler ve D kümesi $C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$ kapsamasını sağlayan bir küme olsun. Kabul edilsin ki $T = (T_j)$, D 'den $X(I)$ 'ya tanımlı ve her $f \in D$ ve her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$A_{k,n}^T(f) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j f,$$

serisi Lebesgue ölçüsüne göre hemen her yerde mutlak yakınsak olsun. Eğer her $f \in D$ için $(T_j f)$, f 'ye relatively A – toplanabilir (ρ modülerine göre) ise yani, bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_k \rho \left(\left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0 \text{ (} n \text{'ye göre düzgün),}$$

olacak şekilde $|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $\sigma \in X(I)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa ise (T_j) pozitif lineer operatörler dizisi D üzerinde bir relative A – toplam sürecidir denir.

Şimdi kabul edilsin ki $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris, $\sigma \in X(I)$, $|\sigma(x)| \neq 0$ koşulunu sağlayan sınırsız bir fonksiyon ve $X_T, C^\infty(I)$ 'ı içeren $X_T \subset D$ alt kümesi ve her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve bir mutlak pozitif P sabiti için

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{k,n}^T(h)}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h) \text{ (} n \text{'ye göre düzgün),} \quad (4.3.1)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

4.3.2. Teorem: $A := (A^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz bir matris dizisi ve ρ , $X(I)$ üzerinde monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N – quasi yarı konveks bir modüler ve $T = (T_j)$, D ’den $X(I)$ ’ya (4.3.1) özelliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Ayrıca $\mathcal{B} := (b_{lk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris ve diğer bir yandan $\sigma_i(x)$, $|\sigma_i| \geq a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$) şartını sağlayan sınırsız bir fonksiyon olsun. Kabul edilsin ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{k,n}^T(e_i) - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0 \text{ (} n \text{'ye göre düzgün).} \quad (4.3.2)$$

Şimdi $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Buradan bazı $\lambda_0 > 0$ için, $\sigma(x) = \max \{|\sigma_i(x)|, i = 0, 1, 2\}$ olmak üzere

$$\text{st}_{\mathcal{S}}\text{-}\lim_k \rho\left(\lambda_0\left(\frac{A_{k,n}^T(f)-f}{\sigma}\right)\right)=0, \quad (n\text{'ye göre düzgün}), \quad (4.3.3)$$

dır.

İspat: İlk olarak $g \in C(I) \cap D$ ve her $\eta > 0$ için

$$\text{st}_{\mathcal{S}}\text{-}\lim_k \rho\left(\eta\left(\frac{A_{k,n}^T(g)-g}{\sigma}\right)\right)=0, \quad (n\text{'ye göre düzgün}), \quad (4.3.4)$$

olduğu gösterilsin. Bunun için $g \in C(I) \cap D$ olsun. g , I 'da sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $|t-x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in I$ için

$$|g(t)-g(x)| < \varepsilon, \quad (4.3.5)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine $|t-x| \geq \delta$ koşulunu sağlayan tüm $t, x \in I$ için

$M := \sup_{x \in I} |g(x)|$ olmak üzere

$$|g(t)-g(x)| \leq \frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2, \quad (4.3.6)$$

elde edilir. (4.3.5) ve (4.3.6)'dan

$$|g(t)-g(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2,$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. T_j lineer ve pozitif olduğundan, her $x \in I$ için

$c := \max |x|$ olmak üzere

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g; x) - g(x) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g(t); x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g(x); x) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g(x); x) - g(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g(t) - g(x); x) + g(x) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(|g(t) - g(x)|; x) + |g(x)| \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2; x\right) + |g(x)| \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j((t-x)^2; x) + M \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + M) \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| + \frac{2M}{\delta^2} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t^2; x) - x^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - 2x \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t; x) - x \right) + x^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right) \right] \\
&\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2} \right) \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| + \frac{4Mc}{\delta^2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t; x) - x \right| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t^2; x) - x^2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $K := \max \left\{ \varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ denirse

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g; x) - g(x) \right| &\leq \varepsilon + K \left\{ \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| + \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t; x) - x \right| \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t^2; x) - x^2 \right) \right\},
\end{aligned}$$

ve son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılırsa

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} + \frac{K}{|\sigma(x)|} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1 \right| + \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t; x) - x \right| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t^2; x) - x^2 \right) \right\}.$$

