

**MÖNCH TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ
VE UYGULAMALARI**

Maide GÖKŞİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2008
ANKARA**

Maide GÖKŞİN tarafından hazırlanan Mönch Tipi Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri ve Uygulamalar› adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Matematik Anabilim Dalı, Anadolu Üniversitesi

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih : 15/01/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Maide GÖKŞİN

MÖNCH TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Maide GÖKŞİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2008

ÖZET

Sabit nokta konusu teori ve uygulama alanı oldukça kapsamlı bir alandır. Bu alanda pek çok teorem ve önermelere yer verilmiştir. Bu çalışmada, D. O'Regan, R. Precup, tarafından yayınlanan küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve integral içermeleri için varlık teoremlerinin sunulduğu makale derinlemesine incelenmiş, yine bu çalışmada Mönch tipi dönüşümler için tek değerli ve küme (çoğul) değerli sabit nokta teoremlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca Schauder, Darbo ve Sadovskii' nin sabit nokta teoremlerinin bir genellemesini sunan Mönch' ün bu teoremlerle ilişkisine kısaca değinilmiştir. Mönch'ün teoremlerinin bir uygulaması olarak Hammerstein ve Volterra integral içermeleri için genel varlık teoremleri incelenmiştir. Son olarak Mönch'ün de bir genellemesi olarak kabul edilen Chandrabhan tipi dönüşüm kavramı ve bu dönüşüm için sabit nokta teoremlerine B.C. Dhage tarafından yayınlanan makaleden yararlanarak yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta, Banach uzayı, küme değerli dönüşüm, integral içirme, kuvvetli küme büzülme ve yoğunlaştırıcı dönüşüm, Chandrabhan dönüşümü, kompaktsızlık ölçüsü

Sayfa Adedi : 126

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

FIXED POINT THEOREMS FOR MÖNCH TYPE MAPS AND APPLICATIONS

(M.Sc. Thesis)

Maide GÖKŞİN

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2008

ABSTRACT

The matter of fixed point theory is a quite extensive issue in terms of theory and application, in which several theorems and proposals have been invalued . In this study, the article published by D. O'Regan and R. Precup where the theorems of existence have been introduced for integral inclusions and fixed point theorems regarding the set valued mappings has been depply and in detail studied. Here, single valued mappings and set (multiple) valued mappings fixed point theorems on Mönch-type mappings have been mentioned. Therefore, the relationship of Mönch, who presented the generalization of the fixed point theorems belonging to Schauder, Darbo and Sadovskii, has been slightly discussed over, with these theorems, the general existence theorems of Hammerstein and Volterra integral inclusions as the application of Mönch's theorems have been proved. Finally, the concept of Chandrabhan-type mapping and fixed point theorems, which could be regarded as the generalization of Mönch, using from the article published by B. C. Dhage has been examined.

Science Code : 204.1.132

Key Words : Fixed point, Banach space, multivalued map, integral inclusion, strict set contraction and condensing mapping, Chandrabhan mapping, measure of noncompactness.

Page Number : 126

Adviser : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve bana her konuda cesaret vererek itina ile bu çalışmanın ortaya çıkmasına yardımcı olan danışman hocam Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'na, yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım hocam Dr. İshak ALTUN'a, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	3
3. MÖNCH TİPİ TEK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI.....	24
3.1. Mönch Sabit Nokta Teoreminin Schauder, Darbo ve Sadovskii Sabit Nokta Teoremleri ile Olan İlişkisi	24
3.2. Mönch Tipi Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri ve Diferensiyel ve İntegral Denklemlere Uygulanması.....	27
4. MÖNCH TİPİ KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI	58
4.1. Tanımlar ve Önergeler	58
4.2. Mönch Tipi Küme Değerli dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri	63
4.3. Hammerstein ve Volterra İntegral İçermeleri İçin Varlık Teoremleri.....	84
5. CHANDRABHAN TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	103
5.1. Tanımlar ve Teoremler.....	103
5.2. Leray Schauder Tipi Bir Sabit Nokta Teoremi	108
6. SONUÇ	123

