

MOMENTLERE DAYALI BAZI YENİ OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİ

Cihan AKSOP

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2008

ANKARA

Cihan AKSOP tarafından hazırlanan MOMENTLERE DAYALI BAZI YENİ OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz AKDİ

.....

İstatistik Anabilim Dalı, A.Ü.

Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Hasan BAL

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih: 11/06/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cihan Aksop

Momentlere Dayalı Bazı Yeni Olasılık Eşitsizlikleri
(Yüksek Lisans Tezi)

Cihan AKSOP

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2008

ÖZET

Chebyshev ve Markov eşitsizlikleri istatistikçiler tarafından iyi bilinen ve hemen hemen bütün matematiksel istatistik kitaplarında yer alan eşitsizliklerdir. Chebyshev eşitsizliği bir rastgele değişkenin ilk iki momenti bilindiğinde, Markov eşitsizliği ise rastgele değişken sadece pozitif değerler alabiliyorken ilk momenti bilindiğinde yazılabilir. Bu çalışmada, rastgele değişkenin bilinen moment sayısı arttıkça, bu türden eşitsizliklerin nasıl elde edilebileceği incelenmiştir.

Bilim Kodu : 205. 1. 110

Anahtar Kelimeler: Chebyshev ve Markov eşitsizlikleri, olasılık eşitsizlikleri

Sayfa Adedi : 59

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

NEW PROBABILITY INEQUALITIES BASED ON MOMENTS**(M.Sc. Thesis)****Cihan AKSOP****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2008****ABSTRACT**

Chebyshev and Markov inequalities are well known to statisticians and appear in most mathematical statistics books. The Chebyshev inequality needs one to know the first two moments of a random variable and the Markov inequality needs one to know the first moment of a random variable which is positive. In this thesis, some generalizations of these inequalities when one knows more moments are studied.

Science Code : 205. 1. 110**Key Words : Chebyshev and Markov inequalities, probability inequalities****Page Number: 59****Adviser : Assoc. Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na teşekkür eder, her türlü yardımlarını esirgemeyen aileme de sonsuz şükranlarımı sunarım. Değerli arkadaşım Pınar ESEN'in dikkatli inceleme ve önerileri olmaksızın bu tezin hazırlanması mümkün olmazdı.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI TANIM VE GÖSTERİMLER.....	6
3. RASTGELE DEĞİŞKENLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİNE DAYANAN BAZI YENİ OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİ.....	7
4. OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİNİN ELDE EDİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA.....	42
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR.....	50
EKLER.....	54
EK-1 n tane aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenlerin toplamının, ortalama etrafındaki dördüncü momenti.....	55
EK-2 Monoton fonksiyonlar için Chebyshev eşitsizliği, Hölder eşitsizliği	57
ÖZGEÇMİŞ.....	59

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. $P\{ X - 20 \geq 4\}$ olasılık değeri için Teorem 3.1. kullanılarak elde edilen bazı üst sınırlar ile X rastgele değişkeninin ortalama etrafındaki bazı momentleri.....	10
Çizelge 4.1. π probleminin çözümünden elde edilen bazı sonuçlar.....	48

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. $r = 3$ ve $r = 5$ için $\zeta(z, r) = \frac{r(2^{r+1} - 1)}{z(r+1)(2^r - 1)}$ değerleri.....	22
Şekil 3.2. $b = 5$ ve $a = 0$ iken Teorem 3.17.'den elde edilen bazı olasılıkların üst sınır değerleri.....	24
Şekil 3.3. $c = 3$ ve $\lambda = 1$ iken $n = 1, 2, 3, 4$ için Sonuç 3.20.'den elde edilen üst sınır değerleri ile $F(z)$ değerleri.....	31
Şekil 3.4. Eş. 3.13'deki olasılık sınırlayıcısı ile $F(z)$ 'nin gerçek değerleri.....	35
Şekil 3.5. $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ iken α ve β 'nin bazı değerline karşılık $F(z)$ değerleri ile Teorem 3.24.'den elde edilen olasılık sınırlayıcısının değerleri.....	37

1. GİRİŞ

İstatistik uygulamalarında ve olasılık teorisinde, rastgele değişkenin dağılımının tam olarak bilinmemesi, fakat ilgili dağılım hakkında bazı bilgilerin bilinmesi sıklıkla karşılaşılan bir durumdur. Bu bilgi rastgele değişkenin dağılımının biçimi, çeşitli parametrelerin bilinmesi, var olan veri kayıtları, yeni çekilen örnek değerleri vb. biçiminde olabilir. Bu tip durumlarda dağılım hakkında bazı çıkarsamalar yapmak için, özellikle bir takım olasılık değerlerini hesaplamada kullanılan birçok yöntem mevcuttur. Bu yöntemlere; dağılımın momentleri yardımıyla istenen olayın olasılığına alt/üst sınır koyma, örnek değerleri yardımıyla istenen olasılığın tahmin edilmesi, dağılımın bilinen diğer olasılık değerleri yardımıyla ilgilenilen olasılık değerinin sınırlarının belirlenmesi örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada, yığının bilinen momentleri yardımıyla çeşitli olasılık değerlerine ilişkin alt/üst sınırların nasıl elde edilebileceği incelenmiştir.

Yığının momentlerine ait bilgiler yardımıyla yığın dağılımı için çıkarsama yapma problemi şu şekilde üçe ayrılabilir:

- 1) Dağılımın bütün momentlerinin bilinmesi durumunda dağılımın belirlenmesi.
- 2) Dağılımın momentlerinin örnek yardımıyla tahmin edilmesi durumunda çeşitli olasılık değerleri için alt/üst sınırların tahmin edilmesi.
- 3) Dağılımın bilinen momentlerinin sayısının sonlu olması durumunda çeşitli olasılık değerleri için alt/üst sınırların elde edilmesi.

1) ve 3) problemi literatürde çok çalışılmıştır. Genellikle bu iki problemde geçen gerekli dağılım bilgileri uygulamada bilinmediğinden, bu iki problemin sonuçlarını kullanmak için istatistik uygulamaları açısından doğrudan çok kullanışlı olmayan bu türden eşitsizlikler, olasılık teorisi için oldukça önemlidirler. Öte yandan 2)'de belirtilen problemin çözümü için yapılan araştırmada sadece iki makaleyle karşılaşılmıştır. Buna rağmen istatistik uygulamaları bakımından önemi diğerlerine göre daha büyüktür. İzleyen alt bölümlerde bu problemler daha ayrıntılı bir biçimde tanımlanacaktır.

Bütün momentlerin bilinmesi durumunda dağılımın belirlenmesi problemi

Bu problem, dağılımın momentlerinin dağılımı teklikle belirlenmesi için gerek ve yeter koşulları inceler. Başka bir ifade ile bu problem şu şekilde tanımlanabilir [44]:

X ve Y iki rastgele değişken olsun ve dağılım fonksiyonları sırasıyla F ve G ile gösterilsin. Eğer her $k = 1, 2, \dots$ için $E[X^k] = E[Y^k]$ ise, hangi durumlarda her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = G(x)$ olur?

Bu problem literatürde çok çalışılmış ve özellikle Carleman, Krein[35] ve Lin [24] koşulları bu amaçla çok sık kullanılmıştır.

Ayrıca Chernoff [9] eşitsizliği moment üreten fonksiyonu kullandığı için bu problem ile ilgilendirilebilir.

Momentlerin örnek yardımıyla tahmin edilmesi durumunda çeşitli olasılık değerleri için alt/üst sınırların tahmin edilmesi problemi

Bu başlık altında çok az çalışma mevcuttur. Saw ve ark. [40] 1984'deki çalışmalarında örnek ortalama ve varyans değerlerini kullanarak $P\{|X - \bar{X}| > \lambda Q\}$ olasılığı için bir üst sınır değeri elde etmişlerdir. Burada X ilgilenilen rastgele değişken, $\bar{X}$ örnek ortalaması ve Q örnek varyansının bir fonksiyonu olup, $\lambda \geq 1$ 'dir. Kolmogorov [21] ise 1941 yılındaki çalışmasında Kolmogorov-Smirnov test istatistiğinden yararlanmıştır.

Bilinen momentlerin sayısının sonlu olması durumunda çeşitli olasılık değerleri için alt/üst sınırlar elde etme problemi

Bu problem bir rastgele değişkenin sonlu sayıdaki momentlerinin değerlerine bağlı olarak, çeşitli değerleri alması olasılığına sınır bulmayla ilgilidir; yani,

A herhangi bir olay olmak üzere, verilen bir moment değerleri kümesine bağlı olarak $P(A)$ olasılığına atanabilecek en küçük/büyük değer nedir?¹

Bu problem Gauss, Bienaymé, Markov ve Chebyshev gibi büyük matematikçiler tarafından incelenmeye başlamıştır. Özellikle Markov ve Chebyshev'in elde ettiği kendi adlarıyla anılan eşitsizlikler ve bunların genelleştirmeleri literatürde bu başlık altında önemli yer tutmaktadır.

Markov eşitsizliği negatif değerler alması olasılığı sıfır olan Y rastgele değişkeninin ortalaması μ_Y var (sonlu) iken her $a > 0$ değeri için $P\{Y \geq a\} \leq \frac{\mu_Y}{a}$ olduğunu söyler. Bu eşitsizlik şu şekilde yorumlanabilir: Eğer bir rastgele değişkenin sadece pozitif değerler alabildiği, ilk momentinin var (sonlu) olduğu ve bu momentin değeri biliniyorsa, bu rastgele değişkenin belli bir değerden daha büyük değerler alması olasılığı için bir üst sınır üretilebilir.

Chebyshev eşitsizliği ise bir X rastgele değişkeninin ortalaması μ ve varyansı σ^2 var olduğu verilmişken her $k > 0$ değeri için $P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$ olduğunu söyler.

Bu eşitsizliğin yorumu ise şu şekilde yapılabilir: Eğer bir rastgele değişkene ilişkin ilk iki momentin var (sonlu) olduğu ve bu momentlerin değerleri biliniyorsa, bu rastgele değişkenin, ortalaması merkezli ve yarıçapı standart sapmasının belli bir katı olan bir yuvarda değer almaması olasılığı için bir üst sınır elde edilebilir.

Simpson ve Welch [42] ilk dört momentin bilinmesi durumunda çeşitli olayların olasılıkları için alt ve üst sınırları tablo halinde sunarken, Royden [38] ilk n moment verildiğinde bu değerleri incelemiştir.

Zelen [48] ise bir anlamda tek taraflı Chebyshev eşitsizliği denebilecek olan

¹ Mises [29] bu problemi, mutlak momentler verildiğinde özel olarak $P\{|X| < t\}$ olasılığı için burada yapılabilecek benzer biçimde tanımlamıştır.

$$P\{X - \mu \geq t\sigma\} \leq \left[1 + t^2 + \frac{(t^2 - t\alpha_3 - 1)^2}{\alpha_4 - \alpha_3^2 - 1} \right]^{-1}, t \geq \frac{1}{2}(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 4})$$

eşitsizliğinin μ ortalamalı, σ^2 varyanslı ve dördüncü momenti var olan her X rastgele değişkeni için sağlandığını göstermiştir. Burada $\alpha_n = \frac{E[(X - \mu)^n]}{\sigma^n}$ 'dir. Marshall ve Olkin [26] ise bu sonucu çok değişkenli rastgele değişkenlere genelleştirmişlerdir.

Bunların yanında Jensen eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir sonucu olan

$$P\{X < \lambda E[X]\} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$$

biçimindeki eşitsizlik [15], olasılıkların doğrusal birleşimleri üzerine oluşturulan eşitsizlikler [12] ve Pearson [34]'un elde ettiği sonuçlar, bu problem altında önemli olan sadece birkaç çalışmadır. Ayrıca, moment bilgisine ek olarak bir X rastgele değişkeninin dağılımının 0 etrafında tek modlu olması durumunda Gauss [41]:

$$\begin{aligned} P\{|X| \geq k\} &\leq \frac{4E[X^2]}{9k^2} && ; k^2 \geq \frac{4}{3}E[X^2] \\ &\leq 1 - \left(\frac{k^2}{3E[X^2]} \right)^{1/2} && ; k^2 \leq \frac{4}{3}E[X^2] \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Bu eşitsizlik Vysochanskii ve Petunin [46] tarafından iyileştirilmiş; Dharmadhikari ve Joag-Dev [10] tarafından iki boyutlu, Meaux ve ark. [27] tarafından çok boyutlu genelleştirmesi yapılmıştır. Ayrıca bu eşitsizlik [11, 37, 41]'de çeşitli yönleriyle incelenmiştir.

Cantelli'nin [5, 8] bir X rastgele değişkeninin mutlak momentleri olan $\nu_m = E[|X - \mu|^m]$ 'e dayalı olarak

$$P\{|X - \mu| \geq a\} \leq \frac{\nu_{2m} - \nu_m^2}{\nu_{2m} - \nu_m^2 + (a^m - \nu_m)^2}$$

şeklinde elde ettiği eşitsizlik ve Prékopa [36] ile Sathe ve ark. [39]'nın binom momentlere¹ dayalı olarak elde ettikleri sonuçlar, bu problem altında bazı diğer ilginç örneklerdir.

Smith [43], Baranoski ve ark. [2], Narumi [31] ve Jensen [19] momentlere dayalı olarak çeşitli olaylar için alt/üst değer bulmanın uygulamada kullanışlarını örneklendirmektedirler.

Bu tez, 1.3. problemi ile ilgilenmekte ve bir rastgele değişkenin keyfi sayıda momentleri bilindiğinde bazı olasılık eşitsizliklerinin nasıl elde edilebileceğini göstermekte ve bu eşitsizlikleri karşılaştırmaktadır.

