

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MODÜLLERİN İDEALLEŞTİRİLMESİ

TUĞBA ARKAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLLERİN İDEALLEŞTİRİLMESİ

Tuğba ARKAN tarafından hazırlanan tez çalışması 24.11.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Teknik desteğinden faydalandığım Araştırma Görevlisi Zehra BİLGİN'e, manevi desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Fatma CİRİT ve Melike YAKUT'a, jüri üyeleri çok değerli hocalarım Prof. Dr. Ünsal TEKİR ve Doç. Dr. Murat ALAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca beni sabırla destekleyen ailemin her bir ferdine, yüksek lisans eğitimim süresince desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL'a sonsuz teşekkürler...

Kasım, 2015

Tuğba ARKAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iii
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
TABLO LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez.....	2
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER.....	3
BÖLÜM 3	
BİR MODÜLÜN İDEALLEŞTİRİLMESİ.....	13
BÖLÜM 4	
$R(+)$ M HALKASININ İDEALLERİ.....	19
BÖLÜM 5	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27

KAYNAKLAR.....	28
ÖZGEÇMİŞ	29

SİMGE LİSTESİ

$\in$	elemanıdır
$\notin$	elemanı değildir
$\subseteq$	alt kümesidir
$\subsetneq$	öz alt kümesidir
$\cup$	birleşim
$\cap$	kesişim
$\Rightarrow$	gerektirir
$\Leftarrow$	yeter şart
$\Leftrightarrow$	gerek ve yeter şart
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi

KISALTMA LİSTESİ

$\text{Çek}f$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\sqrt{I}, \text{Rad}(I)$	I idealinin radikali
$\text{Ann}(M)$	M modülünün annihilatörü
$Z(M)$	M modülünün annihilatörü
$U(R)$	R halkasının birimsel elemanlarının kümesi
$\text{Id}(R)$	R halkasının idempotent elemanlarının kümesi
$\text{Nil}(R)$	R halkasının nilpotent elemanlarının kümesi
$Z(R)$	R halkasının sıfır bölen elemanlarının kümesi

ÖZET

MODÜLLERİN İDEALLEŞTİRİLMESİ

Tuğba ARKAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral

Bu tez çalışmasında halka ve modüller ile ilgili temel bilgiler ve bazı özel alt modüller hakkındaki tanım ve teoremler ön bilgi olarak verilmiştir. Bu ön bilgilerin ardından R değişmeli ve birimli bir halka ve M de bir R -modül olmak üzere bir modülün idealleştirilmesi olan $R(+)M$ halkası hakkında tanım ve özellikler verilerek yapısı incelenmiş ve bu halka yapısı üzerinde karakterize edilmiş bazı özel idealler ile ilgili bilgilerin bir kısmı derlenerek, $R(+)M$ halkasının homojen yapıda olan bazı yeni idealleri karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: halka, modül, ideal, bir modülün idealleştirilmesi, homojen ideal

IDEALIZATION OF MODULES

Tuğba ARKAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Kürşat Hakan Oral

In this thesis, the fundamental informations regarding rings and modules, and definitions, theorems in some distinguished submodules have been given as preliminaries. After these preliminaries, structure of the ring $R(+)M$ which is idealization of a module where R is a commutative ring with identity and M is an R -module has been examined by giving some definitions and properties about the ring, and some new ideals of the ring $R(+)M$ which are homogeneous have been characterized by gathering together informations regarding some specific ideals, were characterized on the ring.

Keywords: ring, module, ideal, idealization of a module, homogeneous ideal

1.1 Literatür Özeti

Bir R -modül olan M ile $R(+M) = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$ şeklinde bir halkanın oluşturulması fikrine ilk olarak Nagata'nın Local Rings adlı kitabında rastlamaktayız. Nagata, bir R -modül M için direkt toplam $R \oplus M$ modülünü ele alır. $R \oplus M$ üzerinde tanımladığı $(r + m)(r' + m') = rr' + rm' + r'm$ çarpma işlemiyle $R \oplus M$, R ve M yi içeren bir halka olur. Biz bu halkayı $R(+M)$ şeklinde göstereceğiz. Burada M modülü $0(+M)$ ideali olarak $R(+M)$ de içerilir ve $(0(+M))^2 = 0$ dır. $(R(+M))/(0(+M)) \cong R$ ve $(0(+M))^2 = 0$ olduğundan R -modül M ile $R(+M)$ -modül $0(+M)$ benzer yapıdadır. Nagata tüm bu işlemleri, ilgili kitabında idealleştirmenin kuralı olarak adlandırır. [1]

Benzer şekilde Huckaba da Commutative Rings with Zero Divisors kitabında $R(+M)$ halkasının yapısal özelliklerine değindikten sonra bu halkanın bazı elemanlarının ve ideallerinin karakterizasyonuna yer vermiştir. [2]

Winders'ın 2004 yılında basılan Idealization adlı doktora tezinde modüllerin idealleştirilmesi konusunda öncekilerden daha ayrıntılı çalışmalar ve sonuçlar yer almıştır. 2009'da yayınlanan Anderson ve Winders'ın ortak çalışmaları olan Idealization of A Module adlı makale, konuya ilgi uyandırmış ve bu konuyla alakalı birçok çalışma yapılmasına ön ayak olmuştur. Anderson ve Winders bu makalelerinde $R(+M)$ halkasının maksimal, asal, homojen, asalımsı ve radikal idealleri, birimsel, idempotent, sıfır bölen ve nilpotent elemanları ile birlikte farklı konularını da çalışıp, bazı özel halkalara da yeni örnekler vermiştir. [3]

Bir modülün idealleştirilmesi alt modüller ile ilgili sonuçları ideallere indirgemek için,

halkalardan elde ettiğimiz sonuçları modüllere genişletmek için ve sıfır bölünli değişmeli halkalara örnekler oluşturmak için faydalı olabilir. Halkalar ve idealler konusunda yapılan yeni çalışmalarda da modüllerin idealleştirilmesine örnek olarak rastlamaktayız.

1.2 Tezin Amacı

İlk olarak modüllerin idealleştirilmesi ile ilgili yapılan çalışmalar ele alınarak ve sonrasında bu çalışmaların bir kısmından yola çıkarak en genel haliyle $R(+)M$ halkasının homojen yapıdaki bazı ideallerinin hangi formda olduğunun ispat edilmesi amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

$R(+)M$ halkası üzerinde tanımlanan, bilinenden farklı ikili işlemlerin halka üzerinde oluşturduğu farklılıklar göz önüne alınarak farklı formdaki ideallere örnekler bulunmuş, bazı ilgili halkaların özel elemanlarının karakterizasyonu yapılmış ve bu halka yapısının bir kısım ideallerinin homojen olanlarının ne yapıda olacağı gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 Boştan farklı bir R kümesi üzerinde

$(a, b) \mapsto a + b$ ve $(a, b) \mapsto ab$ ile tanımlı toplama ve çarpma ikili işlemleri

1. R toplamsal değişmeli bir grup,
2. her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$,
3. her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$

koşullarını sağlıyorsa bu R kümesine halka denir. Eğer her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye değişmeli halka ve her $a \in R$ için $a1 = 1a = a$ olacak şekilde bir $1 \in R$ varsa R ye birimli halka denir [4].

Örnek 2.2

1. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi bilinen toplama ve çıkarma işlemleriyle değişmeli ve birimli halkadır.
2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bilinen toplama ve çıkarma işlemleriyle değişmeli ve birimli halkadır.
3. R ve S kümeleri birer halka ve x de bilinmeyen olsun. Bu durumda, $R[x]$ ve $R \times S$ kümeleri de birer halkadır.

Tanım 2.3 R halkasında $a \in R$ için $ab = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ bulunuyorsa a ya halkanın bir sıfır bölenidir denir ve R halkasının tüm sıfır bölenlerinin kümesi $Z(R)$ ile gösterilir. 0 dan başka hiçbir sıfır böleni bulunmayan değişmeli ve birimli halkaya da tamlık bölgesi denir [5].

Tanım 2.4 R halkasında $a \in R$ için $a^k = 0$ olacak şekilde bir $k > 0$ tam sayısı bulunabilirse a elemanına nilpotent, $a^2 = a$ ise idempotent denir [5].

Tanım 2.5 R halkasında tersi mevcut elemanlara birimsel elemanlar denir ve birimsel elemanların kümesi $U(R)$ ile gösterilir [5].

Örnek 2.6 $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$, $U(\mathbb{Z}[x]) = \{-1, 1\}$ ve R herhangi bir halka olmak üzere $U(R[x]) = U(R)$ dir.

Tanım 2.7 Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı birimsel ise bu halkaya cisim denir [5].

Örnek 2.8

1. Bir tamlık bölgesinin tek nilpotent elemanı 0, idempotent elemanları ise 0 ve 1 dir.
2. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Z}$ nin birimsel elemanları 1, -1 dir [5].

Tanım 2.9 R halkasının boştan farklı bir A alt kümesi olmak üzere her $a, b \in A$, $r \in R$ için $a - b \in A$ ve $ra \in A$ ($ar \in A$) oluyorsa A ya R halkasının bir sol(sağ) ideali denir. Eğer A hem sağ hem de sol idealse A ya R nin bir ideali denir [4].

Örnek 2.10 $\mathbb{Z}$ halkasının tüm idealleri $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n\mathbb{Z}$ formundadır.

Örnek 2.11 R bir halka ve M de toplamsal değişmeli bir grup olmak üzere; her $a, b \in R$ ve $x, y \in M$ için

1. $a(x + y) = ax + ay$,
2. $(a + b)x = ax + bx$,
3. $(ab)x = a(bx)$

olacak şekilde $R \times M$ den M ye $(a, x) \mapsto ax$ tasviri varsa M ye bir sol R -modül denir [4].

