

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



MOHAND DÖNÜŞÜMÜ VE KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP YÜCEDAĞ

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. YASEMİN BAŞCI

BOLU, TEMMUZ 2025

KABUL VE ONAY SAYFASI

Zeynep YÜCEDAĞ tarafından hazırlanan “**MOHAND DÖNÜŞÜMÜ
VE KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ULAM TİPİ
KARARLILIĞI**” adlı tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim
Dalı Matematik Yüksek Lisans Programında Yüksek Lisans Tezi olarak oy
birliğiyle kabul edilmiştir. 28/07/2025

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Yasemin BAŞCI
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Harun KARSLI
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Şevket GÜR
Sakarya Üniversitesi

.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İbrahim KÜRTÜL
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu ve Şablonuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir
- aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Teze ilişkin Turnitin adlı programında enstitü müdürlüğünce belirlenen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan benzerlik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %30'u geçmemektedir.

.....

ZEYNEP YÜCEDAĞ

ÖZET

**MOHAND DÖNÜŞÜMÜ VE KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ZEYNEP YÜCEDAĞ
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YASEMİN BAŞCI)**

**BOLU, TEMMUZ - 2025
IX + 43 sayfa**

Bu tez, integral operatörü olan Mohand dönüşümü ile Riemann-Liouville kesirli türevini içeren kesirli lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını içermektedir. Tez beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda yani giriş bölümünde, kesirli türev, Mohand dönüşümü ve Hyers-Ulam kararlılığından bahsedildi. İkinci kısımda, yani materyal ve yöntem bölümünde bazı temel tanım ve teoremler, Riemann-Liouville kesirli türevi ve integrali, Mohand dönüşümünün tanımı ve özellikleri verildi. Üçüncü kısımda yani bulgular bölümünde Hyers-Ulam kararlılığının tarihçesi verildi, bazı fonksiyonların Mohand dönüşümü elde edildi ve Riemann-Liouville kesirli türevi içeren kesirli lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığı Mohand dönüşümü kullanılarak incelendi. Dördüncü kısımda tartışma bölümü ve beşinci kısımda da sonuç ve öneriler kısmı verildi.

ANAHTAR KELİMELELER: Mohand dönüşümü, Riemann-Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli integrali, Hyers-Ulam kararlılığı, Kesirli diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

MOHAND TRANSFORM AND ULAM TYPE STABILITY OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MSC THESIS

ZEYNEP YÜCEDAĞ

BOLU ABANT İZZET BAYSAL UNIVERSITY

INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. YASEMİN BAŞCI)

BOLU, JULY 2025

IX + 43 pages

This thesis addresses the Hyers-Ulam stability of fractional linear differential equations involving the Riemann–Liouville fractional derivative, using the Mohand transform as an integral operator. The thesis consists of five parts. In the first parts, the introduction, the fractional derivatives, the Mohand transform and Hyers-Ulam stability are discussed. In the second part, the materials and methods section, some basic definitions and theorems, Riemann–Liouville fractional derivative and integral, definition and properties of Mohand transform are given. In the third parts, the findings section, the historical development of Hyers-Ulam stability is presented, the Mohand transforms of some functions are obtained and Hyers-Ulam type stability of fractional linear differential equations involving Riemann–Liouville fractional derivative is investigated using the Mohand transform. A discussion section is given in the fourth part and the conclusion and recommendations are given in fifth part.

KEYWORDS: Mohand transform, Riemann-Liouville fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Hyers-Ulam stability, Fractional differential equations.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLO LİSTESİ	vii
KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ	viii
TEŞEKKÜR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM.....	3
2.1 Temel Kavramlar	3
2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali	7
2.3 Mohand Dönüşümü ve Özellikleri.....	14
3. BULGULAR	22
3.1 Hyers-Ulam Kararlılığının Tarihçesi	22
3.2 Bazı Fonksiyonların Mohand Dönüşümleri	23
3.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Tipi Kararlılığı.....	25
4. TARTIŞMA	40
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	41
KAYNAKLAR	42

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Bazı fonksiyonların Mohand dönüşümleri.....	21
---	----



KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ

$AC[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı olan mutlak sürekli fonksiyonların kümesi
$B(\cdot, \cdot)$	: Beta fonksiyonu
$C^n[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı olan ve n defa türevlenebilen fonksiyonların kümesi
D_{a+}^{α}	: α . mertebeden alt limiti a olan Riemann-Liouville türevi
$E_{\alpha}(z)$	: Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
I_{a+}^{α}	: α . mertebeden alt limiti a olan Riemann-Liouville integrali
$L_1[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$M\{f(t); v\}$	: $f(t)$ nin Mohand dönüşümü
$M^{-1}\{R(v); t\}$	: Ters Mohand dönüşümü
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$Re(\cdot)$	: Karmaşık sayının reel kısmı
$\Gamma(\cdot)$	: Gamma fonksiyonu

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca tüm aşamalarda bana yol gösteren, benden zamanını ve desteğini esirgemen saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Yasemin Başcı'ya en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Bu süreçte benden desteğini esirgemeyen sevgili aileme de sonsuz şükranlarımı sunuyorum.



1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral, Leibniz ve Newton'un ayrıntılı bir şekilde ele aldıkları klasik türev ve integral kavramlarının daha genel bir halidir. Kesirli mertebeden türev kavramı, aslında herhangi bir mertebeden türev alma işlemini ifade eder. Tıpkı tam sayı mertebeden türev ve integral gibi köklü bir geçmişe sahiptir. Kesirli türev, çeşitli kaynaklarda belirtildiği üzere ilk defa 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı bir mektupta " $\frac{d^n y}{dx^n}$ ", gösterimi ile yani "tam sayı mertebeden türev tanımı tam sayı olmayan mertebeden türeve genişletilebilir mi?" sorusunu sormasıyla başlamıştır. L'Hospital bu soruya " $n = \frac{1}{2}$ olursa ne olur?" sorusu ile cevap vermiştir. L'Hospital'in bu sorusunun ardından birçok matematikçi kesirli türev üzerine çalışmıştır. Liouville, Riemann, Weyl Lagrange, Fourier, Euler, Laplace ve Abel gibi birçok matematikçi bu konu üzerine çalışan matematikçiler arasındadır. Birçoğu kendi notasyonlarını kullanarak kesirli mertebeden integral ve türev kavramına uyan tanımlar buldu. Bu tanımların en çok bilinenleri Riemann-Liouville, Caputo ve Grunwald-Letnikov kesirli türevleridir.

Kesirli mertebeden türevin mertebesi, tam sayı olarak alındığında tam sayılı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır. Belirli koşullar altında bu tanımların birbirine eşdeğer olduğu bazı çalışmalarda incelendi. Tanımlar arasında geçişler olmasına rağmen, fiziksel yorumları birbirinden farklıdır. Kesirli analizde türev sayısının birden fazla olması, verilen probleme en uygun olan tanımın kullanılmasını ve en iyi çözümün elde edilmesini sağlamaktadır.

Diferansiyel denklemlerin çözümünde integral dönüşümleri sıklıkla başvurulan yöntemler arasında yer alır. Özellikle belirli sınır koşullarına bağlı diferansiyel denklemlerde, integral dönüşümler problem yapısını sadeleştirerek, çözüm sürecini kolaylaştırmaktadır. Ancak integral dönüşüm uygulanarak sonuç elde edildiği için orijinal denklemin çözümü için ters dönüşüm işlemi gerektirdiği unutulmamalıdır.

İntegral dönüşümler, uygulamalı matematik, mühendislik ve gerçek hayat problemlerinde etkili bir yöntem olarak kullanılmaktadır. En çok kullanılan Laplace dönüşümüne ek olarak Sumudu, Natural, Tarig, Aboodh, Elzaki, Mohand, Shehu ve Kamal dönüşümü gibi çok sayıda integral dönüşümü vardır. Bu tezde bu

dönüşümlerden Sumudu ve Laplace dönüşümlerinin değiştirilmiş bir versiyonu olarak kabul edilen Mohand dönüşümü kullanıldı.

Mohand dönüşümü, 2017 yılında Mohand ve Mahgoub tarafından tanımlandı. Kısa sürede birçok araştırmacının dikkatini çekti ve uygulamalarda kullanıldı (Mohand, 2017).