¹ Bir X rastgele değişkeninin k . binom momentini $E\left[\binom{X}{k}\right]$ olarak tanımlanır [36].

2. BAZI TANIM VE GÖSTERİMLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan tanımların ve gösterimlerin verilmesi uygun görüldü.

Bu çalışma boyunca X ve Y ile rastgele değişkenler; F_X , F_Y , f_X ve f_Y ile sırasıyla bu rastgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları ile dağılımları gösterilecektir. Bir karışıklığa neden olmadığı durumlarda indisler kullanılmayacaktır. Ayrıca μ_r ve m_r , ilgilenilen rastgele değişkenin sırasıyla ortalama ve sıfır etrafındaki r . dereceden momenti olarak alınacak ve özel olarak rastgele değişkenin ortalaması $m_1 = \mu$ ve varyansı $\mu_2 = \sigma^2$ (> 0) olarak gösterilecektir. Bir momentin varlığından veya değerinin bilinmesinden, bu momentin tanımlı ve sonlu olduğu ifadesi kastedilecektir.

2.1. Tanım: Eğer bir g fonksiyonu ve her $k \in \mathbb{R}$ için $P\{g(X) \geq k\} \leq \zeta(k)$ ($\geq \zeta(k)$) olacak biçimde bir $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, ζ fonksiyonu g fonksiyonunun bir *olasılık sınırlayıcısıdır*, denir.

2.2. Tanım: ζ ve η aynı g fonksiyonu için iki olasılık sınırlayıcısı iken $\zeta < \eta$ ($\zeta > \eta$) oluyorsa, g fonksiyonu için ζ , η 'dan *etkin sınırlayıcıdır*, denir.

2.3. Tanım: Bir g fonksiyonunun olasılık sınırlayıcısı en az bir X rastgele değişkeni için istenen olasılığı eşitlik biçiminde sağlayabiliyorsa; yani ζ , g için bir olasılık sınırlayıcısı iken, $P\{g(X) \geq k\} = \zeta(k)$ olacak biçimde en az bir X rastgele değişkeni bulunabiliyorsa, ζ olasılık sınırlayıcısına *anlamlıdır (sharp)*, denir.

3. RASTGELE DEĞİŞKENLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİNE DAYANAN BAZI YENİ OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde sunulacak olan olasılık sınırlayıcıları temel olarak çeşitli integral eşitsizliklerine dayanmaktadır. Bölümün başlarında önce Chebyshev eşitsizliğinin bir genelleştirmesi sunulup incelenecek ve daha sonra keyfi sayıda keyfi derecelerden momentlerin bilinmesi durumunda ne tür eşitsizliklerin yazılabileceği araştırılacaktır. Bu ve sonraki bölümlerde verilen ispatlar, aksi belirtilmedikçe sadece sürekli rastgele değişkenler için yapılacaktır. Kesikli rastgele değişkenler için ispatlar benzer yollarla kolayca yapılabilir.

3.1. Teorem: Her n pozitif çift tamsayısı için

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{\mu_n}{k^n \sigma^n}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $k > 0$ keyfi bir sabittir.

İspat: Bu teoremin ispatı [17]'de var olmakla beraber bütünlüğü bozmamak için burada verilmesi uygun görüldü.

$$\begin{aligned} \mu_n &= E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^n f(x) dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^n f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^n f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} k^n \sigma^n f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} k^n \sigma^n f(x) dx \\ &= k^n \sigma^n [P\{X \leq \mu - k\sigma\} + P\{X \geq \mu + k\sigma\}] \\ \Rightarrow P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} &\leq \frac{\mu_n}{k^n \sigma^n} \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu teoremda özel olarak $n = 2$ alınırsa Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Barlow ve Marshall [3], bir X pozitif rastgele değişkeni için $m_r < \infty$ ($r > 0$) iken her $t > 0$ için

$$\begin{aligned} P\{X \geq t\} &\leq \frac{\mu^r}{t^r}, t \geq m_r \\ &\leq 1, t \leq m_r \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığını belirterek, bu eşitsizliği Markov eşitsizliği olarak tanıtmaktadır.

Pearson [34] her X rastgele değişkeni için $\varepsilon > 0$ keyfi bir sabit olmak üzere,

$$P\{X < \mu + \varepsilon\} > 1 - \frac{\mu_{2s}}{\varepsilon^{2s}}; s \in \mathbb{N}$$

olduğunu göstermiştir. Teorem 3.1, Pearson'ın gösterdiği eşitsizliği bir anlamda genelleştirmekte ve etkinliğini arttırmaktadır; şöyle ki keyfi $\varepsilon > 0$ sabit değeri için

$$\begin{aligned} P\{X < \mu + \varepsilon\} &= P\{X - \mu < \varepsilon\} \\ &\geq P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \\ &\geq 1 - \frac{\mu_n}{\varepsilon^n} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada son eşitsizlik, Teorem 3.1'de $k\sigma = \varepsilon$ alınarak yazılmıştır.

Teorem 3.1'de geçen koşullar sağlandığında, Chebyshev eşitsizliği kullanırsa; yani $n = 2$ alınırsa,

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

elde edilir. O halde Teorem 3.1'de geçen eşitsizliğin Chebyshev eşitsizliğinden daha etkin sınırlayıcı olması demek

$$\frac{\mu_n}{k^n \sigma^n} < \frac{1}{k^2} \quad \text{yani; } \mu_n < k^{n-2} \sigma^n$$

koşulu sağlanacak biçimde bir $n > 2$ çift tamsayısının bulunabilmesi demektir. Daha genel olarak herhangi n ve m pozitif çift tamsayıları için

$$\frac{\mu_n}{k^n \sigma^n} < \frac{\mu_m}{k^m \sigma^m} \quad \text{yani; } k^{m-n} \sigma^{m-n} \mu_n < \mu_m \quad (3.1)$$

koşulu sağlanırsa, Teorem 3.1'de ortalama etrafındaki n . moment kullanılarak elde edilen eşitsizlik, ortalama etrafındaki m . moment kullanılarak yazılan eşitsizlikten daha etkin olasılık sınırlayıcısı olur. Bu durumda n değerinin seçimiyle ilgili yeni bir soru ortaya çıkar. En etkin olasılık sınırlayıcısını bulmak için n kaç alınmalıdır?

Aşağıdaki örnek n değerinin artmasının, yani Teorem 3.1'deki eşitsizlikte kullanılan momentin derecesinin artmasının her zaman daha etkin olasılık sınırlayıcısı vermeyebileceğini gösteriyor.

3.2. Örnek: $X \sim \text{Binom}\left(25, \frac{4}{5}\right)$ olsun ve $P\{|X - 20| \geq 4\}$ olasılık değeri için bir üst sınır elde etmek istensin. Bu olasılığın değeri 0,0506'dır. $\mu = E[X] = 20$ ve $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 4$ olduğundan, istenen olasılık $P\{|X - \mu| \geq 2\sigma\}$ değerine eşittir. O halde istenen üst sınırı bulmak için Teorem 3.1 kullanılabilir. Çizelge 3.1 $n = 2, 4, \dots, 10$ olduğunda ortalama etrafındaki n . momentin değerini ve Teorem 3.1'de geçen üst sınır değerlerini gösteriyor.

Çizelge 3.1. $P\{|X - 20| \geq 4\}$ olasılık değeri için Teorem 3.1 kullanılarak elde edilen bazı üst sınırlar ile X rastgele değişkeninin ortalama etrafındaki bazı momentleri

n	μ_n	$\mu_n / (k^n \sigma^n)$
2	4,0000	0,2500
4	48,1536	0,1881
6	1 024,4096	0,2501
8	33 259,5200	0,5075
10	1 503 028,838	1,4334

Bu çizelgede ikinci sütunda bulunan μ_n değerlerinin tartışması sonra yapılacaktır. Çizelge 3.1'in son sütununda bulunan değerler, Teorem 3.1'den elde edilen üst sınır değerleridir. Çizelgeden de görüldüğü üzere, dördüncü moment kullanılarak yazılan olasılık sınırlayıcısı, istenen olasılık değeri için, diğer kullanılan momentlerden elde edilen üst sınır değerinden daha küçüktür; yani daha etkin olasılık sınırlayıcısıdır. Fakat kullanılan moment sayısı 10'a çıkarıldığında, elde edilen üst sınır 1'den büyük olduğundan, anlamlı bir olasılık sınırlayıcısı olamamaktadır; çünkü olasılık daima 1'den küçüktür.

İzleyen önerme, bazı koşullar sağlandığında ortalama etrafında kullanılan momentin derecesi n arttıkça, Teorem 3.1'de elde edilen olasılık sınırlayıcının etkinliğini yitireceğini göstermektedir.

3.3. Önerme: X rastgele değişkeninin, n pozitif çift tamsayı olmak üzere, ortalama etrafındaki ilk n momentleri var ve $P\{X \neq \mu\} > 0$ olsun. Bu durumda eğer bir $n_0 < n$ pozitif çift tamsayısı ve $k > 0$ değeri için $k^2 \sigma^2 \mu_{n_0-2} < \mu_{n_0}$ ve $\mu_{n_0}^2 \leq \mu_{n_0-2} \mu_{n_0+2}$ eşitsizlikleri sağlanırsa, o zaman $k^2 \sigma^2 \mu_{n_0} < \mu_{n_0+2}$ olur.

İspat: $P\{X \neq \mu\} > 0$ olduğundan her n çift tamsayısı için $\mu_n \neq 0$ 'dır. Öte yandan önermenin hipotezinde $k^2\sigma^2\mu_{n_0-2} < \mu_{n_0}$ verildiğinden $k^2\sigma^2 < \frac{\mu_{n_0}}{\mu_{n_0-2}}$ sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını μ_{n_0} ile çarpıp, sağ tarafını μ_{n_0+2} ile çarpıp bölerek

$$k^2\sigma^2\mu_{n_0} < \frac{\mu_{n_0}^2}{\mu_{n_0-2}\mu_{n_0+2}}\mu_{n_0+2} \quad (3.2)$$

elde edilir. Öte yandan hipotezden $\mu_{n_0}^2 \leq \mu_{n_0-2}\mu_{n_0+2}$ verildiğinden $\frac{\mu_{n_0}^2}{\mu_{n_0-2}\mu_{n_0+2}} \leq 1$ olur ki bu Eş. 3.2 eşitsizliğinde kullanılırsa önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Yukarıdaki önermede geçen koşulların sağlanması durumunda Eş. 3.1 koşulu göz önüne alındığında, Teorem 3.1'de ortalama etrafındaki n_0 . moment kullanılarak elde edilen olasılık sınırlayıcısının, ortalama etrafındaki $n_0 + 2$. moment kullanılarak elde edilen olasılık sınırlayıcısından daha etkin olduğu görülür.

Örnek 3.3'teki μ_n değerleri incelendiğinde $k^2\sigma^2\mu_4 < \mu_6$ ve $\mu_6^2 \leq \mu_4\mu_8$ eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Bu nedenle μ_6 kullanılarak elde edilen eşitsizlik, μ_4 kullanılarak elde edilen eşitsizlikten daha kötü sonuç vermiştir.

Bennett [5], $E[X] = 0$ ve bir $M > 0$ sabiti için $|X| \leq M$ olacak biçimdeki her X rastgele değişkeninin momentleri arasında

$$\mu_r \leq M^{r-2}\sigma^2, \quad r \geq 2$$

biçiminde bir ilişki olduğunu göstermiştir. Benzer biçimde

$$\mu_{r+2} \leq M^2 \mu_r, \quad r \geq 0$$

yazılabileceği açıktır. Bu eşitsizlikte özel olarak r çift tamsayı olmak üzere

$$M^2 = \frac{\mu_{r+2}^2}{\mu_r^2 k^2 \sigma^2} \text{ alınır}$$

$$k^2 \sigma^2 \mu_r \leq \mu_{r+2} \quad (3.3)$$

elde edilir. Eş. 3.3 eşitsizliğin Eş. 3.1 ile benzer olduğuna dikkat edilmelidir. O halde, bir rastgele değişken $r \in 2\mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\left(-\frac{\mu_{r+2}^2}{\mu_r^2 k^2 \sigma^2}, \frac{\mu_{r+2}^2}{\mu_r^2 k^2 \sigma^2}\right)$ aralığında değer alıyorsa; bu rastgele değişken için Teorem 3.1'de r . moment kullanılarak elde edilen olasılık sınırlayıcısı $r+2$. moment kullanılarak elde edilen olasılık sınırlayıcısından daha etkin olacaktır.

3.4. Örnek: [49] Sabit bir $k > 1$ sayısı için X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlansın;

$$P\{X = -k\} = P\{X = k\} = \frac{1}{2k^2} \text{ ve } P\{X = 0\} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

Bu şekilde tanımlanan fonksiyonun bir olasılık fonksiyonu olduğu açıktır. Bu durumda,

$$\mu = E[X] = (-k) \frac{1}{2k^2} + k \frac{1}{2k^2} = 0$$

ve

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = (-k)^2 \frac{1}{2k^2} + k^2 \frac{1}{2k^2} = 1$$

olur. $P\{|X - \mu| \geq k\sigma\}$ değeri verilen olasılık fonksiyonun tanımından

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} = \frac{1}{k^2}$$

'dir. Eğer bu olasılık değeri için Teorem 3.1'de geçen olasılık sınırlayıcısı, ortalama etrafındaki n . (burada n pozitif çift tamsayıdır) moment kullanılarak yazılırsa;

$$\mu_n = E[(X - \mu)^n] = k^{n-2}$$

ve

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{\mu_n}{k^n \sigma^n} = \frac{1}{k^n}$$

olarak elde edilir. Bu ise Teorem 3.1'de geçen olasılık sınırlayıcısının $k > 1$ iken anlamlı olduğunu göstermektedir.