Örnek 2.12

1. Her R halkasını, skaler çarpımı halkadaki çarpım alarak kendisi üzerinde bir R -modül olarak düşünebiliriz.
2. V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir K -modüldür.

3. I, R nin bir ideali ise I bir R -modüldür
4. I, R nin bir ideali ise $R \times R/I \rightarrow R/I$ skaler çarpımını $(r, s + I) \mapsto rs + I$ ile tanımlarsak R/I bir R -modül olur.
5. Her G toplamsal grubu için $\mathbb{Z} \times G \rightarrow G$ skaler çarpımı $(m, g) \mapsto mg$ ile tanımlanırsa G bir $\mathbb{Z}$ -modül olur.
6. R ve S iki halka ve $f : R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. M bir S -modül ise $R \times M \rightarrow M$ skaler çarpımını $(r, m) \mapsto f(r)m$ ile tanımlanırsa M bir R -modül olur. Özel olarak, $M = S$ alır ve S -modül olarak düşünürsek S bir R -modül olur [5].

Tanım 2.13 R bir halka, M bir R -modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N de aynı işlemle bir R -modül ise N ye M nin bir alt modülü veya M nin R -alt modülü denir [5].

Bu bölümde bundan sonra R halkası birimli ve değişmeli halka olarak kabul edilecektir.

Örnek 2.14

1. M modülünün kendisi ve sıfırından ibaret $\{0_M\} = 0$ alt kümesi M nin alt modülüdür.
2. R halkasını R -modül olarak düşündüğümüzde, alt modülleri R nin idealleridir [5].

Önerme 2.15 R -modül M nin boş olmayan bir $N \subseteq M$ alt kümesinin alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$, her $m, m' \in N$ için $rm + r'm' \in N$ olmasıdır [5].

Önerme 2.16 R bir halka, M bir R -modül, N bir alt modülü ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun. $(N : X) = (N :_R X) = \{r \in R \mid rX \subseteq N\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1. $(N : X)$, R nin bir idealidir.
2. $(N : X) = (N : (X))$ dir [5].

Tanım 2.17 R bir halka, M bir R -modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir küme olsun. $(0 : X) = \{r \in R \mid rX = 0\}$ idealine X in sıfırlayıcısı denir ve $Ann(X)$ ile gösterilir [5].

Örnek 2.18 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_6$ yi düşünelim. $X = \{\bar{2}, \bar{3}\} \subset \mathbb{Z}_6$ olarak alalım. $(0 : X) = 3\mathbb{Z}$ yani $Ann(X) = 3\mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.19 R bir halka, M bir R -modül olsun. $(0 : M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$ idealine M modülünün sıfırlayıcısı denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir. Eğer $Ann(M) = 0$ ise M modülüne sadık modül denir. Ayrıca, $Ann(M) = \bigcap_{m \in M} Ann(m)$ dir [5].

Örnek 2.20 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_6$ için $Ann(\mathbb{Z}_6) = 6\mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_6$ sadık modül değildir. Fakat $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ için $Ann(\mathbb{Z}) = 0$ olduğundan $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ sadık modüldür.

Önerme 2.21 R bir halka ve M bir R -modül, I da R nin bir ideali olsun. $I \subseteq Ann(M)$ ise $R/I \times M \rightarrow M$ skaler çarpımını $(r + I, m) \mapsto rm$ ile tanımlayarak R -modül M bir R/I -modül yapılabilir. Ayrıca, M nin bir alt kümesinin R -alt modül olması için gerek ve yeter koşul bir R/I -alt modül olmasıdır [5].

Önerme 2.22 R bir halka, M bir R -modül ve N de M nin bir alt modülü olsun. $R \times M/N \rightarrow M/N$ skaler çarpımını $(r, m + N) \mapsto rm + N$ ile tanımlayarak M/N toplamsal bölüm grubu bir R -modül yapılabilir. M/N ye bölüm modülü denir [5].

Örnek 2.23 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ nin $4\mathbb{Z}$ alt modülünü ele alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bölüm grubu bir $\mathbb{Z}$ -modül olarak bölüm modülüdür.

Sonuç 2.24 M/N aynı zamanda bir $R/(N : M)$ -modüldür [5].

Tanım 2.25 R bir halka, M ve N de R -modül olsunlar. Bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu,

1. her $m, m' \in M$ için, $f(m + m') = f(m) + f(m')$,
2. her $r \in R$ ve her $m \in M$ için, $f(rm) = rf(m)$

koşullarını sağlıyorsa f ye bir R -modül homomorfizması denir. Bir homomorfizma birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma ve hem birebir hem de örten ise izomorfizma denir [5].

Önerme 2.26 R bir halka ve $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun.

$\text{Çek}f = \{m \in M \mid f(m) = 0_N\}$, M nin bir alt modülüdür. f nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}f = 0$ olmasıdır [5].

Tanım 2.27 R bir halka, M bir R -modül ve N bir alt modülü olsun. $p : M \rightarrow M/N$, $p(m) = m + N$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. Bu fonksiyona doğal homomorfizma denir [5].

Teorem 2.28 (Homomorfizma Teoremi) R bir halka ve $f : M \rightarrow N$ bir R -homomorfizması olsun. Bu durumda, $M/\text{Çek}f \cong f(M) = \text{Im}(f)$ dir [5].

Teorem 2.29 (1. İzomorfizma Teoremi) R bir halka, M_1 ve M_2 , R -modül M nin iki alt modülü ve $M_1 \subseteq M_2$ oldun. Bu takdirde M_2/M_1 de M/M_1 in bir alt modülüdür. Ayrıca, $(M/M_1)/(M_2/M_1) \cong M/M_2$ dir [5].

Teorem 2.30 (2. İzomorfizma Teoremi) R bir halka, M bir R -modül ve M_1 ile M_2 de iki alt modül olsunlar. Bu takdirde $\Psi : M_1/(M_1 \cap M_2) \rightarrow (M_1 + M_2)/M_2$, $m + (M_1 \cap M_2) \mapsto m + M_2$ ile tanımlı Ψ fonksiyonu bir izomorfizmadır [5].

Tanım 2.31 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N : M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye R -modül M nin bir asal alt modülü denir [5].

Örnek 2.32

1. R halkasının her asal ideali R -modül R nin bir asal alt modülüdür.
2. Bir vektör uzayının her öz alt modülü asaldır [5].

Lemma 2.33 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. N alt modülünün asal olması için gerek ve yeter koşul $(N : M)$ nin, R halkasının asal ideali olması ve M/N nin bir serbest burulmalı $R/(N : M)$ -modül olmasıdır [5].

İspat: N , R -modül M nin bir asal alt modülü ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in (N : M)$ ve $b \notin (N : M)$ olsun. Şu halde $abM \subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ olur. Böylece $abt \in N$ ve $bt \notin N$ olacak şekilde bir $t \in M$ vardır. N , R -modül M nin bir asal alt modülü olduğu için $a \in (N : M)$ olur. Böylece $(N : M)$ bir asal idealdir. Ayrıca, $\bar{0} \neq \bar{r} \in R/(N : M)$ ve $\bar{m} \in M/N$ olmak üzere $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ olsun. Şu halde $rm \in N$ ve $r \notin (N : M)$ olur. N asal alt modül olduğundan $m \in N$ ve böylece $\bar{m} = \bar{0}$ olur. Tersine, M/N bir serbest burulmalı $R/(N : M)$ -modül olsun. N nin asal alt modül olduğunu gösterelim. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $r \notin (N : M)$ olsun. O halde $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ ve $\bar{r} \neq \bar{0}$ olur. M/N serbest burulmalı $R/(N : M)$ -modül olduğundan $\bar{m} = \bar{0}$ ve böylece $m \in N$ olur.

Yukarıdaki Lemma ya göre N, M nin asal alt modülü ise $(N : M)$, R halkasının asal idealidir. Fakat bir sonraki örnek $(N : M)$, R halkasının asal ideali iken N nin R -modül M nin asal alt modülü olamayabileceğini gösterir.

Örnek 2.34 $\mathbb{Z}$ -modül $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin $a > 1$ olmak üzere, $N = \mathbb{Z}(a, 0)$ alt modülünü göz önüne alalım. Bu durumda $(N : M) = (0)$, $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealidir. Fakat N , asal alt modül değildir [5].

Önerme 2.35 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $(N : M)$, R halkasının bir maksimal ideali ise N, M nin bir asal alt modülüdür. Özel olarak, $IM \neq M$ olacak şekilde R halkasının her I maksimal ideali için IM, M nin bir asal alt modülüdür [5].

İspat: $(N : M) = P$, R halkasının maksimal ideali olduğu için $M/N, R/P$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. O halde M/N bir serbest burulmalı R/P -modüldür. Buradan N nin M nin bir asal alt modülü olduğu elde edilir. Ayrıca, $I \subseteq (IM : M)$ olduğu açıktır. Fakat I , R halkasının bir maksimal ideali ise, $I = (IM : M)$ olur. O halde IM, M nin bir asal alt modülüdür.

Teorem 2.36 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. N nin bir asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul R halkasının bir I ideali ve M nin bir D alt modülü için $ID \subseteq N$ olmasının, $I \subseteq (N : M)$ veya $D \subseteq N$ olmasıdır [5].

