

**MODÜLER UZAYLARDA KOROVKİN TİPİ
YAKLAŞIM TEOREMİ VE MATRİS TOPLANABİLME**

**TAHİR CEYLAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER UZAYLARDA KOROVKİN TİPİ
YAKLAŞIM TEOREMİ VE MATRİS TOPLANABİLME

TAHİR CEYLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ

SİNOP – 2012

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 23/11/2012 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ

Üye : Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fadime DİRİK

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

05/12/2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

MODÜLER UZAYLARDA KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMİ VE MATRİS TOPLANABİLME

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde toplanabilme ve pozitif lineer operatörler ile ilgili genel bilgi ve bunlara ilişkin bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümün birinci kısmında klasik Korovkin tipi teorem ve bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilmiştir. İkinci kısımda modüler uzaylara ait kavramlar tanıtılıp bunlara ilişkin örnekler ve bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Bu uzaylardaki yakınsamalar tanıtılıp bunların aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Üçüncü kısımda modüler uzayda matris toplanabilme metodu kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilip bu teoreme ilişkin sonuçlar incelenmiştir. Daha sonra bu uzayda Korovkin tipi yaklaşım teoreminin koşulları, özel bir operatöre uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Pozitif lineer operatörler, Matris toplanabilme metodu, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, Modüler uzaylar.

MATRIX SUMMABILITY AND KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREM ON MODULAR SPACES

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some general information about summability and positive linear operators has been recalled and some known results concerning these concept have also been considered. In the first section of the third chapter, classical Korovkin type theorems have been given and an example providing conditions of this theorem has been given. In the second section, the basic concepts in modular spaces have been recalled and some known results concerning these concepts and examples have also been considered. In this spaces convergences have been recalled and relationships between these have been investigated. In the third section using a matrix summability method Korovkin type approximation theorem has been studied in modular spaces and results concerning this theorem have been given. Conditions of this theorem have been applied for special operator.

Key Words: Positive linear operators, Matrix summability method, Korovkin type approximation theorem, Modular spaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ' ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen aileme ve bu çalışmada emeği geçen herkese teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Pozitif Lineer Operatörler ve Toplanabilme Kavramları	2
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	6
4. BULGULAR	7
4.1. Klasik Korovkin Tipi Teorem	7
4.2. Modüler uzay	9
4.3. Modüler Uzaylarda Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi	18
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	32
6. KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

ρ : Modüler fonksiyon

w : Tüm diziler uzayı

$B[a, b]$: $[a, b]$ aralığı üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_B$: $B[a, b]$ uzayının alışılmış supremum normu

$C[a, b]$: $[a, b]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_C$: $C[a, b]$ uzayının alışılmış supremum normu

$C_M[a, b]$: $[a, b]$ üzerinde sürekli ve reel eksen üzerinde sınırlı fonksiyonların uzayı

$L_p[a, b]$: $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli p -inci mertebeden integrallenebilen
ölçülebilir fonksiyonların uzayı

χ_A : A kümesinin karakteristik fonksiyonu

h.h.h. : Hemen hemen her yerde

$(Ax)_n$: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi

1. GİRİŞ

H. Bohman 1951 yılında toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyona yaklaşım problemini incelemiştir. P. P. Korovkin bu problemi 1953 yılında tekrar incelemiş ve reel sayıların kapalı alt aralıkları üzerinde sürekli ve reel sayılar kümesi üzerinde sınırlı fonksiyonların uzayı üzerinde tanımlanan pozitif lineer operatörler dizisinin de bu teoremin koşullarını sağladığını ispatlamıştır (Korovkin, 1960). Korovkin' in bu çalışması bir çok araştırmacı tarafından çeşitli operatörler için araştırılmıştır. Aynı zamanda bu teorem L^p uzayları veya Lebesgue uzayları gibi farklı fonksiyonel uzaylarda da çalışılmıştır (Donner, 1981; Renaud, 2000). Korovkin tipi teorem 2007 yılında Bardaro and Mantellini tarafından modüler uzaylar üzerinde genişletilmiştir. Bu uzaylar detaylı olarak Musielak (1983) ve Kozłowski (1988) tarafından incelenmiştir. Daha sonra pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yaklaşımı modüler uzaylar üzerinde incelenmiştir (Demirci, Karakuş ve Duman, 2010). 2010 yılında Karakuş ve Demirci tarafından modüler uzayda matris toplanabilme metodu yardımıyla pozitif lineer operatörler dizisi için Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde öncelikle pozitif lineer operatörler ve toplanabilme ile ilgili tanımlar verildikten sonra klasik Korovkin tipi teorem tanıtılıp ispatı verilecektir. Daha sonra modüler uzaylarda kullanılacak kavramlar tanıtılarak, matris toplanabilme metodu yardımıyla bu uzayda tanımlanan pozitif lineer operatörler dizisi için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Pozitif Lineer Operatörler ve Toplanabilme Kavramları

Öncelikle gerekli olan bazı fonksiyon uzayları tanıtılıp daha sonra bu yüksek lisans tezinde gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

$C[a,b]$ Uzayı : $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır. $f \in C[a,b]$ için

$$\|f\|_C = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

normu ile $C[a,b]$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$C_M[a,b]$ Uzayı : $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli ve reel eksen üzerinde sınırlı olan tüm fonksiyonların uzayıdır.

$B[a,b]$ Uzayı : $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı tüm fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca,

$$\|f\|_B = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

normu ile $B[a,b]$ uzayı bir Banach uzayı olup bu norma göre yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktır. Bir (f_n) fonksiyon dizisinin bir g fonksiyonuna düzgün yakınsaması $n \rightarrow \infty$ için $f_n \Rightarrow g$ ile gösterilir.

$L_p[a,b]$ Uzayı : $[a,b]$ aralığı üzerinde reel değerli p -inci mertebeden integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır.

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

normuna göre L_p uzayı normlu uzayıdır.

Tanım 2.1.1. : X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olsun. X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde “ X uzayından Y uzayına bir operatör tanımlanmıştır” denir ve bu durum

$$L(f(t);x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t);x)$ gösterimi yerine $L(f;x)$ yazılacaktır. X uzayına L operatörünün “tanım kümesi” denir ve $X=D(L)$ ile gösterilir. Ayrıca

$R(L) = \{g: L(f; x) = g(x), f \in D(L)\}$ kümesine de L operatörünün “değer kümesi” denir. $R(L) \subset Y$ dır.

Burada X uzayı lineer uzay olduğunda lineer operatörün tanımı verilebilir:

Tanım 2.1.2.: f_1 ve f_2 , X uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $x \in X$, her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için L operatörü;

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyorsa bu takdirde L operatörüne “lineer operatör” denir. Tanımdan da görülebileceği gibi L lineer operatörü için $L(0; x) = 0$ olur.

Şimdi de lineer operatörler kümesi içinde çok önemli bir sınıf olan pozitif lineer operatörler verilsin:

Tanım 2.1.3.: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise o takdirde L operatörüne “pozitif lineer operatör” denir.

L pozitif lineer operatörü için $LX^+ \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. Ayrıca $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f; x) \leq L(g; x)$ dır. Yani pozitif lineer operatörler monotondur.

Örneğin; $0 \leq x \leq 1$ ve $S_n : C_M[0,1] \rightarrow B[0,1]$ olmak üzere

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (2.1.1)$$

ile tanımlanan operatör Szász operatörü olarak adlandırılır. Burada $\frac{(nx)^k}{k!} \geq 0$ ve $e^{-nx} \geq 0$ olduğundan $S_n(f; x)$ pozitif lineer bir operatördür.

Tanım 2.1.4.: X ve Y , tüm diziler uzayı olan w nın alt kümeleri ve $A = (a_{kj})$ reel terimli bir sonsuz matris olmak üzere $x = (x_j) \in X$ ve her $k \geq 1$ için

$$(Ax)_k := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j$$

serisi yakınsak ise Ax dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise $A = (a_{kj})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir

matris dönüşümü tanımlar denir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L sayısına yakınsak ise x dizisi L sayısına “ A -toplabilir” denir ve $A - \lim x = L$ şeklinde yazılır.