3.5. Örnek: $X_1, X_2, \dots$ bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenler olsun ve ortalamaları μ , varyansları σ^2 ve ortalama etrafındaki k . momentleri μ_k ile gösterilsin. n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\mu_{(n):4} = E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)^4\right]$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < \tau < 1$ sayıları için

$$P \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \tau$$

eşitsizliğin sağlanması için gereken n değerini araştıralım. Eğer bu değer Chebyshev eşitsizliğine göre bulunursa;

$$\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \leq \tau \Rightarrow n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \tau}$$

olarak elde edilir. Eğer bu değer, Teorem 3.1'de geçen eşitsizlikte ortalama etrafındaki dördüncü momenti kullanılarak bulunursa (anlaşılabilirliği arttırmak için bu değer, bu örnekte *dördüncü moment eşitsizliği* olarak anılacaktır);

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{(n):4}}{\varepsilon^4 n^4} \leq \tau &\Rightarrow \frac{\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4}{\varepsilon^4 n^3} \leq \tau \\ &\Rightarrow \tau \varepsilon^4 n^3 - 3\sigma^4 n - \mu_4 + 3\sigma^4 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitsizliğin çözüm bölgesi olarak elde edilir (bu eşitsizlikte tek bilinmeyen değişkenin n olduğuna dikkat edilmelidir). Burada Eş. 3.4'deki geçiş için Ek-1'deki önerme kullanılmıştır. Elde edilen mümkün çözüm bölgesi N ile gösterilsin. Şimdi dördüncü moment eşitsizliğinin $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$ 'den küçük olması için (yani Chebyshev eşitsizliğinden daha etkin bir olasılık sınırlayıcısı olması için) hangi şartların gerektiğini inceleyelim. Etkin olasılık sınırlayıcısı tanımını göz önüne alınırsa:

$$\frac{\mu_{(n):4}}{\varepsilon^4 n^4} < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \Rightarrow \varepsilon^2 \sigma^2 n^2 - 3(n-1)\sigma^4 - \mu_4 > 0$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin çözüm kümesi T ile gösterilirse;

$$T = \mathbb{Z}^+ / \left[\frac{3\sigma^3 - \sqrt{\Delta}}{2\varepsilon^2\sigma}, \frac{3\sigma^3 + \sqrt{\Delta}}{2\varepsilon^2\sigma} \right]$$

olur. Burada $\Delta = 9\sigma^6 - 12\varepsilon^2\sigma^4 + 4\varepsilon^2\mu_4$ 'dir. O halde $T \cap N$ kümesindeki n değerleri için dördüncü moment eşitsizliği kullanılırsa, istenen olasılık hem τ dan küçük bırakılmış, hem de Chebyshev eşitsizliğinden daha etkin olmuş olur. O halde eğer $T \cap N \neq \emptyset$ ise $n \in T \cap N$ olmak üzere, Chebyshev eşitsizliği ve dördüncü moment eşitsizliği ile aynı değerleri elde etmek için, Chebyshev eşitsizliğinde daha fazla rastgele değişken kullanılması, yani; örneğe daha çok birim çekilmesi gerekir.

Bu örnek, simülasyon çalışmalarında gerekli örnek hacminin bulunması için kullanılabilir. Ayrıca bu örnekten elde edilen sonuçlar, simülasyon çalışmalarının etkinliğini arttırmanın tek yolunun, ilgili değişkenin varyansını küçültmek olduğu yönündeki genel inanın [14] yanlışlığına güzel bir örnek oluşturmaktadır. Burada belirtmek gerekir ki, simülasyon çalışmalarının etkinliğini arttırmak için bir çok yöntem vardır. Bunların üstünlükleri, problemden probleme değişmektedir. Bu bölümdeki amaç yeni moment eşitsizlikleri elde etmek ve bunların uygulamalarını göstermek olduğundan, bu örnek üzerindeki tartışma burada sonlandırılacaktır.

3.6. Teorem: X pozitif tamsayı değerli bir rastgele değişken olsun. Eğer her $x, y < z$ için $x < y$ iken $f(x) < f(y)$ olacak şekilde bir z bulunabilir ise, o zaman her $n \leq z$ için

$$P\{X \leq n\} \leq \frac{2E[X | X \leq n]}{n+1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f_{X|X \leq n}(x) = P\{X = x | X \leq n\}$ olasılığını gösterebiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} E[X | X \leq n] &= \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n x f_{X|X \leq n}(x) \geq \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n x f(x) \\
&\geq \left(\frac{1}{n} \sum_{x=1}^n x \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{x=1}^n f(x) \right) \\
&= \frac{n^2 + n}{2n^2} P\{X \leq n\} \\
\Rightarrow P\{X \leq n\} &\leq \frac{2E[X | X \leq n]}{n+1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Burada Eş. 3.5 eşitsizliği, monoton fonksiyonlar için Chebyshev eşitsizliği kullanılarak yazılmıştır (Bkz. EK – 2). Böylece ispat tamamlanmış olur.

Burada tek modlu olma kavramından bahsetmek faydalı olacaktır. Bir X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $(-\infty, m)$ aralığında konveks ve (m, ∞) aralığında konkav ise, X rastgele değişkenine m etrafında tek modludur denir [20,27]. Bu kavram Olshen ve Savage [30,33] tarafından "0 etrafında α -tek modlu" biçiminde genelleştirilmiştir. Bu tanıma göre bir X rastgele değişkeninin 0 etrafında α -tek modlu olması için gerek ve yeter şart U , $(0,1)$ aralığında tekdüze dağılıma sahip olmak üzere U ve Z iki bağımsız rastgele değişken iken X 'in $U^{1/\alpha}Z$ ile aynı dağılıma sahip olmasıdır.

Mallows ve Richter [25] keyfi bir A olayı için

$$P(A) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (E[X | A] - \mu)^2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermişlerdir. Burada özel olarak $A = X^{-1}((-\infty, n])$ alınırsa

$$P\{X \leq n\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (E[X | X \leq n] - \mu)^2}$$

elde edilir. Mallows ve Richter'in bulduğu eşitsizlikle Teorem 3.6'da geçen eşitsizliği karşılaştırmak doğru değildir; çünkü Teorem 3.6 sadece koşullu beklenen değer kullanılıyorken, Mallows ve Richter ortalama ve varyansı da kullanmışlardır.

3.7. *Örnek:* X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 & , x = 0 \\ 0,2 & , x = 1/3 \\ 0,5 & , x = 3 \\ 0,2 & , x = 4 \\ 0 & , dh \end{cases}$$

Bu durumda $n = 3$ alındığında $E[X | X \leq n] = 1,9583$ olduğundan Teorem 3.6'dan $P\{X \leq n\}$ olasılığı için üst sınır 0,97915 olarak elde edilir. $P\{X \leq n\}$ olasılığının gerçek değeri ise 0,8'dir.

3.8. *Teorem:* X pozitif değerli rastgele değişkeninin sıfır etrafındaki bilinen momentlerinin mertebelerinin bazılarını a_i , $i = 1, \dots, n$ ile gösterelim; öyle ki bir i değeri için sıfır etrafındaki a_i mertebeli momenti biliniyorsa, sıfır etrafındaki $a_i + 1$ mertebeli momenti de biliniyor olsun. O zaman, $\sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \mu \geq 0$ ve

$\sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i > 0$ olacak biçimdeki her p_i değeri ve her $z > 0$ için

$$P\{X \geq z\} \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i}{z \left(\sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teoremdeki kabulden

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \left[\int_0^z x f(x) dx + \int_z^\infty x f(x) dx \right] \\
0 &\leq \sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \int_z^\infty x f(x) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i z [1 - F(z)] \\
\Rightarrow P\{X \geq z\} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i}{z \left(\sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Y rastgele değişkeni, her $i = 1, \dots, n$ için $P\{Y = a_i\} = p_i$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ olacak biçimde seçilsin. Ayrıca Y ve X bağımsız rastgele değişkenler olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
Cov(X^Y, X) &= E[X^Y X] - E[X^Y] E[X] \\
&= E[E[X^{Y+1} | Y]] - E[E[X^Y | Y]] \mu \\
&= E[m_{Y+1}] - E[m_Y] \mu \\
&= \sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \mu
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 3.8'de geçen $\sum_{i=1}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=1}^n m_{a_i} p_i \mu \geq 0$ şartının,

$\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ olması durumunda, aslında uygun biçimde seçilen

bir Y rastgele değişkeni için X^Y ile X arasındaki kovaryansın pozitif olması şartına denk olduğunu göstermektedir.

Aşağıdaki sonuç Markov eşitsizliğinin, Teorem 3.8'in özel bir hali olduğunu gösteriyor.

3.9. Sonuç: X pozitif değerli bir rastgele değişken olsun. Özel olarak Teorem 3.8'de, $n = 1$, $a_1 = 0$ ve $p_1 = 1$ olarak alınsın. X pozitif değerli olduğundan $m_1 > 0$ olacaktır. Ayrıca $Cov(X, 1) = 0$ olduğu gerçeği ile yukarıdaki tartışma göz önüne alınırsa, Teorem 3.8'in şartlarının bu X rastgele değişkeni tarafından sağlandığı açıktır. O halde Teorem 3.8'de geçen olasılık sınırlayıcısı

$$1 - F(z) \leq \frac{m_1}{m_0 z} = \frac{\mu}{z}$$

olacaktır ki bu Markov eşitsizliğidir.

3.10. Lemma: Teorem 3.8'deki gösterim geçerli olmak üzere, X rastgele değişkeni sadece 1'den büyük değerler alabilsin. Ayrıca $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ olsun ve $a_0 = 0$ olarak alalım. O halde

$$\sum_{i=0}^n m_{a_i+1} p_i - \sum_{i=0}^n m_{a_i} p_i \mu \geq 0 \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Eş. 3.6'daki eşitsizliğin aslında uygun biçimde seçilen bir Y rastgele değişkeni için, X^Y ile X arasındaki kovaryans olduğu daha önce belirtilmişti. O halde lemma'yı ispatlamakla, Y uygun biçimde seçilmiş olmak kaydıyla, $Cov(X^Y, X) \geq 0$ olduğunu göstermek aynı şeydir.

$$\begin{aligned} Cov(X^Y, X) &= E[E[X^{Y+1} | Y]] - E[E[X^Y | Y]]E[X] \\ &= E[E[X^{Y+1} | Y] - E[X^Y | Y]E[X]] \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitlikleri her zaman için sağlanır. Öte yandan, Y 'nin alabileceği her $y \neq 0$ değerleri için $g(X) = X^y$, X 'in artan bir fonksiyonudur. Bu nedenle her $y \neq 0$ için $Cov(X^y, X) \geq 0$ 'dır. Ayrıca $y = 0$ durumunda

$$Cov(X^y, X) = Cov(1, X) = 0$$

sağlanır. O halde Y 'nin alabileceği her y değeri için $Cov(X^y, X) \geq 0$ olur. Öte yandan Eş. 3.7'de ilk beklenen değerin içindeki ifade, Y 'nin verilen bir y değeri için $Cov(X^y, X)$ 'e eşit olduğundan, Eş. 3.7 negatif değerli olamaz ki böylece ispat tamamlanmış olur.

3.11. Sonuç: Teorem 3.8'deki gösterimler geçerli olmak üzere, X rastgele değişkeni sadece 1'den büyük değerler alabilsin. O halde her $z > 0$ için

$$P\{X \geq z\} \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_{a_i+1}}{z \sum_{i=1}^n m_{a_i}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Özel olarak her i için $p_i = 1/n$ olarak seçilir ve Lemma 3.10 göz önünü alınırsa Teorem 3.8'in şartları sağlanacağından, ispat açıktır.