İspat: Kabul edelim ki N, R -modül M nin asal alt modülü olsun. I, R halkasının bir ideali ve D, M nin bir alt modülü olmak üzere, $ID \subseteq N$ fakat $D \not\subseteq N$ olduğunu kabul edelim. $a \in I$ alalım. O halde $ad \in N$ ve $d \notin N$ olacak şekilde bir $d \in M$ vardır. N asal alt modül olduğu için $a \in (N : M)$ olur. Sonuç olarak $I \subseteq (N : M)$ olduğu görülür. Tersine, $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $m \notin N$ olsun. Bu durumda $(r)(m) \subseteq N$ ve $(m) = Rm \not\subseteq N$ olur. Hipotezden $(r) \subseteq (N : M)$ ve böylece $r \in (N : M)$ olur.

Önerme 2.37 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir maksimal alt modülü ise N asaldır [5].

İspat: N, M nin bir maksimal alt modülü olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ fakat $m \notin N$ olsun. O halde $N + Rm = M$ dir. Böylece $rM = rN + Rrm \subseteq N$, yani $r \in (N : M)$

olur. Böylece N, M nin bir asal alt modülüdür.

Önerme 2.38 R bir halka, $\{N_i : i \in I\}$, R -modül M nin asal alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi ve bu aile tam sıralı(zincir) olsun. O halde $\bigcap_{i \in I} N_i, M$ nin bir asal alt modülüdür. Eğer M sonlu üretilmiş ise $\bigcup_{i \in I} N_i, M$ nin bir asal alt modülüdür [5].

İspat: $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ olsun. O halde N, M nin bir öz alt modülüdür. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ fakat $m \notin N$ olsun. Böylece $m \notin N_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. N_i asal alt modül olduğu için $r \in (N_i : M)$ olur. j, I nin herhangi bir elemanı olmak üzere $N_i \subseteq N_j$ ise $r \in (N_j : M)$ olduğu açıktır. Öbür yandan $N_j \subset N_i$ ise $rm \in N_j$ ve $m \notin N_j$ olduğundan $r \in (N_j : M)$ olur. Sonuç olarak $r \in (N : M)$ olur. Şimdi kabul edelim ki $K = \bigcup_{i \in I} N_i$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan K bir öz alt modüldür. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in K$ fakat $m \notin K$ olsun. Bir $i \in I$ için $rm \in N_i$ ve $m \notin N_i$ olur. N_i asal alt modül olduğu için $r \in (N_i : M) \subseteq (K : M)$ olur. Böylece K asal alt modüldür.

Tanım 2.39 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ ve $m \notin N$ olması bir $t > 0$ tam sayısı için $r^t \in (N : M)$ olmasını gerektiriyorsa, yani, $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ iken $r \in \sqrt{(N : M)}$ veya $m \in N$ ise N ye asalımsı alt modül denir [5].

Örnek 2.40

1. R bir halka olsun. Her R -modül R nin asalımsı alt modülleri asalımsı idealleridir.
2. $4\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_{12}$ nin bir asalımsı alt modülüdür.

Önerme 2.41 M bir R -modül ve N, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. Şu halde $(N : M) = \text{Ann}(M/N)$, R nin bir asalımsı idealidir [5].

İspat: N, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in (N : M)$ ve $b \notin (N : M)$ kabul edelim. O halde $abM \subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ dir. Böylece $abm \in N$ ve $bm \notin N$ olacak şekilde en az bir $m \in M$ bulunabilir. N asalımsı alt modül olduğundan $a^k \in (N : M)$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. Böylece $(N : M)$ bir asalımsı ideal olur.

Sonuç 2.42 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. O halde $\sqrt{(N : M)}$ bir asal idealdir [5].

Tanım 2.43 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. $\sqrt{(N : M)} = P$ ise N ye P asal ideale ilişkin asalımsı alt modül veya kısaca P -asalımsı alt modül denir [5].

Önerme 2.44 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. R nin bir P ideali için aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa P bir asal ideal ve N de M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

1. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ ve $m \notin N$ olması $r \in P$ olmasını gerektirir,
2. $r \in P$ ise bir k pozitif tam sayısı için $r^k M \subseteq N$ dir [5].

İspat: Bu iki koşul sağlanıyorsa N nin asalımsı bir alt modül olduğu açıktır. $\sqrt{(N : M)} = P$ olduğunu gösterelim. (2) den $P \subseteq \sqrt{(N : M)}$ dir. Ters kapsama için, $r \in \sqrt{(N : M)}$ alalım. Bir pozitif s tam sayısı için $r^s \in (N : M)$ ve böylece $r^s M \subseteq N$ dir. s yi bu şekildeki en küçük pozitif tam sayı olarak seçelim. O halde $s \geq 1$ ve $r^{s-1} M \not\subseteq N$ dir. O halde $r^{s-1} m \notin N$ olacak şekilde en az bir $m \in M$ vardır. Böylece $r(r^{s-1} m) \in N$ ve $r^{s-1} m \notin N$ olduğundan (1) den $r \in P$ yani, $\sqrt{(N : M)} \subseteq P$ elde edilir.

Sonuç 2.45 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. $r \in R$, $m \in M$ ve $rm \in N$ ise $r \in P$ veya $m \in N$ dir [5].

Sonuç 2.46 R bir halka, M bir R -modül olsun. N , M nin bir P -asalımsı alt modülü I , R nin bir ideali ve K , M nin bir alt modülü olsun. O halde $IK \subseteq N$ ise $I \subseteq P$ veya $K \subseteq N$ dir [5].

İspat: $K \not\subseteq N$ olsa, bir $m \in K/N$ vardır ki her $r \in I$ için $rm \in IK \subseteq N$ olur. $m \notin N$ ve N asalımsı alt modül olduğundan $r \in P$ elde edilir.

Sonuç 2.47 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. X , R halkasının $X \not\subseteq P$ olacak şekilde bir alt kümesi ise $(N :_M X) = N$ dir [5].

İspat: $(N :_M X) = (N :_M (X))$ olduğundan X alt kümesini bir ideal kabul edebiliriz. $X(N :_M X) \subseteq N$ ve $X \not\subseteq P$ dir. Bir önceki sonuçtan, $(N :_M X) \subseteq N$ dir. $N \subseteq X(N :_M X)$ olduğu açıktır. Buradan $(N :_M X) = N$ elde edilir.

Önerme 2.48 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir asalımsı alt modülü olsun. O halde N nin bir asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $(N : M)$ nin R halkasının bir asal ideali olmasıdır [5].

İspat: N bir asal alt modül olduğunda $(N : M)$ nin bir asal ideal olduğunu biliyoruz. Tersine, kabul edelim ki $(N : M)$, R halkasının bir asal ideali olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $m \notin N$ kabul edelim. N asalımsı alt modül olduğu için bir n tam sayısı için $r^n \in (N : M)$ olur. Sonuç olarak N , M nin bir asal alt modülüdür.

Tanım 2.49 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $r, s \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rsx \in N$ iken $rx \in N$ veya $sx \in N$ oluyorsa N ye klasik asal alt modül denir [6].

Tanım 2.50 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için, $0 \neq rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N : M)$ olmasını gerektiriyorsa N ye R -modül M nin bir zayıf asal alt modülü denir [7].

0 alt modülü her zaman zayıf asal alt modül olduğundan, herhangi bir zayıf asal alt modül asal alt modül olmak zorunda değildir.

Örnek 2.51 $\mathbb{Z}_6$ -modül $\mathbb{Z}_6$ da $\{\bar{0}\}$ alt modülü zayıf asal alt modül iken asal alt modül değildir.

Tanım 2.52 R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $r, s \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rsx \in N$ iken $rs \in (N : M)$, $rx \in N$, $sx \in N$ durumlarından en az biri sağlanıyorsa N ye 2-yutan alt modül denir [8].

Önerme 2.53 N , M nin bir 2-yutan alt modülü ve $\sqrt{(N : M)} = J$ olsun. O halde $(N : M)$ ve J , R nin 2-yutan idealidir. Ayrıca, $J^2 \subseteq (N : M) \subseteq J = \{r \in R \mid r^2 \in (N : M)\}$ dir [8].

İspat: Kabul edelim ki $str \in (N : M)$ olacak şekilde $s, t, r \in R$ olsun. Eğer $st, tr \notin (N : M)$ ise $srx, try \notin N$ olacak şekilde $x, y \in M$ N vardır. N 2-yutan ve $st(r(x+y)) \in N$ olduğundan $st \in (N : M)$ veya $sr(x+y) \in N$ veya $tr(x+y) \in N$ dir. Eğer $sr(x+y) \in N$ ise $srx \notin N$ olduğundan $sry \notin N$ dir. Böylece $st(ry) \in N$ ve $try \notin N, st \in (N : M)$ olur. Benzer şekilde $tr(x+y) \in N$ durumunda da $st \in (N : M)$ elde edilir. $(N : M)$, 2-yutan ideal olduğundan J

de 2-yutan idealdir, öyle ki $J^2 \subseteq (N : M) \subseteq J = \{r \in R \mid r^2 \in (N : M)\}$ dir.

Lemma 2.54 N, M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. O halde N nin 2-yutan olması için gerek ve yeter koşul $P^2 \subseteq (N : M)$ olmasıdır. Özel olarak, M nin her bir K maksimal alt modülü için $(K : M)^2$, R nin bir 2-yutan idealidir [8].

İspat: N , 2-yutan ise bir önceki önermeden $P^2 \subseteq (N : M)$ dir. Tersine, kabul edelim ki $r, s \in R$ ve $x \in M$ için $rsx \in N$ olsun. Eğer $rx, sx \notin N$ ise N , P -asalımsı olduğundan $r, s \in P$ ve böylece $rs \in P^2 \subseteq (N : M)$ olur.

Tanım 2.55 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $r, s \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rsx \in N$ iken $rs \in (N : M)$, $rx \in \sqrt{(N : M)}M$, $sx \in \sqrt{(N : M)}M$ durumlarından en az biri sağlanıyorsa N ye 2-yutan asalımsı alt modül denir [9].