Kararlılık problemi, ilk kez 1940 yılında Wisconsin üniversitesinde Ulam tarafından ortaya atıldı. Bundan bir yıl sonra Hyers, Banach uzayları için bu problemi cevapladı. Fonksiyonel denklemlerin, Hyers-Ulam kararlılığının incelenmesinden sonra 1993 yılında Hyers-Ulam kararlılığı, Obloza (1993-1997) tarafından diferansiyel denklemlere uyarlandı. Böylece fonksiyonel denklemler yerine diferansiyel denklemlerin kullanılması yeni bir araştırma alanının doğmasına neden oldu.

Lungu ve Popa (2012), birinci mertebeden bir kesirli diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını gösterdiler. Gordji ve ark. (2011), ikinci mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin kararlılığını inceledi. Hegyi ve Jung (2013), Laplace denkleminin kararlılığını ele aldılar.

Bu tez çalışmasında, Riemann-Liouville kesirli türevini içeren kesirli lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığı Mohand dönüşümü kullanılarak incelendi.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Gamma fonksiyonu) Kesirli hesaplamaların temel fonksiyonlarından biri Euler'in Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ dir. Gamma fonksiyonu $n!$ faktöriyelini n 'in tam sayı olmayan sayıları ve kompleks sayı değerlerini içerecek şekilde genelleştirir. Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanır. Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

denklemini sağlamasıdır. Yani,

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_{t=0}^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

dir.

Özel olarak,

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^T \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğu ve (2.2) eşitliği kullanılarak, $z = 1, 2, 3, \dots$, için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$\vdots$

$$\Gamma(z + 1) = z. \Gamma(z) = z. (z - 1)! = z!$$

şeklinde elde edilir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1.2 (Beta fonksiyonu) Beta fonksiyonu $Re(z) > 0$ ve $Re(w) > 0$ olmak üzere

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyondur (Podlubny, 1999).

Tanım 2.1.3 Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu arasında

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} \quad Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0 \quad (2.4)$$

bağıntısı vardır.

İspat:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty e^{-t} t_1^{z-1} dt_1 \int_0^\infty e^{-s} s_1^{w-1} ds_1 \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t_1+s_1)} t_1^{z-1} s_1^{w-1} dt_1 ds_1 \end{aligned}$$

olur.

Eğer $t_1 = xy, s_1 = x(1 - y)$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $t_1 + s_1 = x$ olur. $0 < t_1, s_1 < \infty$ olduğundan $0 < x < \infty$ olur.

Eğer $y \geq 1$ olursa $1 - y \leq 0$ olur. Dolayısıyla $s_1 = x(1 - y) \leq 0$ olur ki bu da $0 < s_1 < \infty$ ile çelişir. Bu yüzden $0 < y < 1$ olmalıdır.

$$\frac{\partial(t_1, s_1)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 - y & -x \end{vmatrix} = -x, x > 0$$

olur.

$$\left| \frac{\partial(t_1, s_1)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = dt_1 ds_1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x} (xy)^{z-1} [x(1 - y)]^{w-1} x dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x} x^{z+w-1} y^{z-1} (1 - y)^{w-1} dx dy \\ &= \int_0^1 y^{z-1} (1 - y)^{w-1} dy \int_0^\infty e^{-x} x^{z+w-1} dx \\ &= B(z, w) \Gamma(z + w) \end{aligned}$$

elde edilir.

Beta fonksiyonu, aşağıdaki şekillerde de ifade edilebilir:

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2z-1} (\sin \theta)^{2w-1} d\theta, \quad (2.5)$$

$$B(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{(u+1)^{z+w}} du. \quad (2.6)$$

Beta fonksiyonu için verilen (2.5), (2.6) ve (2.3) tanımları eş anlamlıdır. Yani, (2.3) de $\tau = \cos^2 \theta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2 \theta)^{z-1} (1 - \cos^2 \theta)^{w-1} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2z-1} (\sin \theta)^{2w-1} d\theta \end{aligned}$$

(2.5) tanımı elde edilir.

(2.3) de $\tau = \frac{u}{u+1}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} u^{z-1} (u+1)^{-w+1} (u+1)^{-w+1} (u+1)^{-2} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{(u+1)^{z+w}} du \end{aligned}$$

(2.6) tanımı elde edilir.

Beta fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \\ &= \int_0^1 t^{w-1} (1-t)^{z-1} dt \\ &= B(w, z) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır.

Özel olarak $z = w = \frac{1}{2}$ alınır,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} d\phi = \pi$$

elde edilir.

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

olduğundan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

bulunur.

Tanım 2.1.4 $n = 1, 2, \dots$ için $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$ olacak şekilde $[a, b]$ üzerinde $(n - 1)$. mertebeden sürekli türevlenebilen $f(t)$ fonksiyonların uzayı

$$AC^n[a, b] := \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } (D^{n-1}f)(t) \in AC[a, b], \left(D = \frac{d}{dt}\right) \right\} \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanır (Kilbas ve ark., 2006).

Tanım 2.1.5 Bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$|f(t)| \leq M_1 e^{p_0 t} \quad (t \geq T)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde p_0, M_1 ve T sabitleri ($M_1 > 0, T > 0$) bulunabiliyorsa, $f(t)$ fonksiyonuna üstel mertebeden bir fonksiyon denir.

Tanım 2.1.6 (Mittag-Leffler fonksiyonu) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n . mertebeden diferansiyel denklemler teorisinde e^z nin bir parametrelili genelleştirilmesi G.M. Mittag-Leffler tarafından 1903 yılında

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.8)$$

olarak tanımlandı.

İki parametrelili genelleştirilmesi de Agarwal tarafından 1953 yılında

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0) \quad (2.9)$$

olarak tanımlandı (Podlubny, 1999).

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu kesirli hesaplamalarda önemli rol oynar.

Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı özel değerleri aşağıdaki gibidir:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z} (e^z - 1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z. \quad (2.12)$$

2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali

1832 yılında, J. Liouville, ardışık olarak birkaç önemli yayın yapmış ve üç kapsamlı anı kitabı kaleme almıştır. Liouville'in bu çalışmaları, kesirli analizin gelişmesi açısından temel bir rol oynadı. Öğrencilik döneminde kesirli analiz üzerine araştırmalar yürüten G.F. Berhand Riemann ise, kesirli integral teorisine önemli katkılar sunmuş olmasına rağmen, bu çalışmaları yaşadığı dönemde yayımlamayı tercih etmemiştir. Riemann'ın bu alandaki katkıları ancak ölümünden sonra, 1892 yılında, "Gesammelte Werke" adlı eserde yayımlanarak bilim dünyasının dikkatine sunulmuştur.

1869 yılında, N. Ya. Sonin, "On Differentiation with arbitrary index" başlıklı yayımladığı makalede Riemann-Liouville yaklaşımına dayanan kesirli integrasyonun ilk hesaplamalarını yaparak bu tanımın uygulanabilirliğini ortaya koydu.

Riemann-Liouville tanımı, 19. yüzyılın sonlarına doğru karmaşık analiz yöntemleri temel alınarak geliştirildi. Günümüzde, bu formül çoğunlukla reel analiz bağlamında kullanılsa da ilk çıkış noktası, karmaşık bir analitik fonksiyonun tekrarlanan türevleri için Cauchy integral formülünün genelleştirilmesinden gelmiştir.

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.2.1 $f(t) \in L_1(a, b)$ ve $\alpha > 0$ olsun. α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(I_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du, \quad t > a \quad (2.13)$$

(Samko ve ark.,1993).

Tanım 2.2.2 $f(t), [a, b]$ aralığında bir fonksiyon ve $Re(\alpha) \geq 0$ olsun. α . mertebeden Riemann-Liouville sağdan kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du, \quad n = [Re(\alpha)] + 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

(Samko ve ark.,1993).

Örnek 2.2.3 $a = 0, f(t) = t$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olsun. (2.14) 'den $n=1$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\frac{1}{2}} t &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{udu}{(t-u)^{1-1+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{udu}{(t-u)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{udu}{(t-u)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

elde edilir. İntegrale $x = t - u$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\frac{1}{2}} t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_t^0 \frac{t-x}{\sqrt{x}} (-dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{t-x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_0^t \sqrt{x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[2t\sqrt{x} \Big|_0^t - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^t \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[2t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.2.4 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere α . mertebeden ($\alpha > 0$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$) Riemann-Liouville kesirli türevinin lineerliği aşağıdaki şekilde verilir:

$$D_{a+}^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) = \lambda_1 D_{a+}^{\alpha} f(t) + \lambda_2 D_{a+}^{\alpha} g(t)$$

(Podlubny, 1999).