A , X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile yazılır. Eğer özel olarak $X = Y = c$, c yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere $A \in (c, c)$ ise A matrisine “konservatif matris” denir.

Tanım 2.1.5.: $A = (a_{kj})$ $k, j = 1, 2, \dots$ sonsuz bir matris olmak üzere verilen bir (x_k) dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$ olduğunda $\lim_{k \rightarrow \infty} (Ax)_k = L$ koşulu gerçekleşiyor ise A matrisine “regüler matris” denir (Hardy, 1949).

Bir $A = (a_{kj})$ matrisinin regüler olması aşağıdaki Silverman-Teopltz teoremi ile karakterize edilir.

Teorem 2.1.6. (Silverman-Teopltz) : Bir $A = (a_{kj})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul,

$$(i) \|A\| := \sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < \infty$$

$$(ii) \lim_k a_{kj} = 0, \text{ (her } j \text{ için)}$$

$$(iii) \lim_k \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = 1$$

olmasıdır (Hardy 1949, Maddox 1970).

Bell (1973), Stieglitz (1973) Tanım 2.1.4 deki düşünciyi kullanarak $A = (a_{kj})$ matrisi yerine $\mathbf{A} := (A^n)_{n \geq 1} = (a_{kj}^n)$ matris dizisini alarak biraz daha genel olan aşağıdaki tanımını vermişlerdir.

Tanım 2.1.7.: $\mathbf{A} := (A^n)_{n \geq 1} = (a_{kj}^n)$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $x = (x_j)$ reel sayıların dizisi için ve tüm $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_k^n := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n x_j$$

serisi yakınsak ise

$$\mathbf{Ax} := \{(Ax)_k^n : k, n \in \mathbb{N}\}$$

double dizisine x dizisinin “**A** - dönüşümü” denir. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n x_j = L, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

koşulu gerçekleşiyorsa, x dizisi L değerine “**A** -toplanabilir” denir (Bell 1973, Stieglitz 1973) .

Tanım 2.1.8.: $x = (x_j)$ reel terimli sınırlı bir dizi olsun.

$$\lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} x_j = L, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

koşulunu sağlayan bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Uyarı 2.1.9: Eğer A bir matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = A$ alınırsa, **A** - toplanabilme klasik matris toplanabilmeye ve I birim matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = I$ alınırsa **A** - toplanabilme klasik yakınsamaya indirgenir. Eğer $A^n = (a_{kj}^n)$ matris dizisi yerine genel terimi

$$b_{kj}^n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & n \leq j \leq n+k \text{ (n=1,2,...)} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $B = (b_{kj}^n)$ matris dizisi alınırsa **A** - toplanabilme metodu hemen hemen yakınsaklığa indirgenir .

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bulgular bölümünün ilk kısmında klasik Korovkin tipi teoremin ispatı ve bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verildi.

İkinci kısımda modüler ve modüler uzay kavramları tanıtılıp bunlara ilişkin özellikler ifade edildi ve bunlara ait örnekler verildi.

Üçüncü kısımda Korovkin tipi yaklaşım teoremi matris toplanabilme metodu yardımı ile modüler uzayda incelendi ve bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verildi.

4. BULGULAR

4.1. Klasik Korovkin Tipi Teorem

Bu bölümde Korovkin tipi teorem verilerek bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek incelenecektir.

Teorem 4.1.1: $L_n : C_M[a, b] \rightarrow B[a, b]$ şeklinde tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi $[a, b]$ aralığında

$$(i). \|L_n(1; x) - 1\|_B \rightarrow 0$$

$$(ii). \|L_n(t; x) - x\|_B \rightarrow 0$$

$$(iii). \|L_n(t^2; x) - x^2\|_B \rightarrow 0$$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_M[a, b]$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $x \in [a, b]$ için

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_B \rightarrow 0$$

olur (Korovkin, 1960).

İspat : f fonksiyonunun reel ekseninde sınırlılığından tüm x ve t ler için

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M$$

olacak şekilde bir $M = \|f\|_B$ pozitif sayısı bulunabilir. Bu durumda tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve tüm $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (4.1.1)$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlansın. L_n operatörü pozitif, lineer ve monoton artan olduğundan

$$\begin{aligned} \|L_n(f(t); x) - f(x)\|_B &= \|L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)\|_B \\ &= \|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)\|_B \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_B + \|f(x)\|_B \|L_n(1; x) - 1\|_B \\ &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_B + M \|L_n(1; x) - 1\|_B \end{aligned}$$

olup

$$\|L_n(f(t); x) - f(x)\|_B \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\|_B + M \|L_n(1; x) - 1\|_B \quad (4.1.2)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.1) den

$$\begin{aligned}
L_n \left(\left| f(t) - f(x) \right|; x \right) &\leq L_n \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) \\
&= L_n(\varepsilon; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n \left((t-x)^2; x \right) \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\
&= \varepsilon + \varepsilon (L_n(1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t^2; x) - x^2) \\
&\quad - \frac{4M}{\delta^2} A(L_n(t; x) - x) + \frac{2M}{\delta^2} A^2 (L_n(1; x) - 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada bulunan eşitsizlik (4.1.2) de yerine yazılır ve gerekli işlemler

yapılırsa $A = \max \{|a|, |b|\}$ ve $C_1 = \varepsilon + \frac{2MA^2}{\delta^2} + M$, $C_2 = \frac{4MA}{\delta^2}$, $C_3 = \frac{2M}{\delta^2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\| L_n(f(t); x) - f(x) \|_B &\leq \varepsilon + C_1 \| (L_n(1; x) - 1) \|_B \\
&\quad + C_2 \| (L_n(t; x) - x) \|_B + C_3 \| (L_n(t^2; x) - x^2) \|_B
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

bulunur. (4.1.3) de $n \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin iki tarafının limiti alınır

$$\| L_n(f(t); x) - f(x) \|_B \rightarrow 0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi Korovkin teoreminin koşullarını sağlayan bir örnek verilsin.

(2.1.1) ile tanımlanan Szász operatörü için Korovkin tipi teoremin sağlandığı gösterilsin:

$x \in [0, 1]$ için

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

olmak üzere

$$(i) \ S_n(1; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} e^{nx} = 1$$

$$(ii) \ S_n(t; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-nx} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-nx} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} x e^{nx} = x \\
\text{(iii)} \quad S_n(t^2, x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-nx} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{n} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} + e^{-nx} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-nx} x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-nx} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \frac{x}{n} e^{-nx} \\
&= e^{-nx} x^2 e^{-nx} + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x}{n}
\end{aligned}$$

olur. O halde $n \rightarrow \infty$ için

$$\text{(i). } \|S_n(1; x) - 1\|_B \rightarrow 0$$

$$\text{(ii). } \|S_n(t; x) - x\|_B \rightarrow 0$$

$$\text{(iii). } \|S_n(t^2; x) - x^2\|_B \rightarrow 0$$

olduğundan Korovkin tipi teoremin koşulları sağlanır. Dolayısıyla her $f \in C_M[0,1]$ için

$$\|S_n(f; x) - f(x)\|_B \rightarrow 0$$

gerçeklenir.

4.2. Modüler Uzay

Bu bölümde modüler, modüler uzaylar ve modüler uzaylarda yakınsaklık kavramları tanıtılıp aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Şimdi gerekli olan bazı fonksiyon uzayları tanıtılsın:

$I = [a, b] : \text{Lebesgue ölçülebilir reel sayıların sınırlı aralığıdır.}$

$X(I)$: X bir vektör uzayı olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı h.h.h. f ye eşit olan reel değerli ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır.

$C(I)$: Tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayıdır.

$C^\infty(I)$: I üzerinde her mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 4.2.1.: Herhangi bir $\rho : X(I) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli

(i). $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, h.h.h.