Tanım 2.56 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Eğer $r, s \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $0 \neq rsx \in N$ iken $rs \in (N : M)$, $rx \in \sqrt{(N : M)}M$, $sx \in \sqrt{(N : M)}M$ durumlarından en az biri sağlanıyorsa N ye zayıf 2-yutan asalımsı alt modül denir [9].

Teorem 2.57 M bir R -modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer $\sqrt{(N : M)}M, M$ nin bir asal alt modülü ise N, M nin 2-yutan asalımsı alt modülüdür [9].

İspat: Kabul edelim ki $\sqrt{(N : M)}M, M$ nin bir asal alt modülü olsun. $a, b \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $am \notin \sqrt{(N : M)}M$ olacak şekilde $abm \in N$ alalım. $\sqrt{(N : M)}M$ asal alt modül ve $abm \in \sqrt{(N : M)}M$ olduğundan $b \in (\sqrt{(N : M)}M : M)$ dir. Böylece $bm \in \sqrt{(N : M)}M$ elde edilir. Sonuç olarak N, M nin bir 2-yutan alt modülü olur.

BÖLÜM 3

BİR MODÜLÜN İDEALLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde R değişmeli, birimli bir halka ve M de bir R -modül kabul edilecektir. Bir M modülünün R de idealleştirilmesi $R(+)M = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$ olarak aşağıdaki işlemler ile tanımlanmıştır:

$$r_1 = r_2, m_1 = m_2 \Leftrightarrow (r_1, m_1) = (r_2, m_2),$$

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2),$$

$$(r_1, m_1) \cdot (r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1).$$

Bu işlemlerle $R(+)M$ değişmeli ve $(1, 0)$ elemanı ile birimli bir halka olur. Tanımlanan $R(+)M$ halkasına M modülü ile R halkasının aşık genişlemesi de denir. R halkası $R(+)M$ halkasının içine $f: R \rightarrow R(+)M; r \mapsto (r, 0)$ halka homomorfizması ile gömülebilir. Burada $f(R) = R(+)0$ dır. $R(+)0, R(+)M$ halkasının bir alt halkasıdır fakat ideali değildir.

$R(+)M$ halkası üzerinde tanımlanan işlemler halkanın bazı özelliklerini bilinenden farklı hale getirir.

İlk olarak bu halkanın ideallerini inceleyelim. I ve J sırasıyla R ve S halkalarının idealleri olsunlar. Biz biliyoruz ki $R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$ bilinen ikili işlemler ile bir halkadır ve ayrıca herhangi bir ideali $I \times J$ formundadır. Fakat $R(+)M$ halkasının herhangi bir ideali I, R nin bir ideali N de M nin bir alt modülü olmak üzere $I(+)N$ formunda olmak zorunda değildir. Bunu örnek ile gösterelim.

Örnek 3.1 $\mathbb{Z}(+)2\mathbb{Z}$ halkasının $J = \langle (2, 2) \rangle$ idealini ele alalım. I, R nin, N de M nin alt modülü olmak üzere J ideali $I(+)N$ formunda olsaydı $2 \in 2\mathbb{Z}$ ve $(2, 2) \in 2\mathbb{Z}(+)2\mathbb{Z}$ oldu-

ğundan $2\mathbb{Z}(+)2\mathbb{Z} = J$ olmalıdır. Kabul edelim ki $J = 2\mathbb{Z}(+)2\mathbb{Z}$ olsun. O halde $(2, 4) \in 2\mathbb{Z}(+)2\mathbb{Z}$ dir. Fakat $(2, 4) \notin J$.

$R(+)M$ halkasının $I(+)N$ formunda olan idealleri de bulunmaktadır. Bu formdaki ideal-
lere özel bir ad vereceğiz.

Tanım 3.2 Eğer $R(+)M$ halkasının bir J ideali, I, R nin bir ideali, M bir R -modül ve N de M nin bir alt modülü olmak üzere $I(+)N$ formunda oluyorsa J ye homojen ideal denir.

Örnek 3.3 $6\mathbb{Z}(+)3\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_{12}$ halkasının bir homojen idealidir.

Ayrıca, I, R nin bir ideali, N de M nin bir alt modülü olmak üzere $I(+)N$ kümesi $R(+)M$ nin bir ideali olmak zorunda değildir.

Örnek 3.4 $4\mathbb{Z}(+)8\mathbb{Z}$ kümesi, $(4, 8) \in 4\mathbb{Z}(+)8\mathbb{Z}$ ve $(1, 1) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ iken $(4, 8)(1, 1) = (4, 12) \notin 4\mathbb{Z}(+)8\mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ halkasının bir ideali değildir.

Ancak, aşağıdaki teorem sağlanırsa I, R nin bir ideali, N de M nin bir alt modülü olmak üzere $I(+)N$ kümesi $R(+)M$ halkasının bir ideali olur.

Teorem 3.5 I, R nin bir ideali, N de M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $I(+)N$ nin $R(+)M$ nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $IM \subseteq N$ olmasıdır [3].

İspat: Kabul edelim ki $I(+)N, R(+)M$ nin bir ideali olsun. Herhangi $i \in I$ ve $m \in M$ için $(i, 0) \in I(+)N$ ve $(0, m) \in R(+)M$ dir. $I(+)N$ yi ideal kabul ettiğimizden $(i, 0)(0, m) = (0, im) \in I(+)N$ olur. Buradan $im \in N$ ve dolayısıyla $IM \subseteq N$ elde edilir.

Tersine, $(i_1, n_1), (i_2, n_2) \in I(+)N$ ve $(r, m) \in R(+)M$ alalım. I bir ideal, N de bir alt modül olduğundan $(i_1 - i_2, n_1 - n_2) = (i_1, n_1) - (i_2, n_2) \in I(+)N$ ve ayrıca $IM \subseteq N$ kabulünden $(r, m)(i_1, n_1) = (ri_1, rn_1 + i_1m) \in I(+)N$ olur. Böylece, $I(+)N$ nin $R(+)M$ nin bir ideali olduğu gösterilmiş olur.

Bu teoremin bir sonucu olarak $0(+)M$ kümesi $R(+)M$ halkasının bir ideali ve $m_1, m_2 \in M$ için $(0, m_1)(0, m_2) = (0, 0) = 0_{R(+)M}$ olduğundan $(0(+)M)^2 = 0$ dir. Dolayısıyla, $0(+)M$ nilpotent idealdir ve eğer $M \neq 0$ ise $0(+)M$ nin nilpotentlik derecesi 2 dir.

M yi bir R -modül olarak kabul etmiştik. Ayrıca, $R(+)M$ nin de bir R -modül olduğu kul-
lanılarak M modülünü $R(+)M$ modülü içine

$f: M \longrightarrow R(+)M; m \longmapsto (0, m)$ şeklinde gömülebilir. Burada $f(M) = 0(+)M$ dir. Dolayısıyla $M, R(+)M$ halkasının $0(+)M$ ideali olarak görülebilir. Bir modülün idealleştirilmesi ismi de buradan gelmektedir.

Teorem 3.6 I, R nin bir ideali, M bir R -modül N, M nin bir alt modülü ve $I(+)N$ de $R(+)M$ nin bir ideali olsun. O halde, M/N bir R/I -modül, $(R(+)M)/(I(+)N) \cong R/I(+)M/N$ ve özel olarak, $(R(+)M)/(0(+)M) \cong R/0(+)M/M \cong R$ dir [3].

İspat: $I(+)N$ ideal ise Teorem 3.5 ten $IM \subseteq N$ dir. O halde, $I \subseteq (N : M) = \text{Ann}(M/N)$ olduğundan M/N bir R/I -modül ve buradan da $R/I(+)M/N$ bir halkadır. Şimdi bir f tasvirini $r \in R, m \in M$ olmak üzere $f: R(+)M \longrightarrow R/I(+)M/N; (r, m) \longmapsto (r+I, m+N)$ ile tanımlayalım. f bir epimorfizma ve $\text{Çek}f = I(+)N$ dir. 1. izomorfizma teoreminden $(R(+)M)/(I(+)N) \cong R/I(+)M/N$ dir. Özel olarak, $I = 0, N = M$ olarak alındığında da istenilen elde edilir.

Sonuç 3.7 M bir R -modül olsun. $R(+)M$ halkasının $0(+)M$ yi içeren tüm idealleri J, R nin bir ideali olmak üzere $J(+)M$ formundadır.

$\mathbb{Z}_n$ bir $\mathbb{Z}$ -modül olduğundan $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ bir halkadır. Şimdi bu halkanın birimsel, nilpotent, idempotent ve sıfır bölen elemanlarını karakterize edelim.

Önerme 3.8 $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ halkasının

1. Birimsel elemanları, tüm $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ için, $(1, \bar{k})$ veya $(\overline{-1}, \bar{k})$ formundadır.
2. Nilpotent elemanları, tüm $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ için $(0, \bar{k})$ formundadır.
3. İdempotent elemanları $(1, \bar{0})$ ve $(0, \bar{0})$ dır.
4. Sıfır bölen elemanlarından oluşan küme

$$Z(\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n) = \{(a, \bar{k}) \mid a = 0 \text{ veya } (a, n) \neq 1, \bar{k} \in \mathbb{Z}_n\} \text{ dir.}$$

İspat: (1) Kabul edelim ki $(a, \bar{k}) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ birimsel eleman olsun. O halde, $(a, \bar{k})(b, \bar{t}) = (ab, \overline{at+bk}) = (1, \bar{0})$ olacak şekilde $(b, \bar{t}) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ elemanı vardır. Böylece, $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ olduğundan $a = 1 = b$ ya da $a = -1 = b$ dir ve buradan da $\overline{t+k} = \bar{0}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ halkasının birimsel elemanları $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$ olmak üzere $(1, \bar{k}), (-1, \bar{k})$

şeklindedir. Tersine, $(1, \bar{k})(1, \overline{n-k}) = (1, \bar{0})$ ve $(-1, \bar{k})(-1, \overline{n-k}) = (1, \bar{0})$ olduğundan $(1, \bar{k})$ ve $(-1, \bar{k})$ birimseldir.