Lemma 2.2.5 $Re(\alpha) > 0$ ve $Re(\beta) > 0$ olsun. O zaman

$$(I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \beta \in \mathbb{C} \quad (2.15)$$

eşitliği sağlanır (Kilbas ve ark., 2006).

İspat: (2.13)'den

$$(I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} (u-a)^{\beta-1} du$$

elde edilir. İntegrale $u = a + (t-a)\tau$ dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(t-a)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(t-a)\tau]^{\beta-1} (t-a) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 2.2.6 $Re(\alpha) \geq 0$ ve $Re(\beta) > 0$ olmak üzere,

$$(D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (2.16)$$

eşitliği sağlanır (Kilbas ve ark.,2006).

İspat: (2.13), (2.14) ve (2.15) kullanılarak istenen elde edilir:

$$\begin{aligned}
(D_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1})(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} (x-a)^{\beta-1})(t) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} (t-a)^{\beta-1+n-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1+n-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Lemma 2.2.7 $t \in [a, b]$ olsun. O zaman $f \in AC^n[a, b]$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (t-a)^k \quad (2.17)$$

şeklinde yazılmasıdır (Jarad ve Abdeljawad, 2020, $g(t) = t$ için).

İspat: $f \in AC^n[a, b]$ olsun. O zaman, (2.7)'den $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$ olur. Bu durumda, $\psi \in L_1[a, b]$ olacak şekilde

$$f^{(n-1)}(t) = C_{n-1} + \int_a^t \psi(s) ds$$

bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyonun integrali alınırsa,

$$f^{(n-2)}(t) = C_{n-1}(t-a) + C_{n-2} + \int_a^t \int_a^\tau \psi(s) ds d\tau$$

olur. İntegral sırası değiştirilirse

$$f^{(n-2)}(t) = C_{n-1}(t-a) + C_{n-2} + \int_a^t (t-s)\psi(s)ds$$

elde edilir. Bu işleme bu şekilde devam edilirse

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (t-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} \psi(s) ds$$

bulunur. Burada $f^{(n-1)}(t) = C_{n-1} + \int_a^t \psi(s)ds$ 'nin türevi alınırsa

$$\psi(s) = f^{(n)}(s)$$

elde edilir. Böylece eşitlik

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k!} (t-a)^k$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.2.8 $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ ve $f \in AC^n[a, b]$ olsun. O zaman f 'nin Riemann-Liouville kesirli türevi hemen hemen her yerde vardır ve

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır (Jarad ve Abdeljawad, 2020, $g(t) = t$ için).

İspat: (2.17)'nin her iki tarafına Riemann-Liouville kesirli türevi uygulanıp (2.16) kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\alpha f(t) &= \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!} \int_a^t \int_a^s (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds d\tau \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

(2.19) da integrallerin sırası değiştirilirse

$$D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(n-\alpha)(n-1)!} \int_a^t \int_s^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-s)^{n-1} f^{(n)}(s) d\tau ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.20) de ki integralde $u = \frac{\tau-s}{t-s}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^n}{(n-1)! \Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \right) \times \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{n-1} du + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \quad (2.21)$$

olur. Beta ve Gamma fonksiyonunun özellikleri kullanılarak aşığıdaki elde edilir:

$$D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^n}{\Gamma(2n-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha-1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (2.22)$$

İstenen sonuç $\left(\frac{d}{dt}\right)^n$ operatörünün integrale uygulanmasıyla elde edilir.

Not (2.18)'den

$$(D_{a^+}^\alpha f)(t) = (I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)})(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \quad (2.23)$$

yazılabilir.

Teorem 2.2.9 $\alpha > m, m \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m I_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^{\alpha-m} f(t) \quad (2.24)$$

biçimindedir (Jarad ve Abdeljawad, 2020, $g(t) = t$ için).

İspat: (2.13) kullanılarak,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m I_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^m}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

elde edilir. Sağ taraftaki integrale $\frac{d}{dt}$ operatörü m kez uygulandığında istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.10 $\alpha > \beta, m-1 < \beta < m, m \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^{\alpha-\beta} f(t) \quad (2.25)$$

dir (Jarad ve Abdeljawad, 2020, $g(t) = t$ için).

İspat:

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m I_{a^+}^{m-\beta} I_{a^+}^\alpha f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m I_{a^+}^{\alpha+m-\beta} f(t) \\ &= I_{a^+}^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

Not Sonuç 2.2.10'da $\alpha = \beta$ ise

$$D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(t) = f(t)$$

dir.

Teorem 2.2.11 $Re(\alpha) > 0, n = -[-Re(\alpha)], f \in L[a, b]$ ve $I_{a^+}^\alpha f \in AC^n[a, b]$ olsun. O zaman

$$(I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha) f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{I_{a^+}^{k-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha-k+1)} (t-a)^{\alpha-k} \quad (2.26)$$

dir (Jarad ve Abdeljawad, 2020, $g(t) = t$ için).

İspat: (2.13) ve (2.14) kullanılarak,

$$(I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha) f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} f \right] (s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{dt}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} f \right] (s) ds \right\} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^{n-1} I_{a^+}^{n-\alpha} f \right] (s) ds \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi n kez uygulandığında

$$\begin{aligned}
(I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha) f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-n} I_{a^+}^{n-\alpha} f(s) ds \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{I_{a^+}^{k-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha+2-k)} (t-a)^{\alpha-k+1} \right\} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right) \left\{ I_{a^+}^{\alpha-n+1} I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{I_{a^+}^{k-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha+2-k)} (t-a)^{\alpha-k+1} \right\} \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right) \left\{ I_{a^+}^1 f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{I_{a^+}^{k-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha+2-k)} (t-a)^{\alpha-k+1} \right\} \\
&= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{I_{a^+}^{k-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha+2-k)} \left(\frac{d}{dt}\right) (t-a)^{\alpha-k+1} \\
&= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{I_{a^+}^{k-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha-k+1)} (t-a)^{\alpha-k}
\end{aligned}$$

bulunur.

2.3 Mohand Dönüşümü ve Özellikleri

Bu kesimde, Mohand dönüşümünün tanımı, Mohand dönüşümünün temel özellikleri ve bazı fonksiyonların Mohand dönüşümleri verildi.

Tanım 2.3.1 (Mohand dönüşümü)

M sabiti sonlu bir sayı, k_1 ve k_2 sonlu veya sonsuz sayılar ve $f(t)$ de her $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. A kümesi

$$A = \left\{ f(t): \exists M, k_1, k_2 > 0. |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{k_j}}, t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman A kümesinden alınan her $f(t)$ fonksiyonu için Mohand dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M\{f(t); v\} = v^2 \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) dt, \quad k_1 < v < k_2. \quad (2.27)$$

$f(t)$ fonksiyonunun Mohand dönüşümünü $R(v)$ fonksiyonu ile gösterelim.

Örneğin;

1. $f(t) = 1$ alınırsa, Mohand dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} M\{1; v\} &= v^2 \int_0^{\infty} e^{-vt} dt \\ &= v^2 \left(-\frac{e^{-vt}}{v} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= v. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2. $f(t) = t^m$ olsun. İlk olarak t, t^2, t^3 Mohand dönüşümünü hesaplayıp, t^m 'in Mohand dönüşümü için genelleme yapılır.

$f(t) = t$ alınırsa, Mohand dönüşümü tanımından

$$M\{t; v\} = v^2 \int_0^{\infty} e^{-vt} t dt$$

olur. Kısmi integrasyon yöntemini uygularsak

$$M\{t; v\} = 1$$

elde edilir.

$f(t) = t^2$ için;

$$M\{t^2; v\} = v^2 \int_0^{\infty} e^{-vt} t^2 dt$$

dir. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$M\{t^2; v\} = \frac{2!}{v}$$

elde edilir. Aynı şekilde $f(t) = t^3$ içinde

$$M\{t^3; v\} = \frac{3!}{v^2}$$

bulunur.

Genellenirse, $f(t) = t^m$ için

$$M\{t^m; v\} = \frac{m!}{v^{m-1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{v^{m-1}} \quad (2.29)$$

eşitliği elde edilir.