Bu son eşitsizlikten her $\eta > 0$ için,

$$\eta \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g; x) - g(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \frac{\eta \varepsilon}{|\sigma(x)|} + \eta K \left\{ \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(1; x) - 1}{\sigma_0(x)} \right| + \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t; x) - x}{\sigma_1(x)} \right| + \left| \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(t^2; x) - x^2}{\sigma_2(x)} \right| \right\},$$

olur. Şimdi, eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\rho \left(\eta \left(\frac{A_{k,n}^T(g) - g}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(\frac{\eta \varepsilon}{\sigma} + \eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_0) - e_0}{\sigma_0} \right) + \eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_1) - e_1}{\sigma_1} \right) + \eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_2) - e_2}{\sigma_2} \right) \right),$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$\begin{aligned} \rho \left(\eta \left(\frac{A_{k,n}^T(g) - g}{\sigma} \right) \right) &\leq \rho \left(\frac{4\eta \varepsilon}{\sigma} \right) + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_0) - e_0}{\sigma_0} \right) \right) + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_1) - e_1}{\sigma_1} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_2) - e_2}{\sigma_2} \right) \right), \end{aligned}$$

elde edilir. ρ , N -quasi yarı konveks ve kuvvetli sonlu olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\begin{aligned} \rho \left(\eta \left(\frac{A_{k,n}^T(g) - g}{\sigma} \right) \right) &\leq N\varepsilon \rho \left(\frac{4\eta N}{\sigma} \right) + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_0) - e_0}{\sigma_0} \right) \right) + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_1) - e_1}{\sigma_1} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_2) - e_2}{\sigma_2} \right) \right), \end{aligned}$$

bulunur. Verilmiş bir $r > 0$ için bir $\varepsilon \in (0,1]$ seçilsin öyle ki $N\varepsilon \rho \left(\frac{4\eta N}{\sigma} \right) < r$ olsun.

Şimdi $i = 0,1,2$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$G_j := \left\{ j : \rho \left(\eta \left(\frac{A_{k,n}^T(g) - g}{\sigma} \right) \right) \geq r \right\},$$

$$G_{j,i} := \left\{ j : \rho \left(4\eta K \left(\frac{A_{k,n}^T(e_i) - e_i}{\sigma_i} \right) \right) \geq \frac{r - N\varepsilon \rho \left(\frac{4\eta N}{\sigma} \right)}{3} \right\}.$$

Buradan $G_j = \bigcup_{i=0}^2 G_{j,i}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$\delta_{\mathcal{F}}(G_j) \leq \sum_{i=0}^2 \delta_{\mathcal{F}}(G_{j,i}),$$

yazılabilir. (4.3.2) hipotezi kullanılarak $\delta_{\mathcal{F}}(G_j) = 0$ elde edilir. Böylece (4.3.4) gösterilmiş olur. Ayrıca, (4.3.4) eşitliği $C^\infty(I) \subset C(I) \cap D$ olduğundan her $g \in C^\infty(I)$ için de sağlanır. Şimdi $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $\mu(I) < \infty$ ve ρ , kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan, ρ modülerinin $X(I)$ üzerinde mutlak sonlu olduğu görülebilir. ρ modülerinin bu özellikleri kullanılarak $C^\infty(I)$ uzayının $L^\rho(I)$ 'da modüler yoğun olduğu görülür yani $\overline{C^\infty(I)} = L^\rho(I)$ eşitliği vardır (Mantellini, 1998; Bardaro ve ark., 2003). Yani, bazı $\lambda_0^* > 0$ için

$$\lim_j \rho(3\lambda_0^*(g_j - f)) = 0,$$

olacak şekilde bir $(g_j) \subset C^\infty(I)$ dizisi vardır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için bir $j_0 = j_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır öyle ki her $j \geq j_0$ için

$$\rho(3\lambda_0^*(g_j - f)) < \varepsilon \quad (4.3.7)$$

olur. Diğer taraftan, T_j operatörlerinin lineerliğinden ve pozitifliğinden her $x \in I$ ve $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \lambda_0^* \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(f; x) - f(x) \right| &\leq \lambda_0^* \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(f - g_{j_0}; x) \right| + \lambda_0^* \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} T_j(g_{j_0}; x) - g_{j_0}(x) \right| \\ &\quad + \lambda_0^* |g_{j_0}(x) - f(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{|\sigma(x)|}$ ile çarpılıp, elde edilen eşitsizliğe ρ