(2) Kabul edelim ki $(a, \bar{k}) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ nilpotent eleman olsun. O halde, $(a, \bar{k})^t = (a^t, \overline{ta^{t-1}k}) = (0, \bar{0})$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{N}^+$ vardır. $\mathbb{Z}$ halkasının tek nilpotent elemanı 0 olduğundan $a = 0$ elde edilir. Tersine, $(0, \bar{k})^2 = (0, \bar{0})$ olduğundan $(0, \bar{k})$, her $k \in \mathbb{Z}_n$ için bir nilpotent elemandır.

(3) Kabul edelim ki $(a, \bar{k}) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ idempotent eleman olsun. O halde, $(a, \bar{k})^2 = (a^2, \overline{2ak}) = (a, \bar{k})$ ve böylece, $\mathbb{Z}$ nin idempotent elemanları 1 ve 0 olduğundan $a = 1$ veya $a = 0$ dir. Eğer $a = 1$ ise $\overline{2k} - \bar{k} = \bar{k} = \bar{0}$ dir ve eğer $a = 0$ ise $\bar{k} = \bar{0}$ dir. Tersine, $(1, \bar{0})^2 = (1, \bar{0})$ ve $(0, \bar{0})^2 = (0, \bar{0})$ olduğundan $(1, \bar{0})$ ve $(0, \bar{0})$ idempotenttir.

(4) Kabul edelim ki $(a, \bar{k}) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ herhangi bir sıfır bölen eleman olsun. O halde, $(a, \bar{k})(b, \bar{t}) = (ab, \overline{at + bk}) = (0, \bar{0})$ olacak şekilde $(0, \bar{0}) \neq (b, \bar{t}) \in \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ vardır. $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi ve dolayısıyla 0 elemanı dışında sıfır bölteni olmadığından $a = 0$ veya $b = 0$ dir. Eğer $a \neq 0$ ise $b = 0$ ve buradan da $n \mid at$ olur. $(b, \bar{t}) \neq (0, \bar{0})$ olduğundan $(a, n) \neq 1$ elde edilir. Böylece, $a = 0$ ya da $(a, n) \neq 1$ dir. Tersine, $0 \neq b \in \mathbb{Z}$ için $(0, \bar{k})(b, \bar{0}) = (0, \bar{0})$ olduğundan $(0, \bar{k})$ sıfır bölendir. Ayrıca, $d = (a, n) \neq 1$ olmak üzere $0 \neq t \in \mathbb{Z}$ için $td = n$ olsun. Bu durumda $(a, \bar{k})(0, \bar{t}) = (0, \bar{0})$ olacak şekilde bir $(0, \bar{t}) \neq (0, \bar{0})$ olduğundan $(a, n) \neq 1$ için $(a, \bar{k})$ sıfır bölendir.

Herhangi toplamsal, değişmeli M grubu aynı zamanda bir $\mathbb{Z}$ -modüldür. Dolayısıyla $\mathbb{Z}(+)M$ bir halkadır. Bu halkanın bazı özel elemanları aşağıdaki önermede karakterize edilmiştir.

Önerme 3.9 $\mathbb{Z}(+)M$ halkasının:

1. Birimsel elemanları her $m \in M$ için, $(1, m)$ veya $(-1, m)$ formundadır.
2. Nilpotent elemanları her $m \in M$ için, $(0, m)$ formundadır.
3. İdempotent elemanları $(1, 0)$ ve $(0, 0)$ dır.
4. Sıfır bölen elemanlarının kümesi

$$Z(\mathbb{Z}(+)M) = \{(a, m) \mid a = 0 \text{ or } a \in \text{Ann}(M), m \in M\} \text{ şeklindedir.}$$

İspat: (1) Kabul edelim ki $(a, m) \in \mathbb{Z}(+)M$ birimsel eleman olsun. O halde, $(a, m)(b, n) =$

$(ab, an + bm) = (1, 0)$ olacak şekilde $(b, n) \in \mathbb{Z}(+)M$ elemanı vardır. Böylece, $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ olduğundan $a = 1 = b$ ya da $a = -1 = b$ dir ve buradan da $n + m = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}(+)M$ halkasının birimsel elemanları $(1, m)$, $(-1, m)$ dir. Tersine, $(1, m)(1, -m) = (1, 0)$ ve $(-1, m)(-1, -m) = (1, 0)$ olduğundan $m \in M$ için $(1, m)$ ve $(-1, m)$ birimseldir.

(2) Kabul edelim ki $(a, m) \in \mathbb{Z}(+)M$ nilpotent eleman olsun. O halde, $(a, m)^n = (a^n, na^{n-1}m) = (0, 0)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}^+$ vardır. $\mathbb{Z}$ halkasının tek nilpotent elemanı 0 olduğundan $a = 0$ elde edilir. Tersine, $(0, m)^2 = (0, 0)$ olduğundan $(0, m)$, her $m \in M$ için bir nilpotent elemandır.

(3) Kabul edelim ki $(a, k) \in \mathbb{Z}(+)M$ idempotent eleman olsun. O halde, $(a, k)^2 = (a^2, 2ak) = (a, k)$ ve böylece, $\mathbb{Z}$ nin idempotent elemanları 1 ve 0 olduğundan $a = 1$ veya $a = 0$ dir. Eğer $a = 1$ ise $2k - k = k = 0$ dır ve eğer $a = 0$ ise $k = 0$ dir. Tersine, $(1, 0)^2 = (1, 0)$ ve $(0, 0)^2 = (0, 0)$ olduğundan $(1, 0)$ ve $(0, 0)$ idempotenttir.

(4) Kabul edelim ki $(a, m) \in \mathbb{Z}(+)M$ sıfır bölen eleman olsun. O halde, $(a, m)(b, n) = (ab, an + bm) = (0, 0)$ olacak şekilde $(b, n) \in \mathbb{Z}(+)M$ vardır. $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi ve dolayısıyla 0 elemanı dışında sıfır böleni olmadığından $a = 0$ veya $b = 0$ dır. Eğer $a \neq 0$ ise $b = 0$ dır. Bu durumda $(0, 0) \neq (b, n)$ olduğundan $an = 0$ ve $n \neq 0$ dir. Böylece, $a \in \text{Ann}(M)$ elde edilir. Tersine, eğer $a = 0$ ise $(0, m)(b, 0) = (0, 0)$ olacak şekilde $(b, 0) \neq (0, 0)$ ve eğer $a \in \text{Ann}(M)$ ise $(a, m)(0, n) = (0, 0)$ olacak şekilde $(0, n) \neq (0, 0)$ vardır.

Önerme 3.10 $R(+)M$ halkasının

1. Birimsel elemanları $U(R(+)M) = U(R)(+)M$ dir[3].
2. İdempotent elemanları $\text{Id}(R(+)M) = \text{Id}(R)(+)0$ dır[3].
3. Sıfır bölen elemanları $Z(R(+)M) = \{(r, m) \mid r \in Z(R) \cup Z(M), m \in M\}$ dir[3].

İspat: (1) Kabul edelim ki $(r, m) \in U(R(+)M)$ olsun. O halde $(r, m)(s, n) = (rs, rn + sm) = (1, 0)$ olacak şekilde bir (s, n) vardır. Buradan $rs = 1$ ve dolayısıyla $r \in U(R)$ elde edilir. Tersine, $r \in U(R)$ alalım. O halde $rs = 1$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. Buradan $(r, 0)(s, 0) = (1, 0)$ olduğundan $(r, 0)$ birimseldir ve her $m \in M$ için $(0, m)$ de nilpotent olduğundan $(r, m) = (r, 0) + (0, m)$ birimsel elde edilir.

(2) Kabul edelim ki $r \in R$ idempotent olsun. O halde $(r, 0), (r, 0)(r, 0) = (r, 0)$ olduğundan idempotenttir. Tersine, kabul edelim ki $(r, m) \in R(+)M$ idempotent olsun. O halde $(r, m) = (r, m)^2 = (r^2, 2rm)$ olur. Buradan r nin idempotent olduğu elde edilir. Ayrıca, $m = 2rm$ den de $rm = 2r^2m = 2rm$ ve böylece $rm = 0$ dır. Buradan da $m = 2rm$ ve $rm = 0$ dan $m = 0$ elde edilir.

(3) Kabul edelim ki $r \in Z(R) \cup Z(M)$ olsun. Eğer $r \in Z(R)$ ise $rs = 0$ olacak şekilde $0 \neq s \in R$ vardır. Buradan $(r, 0)(s, 0) = (0, 0)$ ve $(s, 0) \neq (0, 0)$ olduğundan $(r, 0) \in Z(R(+)M)$ dir. Eğer $r \in Z(M)$ ise $rn = 0$ olacak şekilde $0 \neq n \in M$ vardır. Buradan $(0, n) \neq (0, 0)$ ve $(r, 0)(0, n) = (0, 0)$ olduğundan $(r, 0) \in Z(R(+)M)$ dir. Herhangi $m \in M$ için $(0, m) \in Nil(R(+)M)$ dir. Dolayısıyla, $(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in Z(R(+)M)$ olur. Tersine, $(r, m) \in Z(R(+)M)$ alalım. Öyleyse bir $(s, n) \neq (0, 0)$ için $(0, 0) = (r, m)(s, n) = (rs, rn + sm)$ dir. Eğer $s \neq 0$ ise $rs = 0$ ve böylece $r \in Z(R)$, eğer $s = 0$ ise $n \neq 0$ ve $rn = 0$, böylece $r \in Z(M)$ olur. Dolayısıyla $r \in Z(R) \cup Z(M)$ dir.