(ii). Her $f \in X(I)$ için $\rho(f) = \rho(-f)$

(iii). Her $f, g \in X(I)$ için ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$$

koşullarını sağlıyorsa ρ ya $X(I)$ üzerinde bir modüler denir. Eğer her $f, g \in X(I)$ için ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq N\alpha\rho(Nf) + N\beta\rho(Ng)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa, ρ modülleri N -quasi konvektir denir.

Özel olarak $N = 1$ alınırsa ρ modülleri konvektir denir. Her $f \in X(I)$ ve $a \in (0, 1]$ için

$$\rho(af) \leq Na\rho(Nf)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $N \geq 1$ sabiti varsa, ρ modülleri N - quasi yarıkonvektir denir.

Lemma 4.2.2. : Her N -quasi konveks modüler, N - quasi yarıkonveks modülerdir.

İspat: ρ modülleri N -quasi konveks modüler olsun. Bu durumda her $f, g \in X(I)$ için ve $\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq N\alpha\rho(Nf) + N\beta\rho(Ng)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $N \geq 1$ sabiti vardır.

$\alpha + \beta = 1$ özellikli herhangi $\alpha, \beta \geq 0$ için $\beta = 0$ seçilirse yukarıdaki eşitsizlik

$$\rho(\alpha f) \leq Na\rho(Nf)$$

eşitsizliğine dönüşür. Buradan $\alpha = 1, \beta = 0$ için N -quasi konveks modülerin N -quasi yarıkonveks modülere dönüştüğü görülür.

Şimdi aşağıda ρ modülleri ile oluşturulan $X(I)$ uzayının bazı alt vektör uzayları göz önüne alınsın:

$$L^\rho(I) := \left\{ f \in X(I) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\}$$

ve

$$E^\rho(I) := \left\{ f \in L^\rho(I) : \text{her } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < +\infty \right\}.$$

Burada $L^\rho(I)$ ya ρ ile oluşturulan modüler uzay denir ve $E^\rho(I)$ ya da $L^\rho(I)$ nın sonlu elemanlarının uzayı denir.

Lemma 4.2.3.: Eğer ρ , N - quasi yarıkonveks bir modüler ise

$$L^\rho(I) = \left\{ f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < +\infty \right\}$$

olur.

İspat: ρ , N - quasi yarıkonveks ise tanımdan her $f \in X(I)$ ve $a \in (0,1]$ için

$$\rho(af) \leq Na\rho(Nf)$$

eşitsizliğini sağlayan $N \geq 1$ sabiti vardır. $I = (0, +\infty]$ olsun. ρ ile oluşturulan modüler uzay

$$L^\rho(I) := \left\{ f \in X(I) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\}$$

olmak üzere

$$A = \left\{ f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda f) < +\infty \right\}$$

için $L^\rho(I)$ nın A ya denk olduğu gösterilsin. Bu durumda $A \subset L^\rho(I)$ ve $L^\rho(I) \subset A$ olmalıdır. İlk olarak $A \subset L^\rho(I)$ olduğu gösterilsin.

Herhangi $f \in A$ için, bazı $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda f) < +\infty$ dur. ρ , N -quasi yarıkonveks olduğundan $f \in X(I)$ ve $\lambda \in (0,1]$ için

$$\rho(\lambda f) \leq N\lambda\rho(Nf)$$

eşitsizliğini sağlayan $N \geq 1$ sabiti vardır. Her iki taraftan limit alınırsa

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} N\lambda\rho(Nf)$$

elde edilir. $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} N\lambda\rho(Nf) = 0$ olup sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0$$

bulunur. Modüler uzay tanımından $f \in L^\rho(I)$ dır. Buradan

$$A \subset L^\rho(I) \tag{4.2.1.}$$

olur.

Şimdi $f \in L^p(I)$ olsun. Modüler uzay tanımından

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0$$

dır. Limit tanımından

$$\rho(\lambda_n f) \rightarrow 0, \quad \lambda_n \rightarrow 0^+$$

olur. Fakat bazı $\lambda_n \rightarrow 0^+$ için $\rho(\lambda_n f) = +\infty$ olabilir. Sonlu sayıda eleman yakınsamayı etkilemediğinden bazı $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda f) < +\infty$ sağlanır. O halde $f \in A$ olup

$$L^p(I) \subset A \quad (4.2.2)$$

dır. (4.2.1) ve (4.2.2) den istenilen elde edilir.

Şimdi modüler ve modüler uzaya ait birer örnek verilsin.

Örnek 4.2.4 : $(X(I), \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $\|\cdot\|$ norm fonksiyonunun modüler olduğu gösterilsin. $f \in X(I)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho: X(I) &\rightarrow [0, \infty] \\ f &\rightarrow \rho(f) = \|f\| \end{aligned}$$

olsun. Modülerliğin koşulları uygulanırsa,

$$(i). \quad \rho(f) = \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0, \quad \text{h.h.h.}$$

$$(ii). \quad \rho(-f) = \|-f\| = |-1|\|f\| = \|f\| = \rho(f)$$

$$(iii). \quad \text{Her } f, g \in X(I) \text{ olmak üzere } \alpha, \beta \geq 0 \text{ ve } \alpha + \beta = 1 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \rho(\alpha f + \beta g) &= \|\alpha f + \beta g\| \\ &\leq |\alpha|\|f\| + |\beta|\|g\| = \alpha\|f\| + \beta\|g\| \\ &\leq \|f\| + \|g\| = \rho(f) + \rho(g) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$$

eşitsizliği elde edilir. (i), (ii), (iii) koşulları sağlandığı için $\|\cdot\|$ norm fonksiyonu modülerdir.

Örnek 4.2.5 : $I = [a, b]$ olmak üzere $1 \leq p < \infty$ için L^p uzayının konveks modüler uzay olduğu gösterilsin. $f \in L^p$ için $P_\rho(f) = \int_I |f|^p d\mu$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$P_\rho(f)$ in modülerlik koşulları için

$$(i). P_{\rho}(f) = \int_I |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0, \text{ h.h.h.}$$

$$(ii). P_{\rho}(f) = \int_I |f|^p d\mu = \int_I |-f|^p d\mu = P_{\rho}(-f),$$

(iii). Her $f, g \in X(I)$ olmak üzere $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$P_{\rho}(\alpha f + \beta g) \leq P_{\rho}(f) + P_{\rho}(g)$$

koşulundaki eşitsizliğin gerçeğlendiği gösterilsin. Kabul edelim ki $p=1$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} P_{\rho}(\alpha f + \beta g) &= \int_I |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_I (\alpha |f| + \beta |g|) d\mu \\ &= \alpha \int_I |f| d\mu + \beta \int_I |g| d\mu \\ &\leq \int_I |f| d\mu + \int_I |g| d\mu = P_{\rho}(f) + P_{\rho}(g) \end{aligned}$$

olup

$$P_{\rho}(\alpha f + \beta g) \leq P_{\rho}(f) + P_{\rho}(g)$$

sağlanır. Şimdi $p > 1$ olduğu kabul edilsin.

$$P_{\rho}(\alpha f + \beta g) = \int_I |\alpha f + \beta g|^p d\mu$$

olmak üzere

$$|\alpha f + \beta g|^p \leq \alpha |f|^p + \beta |g|^p$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. Bunun için ilk olarak her $f, g \in L^p$ için ve her $t > 0$ ve $p > 1$ için $t = |f|$ olmak üzere $\varphi(t) = t^p$ olsun. Bu durumda $\varphi(t) = t^p$ fonksiyonunun konveks olduğu gösterilsin. Bunun için fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin pozitif değerli olması yeterlidir. Buradan $\varphi(t) = t^p$ fonksiyonun ikinci mertebeden türevine bakılırsa

$$\varphi''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$$

olup φ fonksiyonu konvektir. Bu durumda $\varphi(t) = t^p$ için $t_1 = |f|$ ve $t_2 = |g|$ alınırsa

$$\varphi(\alpha t_1 + \beta t_2) \leq \alpha \varphi(t_1) + \beta \varphi(t_2)$$

olur ve

$$(\alpha t_1 + \beta t_2)^p \leq \alpha (t_1)^p + \beta (t_2)^p$$

$$(\alpha|f| + \beta|g|)^p \leq \alpha|f|^p + \beta|g|^p \text{ ve } |\alpha f + \beta g| \leq (\alpha|f| + \beta|g|)$$

olduğundan

$$|\alpha f + \beta g|^p \leq \alpha|f|^p + \beta|g|^p$$

$$\begin{aligned} \int_I |\alpha f + \beta g|^p &\leq \alpha \int_I |f|^p + \beta \int_I |g|^p \\ &\leq \int_I |f|^p + \int_I |g|^p \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$P_\rho(\alpha f + \beta g) \leq P_\rho(f) + P_\rho(g)$$

olur. $1 \leq p < \infty$ için

$$P_\rho(\alpha f + \beta g) \leq P_\rho(f) + P_\rho(g)$$

olur. Buradan modülerliğin (iii) koşulu sağlanır. Bu durumda $P_\rho(f)$ konveks modülerdir. O halde φ fonksiyonu ile oluşturulan

$$L^\varphi(I) := \{f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty\}$$

uzayı modüler uzaydır.