modüleri uygulanırsa ve ρ 'nun monotonluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) &\leq \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f - g_{j_0})}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{g_{j_0} - f}{\sigma} \right) \right) \end{aligned}$$

yazılır. Böylelikle $|\sigma| \geq a > 0$ ($a = \max\{a_i : i = 0, 1, 2\}$) olduğu göz önünde bulundurularak ve yine ρ 'nun monoton olduğu dikkate alınır

$$\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) \leq \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f - g_{j_0})}{\sigma} \right) \right) + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right)$$

$$+ \rho \left(\frac{3\lambda_0^*}{a} (g_{j_0} - f) \right) \quad (4.3.8)$$

elde edilir. Böylece, (4.3.7) ve (4.3.8)'den

$$\begin{aligned} \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) &\leq \varepsilon + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f - g_{j_0})}{\sigma} \right) \right) \\ &\quad + \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Dolayısıyla, (4.3.9)'da her iki tarafın $k \rightarrow \infty$ için $\mathcal{B}$ -istatistiksel üst limiti alınır, ayrıca $g_{j_0} \in C^\infty(I)$ olması kullanılarak ve (4.3.1) göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) &\leq \varepsilon + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0} - f)}{\sigma} \right) \right) \\ &\quad + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right) \\ &\leq \varepsilon + P \rho(3\lambda_0^*(f - g_{j_0})) \\ &\quad + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) &\leq \varepsilon(P+1) \\ &\quad + st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

elde edilir. (4.3.4)'ten,

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right) = 0 \text{ (} n \text{'ye göre düzgün),}$$

olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ (} n \text{'ye göre düzgün),} \quad (4.3.11)$$

elde edilir. (4.3.10) ve (4.3.11)'den

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(3\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(g_{j_0}) - g_{j_0}}{\sigma} \right) \right) \leq \varepsilon(P+1),$$

sonucuna varılır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0, \text{ (} n \text{'ye göre düzgün),}$$

bulunur. Dahası, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right)$ pozitif olduğundan,

$$st_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda_0^* \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0 \text{ (} n \text{'ye göre düzgün),}$$

olduğu kolaylıkla görülür, bu ise ispatı tamamlar.

4.3.3. Teorem: $A := (A^{(n)})$ negatif olmayan reel terimli sonsuz bir matris dizisi,

$\mathcal{B} := (b_{ik})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilir matris ve $T = (T_j)$, ρ ve σ , 4.3.2.

Teorem'deki gibi olsun. Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlıyorsa, aşağıdaki ifadeler denktir:

- a) Her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{k,n}^T(e_i) - e_i}{\sigma_i} \right) \right) = 0$ (n 'ye göre düzgün),
- b) Her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(I)$ ve her $\lambda > 0$ için $\text{st}_{\mathcal{B}} - \lim_k \rho \left(\lambda \left(\frac{A_{k,n}^T(f) - f}{\sigma} \right) \right) = 0$ (n 'ye göre düzgün).

Eğer σ skale fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olarak seçilirse (4.3.1) koşulu denklem (2.5.3)'e indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \limsup_k \rho \left(\lambda \left(A_{k,n}^T(h) \right) \right) \leq P \rho(\lambda h) \quad (n \text{'ye göre düzgün}),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.3.2. Teorem'den Orhan ve Demirci (2014) tarafından elde edilen 2.5.11. Teorem elde edilir. Skale fonksiyonunun bu özel seçiminin yanı sıra $\mathcal{B} = I$ ve $A^{(n)} = I$, ($n \geq 1$) seçilirse, (4.3.1) koşulu denklem (2.5.1)'ye indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_j \rho \left(\lambda (T_j h) \right) \leq P \rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.3.2. Teorem'den Bardaro ve Mantellini (2007) tarafından elde edilen 2.5.8. Teorem elde edilir. Ayrıca σ skale fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olarak ve $A^{(n)} = I$, ($n \geq 1$) seçimi yapılırsa (4.3.1) koşulu denklem (2.5.2)'ye indirgenir. Yani her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\text{st}_{\mathcal{B}} - \limsup_j \rho \left(\lambda (T_j h) \right) \leq P \rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.3.2. Teorem'den Karakuş, Demirci ve Duman, (2010) tarafından elde edilen 2.5.9. Teorem elde edilir.