BÖLÜM 4

$R(+)M$ HALKASININ İDEALLERİ

Teorem 4.1 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. $R(+)M$ halkasının asal idealleri $\mathcal{P}$, R nin bir asal ideali olmak üzere $\mathcal{P}(+)M$ formundadır [3].

İspat: Kabul edelim ki J , $R(+)M$ nin bir asal ideali olsun. $(0(+)M)^2 = 0 \subseteq J$ ve J de asal olduğundan $(0(+)M) \subseteq J$ dir. J , $0(+)M$ yi içerdiğinden Sonuç 3.7 den P , R nin bir ideali olmak üzere $J = P(+)M$ formundadır. Ayrıca, $(R(+)M)/J = (R(+)M)/(P(+)M) \cong R/P$ tamlık bölgesi olduğundan P asal idealdir. Tersine P , R nin bir asal ideali olsun. $(R(+)M)/(P(+)M) \cong R/P$ tamlık bölgesi olduğundan $P(+)M$, $R(+)M$ nin asal ideali dir.

Teorem 4.2 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. $R(+)M$ halkasının maksimal idealleri $\mathcal{M}$, R nin bir maksimal ideali olmak üzere $\mathcal{M}(+)M$ formundadır [3].

İspat: Kabul edelim ki J , $R(+)M$ nin bir maksimal ideali olsun. O halde J aynı zamanda asal idealdir. Teorem 4.1 in ispatından faydalananarak $\mathcal{M}$, R nin bir ideali olmak üzere $J = \mathcal{M}(+)M$ formunda olduğu elde edilir. Ayrıca, $(R(+)M)/J = (R(+)M)/(\mathcal{M}(+)M) \cong R/\mathcal{M}$ cisim olduğundan $\mathcal{M}$ maksimal idealdir. Tersine $\mathcal{M}$, R nin bir Maksimal ideali olsun. $(R(+)M)/(\mathcal{M}(+)M) \cong R/\mathcal{M}$ cisim olduğundan $\mathcal{M}(+)M$, $R(+)M$ nin maksimal idealidir.

Teorem 4.3 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. $R(+)M$ halkasının radikal idealleri I , R nin bir radikal ideali olmak üzere $I(+)M$ formundadır [3].

İspat: Kabul edelim ki J , $R(+)M$ nin bir radikal ideali olsun. $(0(+)M)^2 = 0 \subseteq J$ ve J de radikal ideal olduğundan $(0(+)M) = 0 \subseteq J$ dir. J , $0(+)M$ yi içerdiğinden Sonuç

3.7 den I, R nin bir ideali olmak üzere $J = I(+)M$ formundadır. Ayrıca, $(R(+)M)/J = (I(+)M) \cong R/I$ olduğundan I radikal idealdir. Tersine I, R nin bir radikal ideali olsun. $(R(+)M)/(I(+)M) \cong R/I$ olduğundan $I(+)M, R(+)M$ nin radikal idealidir.

Teorem 4.4 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül, $I(+)N$ de $R(+)M$ halkasının bir ideali olsun. $I(+)N$ nin radikali $\sqrt{I(+)N} = \sqrt{I}(+)M$ dir [3].

İspat: Kabul edelim ki $(r, m) \in \sqrt{I(+)N}$ olsun. O halde $(r, m)^n = (r^n, nr^{n-1}m) \in I(+)N$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}^+$ vardır. Buradan $r^n \in I$ ve dolayısıyla $r \in \sqrt{I}$ elde edilir. Böylece $(r, m) \in \sqrt{I}(+)M$ ile $\sqrt{I(+)N} \subseteq \sqrt{I}(+)M$ elde edilir. Tersine, $(r, m) \in \sqrt{I}(+)N$ alalım. O halde $r^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}^+$ vardır. I, R nin bir ideali olduğundan $r^{n+1} \in I$ ve $IM \subseteq N$ olduğundan da $(n+1)r^n m \in N$ dir. Böylece, $(r, m)^{n+1} = (r^{n+1}, (n+1)r^n m) \in I(+)N$ olur. Buradan da $(r, m) \in \sqrt{I(+)N}$ ile $\sqrt{I}(+)M \subseteq \sqrt{I(+)N}$ elde edilir.

Teorem 4.5 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül, J de $R(+)M$ halkasının bir ideali olsun. J nin radikali $I = \{r \in R \mid (r, b) \in J, b \in M\}$ olmak üzere $\sqrt{J} = \sqrt{I}(+)M$ dir [3].

İspat: $0(+)0, R(+)M$ nin sıfır ideali ve $\sqrt{0(+)0} = \{(r, m) \in R(+)M \mid (r, m)^n \in 0(+)0, n \in \mathbb{N}^+\}$ dir. $\sqrt{0(+)0}, R(+)M$ nin tüm nilpotent elemanlarını içerdiğinden ve $0(+)M$ de $R(+)M$ nin bir nilpotent ideali olduğundan $0(+)M \subseteq \sqrt{0(+)0}$ olur. J ideal olduğundan $0(+)0 \in J$ ve buradan da $0(+)M \subseteq \sqrt{0(+)0} \subseteq \sqrt{J}$ ile bir önceki teorem ve Sonuç 3.7 yardımıyla $\sqrt{J} = \sqrt{I}(+)M$ elde edilir.

Teorem 4.6 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. I, R nin bir ideali, N de M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $I(+)N$ nin asalımsı olması için gerek ve yeter şart ya

1. $N = M$ ve I nin R nin bir ideali olması ya da
2. $N \subsetneq M, IM \subseteq N, I$ ve N nin P -asalımsı olmasıdır [3].

İspat: $N = M$ ise $(R(+)M)/(I(+)M) \cong R/I$ olduğundan $I(+)M$ asalımsıdır ancak ve ancak I asalımsıdır. Kabul edelim ki $N \subsetneq M$ olsun. $I(+)N, R(+)M$ nin bir ideali ise $IM \subseteq N$ dir. $(R(+)M)/(I(+)N)$ ye geçerek $I = 0$ ve $N = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi,

$0(+)$ 0 idealinin asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $Z(R(+))M = Nil(R(+))M$ veya $(Z(R) \cup Z(M))(+)M = \sqrt{0}(+)M$ veya $Z(R) \cup Z(M) = \sqrt{0}$ olmasıdır. $\sqrt{0}$, R nin tüm asal ideallerinin kesişimi ve $Z(R)$ ile $Z(M)$, R nin asal ideallerinin birleşimi olduğundan $Z(R) \cup Z(M) = \sqrt{0}$ dır ancak ve ancak $Z(R) = Z(M) = \sqrt{0} = P$ dir. Buradan 0, R nin P -asalımsı ideali, M nin de P -asalımsı alt modülüdür.

$R(+)$ M halkasının maksimal, asal ve radikal idealleri homojen olmasına rağmen asalımsı idealleri homojen olmak zorunda değildir.

Örnek 4.7 $\mathbb{Z}_4(+)\mathbb{Z}_2$ halkasını düşünelim. Bu halkanın $\langle(\bar{2}, \bar{1})\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1})\}$ ideali asalımsıdır, fakat ne homojen ne de asal idealdir [3].

Teorem 4.8 R değişmeli ve birimli halka, M bir R -modül ve $I(+)$ N de $R(+)$ M nin bir zayıf asal ideali olsun. Bu durumda I , R nin zayıf asal ideali ve N de M nin zayıf asal alt modülüdür [10].

İspat: Kabul edelim ki $a, b \in R$ olmak üzere $0 \neq ab \in I$ alalım. O halde,

$(0, 0) \neq (a, 0)(b, 0) \in I(+)$ N ve buradan $I(+)$ N zayıf asal ideal olduğundan $(a, 0) \in I(+)$ N veya $(b, 0) \in I(+)$ N elde edilir. Böylece $a \in I$ veya $b \in I$ ile I nin zayıf asal ideal olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $r \in R$, $m \in M$ olmak üzere $0 \neq rm \in N$ alalım. O halde, $(0, 0) \neq (r, 0)(0, m) \in I(+)$ N ve buradan $I(+)$ N zayıf asal ideal olduğundan $(r, 0) \in I(+)$ N veya $(0, m) \in I(+)$ N elde edilir. Böylece $r \in I \subseteq (N : M)$ veya $m \in N$ ile N nin zayıf asal alt modül olduğu gösterilmiş olur.

$R(+)$ M halkasının bir zayıf asal ideali homojen olmak zorunda değildir.

Örnek 4.9 $\mathbb{Z}_4(+)\mathbb{Z}_2$ halkasının $\langle(\bar{2}, \bar{1})\rangle$ ideali zayıf asal ideal olmasına rağmen ne homojen ne de asal idealdir. Gerçekten, $\langle(\bar{2}, \bar{1})\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1})\}$ ve $\langle(\bar{2}, \bar{1})\rangle - (\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{1})$ sadece $(\bar{2}, \bar{1})(\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{1})(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{1})(\bar{3}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{1})(\bar{3}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{1})$ olarak yazılabilir.

Önerme 4.10 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. $I(+)$ N nin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul I nin R nin bir nilpotent ideali olmasıdır [11].