Şimdi modüler uzaylardaki bazı yakınsaklık türleri tanıtılsın.

Tanım 4.2.6.: $\{f_n\}$, terimleri $L^\rho(I)$ da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^\rho(I)$ olsun.

Bazı $\lambda_o > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\lambda_o(f_n - f)) = 0 \quad (4.2.3)$$

oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna modüler yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{\rho} f$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.7.: $\{f_n\}$, terimleri $L^\rho(I)$ da olan bir fonksiyon dizisi ve $f \in L^\rho(I)$ olsun.

Her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\lambda(f_n - f)) = 0 \quad (4.2.4)$$

oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna F-norm (kuvvetli) yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{F} f$ ile gösterilir.

Lemma 4.2.8.: Modüler yakınsaklık ile F-norm yakınsaklığın denk olması için gerek ve yeter şart Δ_2 - şartının sağlanmasıdır; yani her $f \in X(I)$ için

$$\rho(2f) \leq M\rho(f)$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabiti vardır (Bardaro , Musielak ve Vinti, 2003; Musielak,1993).

İspat : $f_n \xrightarrow{F} f$ olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için bu yakınsaklık sağlanır. Modüler yakınsaklık ise bazı $\lambda > 0$ için sağlandığından F-norm yakınsaksa modüler yakınsaktır.

Şimdi $f_n \xrightarrow{\rho} f$ olsun. $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna norm yakınsaklığı, tüm $N = 1, 2, 3, \dots$ ve bazı $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(2^N \lambda (f_n - f)) = 0$$

koşuluna denktir. Çünkü koşul bazı $\lambda > 0$ değerleri için geçerli olduğundan $\lambda := \frac{\lambda}{2^N}$,

$N = 1, 2, 3, \dots$ seçilirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(2^N \frac{\lambda}{2^N} (f_n - f)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\lambda (f_n - f))$$

eşitliği elde edilir.

ρ , Δ_2 - şartını sağladığından her $f \in X(I)$ ve tüm $N = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\rho(2^N f) \leq M^N \rho(f)$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabiti vardır. Modüler yakınsaklık tanımından

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(2^N \lambda (f_n - f)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^N \rho(\lambda (f_n - f))$$

yazılabilir. $f_n \xrightarrow{\rho} f$ olduğundan bazı $\lambda > 0$ için ve tüm $N = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(2^N \lambda (f_n - f))$$

bulunur. Yani modüler yakınsak ise F- norm yakınsaktır.

Şimdi ρ modülleri ile ilgili bazı tanımlar verilsin.

Tanım 4.2.9:

- 1) $|f| \leq |g|$ için $\rho(f) \leq \rho(g)$ ise, ρ monotondur denir,
- 2) χ_I I aralığının karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\chi_I \in L^p(I)$ ise, ρ sonludur denir,
- 3) Eğer ρ sonlu ve her $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ için $|B| < \delta$ özellikli herhangi ölçülebilir $B \subset I$ altkümesi için $\rho(\lambda \chi_B) < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa, ρ mutlak sonludur denir,

4) $\chi_I \in E^\rho(I)$ ise, ρ kuvvetli sonludur denir,

5) $\rho(f) < +\infty$ özellikli her $f \in X(I)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulu sağlayan $\alpha > 0$ varsa ρ mutlak süreklidir denir:

Her $\varepsilon > 0$ için B , $|B| < \delta$ özellikli I nin herhangi ölçülebilir altkümesi olmak üzere

$$\rho(\alpha f \chi_B) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Teorem 4.2.10: ρ monoton ve sonlu bir modüler olsun. O halde $C(I) \subset L^\rho(I)$ dır (Bardaro ve Mantellini, 2007).

İspat: $f \in C(I)$ olsun. Bu durumda $\lambda > 0$ için $\lambda f \in C(I)$ ve $|\lambda f| \in C(I)$ olur.

Buradan

$$|\lambda f| \leq |\lambda \|f\|_\infty| \leq |\lambda \|f\|_\infty \chi_I|$$

yazılabilir. Buradan

$$|\lambda f| \leq |\lambda \|f\|_\infty \chi_I|$$

olup ρ modülleri monoton artan olduğundan

$$\rho(\lambda f) \leq \rho(\lambda \|f\|_\infty \chi_I)$$

olur. ρ sonlu olduğundan $\chi_I \in L^\rho(I)$ olup

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda \|f\|_\infty \chi_I)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda f) = 0$$

olur. O halde modüler uzay tanımından $f \in L^\rho(I)$ olur. Buradan

$$C(I) \subset L^\rho(I)$$

elde edilir. Benzer şekilde $C(I) \subset E^\rho(I)$ dır.

$\rho, X(I)$ üzerinde monoton ve sonlu modüler olsun. Kabul edelim ki D ,

$$C^\infty(I) \subset D \subset L^\rho(I)$$

koşulunu sağlayan bir küme olsun. ρ monoton ve sonlu olduğundan böyle bir küme oluşturulabilir. Çünkü ρ monoton ve sonlu ise $C(I) \subset L^\rho(I)$ dır ve $C^\infty(I) \subset C(I)$ olduğundan

$$C^\infty(I) \subset C(I) \subset L^p(I)$$

olur. Bu durumda $C^\infty(I)$ ile $L^p(I)$ arasında D gibi bir küme seçilebilir. Aynı zamanda kabul edelim ki X_T , $C^\infty(I)$ yı içeren $X_T \subset D$ altkümesi ve $T := \{T_j\}$, D den $X(I)$ ya tanımlı her $h \in X_T$, her $\lambda > 0$ için ve mutlak P sabiti için

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^n \rho(\lambda T_j h) \leq P \rho(\lambda h), \quad (n' \text{e göre düzgün}) \quad (4.2.5)$$

olacak şekilde pozitif lineer operatörlerin bir dizisidir.

Lemma 4.2.11.: $f \in L^p(I)$, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $|I| < \infty$ olduğundan ve ρ , $X(I)$ üzerinde kuvvetli sonlu ve mutlak sürekli olduğundan mutlak sonludur (Bardaro ve Mantellini, 2006).

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun ve $\lambda > 0$ da bir sabit olsun. $|I| < \infty$ olduğundan $1 \in E^p(I)$ olur. Yani her $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda) < +\infty$ olur. ρ mutlak sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\rho(\alpha f \chi_B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $\alpha = 1$ olarak kabul edilsin. ρ nun mutlak süreklilik tanımında 1 sabit fonksiyonuna bağlı olan $\delta > 0$ sabit olsun. O halde $B \subset I$ olmak üzere

$$x \in B \Rightarrow x \in I$$

$$x \notin B \Rightarrow x \in I$$

durumlarından herhangi biri olabilir.

$$x \in B \Rightarrow \chi_B(x) = 1 \text{ ve } \chi_I(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) \cdot \chi_I(x) = 1$$

$$x \notin B \Rightarrow \chi_B(x) = 0 \text{ ve } \chi_I(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) \cdot \chi_I(x) = 0$$

olup

$$\rho(\lambda \chi_B) = \rho(\lambda \chi_B \chi_I)$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda $\lambda \chi_I = \alpha f$ olarak alınırsa ρ nun mutlak süreklilik tanımından $\rho(\lambda \chi_I \chi_B) = \rho(\alpha f \chi_B) < \varepsilon$

olup

$$\rho(\lambda \chi_B) < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan ρ nun mutlak sonlu olduğu sonucuna varılır.