1. $t \geq 0$ ve λ bir sabit olmak üzere, $f(t) = e^{\lambda t}$ fonksiyonunun Mohand dönüşümü,

$$\begin{aligned} M\{e^{\lambda t}; v\} &= v^2 \int_0^{\infty} e^{-vt} e^{\lambda t} dt \\ &= v^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{(-v+\lambda)t} dt \\ &= v^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{(-v+\lambda)t}}{v-\lambda} \right) \Big|_0^T \\ &= \frac{v^2}{v-\lambda} \quad (\lambda > v, v > 0). \end{aligned}$$

O zaman,

$$M\{e^{\lambda t}; v\} = \frac{v^2}{v-\lambda} \quad (2.30)$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2 $M\{f(t); v\} = R(v)$ olsun. O zaman

$$(i) \quad M\{f'(t); v\} = vR(v) - v^2 f(0), \quad (2.31)$$

$$(ii) \quad M\{f''(t); v\} = v^2 R(v) - v^3 f(0) - v^2 f'(0), \quad (2.32)$$

$$(iii) \quad M\{f^{(n)}(t); v\} = v^n R(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} f^{(k)}(0). \quad (2.33)$$

İspat:

$$\begin{aligned} (i) \quad M\{f'(t); v\} &= v^2 \int_0^\infty e^{-vt} f'(t) dt \\ &= v^2 \left[e^{-vt} f(t) \Big|_0^\infty + v \int_0^\infty e^{-vt} f(t) dt \right] \\ &= vM\{f(t); v\} - v^2 f(0) \\ &= vR(v) - v^2 f(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad M\{f''(t); v\} &= v^2 \int_0^\infty e^{-vt} f''(t) dt \\ &= v^2 \left[e^{-vt} f'(t) \Big|_0^\infty + v \int_0^\infty e^{-vt} f'(t) dt \right] \\ &= vM\{f'(t); v\} - v^2 f'(0) \\ &= v^2 R(v) - v^3 f(0) - v^2 f'(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad M\{f^{(n)}(t); v\} &= v^n R(v) - v^{n+1} f(0) - v^n f'(0) - \dots - v^2 f^{(n-1)}(0) \\ &= v^n R(v) - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Teorem 2.3.3 $M\{f(t); v\} = R(v)$ olsun. O zaman

$$a) \quad M\{tf(t); v\} = \left[\frac{2}{v} - \frac{d}{dv} \right] R(v), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} b) \quad M\{tf'(t); v\} &= 2R(v) - 2vf(0) \\ &\quad - \frac{d}{dv} [vR(v) - v^2 f(0)], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} c) \quad M\{tf''(t); v\} &= 2vR(v) - 2v^2 f(0) - 2vf'(0) \\ &\quad - \frac{d}{dv} [v^2 R(v) - v^3 f(0) - v^2 f'(0)]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

İspat:

a) Mohand dönüşümünün v 'ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv} M\{f(t); v\} &= \frac{d}{dv} R(v) = 2v \int_0^{\infty} f(t) e^{-vt} dt + v^2 \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-vt} dt \\
&= \frac{2}{v} v^2 \int_0^{\infty} f(t) e^{-vt} dt - v^2 \int_0^{\infty} t f(t) e^{-vt} dt \\
&= \frac{2}{v} R(v) - M\{tf(t); v\}.
\end{aligned}$$

Buradan

$$M\{tf(t); v\} = \left[\frac{2}{v} - \frac{d}{dv} \right] R(v)$$

elde edilir.

b) Sırasıyla, (2.34) ve (2.31) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
M\{tf'(t); v\} &= \left[\frac{2}{v} - \frac{d}{dv} \right] M\{f'(t); v\} \\
&= \left[\frac{2}{v} - \frac{d}{dv} \right] [vR(v) - v^2 f(0)] \\
&= 2R(v) - 2vf(0) - \frac{d}{dv} [vR(v) - v^2 f(0)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) Sırasıyla, (2.34) ve (2.32) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
M\{tf''(t); v\} &= \left[\frac{2}{v} - \frac{d}{dv} \right] M\{f''(t); v\} \\
&= \left[\frac{2}{v} - \frac{d}{dv} \right] [v^2 R(v) - v^3 f(0) - v^2 f'(0)] \\
&= 2vR(v) - 2v^2 f(0) - 2vf'(0) \\
&\quad - \frac{d}{dv} [v^2 R(v) - v^3 f(0) - v^2 f'(0)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.4 (Lineerlik) f_1 ve f_2 sırasıyla, $v > \alpha_1$ ve $v > \alpha_2$ için Mohand dönüşümleri olan iki fonksiyon olsun. $v > \max \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ve c_1, c_2 keyfi sabitleri için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$M\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t); v\} = c_1 M\{f_1(t); v\} + c_2 M\{f_2(t); v\}. \quad (2.37)$$

Tanım 2.3.5 f ve g , $[0, T]$ aralığında tanımlı parçalı sürekli ve üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. O zaman f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu $f(t) * g(t)$ ile gösterilir ve

$$f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t f(x)g(t-x)dx \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6 f ve g , $[0, T]$ aralığında tanımlı parçalı sürekli ve üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. O halde

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (2.39)$$

dir.

Teorem 2.3.7 (Konvolüsyon) $M\{f(t); v\} = R(v)$ ve $M\{g(t); v\} = G(v)$ olsun. Konvolüsyonun Mohand dönüşümü

$$M\{f(t) * g(t); v\} = \frac{1}{v^2} M\{f(t); v\} M\{g(t); v\} \quad (2.40)$$

biçimindedir.

İspat:

$$\begin{aligned} M\{f(t) * g(t); v\} &= v^2 \int_0^\infty e^{-vt} \left(\int_0^t f(t-u)g(u)du \right) dt \\ &= v^2 \int_0^\infty e^{-vt} dt \int_0^t f(t-u)g(u)du \end{aligned}$$

Son eşitlikte integrasyon sınırları değiştirilirse $0 \leq t \leq \infty$ ve $0 \leq u \leq t$ iken $0 \leq u \leq \infty$ ve $u \leq t \leq \infty$, o halde

$$M\{f(t) * g(t); v\} = v^2 \int_0^{\infty} g(u) du \int_u^{\infty} f(t-u) e^{-vt} dt$$

elde edilir. Son eşitlikte $t - u = \tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} M\{f(t) * g(t); v\} &= v^2 \int_0^{\infty} g(u) du \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-v(\tau+u)} d\tau \\ &= v^2 \int_0^{\infty} e^{-vu} g(u) du \int_0^{\infty} e^{-v\tau} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{v^2} R(v) G(v) \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.3.8 (Ters Mohand dönüşümü) Mohand dönüşümü $M\{f(t); v\} = R(v)$ olan $f(t)$ fonksiyonuna, $R(v)$ fonksiyonunun ters Mohand dönüşümü denir ve ters Mohand dönüşümü M^{-1} ile gösterilir.

Bazı fonksiyonların ters Mohand dönüşümleri,

- $M^{-1}\{v; t\} = 1$
- $M^{-1}\{1; t\} = t$
- $M^{-1}\left\{\frac{v^2}{v-a}; t\right\} = e^{at}$

biçimindedir.

Tablo 2.1. Bazı fonksiyonların Mohand dönüşümleri

S.N.	$f(t)$	$M\{f(t); v\} = R(v)$
1	1	v
2	t	1
3	t^2	$\frac{2!}{v}$
4	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{v^{n-1}}$
5	$t^n, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{v^{n-1}}$
6	e^{at}	$\frac{v^2}{v-a}$
7	$\sin at$	$\frac{av^2}{(v^2+a^2)}$
8	$\cos at$	$\frac{v^3}{(v^2+a^2)}$
9	$\sinh at$	$\frac{av^2}{(v^2-a^2)}$
10	$\cosh at$	$\frac{v^3}{(v^2-a^2)}$
11	$J_0(t)$	$\frac{v^2}{\sqrt{(1+v^2)}}$
12	$J_1(t)$	$v^2 - \frac{v^3}{\sqrt{(1+v^2)}}$

3. BULGULAR

Bu bölümde, Hyers-Ulam kararlılığının tarihçesi verildi, bazı özel fonksiyonların Mohand dönüşümleri elde edildi ve Riemann-Liouville kesirli türevini içeren kesirli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığı incelendi.

3.1 Hyers-Ulam Kararlılığının Tarihçesi

1940 yılında S. Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik kulübündeki konuşmasında birçok çözülmemiş problem sundu. Ulam bu konuşmada fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıcı olan problemi sundu.

1941 yılında, Donald Hyers bu soruya doğrusal fonksiyonel denklemler için bir çözüm sundu. 1978 yılında da Themistocles Rassias bu sonucu doğrusal olmayan denklemleri de kapsayacak şekilde genelleştirdi.

Fonksiyonel denklemler yerine diferansiyel denklemlerin kullanılması yeni bir araştırma alanının doğmasına neden olmuştur. Oblova (1993; 1997) lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı üzerine ilk çalışmaları gerçekleştiren kişi olarak bilinmektedir. Alsina ve Ger (1998) çalışmalarında $y'(t) = y(t)$ diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını incelediler.