Bunların yanısıra eğer $\mathcal{B} = I$ ve $A^{(n)} = I$, $(n \geq 1)$ seçilirse, (4.3.1) koşulu her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$\limsup_j \rho \left(\lambda \left(\frac{T_j h}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.3.2. Teorem'den 4.1.3. Teorem elde edilir. Ayrıca eğer yalnız $A^{(n)} = I$, $(n \geq 1)$ seçilirse, (4.3.1) koşulu her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak bir pozitif P sabiti için

$$st_{\mathcal{B}} - \limsup_j \rho \left(\lambda \left(\frac{T_j h}{\sigma} \right) \right) \leq P \rho(\lambda h),$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda 4.3.2. Teorem'den 4.2.3. Teorem elde edilir

Şimdi 4.3.2. Teorem'in 2.5.8., 2.5.9., 2.5.11. Teorem'lerden kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin.

4.3.4. Örnek: $I = [0,1]$ ve φ , ρ^φ ve $L_\varphi^\rho(I)$ 4.1.5. Örnek'teki gibi olsun.

Buradan $x \in I$ için

$$U_j(f; x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \int_{k/(j+1)}^{(k+1)/(j+1)} f(t) dt, \quad (4.3.12)$$

ile tanımlanan $L_\varphi^\rho(I)$ uzayı üzerinde $U := (U_j)$ Bernstein-Kantorovich operatörü göz önüne alınsın. U_j , $L_\varphi^\rho(I)$ Orlicz uzayını $L_\varphi^\rho(I)$ 'ye dönüştürür. Dahası, $X_U := L_\varphi^\rho(I)$ seçilmesiyle (2.5.1) özelliği gerçekleşir. Buradan, 2.5.8. Teorem'den, biliniyor ki, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_U$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_p(I)$ için $(U_j f)$, f 'ye modüler yakınsaktır. Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = x^p$ alınırsa $L_\varphi^\rho(I) = L_p(I)$ olduğu ve $p = 1$ seçimiyle $\rho^\varphi(f) = \|f\|_{L_1}$ elde edildiği daha önce de belirtilmişti.

Şimdi $\mathcal{B} = C_1 = (c_{lk})$, bir boyutlu Cesàro matrisi alınsın. Bu durumda C_1 – istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık çakışır ve st – lim ile gösterilir. Ayrıca her

$j \in \mathbb{N}$ için $g_j : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g_j(x) = \begin{cases} 3, & j = k^2, \\ \frac{j^4 x^2}{1 + j^2 x}, & 0 < x < \frac{1}{j}, j \neq k^2, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0, & x = 0 \text{ veya } \frac{1}{j} \leq x \leq 1, j \neq k^2, \end{cases} \quad (4.3.13)$$

şeklinde tanımlansın. $L_1(I)$ üzerinde (g_j) fonksiyon dizisi $g = 0$ 'a

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

skale fonksiyonuna göre istatistiksel relatively modüler yakınsaktır. Gerçekten bazı $\lambda_0 > 0$ lar için $p=1$ seçimiyle $\rho^\sigma(f) = \|f\|_{L_1}$ elde edilir ve σ skale fonksiyonunu kullanarak

$$\rho\left(\lambda_0\left(\frac{g_j - g}{\sigma}\right)\right) = \left\| \lambda_0\left(\frac{g_j - g}{\sigma}\right) \right\|_{L_1} = \begin{cases} \lambda_0, & j = k^2, \\ \frac{\lambda_0}{j^6} \left(\frac{j^4}{4} + \frac{j^3}{3} - \frac{j^2}{2} + j - \ln(j+1) \right), & j \neq k^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ve $\lim_j \frac{\lambda_0}{j^6} \left(\frac{j^4}{4} + \frac{j^3}{3} - \frac{j^2}{2} + j - \ln(j+1) \right) = 0$ olduğundan

$$st - \lim_j \left\| \lambda_0\left(\frac{g_j - g}{\sigma}\right) \right\|_{L_1} = 0, \quad (4.3.14)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\rho(\lambda_0(g_j - g)) = \|\lambda_0(g_j - g)\|_{L_1} = \begin{cases} 3\lambda_0, & j = k^2, \\ \lambda_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j} + \frac{\ln(1+j)}{j^2} \right), & j \neq k^2, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots,$$

olduğundan (g_j) fonksiyon dizisi $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel modüler yakınsak değildir. Bunun yanı sıra kabul edilsin ki $A := (A^{(n)}) = (a_{kj}^{(n)})$, genel terimi

$$a_{kj}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & n \leq j \leq n+k, \quad (n=1, 2, \dots), \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ile tanımlı bir matris dizisi olsun. Şimdi U_j operatörleri kullanılarak, $L_1(I)$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin $V := (V_j)$ dizisi, (g_j) , (4.3.13) ile verilen dizi olmak üzere $f \in L_1(I)$, $x \in [0, 1]$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$V_j(f; x) = (1 + g_j(x))U_j(f; x), \quad (4.3.15)$$