4.3. Modüler Uzaylarda Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde matris toplanabilme metodu kullanılarak modüler uzayda tanımlanan pozitif lineer operatörler dizisi için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

Teorem 4.3.1.: $A := (A^n)_{n \geq 1}$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olmak üzere

$$\sup_{n, k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n < \infty \quad (4.3.1)$$

olsun ve $\rho, X(I)$ da monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N - quasi yarıkonveks modüler olsun. $T := \{T_j\}$, D den $X(I)$ ya (4.2.5) eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Kabul edelim ki her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda(T_j e_i - e_i)) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)} \quad (4.3.2.)$$

olsun. $f \in L^p(I)$ fonksiyonu, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. O halde bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda_0(T_j f - f)) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

dır.

İspat: İlk olarak her $g \in C(I)$ ve her $\mu > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\mu(T_j g - g)) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)} \quad (4.3.3)$$

olduğu gösterilsin. μ herhangi pozitif sayı ve $g \in C(I)$ olsun. O halde her $x \in I$ için

$$|g(x)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sabiti vardır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $x, y \in I$ olmak üzere

$$|y - x| < \delta \text{ iken } |g(y) - g(x)| < \varepsilon \text{ olacak şekilde } \delta > 0 \text{ seçilebilir. Her } y, x \in I \text{ için}$$

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (y - x)^2$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. T_j operatörü pozitif, lineer ve monoton artan olduğundan

$$\begin{aligned}
|T_j(g; x) - g(x)| &= |T_j(g(\cdot); x) + T_j(g(x); x) - T_j(g(x); x) - g(x)| \\
&= |T_j(g(\cdot) - g(x); x) + g(x)(T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x))| \\
&\leq T_j(|g(\cdot) - g(x)|; x) + |g(x)| |T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x)| \\
&\leq T_j\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(\cdot - x)^2; x\right) + M |T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x)| \\
&\leq \varepsilon (T_j(e_0(\cdot); x)) + \frac{2M}{\delta^2} T_j((\cdot - x)^2; x) \\
&\quad + M |T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x)| \\
&\leq \varepsilon + (\varepsilon + M) |T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x)| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} [T_j(e_2(\cdot); x) - 2e_1(x)T_j(e_1(\cdot); x) + e_2(x)T_j(e_0(\cdot); x)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $c := \max\{|a|, |b|\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|T_j(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}\right) |T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x)| \\
&\quad + \frac{4Mc}{\delta^2} |T_j(e_1(\cdot); x) - e_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2} |T_j(e_2(\cdot); x) - e_2(x)|
\end{aligned}$$

olur. Buradan $K = \max\left\{\varepsilon + M + \frac{2Mc^2}{\delta^2}, \frac{4Mc}{\delta^2}, \frac{2M}{\delta^2}\right\}$ seçilirse herhangi $\mu > 0$ için

$$\begin{aligned}
\mu |T_j(g; x) - g(x)| &\leq \mu\varepsilon + \mu K |T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x)| \\
&\quad + \mu K |T_j(e_1(\cdot); x) - e_1(x)| + \mu K |T_j(e_2(\cdot); x) - e_2(x)|
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafına ρ -modülleri uygulanırsa ρ monoton olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho(\mu(T_j(g; x) - g(x))) &\leq \rho\left\{\mu\varepsilon + \mu K (T_j(e_0(\cdot); x) - e_0(x))\right. \\
&\quad \left.+ \mu K (T_j(e_1(\cdot); x) - e_1(x)) + \mu K (T_j(e_2(\cdot); x) - e_2(x))\right\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan ρ -modüllerinin özelliğinden

$$\begin{aligned}
\rho(\mu(T_j(g; x) - g(x))) &\leq \rho(4\mu\varepsilon) + \rho(4\mu K (T_j e_0 - e_0)) \\
&\quad + \rho(4\mu K (T_j e_1 - e_1)) + \rho(4\mu K (T_j e_2 - e_2))
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ρ , N - quasi yarıkonveks ve kuvvetli sonlu olduğundan $0 < \varepsilon \leq 1$ kabul edilerek

$$\begin{aligned}\rho\left(\mu\left(T_j(g;x)-g(x)\right)\right) &\leq N\varepsilon\rho(4\mu N)+\rho\left(4\mu K\left(T_je_0-e_0\right)\right) \\ &\quad +\rho\left(4\mu K\left(T_je_1-e_1\right)\right)+\rho\left(4\mu K\left(T_je_2-e_2\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}a_{k_j}^n\rho\left(\mu\left(T_j(g;x)-g(x)\right)\right) &\leq N\varepsilon\rho(4\mu N)\sum_{j=1}^{\infty}a_{k_j}^n+\sum_{j=1}^{\infty}a_{k_j}^n\rho\left(4\mu K\left(T_je_0-e_0\right)\right) \\ &\quad +\sum_{j=1}^{\infty}a_{k_j}^n\rho\left(4\mu K\left(T_je_1-e_1\right)\right)+\sum_{j=1}^{\infty}a_{k_j}^n\rho\left(4\mu K\left(T_je_2-e_2\right)\right)\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

yazılabilir. (4.3.4) eşitsizliğinin her iki tarafından $k \rightarrow \infty$ için üst limit alınırsa (4.3.2)

kullanılarak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^n \rho\left(\mu\left(T_j(g;x)-g(x)\right)\right) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

elde edilir. Böylece (4.3.3) gösterilmiş oldu.

Şimdi $f \in L^p(I)$, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. ρ modülerinin Lemma 4.2.11. deki özellikleri kullanıldığında $C^\infty(I)$ uzayı $L^p(I)$ da modüler yoğundur (Mantellini, 1998). Yani bazı $\lambda_0 > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(3\lambda_0(g_k - f)) = 0$$

olacak şekilde $\{g_k\} \subset C^\infty(I)$ dizisi vardır. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $k \geq k_0$ için

$$\rho(3\lambda_0(g_k - f)) < \varepsilon \quad (4.3.5)$$

olacak şekilde $k_0 = k_0(\varepsilon)$ pozitif sayısı vardır. Diğer taraftan

$$\lambda_0 |T_j f - f| = \lambda_0 |T_j f + T_j g_{k_0} - T_j g_{k_0} + g_{k_0} - g_{k_0} - f|$$

olmak üzere T_j operatörünün lineerliğinden ve pozitifliğinden

$$\lambda_0 |T_j f - f| \leq \lambda_0 |T_j(f - g_{k_0})| + \lambda_0 |T_j g_{k_0} - g_{k_0}| + \lambda_0 |g_{k_0} - f|$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafına ρ modülleri uygulanırsa, ρ monoton olduğundan

$$\begin{aligned}\rho\left(\lambda_0\left(T_j f - f\right)\right) &\leq \rho\left(\lambda_0\left(T_j\left(f - g_{k_0}\right)\right)\right) + \rho\left(\lambda_0\left(T_j g_{k_0} - g_{k_0}\right)\right) + \rho\left(\lambda_0\left(g_{k_0} - f\right)\right) \\ &\leq \rho\left(3\lambda_0\left(T_j\left(f - g_{k_0}\right)\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0\left(T_j g_{k_0} - g_{k_0}\right)\right) \\ &\quad + \rho\left(3\lambda_0\left(g_{k_0} - f\right)\right)\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

olur. (4.3.5) ve (4.3.6) eşitsizliklerinden

$$\rho\left(\lambda_0\left(T_j f - f\right)\right) \leq \rho\left(3\lambda_0\left(T_j\left(f - g_{k_0}\right)\right)\right) + \rho\left(3\lambda_0\left(T_j g_{k_0} - g_{k_0}\right)\right) + \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $g_{k_0} \in C^\infty(I)$ ve $f - g_{k_0} \in X_T$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(\lambda_0\left(T_j f - f\right)\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(3\lambda_0\left(T_j\left(f - g_{k_0}\right)\right)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(3\lambda_0\left(T_j g_{k_0} - g_{k_0}\right)\right) + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

elde edilir.