3.12. Örnek: Teorem 3.8'de geçen koşulların sağlandığı durumda, pozitif değerli bir X rastgele değişkeni için, $z > 0$ olmak üzere

$$1 - F(z) \leq \frac{m_{r+1}}{m_r z}, \quad r \in \mathbb{Z}^+ \tag{3.8}$$

yazılabilir (Teorem 3.8'deki gösterim ile $n = 1$, $a_1 = r$ ve $p_1 = 1$ alınmıştır). Özel

olarak $X \sim U(1, 2)$ alınırsa, her $r \in \mathbb{Z}^+$ için $m_r = \frac{2^{r+1} - 1}{r + 1}$ ve

$$\begin{aligned} m_{r+1} - m_r \mu &= \frac{2^{r+2} - 1}{r + 2} - \frac{1}{2} \frac{2^{r+1} - 1}{r + 1} \\ &= \frac{2^{r+1}(3r + 2) - r}{2(r + 2)(r + 1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

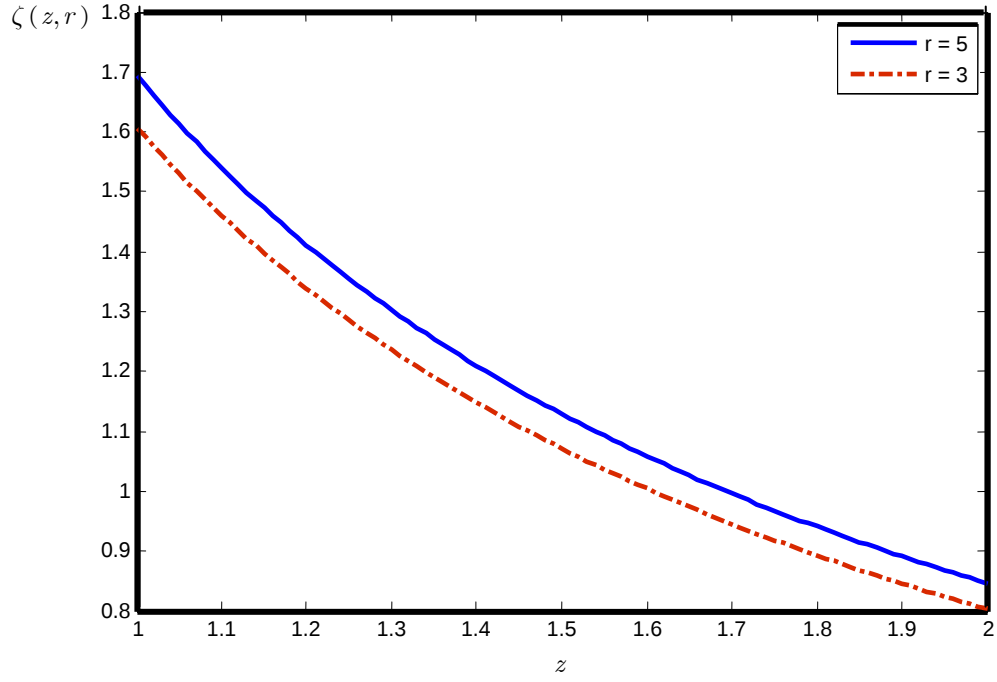
olur. Eş. 3.9'un paydası $r \geq 1$ iken negatif olamayacağından, paydaki ifadenin negatif olmadığını göstermekle Teorem 3.8'in koşulları sağlanmış olacaktır. $r \geq 1$ iken

$$\begin{aligned} 2^{r+1}(3r + 2) - r &\geq 2(3r + 2) - r \\ &= 5r + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $m_{r+1} - m_r \mu \geq 0$ sağlanır. O halde $X \sim U(1, 2)$ rastgele değişkeni için

$$1 - F(z) \leq \frac{r(2^{r+1} - 1)}{z(r + 1)(2^r - 1)} = \zeta(z, r), \quad z > 0, \quad r \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.10)$$

elde edilir. Aşağıdaki şekil Eş. 3.10'daki olasılık sınırlayıcısının $r = 3$ ve $r = 5$ iken aldığı değerleri gösteriyor.



Şekil 3.1. $r = 3$ ve $r = 5$ için $\zeta(z, r) = \frac{r(2^{r+1} - 1)}{z(r+1)(2^r - 1)}$ değerleri

Şekil 3.1'den görüldüğü üzere $r = 3$ ve $r = 5$ iken elde edilen olasılık sınırlayıcıları yaklaşık $z = 1,6$ 'dan sonra 1'den küçük olmakta ve $r = 3$ iken elde edilen olasılık sınırlayıcısı $r = 5$ iken elde edilen olasılık sınırlayıcısından daha etkin olmaktadır.

3.13. Teorem: X sonlu bir $[a, b]$ aralığında değer alan bir rastgele değişken olsun. O zaman her $a < x < b$ için

$$\frac{x - \mu}{x - a} \leq F(x) \leq \frac{b - \mu}{b - x}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Önce $x < b$ iken $F(x) \leq \frac{b - \mu}{b - x}$ eşitsizliği ispatlanacaktır.

$$F(x) = 1 - (1 - F(x))$$

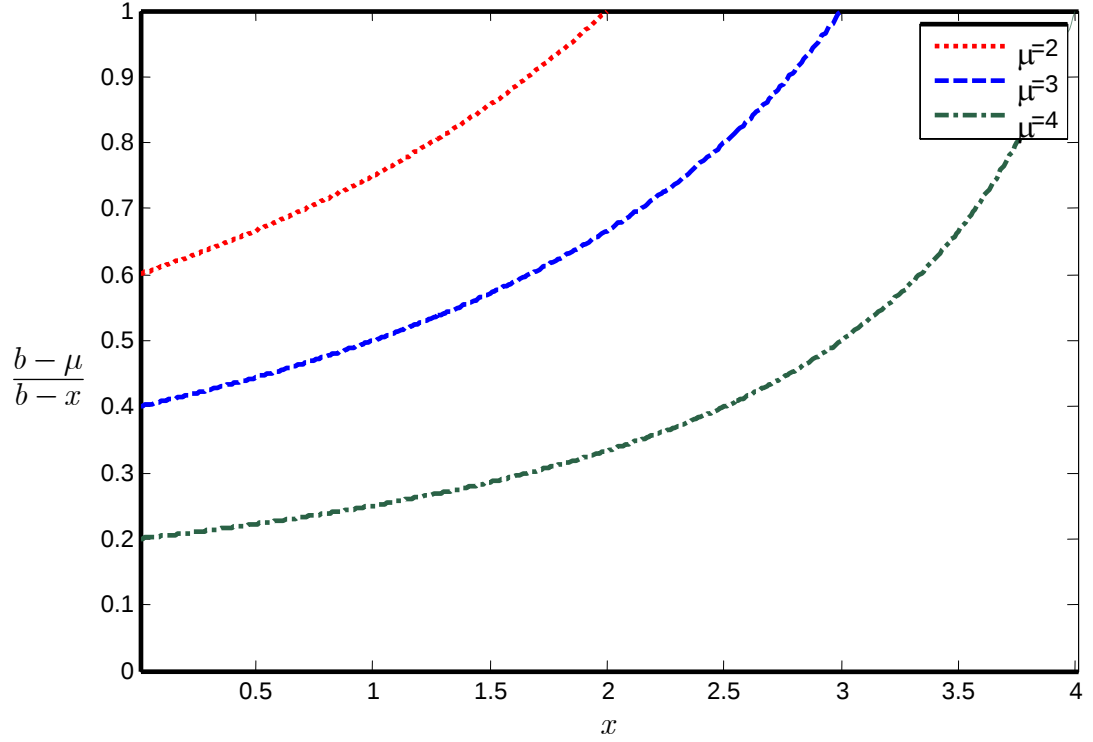
$$\Rightarrow \frac{b}{b-a} F(x) = \frac{b}{b-a} - \frac{b}{b-a} (1 - F(x))$$

Eşitliğin her iki tarafından $\frac{a}{b-a} F(x)$ çıkartarak;

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &= \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} F(x) - \frac{b}{b-a} (1 - F(x)) \\ &= \frac{b}{b-a} - \frac{\mu}{b-a} + \frac{\mu}{b-a} - \frac{a}{b-a} F(x) - \frac{b}{b-a} (1 - F(x)) \\ &= \frac{b-\mu}{b-a} + \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b t f(t) dt - a \int_a^x f(t) dt - b \int_x^b f(t) dt \right) \\ &= \frac{b-\mu}{b-a} + \frac{1}{b-a} \left(\int_a^x t f(t) dt + \int_x^b t f(t) dt - a \int_a^x f(t) dt - b \int_x^b f(t) dt \right) \\ &= \frac{b-\mu}{b-a} + \frac{1}{b-a} \left(\int_a^x (t-a) f(t) dt + \int_x^b (t-b) f(t) dt \right) \quad (3.11) \\ &\leq \frac{b-\mu}{b-a} + \frac{1}{b-a} \left(\int_a^x t f(t) dt - a \int_a^x f(t) dt \right) \\ &\leq \frac{b-\mu}{b-a} + \frac{1}{b-a} \left(x \int_a^x f(t) dt - a \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{b-\mu}{b-a} + \frac{1}{b-a} [(x-a) F(x)] \\ \Rightarrow (b-a) F(x) &\leq b-\mu + (x-a) F(x) \Rightarrow F(x) \leq \frac{b-\mu}{b-x} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{x-\mu}{x-a} \leq F(x)$ eşitsizliğinin ispatı için Eş 3.11'de $\int_a^x (t-a) f(t) dt$ teriminin pozitif değerli olduğu göz önüne alınarak, bu terim kaldırılmaktadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Eğer yukarıdaki teoremden $x < \mu$ alınırsa anlamlı olmayan bir olasılık sınırlayıcısı elde edilir. Aşağıdaki şekil $b = 5$, $a = 0$ iken μ 'nün bazı değerleri için Teorem 3.13'den elde edilen üst sınır değerlerini göstermektedir.



Şekil 3.2. $b = 5$ ve $a = 0$ iken Teorem 3.13'den elde edilen bazı olasılık üst değerleri

Aşağıdaki teorem bir anlamda Teorem 3.13'i genelleştirmektedir.

3.14. Teorem: X sonlu bir $[a, b], a > 0$ aralığında değer alan bir rastgele değişken ve $F(x)$ integrallenebilir olsun. Ayrıca bu rastgele değişkenin ortalama etrafındaki bilinen momentlerin derecelerinin kümesini I ile gösterelim ve n bilinen en büyük dereceli momentin derecesini gösterebiliriz. Ayrıca gösterimde kolaylık sağlamak amacıyla;

$$T_1(i, x, y) = \begin{cases} \sum_{r=0}^n \sum_{m=0}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} (x^m - y^m) & ; i = 1 \\ \sum_{r=0}^n \sum_{m=0}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} (x^m - y^m) & ; i = 2 \end{cases}$$

$r \notin I \quad m \notin 2\mathbb{Z}$ $r \notin I \quad m \in 2\mathbb{Z}$

$$T_2 = \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \binom{n}{r} \mu^{n-r} (b - \mu)^r$$

$$T_3 = \sum_{r \in I} \binom{n}{r} \mu^{n-r} \mu_r$$

olarak tanımlansın. O zaman her $z \in [a, b]$ için

1) n çift iken

a) $z^n - a^n - T_1(2, b, z) + T_1(1, z, a) > 0$ ise

$$F(z) \geq \frac{z^n - T_2 - T_1(1, b, z) - T_3}{z^n - a^n - T_1(2, b, z) + T_1(1, z, a)}$$

b) $z^n - a^n - T_1(2, b, z) + T_1(1, z, a) < 0$ ise

$$F(z) \leq \frac{z^n - T_2 - T_1(1, b, z) - T_3}{z^n - a^n - T_1(2, b, z) + T_1(1, z, a)}$$

c) $b^n - z^n - T_1(2, z, a) + T_1(1, b, z) > 0$ ise

$$F(z) \leq \frac{b^n - T_2 + T_1(1, b, z) - T_3}{b^n - z^n - T_1(2, z, a) + T_1(1, b, z)}$$

ç) $b^n - z^n - T_1(2, z, a) + T_1(1, b, z) < 0$ ise

$$F(z) \geq \frac{b^n - T_2 + T_1(1, b, z) - T_3}{b^n - z^n - T_1(2, z, a) + T_1(1, b, z)}$$

2) n tek iken

a) $z^n - a^n + T_1(2, z, a) - T_1(1, b, z) > 0$ ise

$$F(z) \geq \frac{z^n - T_2 - T_1(2, b, z) - T_3}{z^n - a^n + T_1(2, z, a) - T_1(1, b, z)}$$

b) $z^n - a^n + T_1(2, z, a) - T_1(1, b, z) < 0$ ise

$$F(z) \leq \frac{z^n - T_2 - T_1(2, b, z) - T_3}{z^n - a^n + T_1(2, z, a) - T_1(1, b, z)}$$

c) $b^n - z^n + T_1(2, b, z) - T_1(1, z, a) > 0$ ise

$$F(z) \leq \frac{b^n - T_2 + T_1(1, b, z) - T_3}{b^n - z^n + T_1(2, b, z) - T_1(1, z, a)}$$

ç) $b^n - z^n + T_1(2, b, z) - T_1(1, z, a) < 0$ ise

$$F(z) \geq \frac{b^n - T_2 + T_1(1, b, z) - T_3}{b^n - z^n + T_1(2, b, z) - T_1(1, z, a)}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: Burada sadece 1. a) durumu ispatlanacaktır. Diğer durumlar benzer şekilde gösterilebilir. İspata geçmeden önce aşağıdaki üç eşitliği hatırlatmak faydalı olacaktır.

$$\mu_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-\mu)^{n-r} \int_a^b x^r f(x) dx$$

$$\int_a^b x^n f(x) dx = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \mu^{n-r} \mu_r$$

$$\begin{aligned} \int_a^b x^n f(x) dx &= x^n F(x) \Big|_a^b - \int_a^b n x^{n-1} F(x) dx \\ &= b^n - \int_a^b n x^{n-1} F(x) dx \end{aligned}$$