Alsina ve Ger'in (1998) bulduğu sonuç Miura ve ark. (2001), Miura (2002) ve Takahasi ve ark. (2002) tarafından genelleştirildi. Daha sonra Miura ve ark. (2003), Miura ve ark. (2004) ve Jung (2004; 2005; 2006) değişik türden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers- Ulam kararlılığını incelediler.

Jung ve Lee (2007),

$$au_{xx}(x, y) + bu_y(x, y) + cu(x, y) + d = 0$$

birinci mertebeden sabit katsayılı lineer kesirli diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını incelediler.

Lungu ve Popa (2012), birinci mertebeden bir kesirli diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını incelediler. Gordji ve ark. (2011), ikinci mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin kararlılığını incelediler. Wang ve ark. (2012;

2014), kesirli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin kararlılığını ispatladılar ve kesirli diferansiyel denklemlerin kararlılığına ilişkin bazı yeni kavramlar sundular.

Wang ve Xu (2015), Caputo kesirli türevini kullanarak

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = f(x),$$

ve

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda ({}^C D_{0+}^\beta y)(x) = g(x),$$

kesirli diferansiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını incelediler.

3.2 Bazı Fonksiyonların Mohand Dönüşümleri

Bu bölümde bazı fonksiyonların Mohand dönüşümleri elde edildi.

Lemma 3.2.1 $Re(v) > 0$ ve $\left|\frac{\lambda}{v^\alpha}\right| < 1$ olsun. O zaman

$$M\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); v\} = \frac{v^{\alpha+1}}{v^\alpha - \lambda} \quad (3.1)$$

ve

$$M\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha); v\} = \frac{v^{\alpha+2-\beta}}{v^\alpha - \lambda} \quad (3.2)$$

dir.

İspat: (3.1) için, (2.8) ve (2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{E_\alpha(\lambda t^\alpha); v\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} M\{t^{k\alpha}; v\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{v^{k\alpha-1}} \\ &= v \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{v^\alpha}\right)^k \left(\left|\frac{\lambda}{v^\alpha}\right| < 1\right) \\ &= v \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{v^\alpha}} \end{aligned}$$

$$= \frac{v^{\alpha+1}}{v^{\alpha} - \lambda}$$

istenilen elde edilir. (3.2) için de (2.9) ve (2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}); v\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} M\{t^{k\alpha+\beta-1}; v\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \frac{\Gamma(k\alpha + \beta)}{v^{k\alpha+\beta-2}} \\ &= \frac{v^2}{v^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{v^{\alpha}}\right)^k \quad \left(\left|\frac{\lambda}{v^{\alpha}}\right| < 1\right) \\ &= \frac{v^2}{v^{\beta}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{v^{\alpha}}} \\ &= \frac{v^{\alpha+2-\beta}}{v^{\alpha} - \lambda} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $\alpha > 0$ ve f , her $[0, t]$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. O zaman

$$M\{(I_{0+}^{\alpha}f)(t); v\} = \frac{M\{f(t); v\}}{v^{\alpha}} \quad (3.3)$$

dir.

İspat: (2.13), (2.37), (2.40) ve (2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{(I_{0+}^{\alpha}f)(t); v\} &= v^2 \int_0^{\infty} e^{-vt} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} M\{t^{\alpha-1} * f(t); v\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)v^2} M\{t^{\alpha-1}; v\} M\{f(t); v\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)v^2} \frac{\Gamma(\alpha)}{v^{\alpha-2}} M\{f(t); v\} \\
&= \frac{M\{f(t); v\}}{v^\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 $k = 0, 1, \dots, n-1$ için $I_{0+}^{n-k-\alpha} f$ üstel mertebeden olacak şekilde $\alpha > 0$ ve herhangi $t > 0$ için $f \in AC^n[0, t]$ olsun. O zaman

$$M\{(D_{0+}^\alpha f)(t); v\} = v^\alpha M\{f(t); v\} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-k-\alpha} f)(0^+) \quad (3.4)$$

dir.

İspat: (2.14), (2.33) ve (3.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M\{(D_{0+}^\alpha f)(t); v\} &= M\{(I_{0+}^{n-\alpha} f)^{(n)}(t); v\} \\
&= v^n M\{(I_{0+}^{n-\alpha} f)(t); v\} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-\alpha} f)^{(k)}(0^+) \\
&= v^n \frac{M\{f(t); v\}}{v^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-\alpha} f)^{(k)}(0^+) \\
&= v^\alpha M\{f(t); v\} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-\alpha} f)^{(k)}(0^+)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.24) eşitliği kullanılırsa ispat tamamlanır.

3.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Tipi Kararlılığı

Bu bölümde

$$(D_{0+}^\alpha y)(t) = f(t) \quad (3.5)$$

$$(D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda y(t) = f(t) \quad (3.6)$$

ve

$$(D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda (D_{0+}^\beta y)(t) = f(t) \quad (3.7)$$

Riemann-Liouville kesirli diferansiyel denklemlerini

$$(I_{0+}^{n-\alpha} y)^{(k)}(0^+) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

başlangıç koşulu ile ele alacağız. Burada $0 < T < \infty, \lambda, c_k, \mathbb{R}$ de skaler değerlerdir.

(3.8) başlangıç koşulu ile verilen (3.5), (3.6) ve (3.7) kesirli diferansiyel denklemlerinin Hyers-Ulam tipi kararlılığı Mohand dönüşümü kullanılarak ispatlanacak.

Tanım 3.3.1 $f: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $|(D_{0+}^{\alpha} y)(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y fonksiyonu için (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin bir y_a çözümü var ve $|y(t) - y_a(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sabiti varsa (3.8) başlangıç koşuluyla (3.5) kesirli diferansiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir. Eğer önceki ifade, ε ve K yerine sırasıyla, y ve y_a ya açıkça bağlı olmayan uygun $F(t)$ ve $C(t)$ fonksiyonları alındığında da doğruysa, o zaman karşılık gelen diferansiyel denklemine genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir denir.

Tanım 3.3.2 $f: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ de bir sabit olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $|(D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda y(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y fonksiyonu için (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin bir y_a çözümü var ve $|y(t) - y_a(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sabiti varsa (3.8) başlangıç koşuluyla (3.6) kesirli diferansiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir. Eğer önceki ifade, ε ve K yerine sırasıyla, y ve y_a ya açıkça bağlı olmayan uygun $F(t)$ ve $C(t)$ fonksiyonları alındığında da doğruysa, o zaman karşılık gelen diferansiyel denklemine genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir denir.

Tanım 3.3.3 $f: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $|(D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda(D_{0+}^{\beta} y)(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir y fonksiyonu için (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin y_a çözümü var ve $|y(t) - y_a(t)| \leq \varepsilon K$ eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sabiti varsa (3.8) başlangıç koşuluyla (3.7) kesirli diferansiyel denklemine Hyers-Ulam kararlıdır denir. Eğer önceki ifade, ε ve K yerine sırasıyla, y ve y_a ya açıkça bağlı olmayan uygun $F(t)$ ve $C(t)$ fonksiyonları alındığında da doğruysa, o zaman karşılık gelen diferansiyel denklemine genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir denir.

Teorem 3.3.4 $0 < T < \infty, 0 < n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ ve $f(t), (0, T]$ aralığında tanımlı verilen bir reel değerli sürekli fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (0, T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $y: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) başlangıç koşuluyla

$$|(D_{0+}^{\alpha}y)(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (3.9)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_a(t)| \leq \varepsilon \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (3.10)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_a: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır.