$$\sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n < \infty$$

özelliğinden

$$\sup_{n,k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \leq B$$

olacak şekilde $B > 0$ sabiti vardır. Buradan (4.3.7) nin $k \rightarrow \infty$ için üst limiti alınır (4.2.5) ve (4.2.6) ile elde edilen eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(\lambda_0\left(T_j f - f\right)\right) &\leq \varepsilon \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \\ &+ \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(3\lambda_0\left(T_j g_{k_0} - g_{k_0}\right)\right) + P \rho\left(3\lambda_0\left(f - g_{k_0}\right)\right) \end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(\lambda_0\left(T_j f - f\right)\right) \leq \varepsilon (B + P) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(3\lambda_0\left(T_j g_{k_0} - g_{k_0}\right)\right) \quad (4.3.8)$$

elde edilir. (4.3.3) den

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho(3\lambda_0(T_j g_{k_0} - g_{k_0})) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

olduğundan

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho(3\lambda_0(T_j g_{k_0} - g_{k_0})) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)} \quad (4.3.9)$$

olur. (4.3.8) ve (4.3.9) dan

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^n \rho\left(\lambda_0\left(T_j(f; x) - f(x)\right)\right) \leq \varepsilon (B + P)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda_0(T_j(f; x) - f(x))) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

bulunur. Her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda_0(T_j(f; x) - f(x)))$$

negatif olmadığından

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda_0(T_j f - f)) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

olup ispat tamamlanır.

Eğer ρ modülleri Δ_2 - şartını sağlarsa, Teorem 4.3.1 den ilk olarak aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 4.3.2.: $A := (A^n)_{n \geq 1}$ negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olmak üzere

$$\sup_{n, k} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n < \infty$$

olsun. Aynı zamanda $T := \{T_j\}$ ve ρ Teorem 4.3.1. deki özellikleri sağlasın. Eğer ρ , Δ_2 - şartını sağlarsa

a) Her $\lambda > 0$ ve $i = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda(T_j e_i - e_i)) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

b) Her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^p(I)$ koşulunu sağlayan her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^n \rho(\lambda(T_j f - f)) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

ifadeler birbirine denktir

Uyarı 4.3.3.: Eğer I birim matris olmak üzere $A^n = I$ ise, (4.2.5) koşulu her $h \in X_T$, $\lambda > 0$ ve mutlak pozitif P sabiti için

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (\rho(\lambda T_j h)) \leq P \rho(\lambda h) \quad (4.3.10)$$

eşitsizliğine dönüşür.

Şimdi Bardaro ve Mantellini tarafından elde edilen sonuçlar verilsin (Bardaro and Mantellini, 2007).

Sonuç 4.3.4.: $\rho, X(I)$ da monoton, kuvvetli sonlu, mutlak sürekli ve N-quasi yarıkonveks modüler olsun. $T := \{T_j\}$, D den $X(I)$ ya tanımlı (4.3.10) eşitsizliğini sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her bir $i = 0, 1, 2$ için eğer $\{T_j e_i\} \xrightarrow{F} e_i$ ise, her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu için $\{T_j f\} \xrightarrow{\rho} f$ tır (Bardaro, ve Mantellini, 2007).

Sonuç 4.3.5.: $T := \{T_j\}$ ve ρ Sonuç 4.3.4. deki koşulları sağlasın. ρ, Δ_2 - şartını sağlarsa

- a) Her bir $i = 0, 1, 2$ için $\{T_j e_i\} \xrightarrow{F} e_i$,
- b) Her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu için $\{T_j f\} \xrightarrow{F} f$ ifadeleri denktir (Bardaro, ve Mantellini, 2007).

İspat: Kabul edelim ki her bir $i = 0, 1, 2$ için $\{T_j e_i\} \xrightarrow{F} e_i$ olsun. Bu durumda Sonuç 4.3.4. den her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu için $\{T_j f\} \xrightarrow{\rho} f$ tır. ρ, Δ_2 - şartını sağladığından her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_T$ olacak şekilde herhangi bir $f \in L^\rho(I)$ fonksiyonu için $\{T_j f\} \xrightarrow{\rho} f$ tır.

Örnek 4.3.6. $I = [0,1]$ alınsın ve $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

- φ konveks,
- $\varphi(0) = 0$, her $u > 0$ için $\varphi(u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = \infty$,

koşullarını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

Her $f \in X(I)$ için

$$\rho^\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx$$

ile $X(I)$ üzerinde tanımlanan ρ^φ fonksiyoneli göz önüne alınsın. $\rho^\varphi, X(I)$ da konveks modülerdir. Bu durumda φ fonksiyonu ile oluşturulan Orlicz uzayı

$$L_\varphi^\rho(I) := \{f \in X(I) : \text{bazı } \lambda > 0 \text{ için } \rho^\varphi(\lambda f) < +\infty\}$$

ile tanımlanır. O halde $L_\varphi^\rho(I)$ uzayında $U := \{U_n\}$ klasik Bernstein–Kantorovich operatörü $x \in I$ için

$$U_j(f, x) := \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \int_{k/(j+1)}^{(k+1)/(j+1)} f(t) dt$$

ile tanımlanır (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Bu durumda $X_U := L_\varphi^\rho(I)$ seçilmesiyle (4.3.10) özelliği gerçekleşir. Sonuç 4.3.4. ten her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_U$ olacak şekilde $f \in L_\varphi^\rho(I)$ fonksiyonu için $\{U_j f\} \xrightarrow{\rho} f$ dır (Bardaro ve Mantellini, 2007).

Kabul edelim ki

$$a_{kj}^n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & n \leq j \leq n+k-1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanan sonsuz matris dizisi $\mathbf{A} := (A^n)_{n \geq 1} = (a_{kj}^n)$ olsun. O halde $\mathbf{A}$ - toplanabilme h.h.h. yakınsaklığa indirgenir.

Özel olarak 0 ve 1 sayılarından oluşan $s = (s_n)$ dizisi, n_1 2'nin katı, n_2 2.3 ün katı, n_3 3.4 ün katı ve n_k $k.(k+1)$ in katı olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccc} 0101\dots 0101; 001001\dots 001001; 00010001\dots 0001; \dots \\ \xrightarrow{n_1 \text{ terim} \leftarrow} & \xrightarrow{n_2 \text{ terim} \leftarrow} & \xrightarrow{n_3 \text{ terim} \leftarrow} & & & & \end{array} \quad (4.3.11)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $s = (s_n)$ dizisi sıfıra h.h.h. yakınsaktır (Miller ve Orhan, 2001). Bu durumda $s = \{s_j\}$ sıfıra h.h.h. yakınsak bir dizi olmak üzere U_j operatörü kullanılarak $L_\varphi^\rho(I)$ uzayında $V := \{V_j\}$ pozitif lineer operatörler dizisi, $f \in L_\varphi^\rho(I)$, $x \in [0,1]$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$V_j(f, x) = (1 + s_j) U_j(f, x). \quad (4.3.12)$$

olarak tanımlansın. $h \in X_V := L_\varphi^\rho(I)$ olarak alınırsa tüm $\lambda > 0$ için ve mutlak P pozitif sabiti için

$$\rho^\varphi(\lambda V_j h) = \rho^\varphi(\lambda (1 + s_j) U_j h) \leq \rho^\varphi(2\lambda U_j h) + \rho^\varphi(2\lambda s_j U_j h)$$

yazılabilir (Bardaro ve Mantellini, 2007). Buradan

$$\rho^\varphi(f) = \rho^\varphi(0) = \int_0^1 \varphi(|0|) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

olduğundan

$$\rho^\varphi(\lambda s_j U_j h) = \begin{cases} \rho^\varphi(\lambda U_j h), & s_j = 1 \\ \rho^\varphi(0) = 0, & s_j = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad s_j \rho^\varphi(\lambda U_j h) = \begin{cases} \rho^\varphi(\lambda U_j h), & s_j = 1 \\ 0, & s_j = 0 \end{cases}$$

bulunur. Böylece

$$\rho^\varphi(\lambda s_j U_j h) = s_j \rho^\varphi(\lambda U_j h)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \rho^\varphi(\lambda V_j h) &\leq \rho^\varphi(2\lambda U_j h) + s_j \rho^\varphi(2\lambda U_j h) \\ &= (1 + s_j) \rho^\varphi(2\lambda U_j h) \\ &\leq (1 + s_j) P \rho^\varphi(2\lambda h) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \rho^\varphi(\lambda V_j h) \right) \leq P \rho^\varphi(2\lambda h)$$

dır. Bu yüzden $X_V = X_U = L_\varphi^\rho(I)$ seçilirse (4.2.5) koşulu, (4.3.12) ile verilen