Bu bilgiler kullanılarak ispat şu şekilde yapılabilir:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^n f(x) dx &= \sum_{r \in I} \binom{n}{r} \mu^{n-r} \mu_r + \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \binom{n}{r} \mu^{n-r} \mu_r \\ &= T_3 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \binom{n}{r} \mu^{n-r} \sum_{m=0}^r \binom{r}{m} (-\mu)^{r-m} \int_a^b x^m f(x) dx \\ \Rightarrow T_3 &= \int_a^b x^n f(x) dx - \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \sum_{m=0}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} (-\mu)^{n-m} \int_a^b x^m f(x) dx \\ &= b^n - \int_a^b n x^{n-1} F(x) dx - \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \sum_{\substack{m=0 \\ m \in 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \int_a^b x^m f(x) dx \\ &\quad + \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \sum_{\substack{m=0 \\ m \notin 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \int_a^b x^m f(x) dx \\ &= b^n - \int_a^b n x^{n-1} F(x) dx \\ &\quad - \sum_{\substack{r=0 \\ r \notin I}}^n \sum_{\substack{m=0 \\ m \in 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \left[b^m - \int_a^b m x^{m-1} F(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \notin 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \left[b^m - \int_a^b mx^{m-1} F(x) dx \right] \\
& = b^n - T_1(2, b, 0) + T_1(1, b, 0) - \int_a^b nx^{n-1} F(x) dx \\
& \quad + \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \in 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \int_a^b mx^{m-1} F(x) dx \\
& \quad - \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \notin 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \int_a^b mx^{m-1} F(x) dx \\
& = b^n - \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} (-\mu)^{n-m} b^m - \int_a^z nx^{n-1} F(x) dx - \int_z^b nx^{n-1} F(x) dx \\
& \quad + \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \in 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \left[\int_a^z mx^{m-1} F(x) dx + \int_z^b mx^{m-1} F(x) dx \right] \\
& \quad - \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \notin 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \left[\int_a^z mx^{m-1} F(x) dx + \int_z^b mx^{m-1} F(x) dx \right] \\
& \geq b^n - \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} (-\mu)^{n-m} b^m - F(z) \int_a^z nx^{n-1} dx - F(b) \int_z^b nx^{n-1} dx \\
& \quad + \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \in 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \left[F(a) \int_a^z mx^{m-1} dx + F(z) \int_z^b mx^{m-1} dx \right] \\
& \quad - \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \notin 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} \left[F(z) \int_a^z mx^{m-1} dx + F(b) \int_z^b mx^{m-1} dx \right] \\
& = b^n - T_2 - F(z)(z^n - a^n) - (b^n - z^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \in 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} [F(z)(b^m - z^m)] \\
& - \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{m=0 \\ r \notin I, m \notin 2\mathbb{Z}}}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} \mu^{n-m} [F(z)(z^m - a^m) + (b^m - z^m)] \\
& = b^n - T_2 - b^n + z^n - T_1(1, b, z) - F(z)[z^n - a^n - T_1(2, b, z) + T_1(1, z, a)] \\
& \Rightarrow F(z) \geq \frac{z^n - T_2 - T_1(1, b, z) - T_3}{z^n - a^n - T_1(1, b, z) + T_1(1, z, a)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Özel olarak 2. c)'de $n = 1$ ve $I = \{0, 1\}$ alındığında

$$F(z) \leq \frac{b - \mu}{b - z}$$

elde edileceği açıktır.

3.15. Örnek: Teorem 3.14'de özel olarak $n = 2$ ve $I = \{0, 1, 2\}$ alınırsa her $z \in [a, b]$ için

$$F(z) \leq \frac{b^2 - m_2}{b^2 - z^2} \tag{3.12}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin Teorem 3.13'de geçen eşitsizlikten etkin olması için

$z > \mu - \frac{\sigma^2}{b - \mu}$ (ve $z < b$) olması yeterlidir. Gerçekten de,

$$z > \mu - \frac{\sigma^2}{b - \mu} \Rightarrow \mu(b - \mu) - \sigma^2 < (b - \mu)z$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\sigma^2 - \mu^2 < bz - b\mu - z\mu \\
&\Rightarrow b^2 - \sigma^2 - \mu^2 < b^2 + bz - b\mu - z\mu \\
&\Rightarrow \frac{b^2 - \sigma^2 - \mu^2}{b + z} < b - \mu \Rightarrow \frac{b^2 - m_2}{b^2 - z^2} < \frac{b - \mu}{b - z}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $X \sim U(0,1)$ alınırsa Teorem 3.14'deki gösterim ile

$b > \mu - \frac{\sigma^2}{b - \mu} = \frac{1}{3}$ sağlanır ki bu durumda Eş. 3.12 eşitsizliği Teorem 3.13'den elde edilen olasılık sınırlayıcısından her $z \in (\frac{1}{3}, 1)$ için etkin olacaktır.

3.16. Sonuç: X , bir $[a, b]$ pozitif aralığında değer alan rastgele değişken olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve her $z \in (a, b)$ için

$$\frac{z^n - m_n}{z^n - a^n} \leq F(z) \leq \frac{b^n - m_n}{b^n - z^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 3.14'de $I = \{0, 1, \dots, n\}$ alınırsa ispat açıktır.

3.17. Örnek: X rastgele değişkeni λ ve c parametrelili kesilmiş üstel dağılıma sahip olsun; yani,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , 0 \leq x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

olsun. Bu durumda X rastgele değişkeninin sıfır etrafındaki ilk dört momenti;

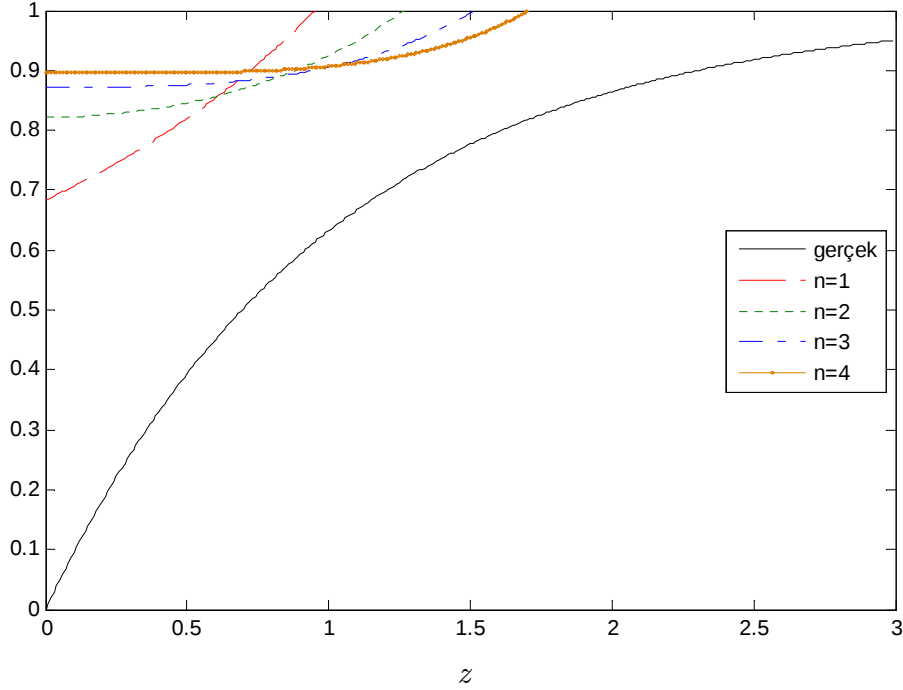
$$m_1 = \frac{1 - e^{-\lambda c}}{\lambda}$$

$$m_2 = \frac{2[1 - (1 + \lambda c)e^{-\lambda c}]}{\lambda^2}$$

$$m_3 = \frac{3[2 - (2 + 2\lambda c + \lambda^2 c^2)e^{-\lambda c}]}{\lambda^3}$$

$$m_4 = \frac{4[6 - (6 + 6\lambda c + 3\lambda^2 c^2 + \lambda^3 c^3)e^{-\lambda c}]}{\lambda^4}$$

olur¹. $c = 3$ ve $\lambda = 1$ iken $n = 1, 2, 3, 4$ için Sonuç 3.16'dan elde edilen üst sınır değerleri ile $F(z)$ değerleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.3. $c = 3$ ve $\lambda = 1$ iken $n = 1, 2, 3, 4$ için Sonuç 3.16'dan elde edilen üst sınır değerleri ile $F(z)$ değerleri

Şekil 3.3'den görüldüğü üzere z 'nin küçük değerleri için $n = 1$ alınarak elde edilen olasılık sınırlayıcısı diğerlerinden daha etkin iken, z 'nin büyük değerleri için $n = 4$ alınarak elde edilen olasılık sınırlayıcısı diğerlerinden daha etkin olmaktadır.

¹ X rastgele değişkeninin ilk dört momenti [25]'den alınmıştır.

Milne [1, 28], $[a, b]$ aralığında pozitif olan ve integrallenebilen f ve g fonksiyonları için

$$\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)} dx \int_a^b [f(x)+g(x)] dx \leq \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Bu eşitsizlik sayesinde pozitif değerli olan ve kapalı bir aralık üzerinde değer alan bazı rastgele değişkenler için aşağıdaki gibi bir olasılık sınırlayıcısı elde etmek mümkündür.

3.18. *Sonuç:* $[a, b], a > 0$ aralığında değer alan X rastgele değişkeninin sıfır etrafında bilinen momentlerin derecelerinin kümesi I ile gösterilsin. O halde $(a_n)_{n \in I}$, $[a, b]$ aralığındaki her x değeri için $\sum_{n \in I} a_n x^n > 0$ ve $1 + \sum_{n \in I} a_n m_n > 0$

olacak biçimde bir gerçekte sayı dizisi olmak üzere her $z \in [a, b]$ için

$$F(z) \geq \left[\frac{\sum_{n \in I} a_n z_*^n}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} - \frac{\sum_{n \in I} a_n m_n}{1 + \sum_{n \in I} a_n m_n} \right] \frac{\left(1 + \sum_{n \in I} a_n a_*^n \right) \left(1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n \right)}{\sum_{n \in I} a_n (z_*^n - a_*^n)}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $a_* = \arg \min_{x \in [a, z]} \sum_{n \in I} a_n x^n$ ve $z_* = \arg \min_{x \in [z, b]} \sum_{n \in I} a_n x^n$ 'dir.

İspat: Milne eşitsizliğinde $g(x) = \sum_{n \in I} a_n x^n f(x)$ alınarak;

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \sum_{n \in I} a_n x^n f(x) dx \geq \int_a^b \frac{f(x) \sum_{n \in I} a_n x^n f(x)}{f(x) + \sum_{n \in I} a_n x^n f(x)} dx \left[\int_a^b f(x) dx + \int_a^b \sum_{n \in I} a_n x^n f(x) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{\sum_{n \in I} a_n x^n f(x)}{1 + \sum_{n \in I} a_n x^n} dx \left[1 + \sum_{n \in I} a_n m_n \right] \\
\Rightarrow \frac{\sum_{n \in I} a_n m_n}{1 + \sum_{n \in I} a_n m_n} &\geq \int_a^b \frac{\left(\sum_{n \in I} a_n x^n + 1 - 1 \right) f(x)}{1 + \sum_{n \in I} a_n x^n} dx \\
&= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \frac{f(x)}{1 + \sum_{n \in I} a_n x^n} dx \\
&= 1 - \left[\int_a^z \frac{f(x)}{1 + \sum_{n \in I} a_n x^n} dx + \int_z^b \frac{f(x)}{1 + \sum_{n \in I} a_n x^n} dx \right] \\
&\geq 1 - \left[\frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n a_*^n} F(z) + \frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} [1 - F(z)] \right] \\
&= 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} - F(z) \left[\frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n a_*^n} - \frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} \right] \\
\Rightarrow F(z) \left[\frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n a_*^n} - \frac{1}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} \right] &\geq \frac{\sum_{n \in I} a_n z_*^n}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} - \frac{\sum_{n \in I} a_n m_n}{1 + \sum_{n \in I} a_n m_n} \\
\Rightarrow F(z) &\geq \left[\frac{\sum_{n \in I} a_n z_*^n}{1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n} - \frac{\sum_{n \in I} a_n m_n}{1 + \sum_{n \in I} a_n m_n} \right] \frac{\left(1 + \sum_{n \in I} a_n a_*^n \right) \left(1 + \sum_{n \in I} a_n z_*^n \right)}{\sum_{n \in I} a_n (z_*^n - a_*^n)}
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.19. Örnek: X rastgele değişkeni, $p > 0$ bir parametre olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^p & , 0 < x < (p+1)^{1/(p+1)} \\ 0 & , dh \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. O halde her $r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$m_r = \frac{(p+1)^{(p+r+1)/(p+1)}}{p+r+1} \text{ olur. Bu durumda, Sonuç 3.18'deki gösterim ile}$$

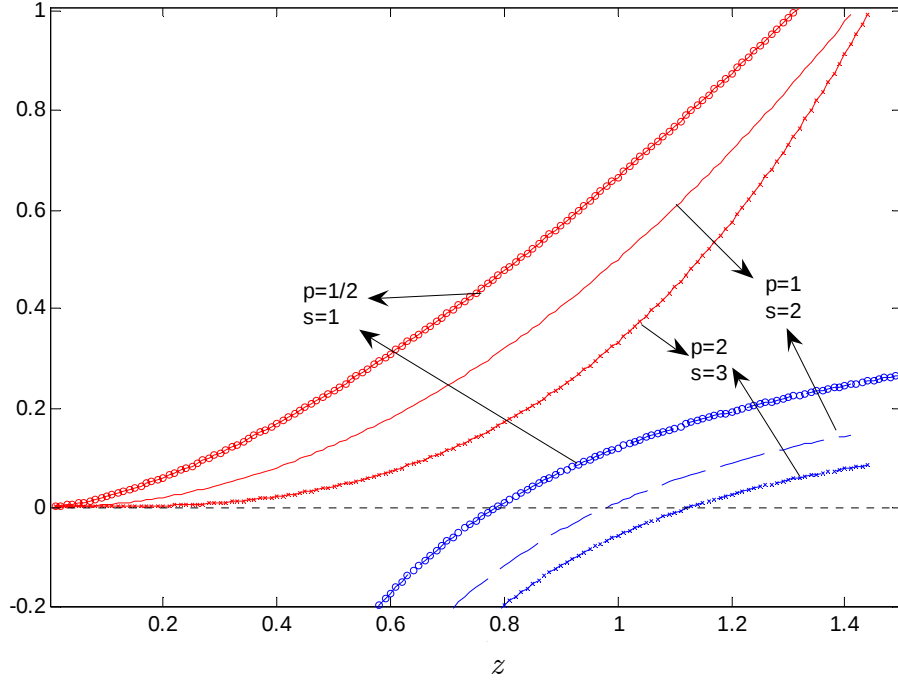
$$I = \{1, \dots, s\} \text{ ve her } i = 1, \dots, s \text{ değeri için } a_i = 1 \text{ alınırsa, } \left(0, (p+1)^{1/(p+1)}\right)$$

aralığındaki her x değeri için $\sum_{i=1}^s a_i x^i > 0$ sağlanır ve $a_* = a$, $z_* = z$ olur. O halde

her $z < (p+1)^{1/(p+1)}$ pozitif sayısı için

$$F(z) \geq \left[\frac{\sum_{n=1}^s z^n}{1 + \sum_{n=1}^s z^n} - \frac{\sum_{n=1}^s \frac{(p+1)^{(p+n+1)/(p+1)}}{p+n+1}}{1 + \sum_{n=1}^s \frac{(p+1)^{(p+n+1)/(p+1)}}{p+n+1}} \right] \frac{1 + \sum_{n=1}^s z^n}{\sum_{n=1}^s z^n} \quad (3.13)$$

eşitsizliği Sonuç 3.18 yardımıyla elde edilir. Aşağıdaki şekil p ve s 'nin bazı değerleri için Eş. 3.13'de geçen olasılık sınırlayıcısı ile $F(z)$ 'nin gerçek değerlerini veriyor.