İspat: Kabul edelim ki I nilpotent ideal olsun. O halde $I^k = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}^+$ vardır. $(I(+))^{k+1} = I^{k+1}(+)I^kN = 0$ dır ve böylece $I(+)$ N nilpotent idealdir. Tersine,

$I(+)N$ nilpotent ideal olsun. O halde $I(+)N^k = I^k(+)N = 0(+)0 = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}^+$ vardır. Buradan $k \in \mathbb{N}^+$ için $I^k = 0$ ve dolayısıyla I nilpotent ideal elde edilir.

Teorem 4.11 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. Eğer I , R nin bir n -yutan ideali ise $I(+)M$, $R(+)M$ halkasının bir n -yutan idealidir [12].

İspat: Kabul edelim ki $x_i = (r_i, m_i) \in R(+)M$ olmak üzere $x_1 \dots x_n \in I(+)M$ olsun. Bu durumda $r_1 \dots r_n \in I$ ve I da n -yutan olduğundan $n-1$ tane (r_i, m_i) çarpımı $I(+)M$ idealine düşecektir. Buradan $I(+)M$ n -yutan ideal elde edilir

$R(+)M$ halkasının bir n -yutan ideali homojen olmak zorunda değildir.

Örnek 4.12 $\mathbb{Z}_4(+)\mathbb{Z}_2$ halkasının $\langle (\bar{2}, \bar{1}) \rangle$ ideali 2-yutan ideal olmasına rağmen homojen değildir.

Teorem 4.13 R bir tamlık bölgesi and I da R nin n -yutan olup $(n-1)$ -yutan olmayan bir ideali olsun. O halde $0(+)I$, $R(+)R$ halkasının $(n+1)$ -yutan olup n -yutan olmayan bir idealidir. Özel olarak, eğer P , R nin bir asal ideali ise $0(+)P$, $R(+)M$ nin bir n -yutan idealidir [12].

İspat: I , n -yutan olup $(n-1)$ -yutan olmayan bir ideal olduğundan $r_i \in R$ olmak üzere $r_1 \dots r_n \in I$ olup $n-1$ tane r_i lerin çarpımı I da içermeyecektir. Kabul edelim ki $s_1 = (r_1, 0), \dots, s_n = (r_n, 0)$ ve $s_{n+1} = (0, 1)$ olsun. O halde, $s_1 \dots s_{n+1} = (0, r_1 \dots r_n) \in 0(+)I$ dir buradan da s_i lerin n tane çarpımının $0(+)I$ da olmadığı görülür. Dolayısıyla $0(+)I$ bir n -yutan ideal değildir. Şimdi $c_1 \dots c_{n+2} \in 0(+)I$ olacak şekilde $c_1 = (a_1, m_1), \dots, c_{n+2} = (a_{n+2}, m_{n+2}) \in R(+)R$ alalım. $\sqrt{0(+)I} = 0(+)R$ asal ideal olduğundan c_i lerin en az bir tanesi $0(+)R$ dedir, $c_1 = (0, m_1) \in 0(+)R$ diyelim. Buradan $c_1 \dots c_{n+2} = (0, m_1 a_2 \dots a_{n+2}) \in 0(+)I$ ve böylece $m_1 a_2 \dots a_{n+2} \in I$ dir. Dolayısıyla ya m_1 ile $n-1$ tane a_i nin çarpımı ya da n tane a_i nin çarpımı I dadır ve böylece ya c_1 ile c_1 den farklı $n-1$ tane c_i nin çarpımı ya da c_1 den farklı n tane c_i nin çarpımı $0(+)I$ dadır. Buradan $0(+)I$, $R(+)R$ nin $n+1$ -yutan ideali elde edilir.

Örnek 4.14 $\mathbb{Z}(+) \mathbb{Z}$ halkasını düşünelim. $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ pozitif asal sayılar (birbirinden farklı olmak zorunda değil) olmak üzere $I = (p_1 \dots p_n) \mathbb{Z}$ olsun. O halde I , $\mathbb{Z}$ nin n -yutan olup $(n-1)$ -yutan olmayan bir idealidir. Böylece $0(+)I$, $\mathbb{Z}(+) \mathbb{Z}$ nin $(n+1)$ -yutan olup

n -yutan olmayan bir idealidir [12].

Önerme 4.15 p asal olmak üzere $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ ve $I = p\mathbb{Z}(+)p\mathbb{Z}_n$ olsun. O halde I, R nin bir 2-yutan idealidir.

İspat: $(p\mathbb{Z})\mathbb{Z}_n = p\mathbb{Z}_n$ olduğundan $I, \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$ nin bir idealidir. Eğer $p \nmid n$ ise $(\bar{p}) = \mathbb{Z}_n$ dir ve böylece I asaldır. Kabul edelim ki $p \mid n, x_j = (a_j, \bar{b}_j)$ ve $x_1x_2x_3 = (a_1a_2a_3, \overline{a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3}) \in I$ olsun. O halde $a_1a_2a_3 \in (p)$ olduğundan $a_1 \in (p), a_2 \in (p), a_3 \in (p)$ durumlarından en az biri sağlanır. Eğer $a_j, a_k \in (p)$ ise $x_jx_k \in I$, böylece $I, 2$ -yutan ideal olur. Şimdi kabul edelim ki $a_1 \in (p)$ ve $a_2, a_3 \notin (p)$ olsun. O halde $p \mid a_1, p \nmid a_2$ ve $p \nmid a_3$ tür. Buradan $p \mid a_1$ ve $\overline{a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3} \in (\bar{p})$ olduğundan $\overline{b_1a_2a_3} \in (\bar{p})$ elde edilir. Dolayısıyla $\bar{b}_1 \in (\bar{p}), \bar{a}_2 \in (\bar{p}), \bar{a}_3 \in (\bar{p})$ durumlarından en az biri sağlanır. Eğer $\bar{b}_1 \in (\bar{p})$ ise $x_1 \in I$ ile istenen elde edilir. Eğer $j = 2, 3$ için $\bar{a}_j \in (\bar{p})$ ise bir $k \in \mathbb{Z}$ için $n \mid a_j - pk$ ve $p \mid n$ olduğundan $p \mid a_j$ elde edilir. Böylece $x_1x_j \in I$ dir.

Önerme 4.16 M bir $\mathbb{Z}$ -modül, $p \in \mathbb{Z}$ asal, $N \subset M$ bir asal alt modül ve $p\mathbb{Z} \subseteq (N : M)$ olsun. O halde $I = p\mathbb{Z}(+)N, \mathbb{Z}(+)M$ halkasının bir 2-yutan idealidir.

İspat: $(p\mathbb{Z})M \subseteq N$ olduğundan $I, \mathbb{Z}(+)M$ nin bir idealidir. Şimdi $i = 1, 2, 3$ için $x_i = (k_i, m_i) \in \mathbb{Z}(+)M$ olmak üzere $x_1x_2x_3 = (k_1k_2k_3, m_1k_2k_3 + k_1m_2k_3 + k_1k_2m_3) \in I$ alalım. Burada $k_1k_2k_3 \in p\mathbb{Z}$ olduğundan $p \mid k_1k_2k_3$ ve dolayısıyla en az bir i için $p \mid k_i$ olmalıdır. p, k_i lerden en az ikisini bölüyorsa $p\mathbb{Z} \subseteq (N : M)$ olduğundan herhangi i, j için $k_iM, k_jM \subseteq N$ elde edilir ki bu da istenen $(k_ik_j, k_im_j + k_jm_i) = x_ix_j \in I$ sonucunu verir. Şimdi p nin k_i lerden sadece birini böldüğü durumu inceleyelim. Kabul edelim ki herhangi i, j, t için $p \mid k_i$ ve $p \nmid k_j, k_t$ olsun. O halde $k_i \in (N : M)$ dir. Buradan $k_im_jk_t + k_ik_jm_t \in N$ ve N alt modül olduğundan $m_ik_jk_t \in N$ elde edilir. N bir asal alt modül ve $k_jk_t \notin (N : M)$ olduğundan da $m_i \in N$ olur. Böylece $(k_i, m_i) = x_i \in I$ sonucuyla istenene ulaşılır.

Önerme 4.17 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül, $P \subset R$ asal ideal, $N \subset M$ asal alt modül olsun. O halde $I = P(+)N$ ideali $R(+)M$ halkasının bir 2-yutandır.

İspat: Kabul edelim ki $i = 1, 2, 3$ için $x_i = (r_i, m_i) \in \mathbb{Z}(+)M$ olmak üzere

$x_1x_2x_3 = (r_1r_2r_3, m_1r_2r_3 + r_1m_2r_3 + r_1r_2m_3) \in I$ olsun. Burada $r_1r_2r_3 \in P$ ve P de asal

olduğundan en az bir i için $r_i \in P$ dir. P nin r_i lerden en az ikisini içerdiği durumda $P \subseteq (N : M)$ olduğundan herhangi i, j için $r_i M, r_j M \subseteq N$ dir. Buradan istenen $(r_i r_j, r_i m_j + r_j m_i) = x_i x_j \in I$ sonucu elde edilir. Şimdi P nin r_i lerden sadece birini içerdiği durumu inceleyelim. Kabul edelim ki herhangi i, j, k için $r_i \in P$ ve $r_j, r_k \notin P$ olsun. Bu durumda $r_i \in (N : M)$ dir. Dolayısıyla $r_i m_j r_k + r_j r_k m_i \in N$ ve N de alt modül olduğundan $m_i r_j r_k \in N$ elde edilir. N bir asal alt modül ve $r_j r_k \notin (N : M)$ olduğundan da $m_i \in N$ olur. Buradan $(r_i, m_i) = x_i \in I$ sonucuyla istenen elde edilmiş olur.