V_j operatörü için sağlanır.

$$\begin{aligned} V_j(e_0, x) &= (1 + s_j) U_j(e_0, x) \\ &= (1 + s_j) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \int_{k/(j+1)}^{(k+1)/(j+1)} 1 dt \\ &= (1 + s_j) \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \left(\frac{k+1}{j+1} - \frac{k}{j+1} \right) \\ &= (1 + s_j) \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \left(\frac{1}{j+1} \right) \\ &= (1 + s_j) (x + 1 - x)^j \\ &= (1 + s_j) \end{aligned}$$

olup

$$V_j(e_0, x) = (1 + s_j)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
V_j(e_1, x) &= (1+s_j)U_j(e_1, x) \\
&= (1+s_j) \left\{ \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \int_{k/(j+1)}^{(k+1)/(j+1)} t dt \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \left(\left(\frac{k+1}{j+1} \right)^2 - \left(\frac{k}{j+1} \right)^2 \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \left(\frac{2k+1}{j+1} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{2k}{(j+1)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{1}{(j+1)} \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \sum_{k=1}^j \frac{j!}{(j-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{1}{(j+1)} + \frac{1}{2} (x+1-x)^j \cdot \frac{1}{j+1} \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{xj(j-1)!}{(j-k-1)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{1}{(j+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j+1} \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \frac{jx}{j+1} + \frac{1}{2(j+1)} \right\}
\end{aligned}$$

olup

$$V_j(e_1, x) = (1+s_j) \left(\frac{jx}{j+1} + \frac{1}{2(j+1)} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
V_j(e_2, x) &= (1+s_j)U_j(e_2, x) \\
&= (1+s_j) \left\{ \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \int_{k/(j+1)}^{(k+1)/(j+1)} t^2 dt \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \left(\left(\frac{k+1}{j+1} \right)^3 - \left(\frac{k}{j+1} \right)^3 \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \frac{1}{3} \left\{ \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \left(\frac{k+1}{j+1} - \frac{k}{j+1} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\left(\frac{k+1}{j+1} \right)^2 + \frac{k(k+1)}{(j+1)^2} + \left(\frac{k}{j+1} \right)^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+s_j) \frac{1}{3} \left\{ \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} (j+1) \left(\frac{1}{j+1} \right) \left(\frac{k^2 + 2k + 1 + k^2 + k + k^2}{(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \frac{1}{3} \left\{ \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \left(\frac{3k^2}{(j+1)^2} + \frac{3k}{(j+1)^2} + \frac{1}{(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \left(\sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{k^2}{(j+1)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{k}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{1}{3} \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{1}{(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \left(\frac{1}{(j+1)^2} \sum_{k=1}^j \frac{j!}{(j-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{j-k} k \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^j \frac{j!}{(j-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{1}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \left(\frac{x}{(j+1)^2} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{j(j-1)!}{(j-k-1)!k!} x^k (1-x)^{j-k-1} (k+1) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^j \frac{j(j-1)!}{(j-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{j-k} \frac{1}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \frac{jx}{(j+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(j-k-1)!k(k-1)!} x^k (1-x)^{j-k-1} k \right. \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(j-k-1)!k!} x^k (1-x)^{j-k-1} \right) + \left(\frac{jx}{(j+1)^2} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(j-k-1)!(k)!} x^k (1-x)^{j-k-1} \right) \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \left(\frac{jx}{(j+1)^2} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(j-1)(j-2)!}{(j-k-1)!(k-1)!} x^k (1-x)^{j-k-1} + \frac{jx}{(j+1)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{jx}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+s_j) \left\{ \left(\frac{jx(j-1)x}{(j+1)^2} \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(j-2)!}{(j-k-2)!k!} x^k (1-x)^{j-k-1} + \frac{jx}{(j+1)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{jx}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \left(\frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} + \frac{jx}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{jx}{(j+1)^2} \right) + \left(\frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\} \\
&= (1+s_j) \left\{ \left(\frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} + \frac{2jx}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

olup

$$V_j(e_2, x) = (1+s_j) \left(\frac{j(j-1)x^2}{(j+1)^2} + \frac{2jx}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} \right)$$

elde edilir.

Herhangi $\lambda > 0$ için

$$\lambda |V_j(e_o, x) - e_o(x)| = \lambda |1+s_j - 1| = \lambda s_j$$

olduğu görülür. s_j nin tanımından dolayı

$$\rho^\varphi(\lambda(V_j e_o - e_o)) = \rho^\varphi(\lambda s_j) = \int_0^1 \varphi(\lambda s_j) dx = \varphi(\lambda s_j) = s_j \varphi(\lambda)$$

elde edilir. (s_j) dizisi sıfıra h.h.h. yakınsak olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$\limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \rho^\varphi(\lambda(V_j e_o - e_o)) \right) = 0$$

olur. Bu da $i=0$ için (4.3.2) nin sağlandığını gösterir.

Şimdi $i=1$ için incelenirse

$$\begin{aligned}
\lambda |V_j(e_1, x) - e_1(x)| &= \lambda \left| x \left(\frac{j}{j+1} + \frac{js_j}{j+1} - 1 \right) + \frac{1}{2(j+1)} + \frac{s_j}{2(j+1)} \right| \\
&\leq \lambda |x| \left(\left| \frac{j}{j+1} - 1 \right| + \frac{js_j}{j+1} \right) + \frac{1}{2(j+1)} + \frac{s_j}{2(j+1)} \\
&\leq \lambda \left\{ \frac{1}{j+1} + \frac{2js_j}{2(j+1)} + \frac{s_j}{2(j+1)} + \frac{1}{2(j+1)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \lambda \left\{ \frac{3}{2(j+1)} + s_j \left(\frac{2j+1}{2(j+1)} \right) \right\}$$

olduğundan (s_j) nin tanımından ve ρ^φ modülerinin özelliğinden

$$\begin{aligned} \rho^\varphi(\lambda(V_j e_1 - e_1)) &\leq \rho^\varphi \left(\lambda \left\{ s_j \left(\frac{2j+1}{2(j+1)} \right) + \frac{3}{2(j+1)} \right\} \right) \\ &\leq s_j \rho^\varphi \left(\lambda \left(\frac{2j+1}{j+1} \right) \right) + \rho^\varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\left(\frac{2j+1}{j+1} \right)$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. Bu yüzden her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{2j+1}{j+1} \right) \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. O halde ρ^φ nin monotonluğu kullanılırsa herhangi $\lambda > 0$ için

$$\rho^\varphi \left(\lambda \left(\frac{2j+1}{j+1} \right) \right) \leq \rho^\varphi(\lambda M)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho^\varphi(\lambda(V_j e_1 - e_1)) &\leq s_j \rho^\varphi(\lambda M) + \rho^\varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) \\ &= s_j \varphi(\lambda M) + \varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. φ sürekli olduğundan,

$$\lim_j \varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) = \varphi \left(\lim_j \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) \right) = \varphi(0) = 0$$

bulunur. Bu durumda $\varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right)$, sıfıra h.h.h. yakınsaktır. s ve $\varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right)$ nin