Şekil 3.4. Eş. 3.13'deki olasılık sınırlayıcısı ile $F(z)$ 'nin gerçek değerleri

3.20. *Teorem:* X destek kümesi sonlu (a, b) , $a > 0$ olan sürekli bir rastgele değişken olsun. O zaman her $t \neq 0$, $r \geq 1$ ve $z \in (a, b)$ için

$$P\{X \leq z\} \leq \left(\frac{b^r}{1 + t^r b^r} - \frac{m_{r/2}^2}{1 + t^2 m_r} \right) \frac{(1 + t^2 b^r)(1 + t^2 z^r)}{b^r - z^r}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bu teoremin ispatında, [1]'de belirtilen $[a, b]$ aralığında integrallenebilen pozitif değerli f ve g fonksiyonları için

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)} dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)} dx \int_a^b [f(x) + g(x)] dx \quad (3.14)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gerçeği kullanılacaktır.

Eş. 3.14'deki f fonksiyonunu, X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak alıp $g(x)$ yerine $t^2 x^r f(x)$ koyarak;

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \sqrt{t^2 x^r f^2(x)} dx \right)^2 &\leq \int_a^b \frac{f(x) t^2 x^r f(x)}{f(x) + t^2 x^r f(x)} dx \int_a^b [f(x) + t^2 x^r f(x)] dx \\
&= \int_a^b \frac{t^2 x^r f(x)}{1 + t^2 x^r} dx \left[\int_a^b f(x) dx + \int_a^b t^2 x^r f(x) dx \right] \\
&= \left[\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \frac{f(x)}{1 + t^2 x^r} dx \right] (1 + t^2 m_r) \\
&= \left\{ 1 - \left[\int_a^z \frac{f(x)}{1 + t^2 x^r} dx + \int_z^b \frac{f(x)}{1 + t^2 x^r} dx \right] \right\} (1 + t^2 m_r) \\
&\leq \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 + t^2 z^r} F(z) + \frac{1}{1 + t^2 b^r} [1 - F(z)] \right] \right\} (1 + t^2 m_r) \\
&= \left[1 - \frac{1}{1 + t^2 b^r} - \frac{t^2 b^r - t^2 z^r}{(1 + t^2 b^r)(1 + t^2 z^r)} F(z) \right] (1 + t^2 m_r) \\
\Rightarrow F(z) &\leq \left(\frac{b^r}{1 + t^2 b^r} - \frac{m_{r/2}^2}{1 + t^2 m_r} \right) \frac{(1 + t^2 b^2)(1 + t^2 z^2)}{b^2 - z^2}
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

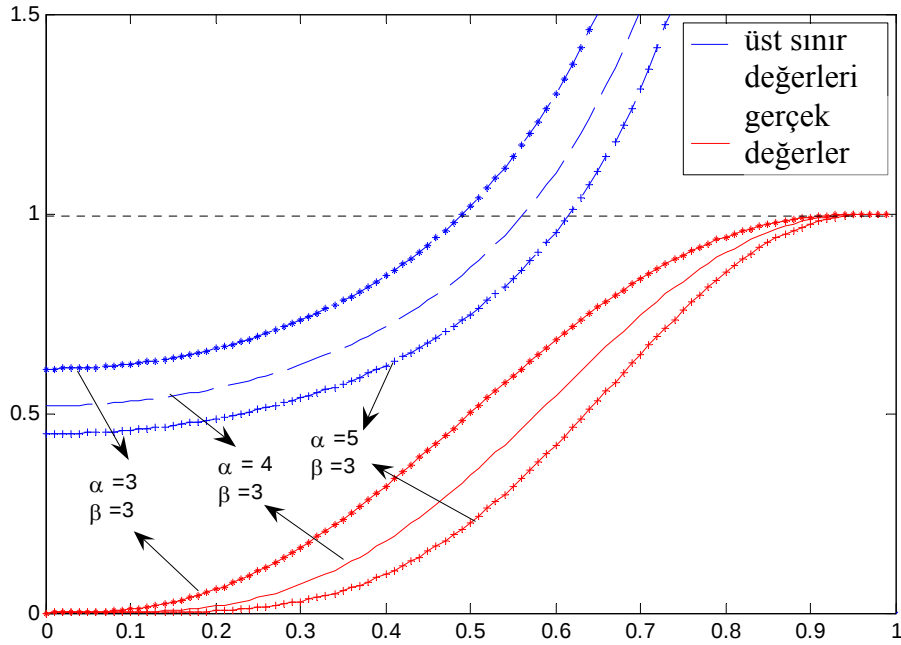
3.21. *Örnek:* $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda $\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ ve

$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$ olur. Bu bilgileri kullanarak Teorem 3.20'den $t = 1$

alındığında $0 < z < 1$ değerleri için

$$F(z) \leq \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2}{1 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} + \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2} \right] \frac{2(1 + z^2)}{1 - z^2} \quad (3.15)$$

elde edilir. Aşağıdaki şekil bazı α ve β değerleri için Eş. 3.15'deki olasılık sınırlayıcısı ile $F(z)$ değerlerini vermektedir.



Şekil 3.5. $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ iken α ve β 'nin bazı değerline karşılık $F(z)$ değerleri ile Teorem 3.20'den elde edilen olasılık sınırlayıcısının değerleri

Teorem 3.20'de geçen olasılık sınırlayıcısı t^2 keyfi değerine de bağlı olduğundan, bu olasılık sınırlayıcısını $\zeta(t^2)$ ile gösterelim. O halde t^2 değeri $\zeta(t^2)$ 'yi en küçükleyecek şekilde seçilmelidir.

Bu amaçla, $\zeta(t^2)$ 'nin t^2 'ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta(t^2)}{d(t^2)} = & \left[b^r m_r z^r (m_r - m_{r/2}^2) t^4 + 2b^r z^r (m_r - m_{r/2}^2) t^2 \right. \\ & \left. + z^r (b^r - m_{r/2}^2) - m_{r/2}^2 (b^r - m_r) \right] / \left[2b^r m_r z^r (m_r - m_{r/2}^2) \right] \end{aligned}$$

ve t^2 'ye göre ikinci türevi

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta(t^2)}{d(t^2)^2} = & \left[2b^r m_{r/2}^2 m_r (m_r - z^r) (b^r - m_r) t^2 \right. \\ & \left. - 2m_{r/2}^2 (m_r - z^r) (b^r - m_r) \right] / (1 + m_r t^2)^4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Birinci türevi sıfıra eşitleyen değerlerin

$$t_{1,2}^2 = \frac{-b^r z^r (m_r - m_{r/2}^2) \mp m_{r/2} \sqrt{b^r z^r (m_r - m_{r/2}^2) (m_r - z^r) (b^r - m_r)}}{b^r m_r z^r (m_r - m_{r/2}^2)}$$

olduğu açıktır. ζ fonksiyonunun bu noktalardan birinde en küçük değerini alması için, ikinci türevin bu noktada pozitif değerli olması gerekir.

İkinci türevi sıfıra eşitleyen noktanın

$$t_*^2 = -\frac{1}{m_r}$$

olduğu kolayca bulunabilir. Öte yandan $(m_r - z^r) > 0$ ise $2b^r m_{r/2}^2 m_r (m_r - z^r) (b^r - m_r) > 0$ olur. O halde $(m_r - z^r) > 0$ iken $t_0 \geq t_*^2$ ise

$\left. \frac{d\zeta^2}{d(t^2)} \right|_{t^2=t_0^2} > 0$ 'dır. Bu durumda ζ 'nın en küçük değeri (global minimum noktası)

$(m_r - z^r) > 0$ iken $m_r - m_{r/2}^2 > 0$ ise¹

$$t^* = \frac{-b^r z^r (m_r - m_{r/2}^2) + m_{r/2} \sqrt{b^r z^r (m_r - m_{r/2}^2) (m_r - z^r) (b^r - m_r)}}{b^r m_r z^r (m_r - m_{r/2}^2)}$$

noktasında elde edilir. Öte yandan Teorem 3.20'de $t^2 > 0$ alındığından, bulunan t^* değerini kullanabilmek için $t^* > 0$ olması gerektiği göz önünde bulundurulmalıdır.

3.22. Teorem: X ve Y negatif değerler alması olasılığı sıfır olan iki rastgele değişken olsun. μ_X , σ_X^2 , μ_Y , σ_Y^2 sırasıyla X ve Y nin ortalama ve varyansını, $Cov(X, Y)$ ise X ve Y arasındaki kovaryansı gösterebilirsin. O zaman her $k > 0$ için

$$P\{X \geq k\sigma_X, Y \geq k\sigma_Y\} \leq \frac{Cov(X, Y) + \mu_X \mu_Y}{k^2 \sigma_X \sigma_Y}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy - \mu_X \mu_Y \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{k\sigma_X} xy f_{X,Y}(x, y) dx + \int_{k\sigma_X}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

¹ $m_r - m_{r/2}^2 \geq 0$ eşitsizliğinin ispatı için EK-2'ye bakınız.

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^{k\sigma_Y} \int_{k\sigma_X}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y) dx dy + \int_{k\sigma_Y}^{\infty} \int_{k\sigma_X}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y) dx dy - \mu_X \mu_Y \\
&\geq k^2 \sigma_X \sigma_Y P\{X \geq k\sigma_X, Y \geq k\sigma_Y\} - \mu_X \mu_Y \\
\Rightarrow P\{X \geq k\sigma_X, Y \geq k\sigma_Y\} &\leq \frac{Cov(X,Y) + \mu_X \mu_Y}{k^2 \sigma_X \sigma_Y}
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

X ve Y rastgele değişkenlerinin ortalamaları sıfır, varyansları sırasıyla σ_1^2 ve σ_2^2 olmak üzere her $k > 0$ için Berge [6]

$$P\{|X| < k\sigma_1, |Y| < k\sigma_2\} \geq 1 - \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{k^2}$$

olarak elde etmiştir. Burada ρ , X ile Y arasındaki korelasyon katsayısıdır. Olkin ve Pratt [32] ise Y_i $i=1, \dots, p$ rastgele değişkenler ve σ_i^2 bu rastgele değişkenlerin varyansları olmak üzere $k_i > 0$ değerleri için $P\{|Y_i| \geq k_i \sigma_i, \text{ bazı } i \text{ değerleri için}\}$ olasılığı için bir üst sınır elde etmişlerdir.

3.23. Sonuç: X negatif değerler alması olasılığı sıfır olan bir rastgele değişken olsun. μ ve σ^2 sırasıyla X 'in ortalama ve varyansını gösterebilirsin. O zaman her $k > 0$ için

$$P\{X \geq k\sigma\} \leq \frac{\mu}{k\sigma}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 3.22'da Y 'nin dağılımı X ile aynı ve Y ile X bağımsız olarak seçilirse

$$P\{X \geq k\sigma, Y \geq k\sigma\} \leq \frac{\mu^2}{k^2\sigma^2} \quad (3.15)$$

elde edilir. Öte yandan X ve Y bağımsız ve aynı dağılımlı olduklarından

$$\begin{aligned} P\{X \geq k\sigma, Y \geq k\sigma\} &= P\{X \geq k\sigma\}P\{Y \geq k\sigma\} \\ &= [P\{X \geq k\sigma\}]^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik Eş. 3.15'de yerine konup her iki tarafın karekökü alınırsa istenen elde edilir.

4. OLASILIK EŞİTSİZLİĞİNİN ELDE EDİLMESİ İÇİN BİR ALGORİTMA

Önceki bölümde olasılık sınırlayıcıları bazı özel durumlar için temel olarak integral eşitsizlikleri kullanılarak elde edildi. Bu bölümde ise bir olasılık sınırlayıcısını bulma problemi bir optimizasyon problemi olarak ele alınacaktır.

Bu açıdan bakıldığında, bir olasılık sınırlayıcısı bulma problemi, verilen momentlere sahip olacak biçimde, ilgilenilen olaya en büyük/küçük değeri veren dağılım fonksiyonunu bulmaktır.

A ilgilenilen olayı, I verilen momentlerin (sıfır etrafında) mertebelerinin kümesini göstermek üzere, A olayı için bir olasılık sınırlayıcısı bulma problemi aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\text{enk } z = \int_A dF \quad (4.1.a)$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^n dF = m_n, \quad n \in I \quad (4.1.b)$$

Buradaki integraller Lebesgue anlamındadır ve optimizasyon bütün mümkün dağılım fonksiyonları F üzerinden yapılmaktadır.