Teorem 4.18 R birimli ve değişmeli bir halka ve M bir R -modül olmak üzere I, R nin bir ideali, N de M nin bir alt modülü olsun. Eğer $I(+)N$ homojen ideali $R(+)M$ nin bir n -yutan ideali ise I, R nin bir n -yutan ideali ve N de M nin bir n -yutan alt modülüdür [13].

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir, yani $I, 2$ -yutan ideal N de 2 -yutan alt modül-ken $I(+)N$ 2 -yutan ideal olmayabilir.

Örnek 4.19 $6\mathbb{Z}$, hem $\mathbb{Z}$ nin bir 2 -yutan ideali ve $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ nin de bir 2 -yutan alt modülü olmasına rağmen $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ halkasının $6\mathbb{Z}(+)6\mathbb{Z}$ ideali 2 -yutan değildir. Gerçekten, $(18, 0) = (3, 1)(2, 0)(3, -1) \in 6\mathbb{Z}(+)6\mathbb{Z}$ iken $(3, 1), (2, 0), (3, -1)$ çarpanlarından herhangi ikili çarpımı $6\mathbb{Z}(+)6\mathbb{Z}$ idealinde değildir. Ayrıca daha da özele indirgersek $I, 2$ -yutan ideal, N asal alt modül olsa dahi $I(+)N$ 2 -yutan ideal olmayabilir. Bu da $(18, 0) = (3, 1)(2, 0)(3, -1) \in 6\mathbb{Z}(+)3\mathbb{Z}$ örneği ile gösterilebilir.

Önerme 4.20 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül, $I \subset R$ asal ideal, $N \subset M$ klasik asal alt modül olsun. O halde $I(+)N$ homojen ideali, $R(+)M$ halkasının bir 2 -yutan idealidir.

İspat: Kabul edelim ki $(r_1 r_2 r_3, m_1 r_2 r_3 + r_1 m_2 r_3 + r_1 r_2 m_3) \in I(+)N$ olsun. I asal ve $r_1 r_2 r_3 \in I$ olduğundan en az bir $i = 1, 2, 3$ için $r_i \in I$ olmalıdır. $IM \subseteq N$ olduğundan $r_i m_j r_k + r_j r_k m_i \in N$ ve N de alt modül olduğundan $m_i r_j r_k \in N$ elde edilir. Buradan N klasik asal alt modül olduğundan $r_j m_i \in N$ veya $r_k m_i \in N$ dir. Böylece $(r_i, m_i)(r_j, m_j) = (r_i r_j, r_i m_j + r_j m_i)$ veya $(r_i, m_i)(r_k, m_k) = (r_i r_k, r_i m_k + r_k m_i)$ ile istenen elde edilir.

Önerme 4.21 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül, I, R nin bir 2 -yutan asalımsı ideali, N, M nin bir alt modülü olsun. O halde $I(+)N$ ideali $R(+)M$ halkasının

bir 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat: Kabul edelim ki $i = 1, 2, 3$ için $x_i = (r_i, m_i) \in R(+)M$ olmak üzere

$x_1x_2x_3 = (r_1r_2r_3, m_1r_2r_3 + r_1m_2r_3 + r_1r_2m_3) \in I(+)N$ olsun. I , 2-yutan asalımsı ideal olduğundan herhangi i, j için $r_ir_j \in I$ veya $r_ir_j \in \sqrt{I}$ olmalıdır. Eğer $r_ir_j \in I$ ise $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $x_ix_j = (r_ir_j, r_im_j + r_jm_i) \in \sqrt{I}(+)M = \sqrt{I(+)N}$ ile istenen elde edilmiş olur. Ayrıca, $r_ir_j \in \sqrt{I}$ durumunda da aynı işlemlerle $x_ix_j = (r_ir_j, r_im_j + r_jm_i) \in \sqrt{I(+)N}$ elde edilir.

Önerme 4.22 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül ve $I(+)N$ de $R(+)M$ halkasının bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. O halde I, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat: Kabul edelim ki $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $r_1r_2r_3 \in I$ olsun. O halde,

$(r_1r_2r_3, 0) = (r_1, 0)(r_2, 0)(r_3, 0) \in I(+)N$ dir. $I(+)N$, 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere herhangi i, j için $(r_i, 0)(r_j, 0) = (r_ir_j, 0) \in I(+)N$ olur. Buradan $r_ir_j \in I$ edilir. Böylece I, R nin 2-yutan asalımsı idealidir.

Sonuç 4.23 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. Bu durumda $I(+)N$ nin $R(+)M$ halkasının bir 2-yutan asalımsı ideali olması için gerek ve yeter şart I nin R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olmasıdır.

Önerme 4.24 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül, I, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali, N, M nin bir alt modülü ve $I(+)N, R(+)M$ halkasının bir homojen ideali olsun. O halde $I(+)N$, zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat: Kabul edelim ki $i = 1, 2, 3$ için $x_i = (r_i, m_i) \in R(+)M$ olmak üzere $(0, 0) \neq x_1x_2x_3 = (r_1r_2r_3, m_1r_2r_3 + r_1m_2r_3 + r_1r_2m_3) \in I(+)N$ olsun. O halde $r_1r_2r_3 \neq 0$ ve I da zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan herhangi i, j için $r_ir_j \in I$ veya $r_ir_j \in \sqrt{I}$ dir. Eğer $r_ir_j \in I$ ise $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $x_ix_j = (r_ir_j, r_im_j + r_jm_i) \in \sqrt{I}(+)M = \sqrt{I(+)N}$ ile istenen elde edilmiş olur. Ayrıca, $r_ir_j \in \sqrt{I}$ durumunda da aynı işlemlerle $x_ix_j = (r_ir_j, r_im_j + r_jm_i) \in \sqrt{I(+)N}$ elde edilir.

Önerme 4.25 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül ve $I(+)N$ de $R(+)M$ halkasının bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. O halde I, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat: Kabul edelim ki $r_1, r_2, r_3 \in R$ için $0 \neq r_1 r_2 r_3 \in I$ olsun. O halde $(0, 0) \neq (r_1 r_2 r_3, 0) = (r_1, 0)(r_2, 0)(r_3, 0) \in I(+)N$ dir. $I(+)N$, zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere herhangi i, j için $(r_i, 0)(r_j, 0) = (r_i r_j, 0) \in I(+)N$ olur. Buradan $r_i r_j \in I$ edilir. Böylece I, R nin zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

Sonuç 4.26 R birimli ve değişmeli bir halka, M bir R -modül olsun. Bu durumda $I(+)N$ homojen idealinin $R(+)M$ halkasının bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul I nın R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olmasıdır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, öncelikle, bir R -modül M nin idealleştirilmesi olarak tanımlanan $R(+)\mathcal{M}$ halkasının temel özellikleri ve üzerinde tanımlanan işlemlerin bilinen ikili işlemlerden farklı olmasıyla halka üzerinde oluşan farklı özellikleri incelendi. Devamında, sırasıyla $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}(+)\mathcal{M}$, $R(+)\mathcal{M}$ halkalarının birimsel, nilpotent, idempotent ve sıfır bölen elemanları karakterize edildi. Son olarak $R(+)\mathcal{M}$ halkasının bazı özel ideallerinin karakterizasyonu yapıldı.

KAYNAKLAR

- [1] Nagata M., (1962). Local Rings, Interscience Publishes.
- [2] Huckaba J.A., (1988). Commutative Rings with Zero Divisors, Marcel Dekker.
- [3] Anderson D.D. ve Winders M., (2009). "Idealization of a Module", Journal of Commutative Algebra, 1:3-51.
- [4] Larsen M. D. ve McCarthy P.J., (1971). Multiplicative Theory of Ideals, Academic Press.
- [5] Çallıalp F. ve Tekir Ü., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi.
- [6] Yılmaz E. ve Kılıçarslan Cansu S., (2014). "Baer's Lower Nilradical and Classical Prime Submodules", Bull. Iranian Mathematical Society, 40:1263-1274.
- [7] Atani S. E. ve Farzalipour F., (2007). "On Weakly Prime Submodules", Tamkang Journal of Mathematics, 38:247-252.
- [8] Moradi S. ve Azizi A., (2012). "2-Absorbing and n-Weakly Prime Submodules", Miskolc Mathematical Notes, 13:75-86.
- [9] Mostafanasab, H., Yetkin, E., Tekir, Ü. ve Darani, A. Y., (2015). "On 2-absorbing Primary Submodules of Modules over Commutative Rings", Analele University Ovidius din Constanta, Math. Series (Baskıda).
- [10] Ali M.M., (2007). "Multiplication Modules and Homogeneous Idealization II", Contributions to Algebra and Geometry 48:321-343.
- [11] Ali M M., (2008). "Idempotent and Nilpotent Submodules of Multiplication Modules", Communications in Algebra, 36:12, 4620-4642.
- [12] Anderson D.F. ve Badawi A., (2011). "On n-Absorbing Ideals of Commutative Rings", Communications in Algebra, 39:5, 1646-1672.
- [13] Darani A.Y. ve Soheilnia F., (2012). "On n-absorbing Submodules", Mathematical Communication, 17:547-557.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tuğba ARKAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 01.07.1990 - Pütürge
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : arkantugba@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Lise	Fen Bilimleri	Eyüp Otakçılar YDAL	2008

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2015	Sultangazi Orgeneral Eşref Bitlis Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Arkan T., Cirit F. ve Oral K.H., (2015). “Modüllerin İdealleştirilmesi”, Niğde Üniversitesi 14. Matematik Sempozyumu, 14-16 Mayıs 2015, Niğde.

2.Cirit F., Oral K.H. ve Arkan T., (2015). “Bir Halkanın İdeal Genişlemesinin İdealleri”, Niğde Üniversitesi 14. Matematik Sempozyumu, 14-16 Mayıs 2015, Niğde.