şeklinde tanımlansın. C pozitif sabiti için $\|U_j(f; x)\|_{L_p} \leq C\|f\|_{L_p}$ (Ditzian ve Totik,

1987) eşitsizliğinden ve $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ olmak üzere her $\lambda > 0$, $h \in X_V$ ve

mutlak pozitif bir P sabiti için

$$\limsup_k \left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} V_j h}{\sigma} \right\|_{L_1} \leq P \|\lambda h\|_{L_1} \quad (n' \text{ ye göre düzgün}),$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi her $\lambda > 0$ ve $\sigma_i(x) = \sigma(x)$ ($i = 0, 1, 2$) seçimiyle

$$st - \lim_k \left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} V_j e_i - e_i}{\sigma} \right\|_{L_1} = 0 \quad (n \text{ 'ye göre düzgün}), \quad (4.3.16)$$

olduğu $i = 0, 1, 2$ için gösterilsin. Biliniyor ki,

$$U_j(e_0; x) = e_0(x),$$

$$U_j(e_1; x) = \frac{jx}{j+1} + \frac{1}{2(j+1)},$$

$$U_j(e_2; x) = \frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} + \frac{2jx}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2},$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan, her $\lambda > 0$ ve $i = 0$ için

$$\left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} (1 + g_j) U_j e_0 - e_0}{\sigma} \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \left(\frac{\sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} (1 + g_j) - 1}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left\| \lambda \frac{g_j}{\sigma} \right\|_{L_1},$$

olduğu görülür. Bilindiği üzere bir dizi yakınsak ise aritmetik ortalaması da aynı değere yakınsar. Bu nedenle istatistiksel yakınsaklık tanımını ve (4.3.14)'ten

$$st - \lim_k \left(\sup_n \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left\| \lambda \frac{g_j}{\sigma} \right\|_{L_1} \right) \right) = 0, \quad (4.3.17)$$

olup (4.3.16) $i = 0$ için sağlanır.

Ayrıca $i = 1$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} v_j e_1 - e_1}{\sigma} \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \left(\sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} \frac{(1+g_j)}{\sigma} U_j e_1 - \frac{e_1}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \\
&\leq \left\| \lambda x^3 \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{j+1} - 1 \right) \right\|_{L_1} + \left\| \lambda x^2 \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{2(j+1)} \right) \right\|_{L_1} \\
&\quad + \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left(\left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \frac{jx}{j+1} \right) \right\|_{L_1} + \left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \frac{1}{2(j+1)} \right) \right\|_{L_1} \right) \\
&< \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{j+1} - 1 \right) \|\lambda x^3\|_{L_1} + \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{2(j+1)} \right) \|\lambda x^2\|_{L_1} \\
&\quad + 2 \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \right) \right\|_{L_1}
\end{aligned}$$

olur. $st - \lim_k \left(\sup_n \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j}{j+1} - 1 \right) \right) = 0$ ve $st - \lim_k \left(\sup_n \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{2(j+1)} \right) \right) = 0$ olup

(4.3.17)'den

$$st - \lim_k \left(\sup_n \left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} v_j e_1 - e_1}{\sigma} \right\|_{L_1} \right) = 0,$$

elde edilir, (2.1.16) $i = 1$ için de sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned}
\left\| \lambda \left(\frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} V_j e_2 - e_2}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} &= \left\| \lambda \left(\sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} \frac{(1+g_j)}{\sigma} U_j e_2 - \frac{e_2}{\sigma} \right) \right\|_{L_1} \\
&\leq \left\| \lambda x^4 \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right) \right\|_{L_1} + \left\| \lambda x^3 \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{2j}{(j+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\
&\quad + \left\| \lambda x^2 \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\|_{L_1} + \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\
&\quad + \left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \frac{2jx}{(j+1)^2} \right) \right\|_{L_1} + \left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\|_{L_1} \\
&< \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right) \|\lambda x^4\|_{L_1} + \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{2j}{(j+1)^2} \right) \|\lambda x^3\|_{L_1} \\
&\quad + \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{3(j+1)^2} \right) \|\lambda x^2\|_{L_1} + 3 \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left\| \lambda \left(\frac{g_j}{\sigma} \right) \right\|_{L_1}
\end{aligned}$$

olur. $st - \lim_k \left(\sup_n \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right) \right) = 0$, $st - \lim_k \left(\sup_n \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{2j}{(j+1)^2} \right) \right) = 0$ ve