Bu problemin çözümü için Prékopa [36]¹ lineer programlamayı kullanmıştır. Farklı çözüm yöntemleri ve iyi bir inceleme Lasserre [23] ve Bertsimas ve Sethuraman [7]'da bulunabilir.

4.1. Tanım: X sonlu bir $[a, b]$ aralığında değer alan ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sürekli olan bir rastgele değişken olsun. X 'in sıfır etrafında bilinen momentlerinin mertebelerinin kümesini I ile gösterelim. Aşağıdaki optimizasyon problemine π problemi denir.

¹ Prékopa sıfır etrafındaki momentler yerine binomial momentleri kullanmıştır.

$$enk_{a_0, \dots, a_n} z = \int_a^\varepsilon (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx + \int_\tau^b (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx \quad (4.2.a)$$

$$\int_a^b x^r (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx = m_r, \quad r \in I \quad (4.2.b)$$

$$\int_a^b (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx = 1 \quad (4.2.c)$$

$$\forall x \in [a, b] \text{ için } a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \geq 0 \quad (4.2.ç)$$

Burada $a \leq \varepsilon < \tau \leq b$ 'dir. π probleminin çözümüne, $P\{X \notin [\varepsilon, \tau]\}$ olasılığını n . dereceden I kümesindeki momentlere göre olasılık sınırlayıcısı denir ve $\pi_{n,I}(\varepsilon, \tau)$ ile gösterilir. Özel olarak m bir pozitif tamsayı olmak üzere $I = \{1, 2, \dots, m\}$ biçiminde ise, π probleminin çözümüne $P\{X \notin [\varepsilon, \tau]\}$ olasılığını n . dereceden ilk m tane momente göre olasılık sınırlayıcısı denir ve $\pi_{n,m}(\varepsilon, \tau)$ ile gösterilir.

Şimdi π problemini, Eş. 4.1.a-ç kısıtları ile tanımlanan problemle (bu problem (4.1) problemi olarak anılacak) karşılaştıralım. (4.1) probleminde optimizasyon bütün dağılım fonksiyonları üzerinden yapılmakta iken π probleminde sadece polinom tipindeki fonksiyonlarla ilgilenilmektedir. Bu polinom tipindeki fonksiyonların dağılım fonksiyonu olduğunu garantilemek için Eş. 4.2.c kısıtı ile tanım aralığındaki bütün değerler üzerinden integralinin 1 olması sağlanmış, Eş. 4.2.ç kısıtıyla da bu polinomun negatif olmaması garantilenmiştir. Her polinom bir sürekli fonksiyon olduğundan, Eş. 4.2.c ve Eş. 4.2.ç kısıtlarının sağlanması, π probleminin çözümünün bir dağılım fonksiyonu ile elde edileceğini garanti eder. Eş. 4.2.b kısıtı Eş. 4.1.b kısıtı ile benzerdir ve dağılım fonksiyonunun bir polinom olması durumunda, verilen momentlerin sağlanmasını garanti eder. O halde bir π problemi, bir anlamda, (4.1) probleminin dağılım fonksiyonu bir polinom ile ifade edilebilen rastgele değişkenlere sınırlandırılmasıdır. Eğer n değeri yeteri kadar büyük alınarak $\pi_{n,I}(\varepsilon, \tau)$ değeri bulunabilirse; bu değer, X rastgele değişkeni sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmak üzere, $P\{X \notin [\varepsilon, \tau] \mid m_n, n \in I\}$ olasılığı için bir üst sınır olarak kabul edilebilir.

Bir π probleminde verilen momentlerin sayısı m ile gösterilsin, yani; $m = \#(I)$ olsun. $n \leq m$ alınması durumunda, genellikle π problemi bir optimizasyondan ziyade mümkün çözüm bölgesinin boş olup olmadığını araştırmaya denk olmaktadır. Çünkü Eş. 4.2.b ve Eş. 4.2.c kısıtları m bilinmeyenli ve genellikle lineer bağımsız m tane eşitlik içerir. $n > m$ olduğu durumda ise önce $m - n$ tane parametreye göre Eş. 4.2.b,c kısıtları çözülür. Ardından elde edilen çözümün Eş. 4.2.ç kısıtını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Sağlayan değerler arasında Eş. 4.2.a amaç fonksiyonunu en küçükleyen polinom çözüm olarak kabul edilir. Fakat bu işlemler n değeri arttıkça çok zorlaşmaktadır. İzleyen kesimde $\pi_{n,I}(\varepsilon, \tau)$ değerlerinin nasıl elde edileceği tartışılacaktır.

Algoritma 1: $\pi_{n,I}$ değerinin bulunması için algoritma

1. Adım: $0 < d < 1$ arama adımı büyüklüğü, $0 < d^* < d$ durma kriteri ve $y > 1$ sayıları seçilir. Verilen momentler yardımıyla istenen olasılık için bir üst ve alt sınır elde edilir¹. Bu değerler sırasıyla π_T^* ve π_A^* ile gösterilir. Eğer π_T^* elde edilemezse $\pi_T^* \leftarrow 1$, eğer π_A^* elde edilemezse $\pi_A^* \leftarrow 0$ alınır. $\pi^* \leftarrow \min\{\pi_T^*, 1\}$ ve $\pi_A \leftarrow \max\{\pi_A^*, 0\}$ alıp 2. Adım'a geç.
2. Adım: π probleminde amaç fonksiyonunu Eş. 4.2.a π^* değerine eşitleyip çözümü araştır. Eğer problemin bir çözümü varsa 3. Adım'a, aksi halde 4. Adım'a git.
3. Adım: Eğer $d/y \geq d^*$ ise $\pi^* \leftarrow \pi^* + (y-1)d/y$, $d \leftarrow d/y$ alıp 2. Adım'a dön. Aksi halde dur, istenen sonuç π^* 'dir.
4. Adım: Eğer $\pi^* - d \geq \pi_A$ ise $\pi^* \leftarrow \pi^* - d$ alıp 2. Adım'a dön. Aksi halde 5. Adım'a git.
5. Adım: Eğer $d/y \geq d^*$ ise $d \leftarrow d/y$, $\pi^* \leftarrow 1 - d$ alıp 2. Adım'a dön. Aksi halde $\pi^* \leftarrow \min\{\pi_T^*, 1\}$ alıp dur, istenen sonuç π^* 'dir.

¹ Bu değerlerin elde edilmesi için bazı yöntemler önceki bölümde incelenmiştir.

Bu algoritma yardımıyla en iyi olasılık sınırlayıcısının ya da yeteri kadar iyi bir olasılık sınırlayıcısının bulunabilmesi için, Eş. 4.2.b-ç kısıtlarını sağlarken Eş. 4.2.a fonksiyonunun eşitlenebileceği değerler kümesi; yani amaç fonksiyonunun alabileceği değer kümesi, (bu kümeyi Π ile gösterelim) irtibatlı olmalıdır. Aşağıdaki teorem Π kümesinin irtibatlı olduğunu söylüyor.

4.2. Teorem: Yukarıdaki gibi tanımlanan Π kümesi irtibatlıdır.

İspat: $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ ve $\pi_1 < \pi_2$ olsun. Keyfi bir $x \in (\pi_1, \pi_2)$ alalım. $P_1(t)$, $P_2(t)$ ve $P_x(t)$ ile sırasıyla π_1 , π_2 ve x çözümlerine karşılık gelen polinomları gösterelim. $x = \alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2$ olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ sayısının bulunabileceği açıktır.

$P_1(t) = \sum_{r=0}^n a_r^1 t^r$, $P_2(t) = \sum_{r=0}^n a_r^2 t^r$ ve $P_x(t) = \sum_{r=0}^n a_r^x t^r$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
 x &= \alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2 \\
 &= \alpha \left[\int_a^\varepsilon P_1(t) dt + \int_\tau^b P_1(t) dt \right] + (1 - \alpha) \left[\int_a^\varepsilon P_2(t) dt + \int_\tau^b P_2(t) dt \right] \\
 &= \alpha \left[\int_a^\varepsilon \sum_{r=0}^n a_r^1 t^r dt + \int_\tau^b \sum_{r=0}^n a_r^1 t^r dt \right] + (1 - \alpha) \left[\int_a^\varepsilon \sum_{r=0}^n a_r^2 t^r dt + \int_\tau^b \sum_{r=0}^n a_r^2 t^r dt \right] \\
 &= \sum_{r=0}^n \frac{\alpha a_r^1 + (1 - \alpha) a_r^2}{r + 1} (\varepsilon^{r+1} - a^{r+1} + b^{r+1} - \tau^{r+1}) \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
 x &= \int_a^\varepsilon \sum_{r=0}^n a_r^x t^r dt + \int_\tau^b \sum_{r=0}^n a_r^x t^r dt \\
 &= \sum_{r=0}^n \frac{a_r^x}{r + 1} (\varepsilon^{r+1} - a^{r+1} + b^{r+1} - \tau^{r+1})
 \end{aligned}$$

dır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki polinomun katsayıları Eş. 4.3 ile karşılaştırılırsa her $r = 0, 1, \dots, n$ için

$$a_r^x = \alpha a_r^1 + (1 - \alpha) a_r^2$$

olduğu görülür. O halde $P_x = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2$ alınabilir. $P_x = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2$ olsun. Şimdi Eş. 4.2.b kısıtının sağlandığını gösterelim. Her $r \in I$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b t^r P_x(t) dt &= \int_a^b t^r [\alpha P_1(t) + (1 - \alpha) P_2(t)] dt \\ &= \alpha \int_a^b t^r P_1(t) dt + (1 - \alpha) \int_a^b t^r P_2(t) dt \\ &= \alpha m_r + (1 - \alpha) m_r = m_r \end{aligned}$$

Benzer olarak Eş. 4.2.c kısıtının da sağlandığı gösterilebilir. Öte yandan $[a, b]$ aralığında P_1 ve P_2 polinomları negatif değerli olmadıklarından, onların ağırlıklı ortalaması olan P_x polinomu da $[a, b]$ aralığında negatif değer alamaz. Bu ise Eş. 4.2.ç kısıtının sağlandığını gösterir. O halde $x \in \Pi$ olur. x keyfi olarak seçildiğinden Π 'nin irtibatlı bir küme olduğu ispatlanmış olur.

Verilen algoritmada 2. ve 3. Adım'larda, problemin bir çözüm olarak kabul edilip edilemeyeceğinin belirlenmesi Eş. 4.2.ç kısıtı nedeniyle çok zor bir iştir. Eğer, n . dereceden polinomun kökleri bulunabilirse, (bu köklerin gerçek sayı olanları $x_1, \dots, x_n$ ile gösterildiğinde) bir $i = 1, \dots, n$ için $x_i \in [a, b]$ olduğunda $\#\{j : x_i = x_j\} \in 2\mathbb{Z}$ oluyorsa Eş. 4.2.ç kısıtı sağlanır. Öte yandan derecesi 4'ten büyük olan polinomların kökleri analitik olarak bilinmediğinden, bu yöntem $n > 4$ için uygun değildir. Bu durumda $[a, b]$ aralığının yeteri kadar küçük aralıklara bölüp, polinomun bu aralıktaki değerlerinin negatif olup olmadığına bakılabilir ya da izleyen önerme bu amaçla kullanılabilir.

4.3. *Önerme:*[7] Bir $g(x) = \sum_{r=0}^k a_r x^r$ polinomunun her $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak biçimde bir $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{i,j=0,\dots,k}$ pozitif yarı tanımlı matrisin bulunmasıdır.

$$\sum_{i,j} x_{ij} = 0; \quad l = 1, \dots, k$$

$$i+j=2l-1$$

$$\sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{m=0}^l \sum_{r=m}^{k+m-l} a_r \binom{r}{m} \binom{k-r}{l-m} a^{r-m} b^m; \quad l = 0, \dots, k$$

$$i+j=2l$$

4.4. *Örnek:* X rastgele değişkeni $[0, 3]$ aralığında değer alsın ve $\mu = 81/36$ olsun. $F(1)$ değeri için bir üst sınır bulmak istensin. Bu üst sınır için Teorem 3.13 kullanılırsa, $F(1) \leq 0,375$ elde edilir. Şimdi bu değerinin daha da küçültülüp küçültülemeyeceğini; yani bu durumda olasılık sınırlayıcısının anlamlı olup olmadığını, π problemi yardımıyla inceleyelim. Buna göre, ilgilenilen optimizasyon problemi $n = 2$ için

$$enk \int_0^2 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 dx$$

$$\int_0^3 a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 dx = \frac{81}{36}$$

$$\int_0^3 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 dx = 1$$

olarak alınabilir. Aşağıdaki çizelge, $d = 1/3$, $d^* = 1/50$ ve $y = 3$ için Algoritma 1 kullanılarak elde edilen sonuçları özetlemektedir.