İspat: $t \in (0, T]$ için

$$Y_1(t) = (D_{0+}^{\alpha}y)(t) - f(t) \quad (3.11)$$

olsun. (3.11)'in her iki tarafının Mohand dönüşümü alınır ve (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{Y_1(t); v\} &= M\{(D_{0+}^{\alpha}y)(t); v\} - M\{f(t); v\} \\ &= v^{\alpha}M\{y(t); v\} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-k-\alpha} f)(0^+) - M\{f(t); v\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.12) de, (3.8) başlangıç koşulu kullanılarak $M\{y(t); v\}$ çekilirse

$$\begin{aligned} M\{y(t); v\} &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1-\alpha} + v^{-\alpha}M\{f(t); v\} + v^{-\alpha}M\{Y_1(t); v\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1-\alpha} + \frac{v^{-\alpha+2}}{v^2}M\{f(t); v\} + \frac{v^{-\alpha+2}}{v^2}M\{Y_1(t); v\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitliği bulunur. (2.29)'de m yerine sırasıyla $m = \alpha - 1$ ve $m = -n + k + \alpha$ yazılırsa

$$v^{-\alpha+2} = \frac{M\{t^{\alpha-1}; v\}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.14)$$

$$v^{n-k+1-\alpha} = \frac{M\{t^{-n+k+\alpha}; v\}}{\Gamma(-n + k + \alpha + 1)} \quad (3.15)$$

dir. (3.14) ve (3.15), (3.13) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M\{y(t); v\} &= \frac{M\{t^{\alpha-1}; v\}M\{f(t); v\}}{v^2\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k M\{t^{-n+k+\alpha}; v\}}{\Gamma(-n+k+\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{M\{t^{\alpha-1}; v\}M\{Y_1(t); v\}}{v^2\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{M\{t^{\alpha-1} * f(t); v\}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k M\{t^{-n+k+\alpha}; v\}}{\Gamma(-n+k+\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{M\{t^{\alpha-1} * Y_1(t); v\}}{\Gamma(\alpha)} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. $y_a(t)$

$$y_a(t) = \frac{t^{\alpha-1} * f(t)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^{-n+k+\alpha}}{\Gamma(-n+k+1+\alpha)} \tag{3.17}$$

olsun. (3.17)'nin her iki tarafının Mohand dönüşümü alınıp, (2.40), (3.14) ve (3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M\{y_a(t); v\} &= \frac{M\{t^{\alpha-1} * f(t); v\}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k M\{t^{-n+k+\alpha}; v\}}{\Gamma(-n+k+1+\alpha)} \\
&= \frac{v^{-2}M\{t^{\alpha-1}; v\}M\{f(t); v\}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k M\{t^{-n+k+\alpha}; v\}}{\Gamma(-n+k+1+\alpha)} \\
&= v^{-\alpha}M\{f(t); v\} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1-\alpha} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.4), (3.8) başlangıç koşulu ve (3.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M\{(D_{0+}^{\alpha}y_a)(t); v\} &= v^{\alpha}M\{y_a(t); v\} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} \\
&= v^{\alpha} \left\{ v^{-\alpha}M\{f(t); v\} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1-\alpha} \right\} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} \\
&= M\{f(t); v\} \tag{3.19}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.19) da Mohand dönüşümünün birebir olduğu kullanılırsa

$$(D_{0+}^{\alpha}y_a)(t) = f(t) \tag{3.20}$$

dir. Böylece $y_a(t)$, (3.5) denkleminin bir çözümü olur. (3.16) ve (3.18) kullanılırsa

$$M\{y(t) - y_a(t); v\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} M\{t^{\alpha-1} * Y_1(t); v\} \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) de Mohand dönüşümünün birebir olduğu kullanılırsa

$$y(t) - y_a(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [t^{\alpha-1} * Y_1(t)] \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22)'nin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, (2.38) ve (3.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} |y(t) - y_a(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} Y_1(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-x)^{\alpha-1}| |Y_1(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^\alpha}{\alpha} = \frac{\varepsilon t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Not Teorem 3.3.4'te $T < \infty$ ise (3.5) kesirli diferansiyel denklemi $K = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ sabiti için Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak, $T = \infty$ alınırsa (3.5) kesirli diferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Aşağıdaki Sonuç 3.3.5'te de (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlı olduğu ifade edilmektedir.

Sonuç 3.3.5 $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ ve $f(t), \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı reel bir fonksiyon olsun. Eğer bir $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t > 0$ ve bazı $F(t) > 0$ için

$$|(D_{0+}^\alpha y)(t) - f(t)| \leq F(t)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y - y_a| \leq F(t)C(t)$$

olacak şekilde bir $y_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Burada $C(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ dir.

Teorem 3.3.6 $0 < T < \infty, \lambda \in \mathbb{R}, n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ ve $f(t), (0, T]$ aralığında tanımlı verilen bir reel değerli sürekli fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (0, T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $y: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) başlangıç koşuluyla

$$|(D_{0+}^{\alpha}y)(t) - \lambda y(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (3.23)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y - y_a| \leq \varepsilon T^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda| T^{\alpha}) \quad (3.24)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_a: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır.

İspat: $t \in (0, T]$ için

$$Y_2(t) = (D_{0+}^{\alpha}y)(t) - \lambda y(t) - f(t) \quad (3.25)$$

olsun. (3.25)'in her iki tarafının Mohand dönüşümü alınır ve (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{Y_2(t); v\} &= M\{(D_{0+}^{\alpha}y)(t); v\} - \lambda M\{y(t); v\} - M\{f(t); v\} \\ &= v^{\alpha} M\{y(t); v\} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-k-\alpha} f)(0^+) - \lambda M\{y(t); v\} - M\{f(t); v\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26) da (3.8) başlangıç koşulu kullanılarak $M\{y(t); v\}$ çekilirse

$$M\{y(t); v\} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} + M\{f(t); v\}}{v^{\alpha} - \lambda} + \frac{M\{Y_2(t); v\}}{v^{\alpha} - \lambda} \quad (3.27)$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-n+k} E_{\alpha, \alpha-n+k+1}(\lambda t^{\alpha}) \\ &\quad + \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(t-x)^{\alpha}] f(x) dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

olsun. (3.28)'in her iki tarafının Mohand dönüşümü alınıp, (3.2) ve (2.38) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M\{y_a(t); v\} &= M\left\{\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-n+k} E_{\alpha, \alpha-n+k+1}(\lambda t^\alpha); v\right\} \\
&\quad + M\left\{\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(t-x)^\alpha] f(x) dx; v\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k M\{t^{\alpha-n+k} E_{\alpha, \alpha-n+k+1}(\lambda t^\alpha); v\} \\
&\quad + \frac{1}{v^2} M\{t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha); v\} M\{f(t); v\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{v^{\alpha+2-(\alpha-n+k+1)}}{v^\alpha - \lambda} + \frac{1}{v^2} \frac{v^2}{v^\alpha - \lambda} M\{f(t); v\} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} + M\{f(t); v\}}{v^\alpha - \lambda} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4), (3.8) başlangıç koşulu ve (3.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M\{(D_{0+}^\alpha y_a)(t) - \lambda y_a(t); v\} &= v^\alpha M\{y_a(t); v\} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} - \lambda M\{y_a(t); v\} \\
&= M\{f(t); v\} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

elde edilir. Mohand dönüşümünün birebir olduğu kullanılırsa

$$(D_{0+}^\alpha y_a)(t) - \lambda y_a(t) = f(t) \tag{3.31}$$

dir. Böylece $y_a(t)$, (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (3.27) ve (3.29)'dan

$$M\{y(t) - y_a(t); v\} = \frac{M\{Y_2(t); v\}}{v^\alpha - \lambda} \tag{3.32}$$

elde edilir. (2.40) ve (3.2)'den

$$\begin{aligned}
M\{t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha) * Y_2(t); v\} &= \frac{1}{v^2} M\{t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)\} M\{Y_2(t); v\} \\
&= \frac{M\{Y_2(t); v\}}{v^\alpha - \lambda} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.33) ve (3.32)'den aşağıdaki elde edilir:

$$y(t) - y_a(t) = (t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)) * Y_2(t). \tag{3.34}$$

(3.34) denkleminin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, (2.38) ve (3.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|y(t) - y_a(t)| &= \left| \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha) \right) * Y_2(t) \right| \\
&= \left| \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(t-x)^\alpha] Y_2(x) dx \right| \\
&= \left| \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} Y_2(x) dx \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} Y_2(x) dx \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \left| \frac{\lambda^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right| |Y_2(x)| dx \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1} dx \\
&= \varepsilon t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \\
&= \varepsilon t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda| t^\alpha) \\
&\leq \varepsilon T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda| T^\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Not Teorem 3.3.6’da $T < \infty$ ise (3.6) kesirli diferansiyel denklemi $K = T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda| T^\alpha)$ sabiti için Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak, $T = \infty$ alınırsa (3.6) kesirli diferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Aşağıdaki Sonuç 3.3.7’de de (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlı olduğu ifade edilmektedir.

Sonuç 3.3.7 $\lambda \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ ve $f(t), \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı reel bir fonksiyon olsun. Eğer bir $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t > 0$ ve bazı $F(t) > 0$ için

$$|(D_{0+}^{\alpha}y)(t) - \lambda y(t) - f(t)| \leq F(t)$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y - y_a| \leq F(t)C(t)$$

olacak şekilde bir $y_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Burada $C(t) = t^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda|t^{\alpha})$ dir.