$st - \lim_k \left(\sup_n \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right) = 0$ olup (4.3.17)'den

$$st - \lim_k \left(\sup_n \left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} V_j e_2 - e_2}{\sigma} \right\|_{L_1} \right) = 0,$$

elde edilir, (4.3.16) eşitliğinin $i=2$ için de sağlandığı görülür. O halde hipotezden (4.3.15) ile tanımlanan $V := (V_j)$ dizisi 4.3.2. Teorem'in tüm koşullarını sağlar. Bu nedenle her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_V$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L_\varphi^p(I)$ ve bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$st - \lim_k \left(\left\| \lambda \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} V_j f - f}{\sigma} \right\|_{L_1} \right) = 0 \quad (n' \text{ ye göre düzgün}),$$

elde edilir. Buna rağmen herhangi $\lambda > 0$ için

$$\left\| \lambda (V_j e_0 - e_0) \right\|_{L_1} = \left\| \lambda g_j \right\|_{L_1} = \begin{cases} 3\lambda_0, & j = k^2, \\ \lambda_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j} + \frac{\ln(1+j)}{j^2} \right), & j \neq k^2, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.3.18)$$

farklı limit noktalarına sahip iki alt diziye sahip olduğundan $(V_j f)$ 'nin f 'ye modüler yakınsak olmadığı kolaylıkla söylenir. Dolayısıyla, 2.5.8. Teorem $V := (V_j)$ operatörü için sağlanmaz. Ayrıca $\lim_j \lambda_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j} + \frac{\ln(1+j)}{j^2} \right) = \frac{1}{2}$ olup 2.5.9. Teorem'in de $V := (V_j)$ operatörü için sağlanmayacağı açıktır. Yani $(V_j f)$ f 'ye istatistiksel modüler yakınsak değildir. Ayrıca

$$\left\| \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} (1 + g_j) U_j e_0 - e_0 \right\|_{L_1} = \left\| \lambda \sum_{j=n}^{n+k} \frac{1}{k+1} (1 + g_j) - 1 \right\|_{L_1} \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j=n}^{n+k} \left\| \lambda g_j \right\|_{L_1},$$

olup (4.3.18)'den 2.5.11. Teoremin şartları sağlanmadığı görülür yani 4.3.2. Teorem'in 2.5.11. Teorem'in aşikar olmayan bir genelleştirilmesi olduğu açıktır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tezinde relative modüler yakınsaklık, $\mathcal{B}$ –istatistiksel relative modüler yakınsaklık ve relative A –toplam süreci tanımları verilmiş ve bu kavramlar yardımıyla modüler uzaylar üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teorisi için daha güçlü sonuçlar elde edilmiş olup, bu alandaki çalışmaların bir genelleştirilmesi verilmiştir. Dolayısıyla hazırlanan bu doktora tezi modüler uzaylarda yapılacak çalışmalar için kaynak olarak gösterilebilir.