Çizelge 4.1. π probleminin çözümünden elde edilen bazı sonuçlar

a_0	a_1	a_2	$[0, 3]$ aralığında pozitif mi?	π^*	d
-----	-----	-----	-----	0,3750	1/3
1,5208	-3,0417	1,1250	Hayır	0,0417	1/3
0,0210	-0,0420	0,1251	Hayır	0,9629	1/27
4,1664	-8,3328	2,8887	Hayır	0,9259	1/27
3,9999	-7,9998	2,7777	Hayır	0,8888	1/27
3,8329	-7,6659	2,6664	Hayır	0,8518	1/27
3,6664	-7,3329	2,5554	Hayır	0,8148	1/27
....					
....				0,1481	1/27
0,4998	-0,9996	0,4443	Hayır	0,1111	1/27
0,3333	-0,6666	0,3333	Evet	0,1111	----

n değeri bu örnekte çok küçük olduğu için, $F(1) \leq 0,1111$ olduğunu söylemek çok doğru olmamakla birlikte, eğer n değerlerine bağlı olarak π probleminin çözümleri elde edilebilirse, bu çözümlerin yöneldiği değer $F(1)$ için üst sınır olarak alınabilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada momentlere dayalı olasılık eşitsizliklerinin elde edilmesi problemi incelenmiştir. Bu amaçla Hoeffding [18]'in de değindiği gibi sadece ilk iki moment bilindiğinde Chebyshev ve Markov eşitsizliklerinden (anlamli oldukları için) daha etkin bir olasılık sınırlayıcısı bulunamayacağından, bilinen moment sayısının daha fazla olması ve rastgele değişkenin sonlu bir aralıkta değer alması durumları çalışma boyunca göz önüne alınmıştır.

Elde edilen sonuçlar yardımıyla olasılıklar için sınır değerleri elde etmenin yanında, momentler için sınır bulmada da kullanılabilir. Bu amaçla, ilgilenilen moment için uygulanabilecek bir olasılık sınırlayıcı seçip, dağılım fonksiyonunun 0 ile 1 arasında değer alabildiğini göz önünde bulundurmak yeterli olacaktır.

Çalışma boyunca sadece belirli tip olaylar için olasılık sınırlayıcıları elde edilmiştir. Bu sınırlayıcılar, Ghosh [16]'un Markov teoremini genelleştirmede kullandığı dönüşüm yardımıyla başka olaylar için de kullanılabilir. Yaptığı çalışmada Ghosh

$P\{X \geq r\}$ olasılığı için Markov teoreminde X yerine $\left(X - \mu - \frac{t+s}{2}\right)^2$ ve r yerine de $\frac{(t-s)^2}{4}$ koyarak $P\{s < X - \mu < t\}$ olasılığı için bir olasılık sınırlayıcısı elde etmiştir.

KAYNAKLAR

1. Alzer, H., Kovačec, A., "The inequality of Milne and its converse", *Journal of Inequality & Application*, 7:603-611 (2002).
2. Baranoski, G. V. G., Rokne, J. G., Xu, G., "Applying the exponential Chebyshev inequality to the nondeterministic computation of form factors", *Journal of quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 69:447-467 (2001).
3. Barlow, R. E., Marshall, A. W., "Bounds for distributions with monotone hazard rate, I", *The Annals of Mathematical Statistics*, 35 (3):1234-1257 (1964).
4. Barza, S., Persson, L., "Sharp weighted multidimensional integral inequalities of Chebyshev type", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 236:243-253 (1999).
5. Bennett, G., "Upper bounds on the moments and probability inequalities for the sum of independent, bounded random variables", *Biometrika*, 52:559-569 (1965).
6. Berge, P. O., "A note on a form of Tchebycheff's theorem for two variables", *Biometrika*, 29:405-406 (1938).
7. Bertsimas, D., Sethuraman, J., "Moment problems and semidefinite optimization", Handbook of Semidefinite Programming, Henry Wolkowicz, Romesh Saigal, Leven Vandenberge, *Kluwer Academic Publishers*, 469-509 (2000).
8. Cantelli, F. P., "Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio", *Boll. Assoc. Attuar. Ital.*, 1-23 (1910).
9. Chernoff, H., "A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations", *The Annals of Mathematical Statistics*, 23 (4):493-507 (1952).
10. Dharmadhikari, S., Joag-dev, K., "The Gauss-Tchebyshev inequality for unimodal distributions", *Theory of Probability and Its Application*, 30:867-871 (1985).
11. Dharmadhikari, S. W., Joag-Dev, K., "Some results on generalized unimodality and an application to Chebyshev's inequality", *Reliability Quality Control*, 127-132 (1986).
12. Eaton, M. L., "A probability inequality for linear combinations of bounded random variables", *The Annals of Statistics*, 2 (3):609-614 (1974).

13. Eisenberg, B., Ghosh, B. K., "A generalization of Markov's inequality", ***Statistics & Probability Letters***, 53: 59-65 (2001).
14. Fishman, G. S., "Monte Carlo :concepts, algorithms, and applications", ***Springer-Verlag***, New York, 256 (1996).
15. Fristedt, B., Gray, L., "Modern Approach To Probability Theory", ***Birkhäuser***, Boston, 15 (1997).
16. Ghosh, B. K., "Probability inequalities related to Markov's theorem", ***The American Statistician***, 56 (3):186-190 (2002).
17. Gut, A., "Probability: A graduate course", ***Springer***, New York, 120 (2005).
18. Hoeffding, W., "Probability inequalities for sums of bounded random variables", ***Journal of the American Statistical Association***, 58:13-30 (1963).
19. Jensen, D. R., "Inequalities for joint distributions of quadratic forms", ***SIAM Journal on Applied Mathematics***, 42 (2):297-301 (1982).
20. Khintchine, A. Y., "On unimodal distributions", ***Izvestiya Nauchnoissledovatel'skogo Instituta Matematiki i Mekka***, 2:1-7 (1938).
21. Kolmogoroff, A., "Confidence limits for an unknown distribution function", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 12:461-463 (1941).
22. Kumar, P., "Moments inequalities of a random variable defined over a finite interval", ***Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics***, 3 (3): 41. Makale (2002).
23. Lasserre, J. B., "Bounds on measures satisfying moment conditions", ***The Annals of Applied Probability***, 12 (3):1114-1137 (2002).
24. Lin, G. D., "On the moment problem", ***Statistics and Probability Letters***, 35:85-90 (1997).
25. Mallows, C. L., Richter, D., "Inequaities of Chebyshev type involving conditional expectation", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 40:1922-1932 (1969).
26. Marshall, A. W., Olkin, I., "A one-sided inequality of the Chebyshev type", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 31 (2):488-491 (1960).
27. Meaux, L. M., Seaman Jr, J. W., Boullion, T. L., "Calculation of multivariate Chebyshev-Type inequalities", ***Computers Mathematical Applications***, 12:55-60 (1990).

28. Milne, E.A., "Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient". ***Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.***, 85:979-984 (1925).
29. Mises, R. V., "The limits of a distribution function if two expected values are given", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 10 (2):99-104 (1939).
30. Musayev, B., Alp, M., "Fonksiyonel Analiz", ***Balcı Yayınları***, Kütahya, 30 (2000).
31. Narumi, S., "On further inequalities with possible application to problems in the theory of probability", ***Biometrika***, 15:245-253 (1923).
32. Olkin, I., Pratt, J. W., "A multivariate Tchebycheff inequality", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 29:226-234 (1958).
33. Olshen, R. A., Savage, L. J., "A generalized unimodality", ***Journal of Applied Probability***, 7:21-34 (1970).
34. Pearson, K., "On generalised Tchebycheff theorems in the mathematical theory of statistics", ***Biometrika***, 12 (3/4): 284-296 (1919).
35. Pedersen, H. L., "On Krein's theorem for indeterminacy of the classical moment problem", ***Journal of Approximation Theory***, 95: 90-100 (1998).
36. Prékopa, A., "Shap bounds on probabilities using linear programming", ***Operations Research***, 38 (2):227-239 (1990).
37. Pukelsheim, F., "The three sigma rule", ***The American Statistician***, 48:88-91 (1994).
38. Royden, H. L., "Bounds on a distribution function when its first n moments are given", ***The Annals of Mathematical Statistics***, 25 (3):361-376 (1953).
39. Sathe, Y. S., Pradhan, M., Shah, S. P., "Inequalities for the probability of the occurrence of a least m out of n events", ***Journal of Applied Probability***, 17:1127-1132 (1980).
40. Saw, J. G., Yang, M. C. K., Mo, T. C., "Chebyshev inequality with estimated mean and variance", ***The American Statistician***, 38: 130-132 (1984).
41. Sellke, T. M., Sellke, S. H., "Chebyshev inequalities for unimodal distributions", ***The American Statistician***, 51:34-40 (1997).
42. Simpson, J. A., Welch, B. L., "Table of the Bounds of the probability integral when the first four moments are given", ***Biometrika***, 47 (3/4):399-410 (1960).

43. Smith, J. E., "Generalized Chebychev inequalities: Theory and applications in decision analysis", *Operations Research*, 43 (5):807-825 (1995).
44. Stoyanov, J., "Determinacy of distributions by their moments", *International Conference on Mathematical and Statistical Modeling in Honor of Enrique Castillo*, 28-30 (2006).
45. Sun, X. H., "Aczél, Chebyshev type inequality for positive linear functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 245:393-403 (2000).
46. Vysochanskii, D. F., Petunin, J. I., "Justification of the three-sigma rule for unimodal distributions", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 21:25-36 (1979).
47. Wen, J., Wong, W., "Chebyshev type inequalities involving permanents and their applications", *Linear Algebra and Its Applications*, 422:295-303 (2007).
48. Zelen, M., "Bounds on a distribution function that are functions of moments to order four", *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 53:377-381 (1954).
49. Internet : Wikipedia "Chebyshev's Inequality"
http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev's_inequality (2008).

EKLER

EK-1. n tane aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenin toplamının, ortalamaya etrafındaki dördüncü momentini

Önerme: $X_1, X_2, \dots$ bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenler olsun ve ortalamalarını μ , varyanslarını σ^2 ve ortalama etrafındaki k . momentlerini μ_k ile gösterelim. Ayrıca, bu rastgele değişkenlerin ilk n tanesinin toplamının, $n\mu$ (= bu rastgele değişkenlerin toplamının ortalaması) etrafındaki m . momentini $\mu_{(n):m}$ ile

gösterelim; yani $\mu_{(n):m} = E \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right)^m \right]$ olsun. O halde

$$\mu_{(n):4} = n \left[\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4 \right]$$

olur.

İspat: Bu önermenin ispatında tümevarım yöntemini kullanalım. $n=1$ durumu için ispat açıktır. $n=2$ durumunu inceleyelim.

$$\begin{aligned} \mu_{(2):4} &= E \left[(X_1 + X_2 - 2\mu)^4 \right] \\ &= E \left[(X_1 - \mu)^4 \right] + 4E \left[(X_1 - \mu)^3 (X_2 - \mu) \right] + 6E \left[(X_1 - \mu)^2 (X_2 - \mu)^2 \right] \\ &\quad + 4E \left[(X_1 - \mu)(X_2 - \mu)^3 \right] + E \left[(X_2 - \mu)^4 \right] \\ &= 2\mu_4 + 6\sigma^4 \end{aligned}$$

O halde önerme $n=2$ için doğrudur. Önermenin bir $n \geq 2$ tamsayısı için doğru olduğunu kabul edelim; yani, bir $n \geq 2$ tamsayısı için $\mu_{(n):4} = n \left[\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4 \right]$ sağlansın.

EK-1. (Devam) n tane aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenin toplamının, ortalamaya etrafındaki dördüncü momentini

$$\begin{aligned}
 \mu_{(n+1);4} &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i - (n+1)\mu\right)^4\right] = E\left[\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right) + (X_{n+1} - \mu)\right)^4\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)^4\right] + 4E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)^3 (X_{n+1} - \mu)\right] \\
 &\quad + 6E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)^2 (X_{n+1} - \mu)^2\right] + 4E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right) (X_{n+1} - \mu)^3\right] \\
 &\quad + E\left[(X_{n+1} - \mu)^4\right] \\
 &= \mu_{(n);4} + 6n\sigma^4 + \mu_4
 \end{aligned}$$

olur. Önermenin n için doğru olduğunu kabul ettiğimizden

$$\begin{aligned}
 \mu_{(n+1);4} &= n\left[\mu_4 + 3(n-1)\sigma^4\right] + 6n\sigma^4 + \mu_4 \\
 &= (n+1)\left[\mu_4 + 3n\sigma^4\right]
 \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

EK – 2. Monoton fonksiyonlar için Chebyshev eşitsizliği, Hölder eşitsizliği

Teorem:[4, 47] $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ve $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ ise

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizlik monoton fonksiyonlar için Chebyshev eşitsizliği¹ olarak bilinir.

Teorem (Hölder eşitsizliği):[30] $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^p dx < \infty$

ve $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^q dx < \infty$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(hg)(x)| dx \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^q dx \right]^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç: $r > 0$ olmak üzere $m_{r/2} \geq 0$ ise $m_r - m_{r/2}^2 \geq 0$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Hölder eşitsizliğinde $h(x)$ fonksiyonunu yerine ilgili rastgele değişkenin olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun karekökü; yani $h(x) = \sqrt{f(x)}$, $g(x) = x^{r/2} \sqrt{f(x)}$ ve $p = q = 2$ olarak seçilirse

¹ Monoton fonksiyonlarda Chebyshev eşitsizliğinin bir genelleştirmesi için bkz. [45].

EK – 2. (Devam) Monoton fonksiyonlar için Chebyshev eşitsizliği, Hölder eşitsizliği

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{r/2} f(x) dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow m_{r/2} \leq m_r^{1/2} \Rightarrow m_r - m_{r/2}^2 \geq 0$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : AKSOP, Cihan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 14.04.1985 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 283 91 44
Faks :-
e-mail : entelpi@yahoo.com

Eğitim**Derece****Eğitim Birimi****Mezuniyet tarihi**

Yüksek lisans

Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü

Lisans

Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü

2007

Lise

Süleyman Demirel Anadolu Lisesi

2003

İş Deneyimi**Yıl****Yer****Görev**

2007

TÜBİTAK

UZMAN YARDIMCISI

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Satranç