Teorem 3.3.8 $0 < T < \infty, \lambda \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, m-1 < \beta < m, m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, 0 < \beta < \alpha$ ve $f(t)$, $(0, T]$ aralığında tanımlı verilen bir reel değerli sürekli fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (0, T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için $y: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) başlangıç koşuluyla

$$|(D_{0+}^{\alpha}y)(t) - \lambda(D_{0+}^{\beta}y)(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (3.35)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y - y_a| \leq \varepsilon T^{\alpha} E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda|T^{\alpha-\beta}) \quad (3.36)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $y_a: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır.

İspat: $t \in (0, T]$ için

$$Y_3(t) = (D_{0+}^{\alpha}y)(t) - \lambda(D_{0+}^{\beta}y)(t) - f(t) \quad (3.37)$$

olsun. (3.37)'nin her iki tarafının Mohand dönüşümü alınıp, (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{Y_3(t); v\} &= M\{(D_{0+}^{\alpha}y)(t); v\} - \lambda M\{(D_{0+}^{\beta}y)(t); v\} - M\{f(t); v\} \\ &= v^{\alpha} M\{y(t); v\} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} v^{n-k+1} (I_{0+}^{n-k-\alpha} f)(0+) \\ &\quad - \lambda \left\{ v^{\beta} M\{y(t); v\} - \sum_{k=0}^{m-1} v^{m-k+1} (I_{0+}^{m-k-\beta} f)(0+) \right\} \\ &\quad - M\{f(t); v\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

elde edilir. (3.38) de, (3.8) başlangıç koşulu kullanılarak $M\{y(t); v\}$ çekilirse

$$M\{y(t); v\} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} - \lambda \sum_{k=0}^{m-1} c_k v^{m-k+1} + M\{f(t); v\}}{v^\alpha - \lambda v^\beta} + \frac{M\{Y_3(t); v\}}{v^\alpha - \lambda v^\beta} \quad (3.39)$$

eşitliği elde edilir.

$$y_a(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k(t) + \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-x)^{\alpha-\beta}) f(x) dx \quad (3.40)$$

olsun. Burada

$$y_k(t) = t^{\alpha-n+k} E_{\alpha-\beta, \alpha-n+k+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}) - \lambda t^{\alpha-m+k} E_{\alpha-\beta, \alpha-m+k+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}), \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.41)$$

$$y_k(t) = t^{\alpha-n+k} E_{\alpha-\beta, \alpha-n+k+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}), \quad k = m, \dots, n-1 \quad (3.42)$$

biçiminde tanımlansın. (3.40)'ın her iki tarafının Mohand dönüşümü alınıp, (3.2) ve (2.38) kullanılırsa

$$\begin{aligned} M\{y_a(t); v\} &= M\left\{\sum_{k=0}^{m-1} c_k y_k(t); v\right\} + M\left\{\sum_{k=m}^{n-1} c_k y_k(t); v\right\} \\ &\quad + M\left\{\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda(t-x)^{\alpha-\beta}) f(x) dx; v\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k M\{t^{\alpha-n+k} E_{\alpha-\beta, \alpha-n+k+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \\ &\quad - \lambda t^{\alpha-m+k} E_{\alpha-\beta, \alpha-m+k+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}); v\} \\ &\quad + \sum_{k=m}^{n-1} c_k M\{t^{\alpha-n+k} E_{\alpha-\beta, \alpha-n+k+1}(\lambda t^{\alpha-\beta}); v\} \\ &\quad + \frac{1}{v^2} M\{t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta}); v\} M\{f(t); v\} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k v^{n-k+1} - \lambda \sum_{k=0}^{m-1} c_k v^{m-k+1} + M\{f(t); v\}}{v^\alpha - \lambda v^\beta} \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.4), (3.8) başlangıç koşulu ve (3.43) kullanılırsa

$$M\{(D_{0+}^{\alpha}y_a)(t) - \lambda(D_{0+}^{\beta}y_a)(t); v\} = M\{f(t); v\} \quad (3.44)$$

eşitliği elde edilir. Mohand dönüşümünün birebir olduğu kullanılırsa

$$(D_{0+}^{\alpha}y_a)(t) - \lambda(D_{0+}^{\beta}y_a)(t) = f(t) \quad (3.45)$$

dir. Böylece $y_a(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümüdür. (3.39) ve (3.43)'den

$$M\{y(t) - y_a(t); v\} = \frac{M\{Y_3(t); v\}}{v^{\alpha} - \lambda v^{\beta}} \quad (3.46)$$

bulunur. (2.40) ve (3.2)'den

$$M\{[t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta})] * Y_3(t); v\} = \frac{M\{Y_3(t); v\}}{v^{\alpha} - \lambda v^{\beta}} \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.46) ve (3.47)'den, aşağıdaki elde edilir:

$$y(t) - y_a(t) = [t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta})] * Y_3(t). \quad (3.48)$$

(3.48) denkleminin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, (2.38) ve (3.35) kullanılırsa

$$\begin{aligned} |y(t) - y_a(t)| &= |[t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta})] * Y_3(t)| \\ &= \left| \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta,\alpha}[\lambda(t-x)^{\alpha-\beta}] Y_3(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (t-x)^{\alpha k - \beta k + \alpha - 1}}{\Gamma[(\alpha - \beta)k + \alpha]} Y_3(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda^k|}{\Gamma[(\alpha - \beta)k + \alpha]} \left| \int_0^t (t-x)^{\alpha k - \beta k + \alpha - 1} Y_3(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda^k| \varepsilon}{\Gamma[(\alpha - \beta)k + \alpha]} \int_0^t (t-x)^{\alpha k - \beta k + \alpha - 1} dx \\ &= \varepsilon t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| t^{\alpha-\beta})^k}{\Gamma[(\alpha - \beta)k + \alpha + 1]} \\ &= \varepsilon t^{\alpha} E_{\alpha-\beta,\alpha+1}(|\lambda| t^{\alpha-\beta}) \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon T^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda| T^{\alpha-\beta})$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Not Teorem 3.3.8’de $T < \infty$ ise (3.7) kesirli diferansiyel denklemi $K = T^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda| T^{\alpha-\beta})$ sabiti için Hyers-Ulam kararlıdır. Ancak, $T = \infty$ alınırsa (3.7) kesirli diferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlı değildir.

Aşağıdaki Sonuç 3.3.9’da da (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlı olduğu ifade edilmektedir.

Sonuç 3.3.9 $\lambda \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, n-1 < \alpha < n, m-1 < \beta < m, 0 < \beta < \alpha$ ve $f(t), \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı reel bir fonksiyon olsun. Eğer bir $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t > 0$ ve bazı $F(t) > 0$ için

$$\left| (D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda (D_{0+}^\beta y)(t) - f(t) \right| \leq F(t)$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y - y_a| \leq F(t)C(t)$$

olacak şekilde bir $y_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Burada $C(t) = t^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda| t^{\alpha-\beta})$ dir.

Örnek 3.3.10 Aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\left(D_{0+}^{\frac{1}{2}} y \right)(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{10}, \quad \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}} y \right)^{(0)}(0^+) = 0. \quad (3.49)$$

Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{10}$ dir. $\frac{1}{10} < \varepsilon \leq 1$ ve $y_1(t) = t^3$ fonksiyonu için (2.16) kullanılırsa

$$\left| D_{0+}^{\frac{1}{2}} y_1(t) - f(t) \right| = \left| \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10} \right| = \left| \frac{1}{10} \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç koşulu

$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}} y_1 \right)^{(0)}(0^+) = 0$ ’dır. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan, $n = 1$ ve $c_0 = 0$ elde edilir.

Bu değerler (3.17)’de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
y_a(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} f(t-x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} (t-x)^{\frac{5}{2}} dx + \frac{1}{10\sqrt{\pi}} \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} dx
\end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50)'de ilk integrale $x = \varepsilon t$ değişken değiştirmesi uygulanır ve ikinci integral çözölürse

$$y_a(t) = t^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_a(t)$ fonksiyonlarının farklarının mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_a(t)| &= \left| t^3 - t^3 - \frac{1}{5\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right| \\
&= \frac{1}{5\sqrt{\pi}} \left| t^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{5} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{t} \\
&= \frac{2}{10\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{t} = \frac{1}{10} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{t} \\
&< \varepsilon \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{t} < \varepsilon \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{T}
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman (3.49) kesirli diferansiyel denklemi $\frac{1}{10} < \varepsilon \leq 1$ ve $K = \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}$ için Teorem 3.3.4'ü sağladığından Hyers-Ulam kararlıdır.