KAYNAKLAR

- Atlıhan, Ö. G., Orhan C. 2008. Summation process of positive linear operators. Computers & Mathematics with Applications, 56 (5): 1188-1195.
- Bardaro, C., Mantellini, I. 2007. Korovkin theorem in modular spaces. Commentationes Math., 47 (2) : 239-253.
- Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G. 2003. Nonlinear integral operators and applications. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis And Applications. 9. Walter de Gruyter Publ., Berlin, 199 s.
- Bell, H. T. 1973. Order summability and almost convergence. Proc. Am. Math. Soc., 38: 548-553.
- Bernstein, S. 1912. Démonstration du théorème de weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkov., 13: 1-2.
- Boos. J. 2000. Classical and modern in summability. Oxford Science Publications.
- Chebyshev, P. L. 1859. Problems on the least values connected with the approximate representation of functions. Sochineniya, Vol. II: 151-235.
- Chittenden, E. W. 1919. On the limit functions of sequences of continuous functions converging relatively uniformly. Trans. AMS., 20: 179-184.
- Connor, J. 1985. Some applications of functional analysis to summability theory. Ph. D. Thesis, Kent State Univ., USA.
- Connor J.S., Kline J. 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. J Math Anal Appl., 197:392–399.
- Demirci, K. 2000. A – Statistical core of a sequence. Demonstratio Math., 33: 343-353.
- Ditzian, Z., Totik, V. 1987. Moduli of Smoothness. Springer series in computational mathematics. 9. Springer, New York.
- Duman, O., Khan, K. ve Orhan, C. 2003. A – Statistical convergence of approximating operators. Math. Ineq. Appl., 6: 689-699.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math., 2: 241-44.
- Freedman, A. R., Sember, J. J. 1981. Density and summability. Pasific J. Math., 95: 293-305.
- Fridy, J. A. 1993. Statistical limit points. Proc. Amer. Math. Soc., 118; 1187-1192.
- Fridy, J. A. ve Orhan, C. 1997. Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc., 125: 3625-3631.

- Gadjiev, A. D., Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.*, 32: 129-138.
- Hardy, G. H. 1949. *Divergent series*. Oxford Univ. Press, London.
- Karakus, S., Demirci, K., Duman, O. 2010. Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. *Positivity*, 14: 321-334.
- Karakus, S., Demirci, K. 2011. Summation process of Korovkin type approximation theorem. *Miskolc Math. Notes*. 12: 75-85.
- Karakuş, S., Demirci, K. 2012. A-summation process and Korovkin type approximation theorem for double sequences of positive linear operators. *Mathematica Slovaca*. 62 (2): 281-292.
- Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistical convergent sequences. *Analysis*, 13: 77-83.
- Korovkin, P.P. 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Spaces of Continuous Functions. *Dokl. Akad. Nauk.*, 90: 961-969.
- Korovkin, P. P. 1960. *Linear operators and approximation theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Kozłowski, W. M. 1988. *Modular function spaces*. 122. Pure Appl. Math., Dekker, Inc., New York, 252 s.
- Lorentz, G. G. 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, 80: 167-190.
- Mantellini, I. 1998. Generalized sampling operators in modular spaces. *Commentationes Math.*, 38: 77 – 92.
- Miller, H. I. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347: 1811-1819.
- Moore, E. H. 1910. *An introduction to a form of general analysis*, The New Haven Mathematical Colloquium, Yale University Press, New Haven.
- Musielak, J. 1983. Orlicz spaces and modular spaces. 1034. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 222 s.
- Musielak, J. 1993. Nonlinear approximation in some modular function spaces. I. *Math. Japon*, 38: 83-90.
- Nishishiraho, T. 1981. Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces. *Tohoku Math. J.*, 33: 109-126.
- Nishishiraho, T. 1983. Convergence of positive linear approximation processes. *Tohoku Math. J.*, 35: 441-458.

- Niven, I., Zuckerman, H.S. 1980. An introduction on the theory of numbers. John Waley & Sons, 4th ed. New York.
- Orhan S., Demirci K. 2014. Statistical A -Summation Process and Korovkin Type Approximation Theorem on Modular Spaces. *Positivity*, 18: 669–686.
- Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, 30 (no:2): 139-150.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 2: 73-74.
- Stieglitz, M. 1973. Eine verallgemeinerung des begriffs festkonvergenz. *Math. Japonica*, 18: 53-70.
- Swetits, J.J. 1979. On summability and positive linear operators. *J. Approx. Theory*, 25: 186-188.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

Burçak KOLAY 1983 yılında Samsun’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Samsun’da lise öğrenimini Almanya ve İstanbul’da tamamladı. 2004 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2008 yılında mezun oldu. 2008 yılında, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve 2011 yılında mezun oldu. 2012 yılında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.

Bu tezden elde edilen yayınlar:

1. Relative Modular Convergence of Positive Linear Operators. Positivity (20) (2016), 565–577. **(SCI-Expanded)**
2. A-Statistical Relative Modular Convergence of Positive Linear Operators. Positivity (21) (2017), 847-863. **(SCI-Expanded)**
3. Statistical Relative A-Summation Process and Korovkin-Type Approximation Theorem on Modular Spaces. Iran J Sci Technol Trans Sci (2018) 42:683–692. **(SCI-Expanded)**