sıfıra h.h.h yakınsaklığı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \rho^\varphi \left(\lambda (V_j e_1 - e_1) \right) \right) &\leq \limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \left(s_j \varphi(\lambda M) + \varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) \right) \right) \\
&= \varphi(\lambda M) \limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} s_j \right) \\
&\quad + \limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \varphi \left(\frac{3\lambda}{j+1} \right) \right) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \rho^\varphi \left(\lambda (V_j e_1 - e_1) \right) \right) = 0$$

olur. Son olarak $i = 2$ için incelenirse

$$\begin{aligned}
\lambda |V_j(e_2, x) - e_2(x)| &= \lambda \left| x^2 \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} + \frac{2jx}{(j+1)^2} + \frac{1}{3(j+1)^2} \right. \\
&\quad \left. + s_j x^2 \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} + s_j \frac{2jx}{(j+1)^2} + s_j \frac{1}{3(j+1)^2} - x^2 \right| \\
&\leq \lambda x^2 \left| \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} - 1 \right| + \lambda x^2 s_j \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} + \lambda |x| \left(\frac{2j}{(j+1)^2} + s_j \frac{2j}{(j+1)^2} \right) \\
&\quad + \lambda \frac{1}{3(j+1)^2} + \lambda s_j \frac{1}{3(j+1)^2} \\
&\leq \lambda \left\{ \frac{(3j+1)}{(j+1)^2} + s_j \frac{j(j-1)}{(j+1)^2} + \frac{2j}{(j+1)^2} + s_j \frac{2j}{(j+1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3(j+1)^2} + s_j \frac{1}{3(j+1)^2} \right\} \\
&= \lambda \left\{ \frac{15j+4}{3(j+1)^2} + s_j \left(\frac{3j^2+3j+1}{3(j+1)^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan, s_j nin tanımından

$$\begin{aligned}
\rho^\varphi \left(\lambda (V_j e_2 - e_2) \right) &\leq \rho^\varphi \left(\lambda \left\{ \frac{15j+4}{3(j+1)^2} + s_j \left(\frac{3j^2+3j+1}{3(j+1)^2} \right) \right\} \right) \\
&\leq s_j \rho^\varphi \left(2\lambda \left(\frac{3j^2+3j+1}{3(j+1)^2} \right) \right) + \rho^\varphi \left(2\lambda \left(\frac{15j+4}{3(j+1)^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\left(\frac{3j^2+3j+1}{3(j+1)^2}\right)$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. Bu yüzden her $j \in \mathbb{N}$

için

$$\left|\frac{3j^2+3j+1}{3(j+1)^2}\right| \leq K$$

olacak şekilde $K > 0$ sabiti vardır. ρ^φ nin monotonluğu ve s_j nin tanımı kullanılırsa herhangi $\lambda > 0$ için

$$\rho^\varphi\left(\lambda(V_j e_2 - e_2)\right) \leq s_j \varphi(2\lambda K) + \varphi\left(\lambda\left(\frac{30j+8}{3(j+1)^2}\right)\right) \quad (4.3.13)$$

elde edilir. φ sürekli olduğundan

$$\lim_j \varphi\left(\lambda\left(\frac{30j+8}{3(j+1)^2}\right)\right) = \varphi\left(\lambda \lim_j \frac{30j+8}{3(j+1)^2}\right) = \varphi(0) = 0$$

olur. Bu yüzden $\varphi\left(\lambda\left(\frac{30j+8}{3(j+1)^2}\right)\right)$ fonksiyonu sıfıra h.h.h. yakınsaktır. s dizisinin ve

$$\varphi\left(\lambda\left(\frac{30j+8}{3(j+1)^2}\right)\right) \text{ fonksiyonunun sıfıra h.h.h. yakınsaklığı kullanılırsa } (4.3.13)$$

eşitsizliğinde her $\lambda > 0$ için

$$\limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \rho^\varphi\left(\lambda(V_j e_2 - e_2)\right) \right) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

elde edilir. (4.3.2) her bir $i=0,1,2$ için ve herhangi $\lambda > 0$ için sağlanır. Bu yüzden

(4.3.12) ile tanımlanan $V := \{V_j\}$ operatör dizisi Teorem 4.3.1. in tüm kabullerini sağlar. O halde bazı $\lambda_0 > 0$ için ve her $g \in C^\infty(I)$ için $f - g \in X_V = L_\varphi^\rho(I)$ olacak

şekilde $f \in L_\varphi^\rho(I)$ fonksiyonu için

$$\limsup_k \left(\sup_n \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k} \rho^\varphi\left(\lambda(V_j f - f)\right) \right) = 0, \text{ (n'e göre düzgün)}$$

elde edilir. Fakat (s_j) dizisi sıfıra yakınsak olmadığından $\{V_j f\}$ nin f ye modüler

yakınsak olmadığı açıktır. Bu yüzden Sonuç 4.3.4. $V := \{V_j\}$ dizisi için çalışmaz.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında matris toplanabilme kavramı yardımıyla modüler uzayda Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır.

Bu çalışmada bulunan özellikler ileride yapılacak çalışmalar için kullanışlı sonuçlardır. A - toplanabilme yöntemi yardımıyla, bu tezde elde edilen sonuçlardan daha kuvvetli sonuçların gerçekleşip gerçekleşmediği doktora problemleri arasında yer almaktadır.

5. KAYNAKLAR

- Athhan, Ö. G., Orhan, C. 2007.** Matrix summability and positive linear operators. Positivity, 11: 387-398.
- Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G. 2003.** Nonlinear Integral Operators and Applications. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis And Applications 9, Walter de Gruyter Publ., Berlin, 199 s.
- Bardaro, C., Mantellini, I. 2006.** Approximation properties in abstract modular spaces for a class of general sampling – type operators. Appl. Anal., 85: 383-413.
- Bardaro, C., Mantellini, I. 2007.** Korovkin theorem in modular spaces. Commentationes Math., 47 (2) : 239-253.
- Bell, H. T. 1973.** Order summability and almost convergence. Proc. Am. Math. Soc., 38: 548-553.
- Bohman, H. (1952).** On approximation of continuous and of analytic function. Arkiv für Math., 2 (3): 43–56.
- Karakuş, S., Demirci, K., Duman, O. 2010.** Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. Positivity, 14: 321-334.
- Donner, K. 1981.** Korovkin theorems in L^p - spaces. J. Funct. Anal. Appl., 42 (1): 12-28.
- Hardy, G. H. 1949.** Divergent Series. Oxford Univ. Press, London.
- Karakuş, S., Demirci, K. 2010.** Matrix summability and korovkin type approximation theorem on modular spaces. Acta Math.: 281-292.
- Korovkin, P. P. 1960.** Linear Operators and Approximation Theory. India, Delhi, 222 s.
- Kozłowski, W. M. 1988.** Modular Function Spaces. Pure Appl. Math., 122, Marcel Dekker, Inc., New York, 252 s.
- Lorentz, G. G. 1948.** A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math, 80: 167 – 190.
- Maddox, I. J. 1970.** Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, 239 s.
- Mantellini, I. 1998.** Generalized sampling operators in modular spaces. Commentationes Math., 38: 77 – 92.
- Musielak J. 1983.** Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Mathematics, Vol., 1034, Springer – Verlag, Berlin, 222 s.
- Musielak J. 1993.** Nonlinear approximation in some modular function spaces I. Math. Japon, 38: 83 – 90.

- Miller H. I., Orhan C. 2001.** On almost convergent and statistically convergent subsequences. Acta Math. Hungar , 93(1-2): 135 – 151.
- Renaud, P. 2000.** A Korovkin therom for abstract lebesque spaces. J.Approx. Theory, 102: 13-20.
- Stieglitz, M. 1973.** Eine verallgenmeinerung des begriffs festkonvergenz. Math. Japonica, 18: 53-70.

ÖZGEÇMİŞ

Tahir CEYLAN 1985 yılında Samsun' da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Samsun 'da tamamladı. 2008-2009 öğretim yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2011- 2012 öğretim yılında Sinop Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevde çalışmaya devam etmektedir.