Örnek 3.3.11 Aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\left(D_{0+}^{\frac{1}{2}} y \right)(t) + 5y(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + 5t^2 + \frac{1}{10}, \quad \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}} y \right)^{(0)}(0^+) = 0. \tag{3.51}$$

Burada $\lambda = -5$, $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + 5t^2 + \frac{1}{10}$ dir. $\frac{1}{10} < \varepsilon \leq 1$ ve $y_1(t) = t^2$ fonksiyonu için (2.16) kullanılırsa

$$\left| D_{0+}^{\frac{1}{2}} y_1(t) + 5y_1(t) - f(t) \right| = \left| \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + 5t^2 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} - 5t^2 - \frac{1}{10} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{10} \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $y_1(t)$ fonksiyonunun başlangıç koşulu

$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}} y_1 \right)^{(0)}(0^+) = 0$ 'dır. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan, $n = 1$ ve $c_0 = 0$ elde edilir.

Bu değerler (3.28)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \int_0^t x^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \left(-5x^{\frac{1}{2}} \right) \left[\frac{8}{3\sqrt{\pi}} (t-x)^{\frac{3}{2}} + 5(t-x)^2 + \frac{1}{10} \right] dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-5)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)} \left[\frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^t x^{\frac{m-1}{2}} (t-x)^{\frac{3}{2}} dx \right. \\ &\quad \left. + 5 \int_0^t x^{\frac{m-1}{2}} (t-x)^2 dx + \frac{1}{10} \int_0^t x^{\frac{m-1}{2}} dx \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

elde edilir. (3.52)'de birinci ve ikinci integrale $x = \varepsilon t$ değişken değiştirmesi uygulanır ve üçüncü integral çözülürse

$$y_a(t) = t^2 + \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 5^m t^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2} + 1\right)}$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_a(t)$ fonksiyonlarının farklarının mutlak değeri alınır,

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_a(t)| &= \left| t^2 - t^2 - \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 5^m t^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2} + 1\right)} \right| \\ &= \frac{1}{10} \left| t^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-5)^m t^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{3}{2}\right)} \right| \\ &= \frac{1}{10} t^{\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(|-5| t^{\frac{1}{2}}) \\ &< \varepsilon t^{\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(|-5| t^{\frac{1}{2}}) \\ &= \varepsilon \sqrt{t} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(|-5| \sqrt{t}) \\ &< \varepsilon \sqrt{T} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(|-5| \sqrt{T}) \end{aligned}$$

bulunur. O zaman (3.51) kesirli diferansiyel denklemi $\frac{1}{10} < \varepsilon \leq 1$ ve $K = \sqrt{T}E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(-5|\sqrt{T})$ için Teorem 3.3.6'yı sağladığından Hyers-Ulam kararlıdır.



4. TARTIŞMA

Bu çalışmada, Riemann-Liouville kesirli türevi içeren lineer diferansiyel denklemlerin Mohand dönüşümü kullanılarak Hyers-Ulam tipi kararlılığı incelenmiştir. Literatürde yer alan klasik kesirli türev ve integral operatörleri üzerine kurulu yöntemler genelleştirilerek, kesirli diferansiyel denklemlerin kararlılık analizleri yapılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, bu çalışma için kullanılacak literatürdeki bazı tanımlar, lemmalar, teoremler, kesirli türev ve integral operatörleri, Mohand dönüşümü tanımı ve özellikleri verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde bazı fonksiyonların Mohand dönüşümleri elde edilmiştir. Riemann-Liouville kesirli türevini içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığına ilişkin teoremler ispatlanmış ve ilgili örneklerle sonuç desteklenmiştir.

Bu çalışmanın bulgularından hareketle, ilerleyen çalışmalarda farklı kesirli türev operatörlerini içeren kesirli diferansiyel denklemlerin bu tezde incelenen Hyers-Ulam tipi kararlılıklarının yanı sıra, Hyers-Ulam-Rassias gibi farklı Hyers-Ulam tipi kararlılıkları da Mohand dönüşümü yardımıyla analiz edilebilir. Bu tezde kullanılan dönüşüm yerine farklı dönüşümler kullanılarak da Hyers-Ulam tipi kararlılığı analiz edilebilir. Ayrıca farklı dönüşümler kullanılarak analiz yoluyla, mevcut yöntemin avantaj ve dezavantajları karşılaştırmalı olarak değerlendirilebilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Mohand dönüşümünün, Riemann-Liouville kesirli türevini içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam tipi kararlılığının incelenmesini kolaylaştırdığı ve etkili bir metot olduğu görülmüştür.

Mohand dönüşümü genelleştirilerek kesirli türev içeren kesirli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı gibi farklı kararlılıkları integral dönüşümler kullanılarak incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Alsina, C., & Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function. *Journal of Inequalities and Applications*, 2(3), 373-380.
- Aggarwal, S., & Chaudhary, R. (2019). A comparative study of Mohand and Laplace transform. *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, (6).
- Aggarwal, S., & Chauhan, R. (2019). A comparative study of Mohand and Aboodh transform. *International Journal of Research in Advent Technology*, (7).
- Gordji, M. E., Cho, Y.J., Ghaem, M. B., & Alizadeh, B.(2011). Stability of the second order partial differential equaions. *Journal of Inequalities and Applications*, Article 81. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2011-81>.
- Hegyi, B. & Jung, S.M. (2013). On the stability of Laplace's equation. *Applied Mathematics Letters*,26,549-552. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.014>.
- Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 27(4), 222-224.
- Jarad, F. & Abdeljawad, T. (2020). Generalized fractional derivatives and Laplace transform. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series*, (13)(3), 709-722. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2020039>.
- Jung, S.M. (2004). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Applied Mathematics Letters*, 17(10), 1135-1140. <http://doi.org/10.1016/j.aml.2003.11.004>.
- Jung, S.M. (2005). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(1), 139-146. <http://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.02.025>.
- Jung, S.M. (2006). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. II. *Applied Mathematics Letters* 19(9), 854-858. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.11.004>.
- Jung, S.-M. & Lee, K.-S. (2007). Hyers-Ulam stability of first order linear partial differential equations with constant coefficients. *Mathematical Inequalities & Applications*, (10), 261-266.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J.J., (2006), *Theory and applications of fractional diferantial equations* (Vol.204). Elsevier.
- Lungu, N. & Popa, D. (2012). Hyers-Ulam stability of a first order partial differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, (385), 86-91.
- Miura, T., Takahasi, S.-E. & Choda, H. (2001). On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued differentiable map. *Tokyo J. Matt.*, (24), 467.476.
- Miura, T. (2002). On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map. *Sci. Math. Japon.*, (55), 17-24.
- Miura, T., Miyajima, S. & Takahasi, S.-E. (2003). A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286(1), 136-146. [http://doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00458-X](http://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00458-X).
- Miura T., Jung, S.-M. & Takahasi, S.-E. (2004). Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations $y' = \lambda y$. *J. Koeran Math. Soc.*, (41), 995-1005.
- Mohand, M. & Mahgoub, A. (2017). The new integral transform “Mohand Transform”. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, (12), 113-120.

- Obloza, M. (1993). Hyers stability of the linear differential equation. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Prace Matematyczne*, 159(13), 259-270. <http://hdl.handle.net/11716/7688>.
- Obloza, M. (1997). Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Prace Matematyczne*, 189(14), 141-146. <http://hdl.handle.net/11716/8211>.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. San Diego: Academic Press.
- Rassias, Th. M. (1978). On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 72(2), 297-300.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A. & Marichev, O. (1993). *Fractional integrals and derivatives; Theory and applications*. Gordon and Breach Science.
- Takahasi, S.-E., Miura, T. & Miyajima, S. (2002). On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$. *Bull. Korean Math. Soc.*, (39), 309-315.
- Wang, C. & Xu, T. (2015). Hyers-Ulam stability of fractional linear differential equations involving Caputo fractional derivatives. *Applications of Mathematics*, (60)(4), 383-393. <https://eduml.org/doc/271626>.
- Wang, J., Lv, L. & Zhou, Y. (2012). New concepts and results in stability of fractional differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, (17), 2530-2538.
- Wang, J., & Zhang, Y. (2014). A class of nonlinear differential equations with fractional integrable impulses. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, (17), 3001-3010.