Sayfa

KAYNAKLAR	124
ÖZGEÇMİŞ	126

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$h.h.t$	hemen hemen her t
$C(J, E)$	J den E ye tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
$C^1(J, E)$	J den E ye tanımlı 1.mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonların kümesi
$L^p(J, E)$	J den E ye tanımlı kuvvetli ölçülebilir ve p . kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L^p[a, b]$	$[a, b]$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı kuvvetli ölçülebilir ve p . kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$P(X)$	X in boştan farklı bütün alt kümelerinin ailesi
$P_f(X)$	X in boştan farklı kapalı alt kümelerinin ailesi
$P_k(X)$	X in boştan farklı kompakt alt kümelerinin ailesi
$P_c(X)$	X in boştan farklı konveks alt kümelerinin ailesi
$P_d(X)$	X in boştan farklı sınırlı alt kümelerinin ailesi
$\text{çap}(X)$	X kümesinin çapı
α	Kuratowskii kompaktsızlık ölçüsü
β	Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü

1. GİRİŞ

Sabit nokta teoreminin tarihsel gelişimi iki ana daldan oluşmaktadır. Birincisi, tam metrik uzaylar üzerinde büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teoremi, ikincisi, normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli operatörler için sabit nokta teoremidir.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teoremi çalışmaları 1922 yılında Banach ile başlamıştır. Banach ın büzülme dönüşüm prensipleri sabit nokta teoreminin bilinen en iyi sonuçlarındandır.

Normlu lineer uzaylar üzerinde sabit nokta teoremi çalışmaları ise 1911 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer $\mathbb{R}^n$ in kapalı birim yuvarından yine kendisi üzerine tanımlanan her hangi bir sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını ispatlamıştır. 1930 yılında Schauder, bu teoremin lineer normlu uzaylarda kompakt kümelere genişletilmişini vermiştir. Mönch ise 1980 yılında Schauder ın sabit nokta teoremini de içeren ve Banach uzaylarında sabit nokta teoremi için temel teşkil eden bir teorem sunmuştur. Hatta Mönch un bu teoremi, Schauder in yanı sıra Darbo ve Sadovskii nin sabit nokta teoremlerinin de bir genellemesidir. Ayrıca Mönch, bu teoremleri Banach uzaylarında genel diferensiyel denklemlerin lineer olmayan sınır değer problemlerin çözümlerinin varlığını ispatlamada uygulamıştır. 2006 yılında Dhage, Mönch ün de bir genellemesi olan yeni bir dönüşüm sınıfı olarak Chandrabhan tipi dönüşümler ve bununla ilgili sabit nokta teoremlerini ispatlamıştır.

Küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremi ise 1969 yılında Banach sabit nokta teoreminin Nadler tarafından küme değerli dönüşümlere genellemesi ile başlanmıştır. Nadler ile birlikte başlayan küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremi de tek değerli dönüşümler için verilen sabit nokta teoremlerine benzer şekilde diferensiyel ve integral içermelerin çözümlerinin varlık ve tekliğinde kullanılmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Sabit nokta teorisi için gerekli olan ve bu çalışmada kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri hatırlayalım.

2.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa x_0 noktasına f nin bir sabit noktası denir.

2.1. Örnek

(a) $X = [0, \infty)$ ve $f : X \rightarrow X$, $f(x) = 3x$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$ bu dönüşümün bir tek sabit noktasıdır.

(b) $X = [0, \infty)$ ve $f : X \rightarrow X$, $f(x) = \sqrt{x}$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ bu dönüşümün sabit noktalarıdır.

(c) $X = (0, \infty)$ ve $f : X \rightarrow X$, $f(x) = x + 5$ olsun. Bu durumda dönüşümün hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnekten de anlaşıldığı gibi bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, dönüşümün tanımlı olduğu kümeye ve nasıl tanımlandığına bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün hangi koşullar altında sabit noktasının var ve tek olduğu sorusuna cevap aramaktadır.

2.2. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme, Y herhangi bir küme ve $P(Y)$, Y nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi olmak üzere

$$F: X \rightarrow P(Y)$$

dönüşümüne küme (çoğul) değerli dönüşüm denir. Yine

$$F: X \rightarrow P(X)$$

küme değerli dönüşüm olmak üzere $x \in F(x)$ olacak şekildeki x noktasına F nin sabit noktası denir.

2.2. Örnek

(a) $X = [0,1]$ ve $F: X \rightarrow P(X)$, $x \in X$, $F(x) = [0, \frac{x}{2}]$ küme değerli bir dönüşüm olmak üzere $x_0 = 0$, dönüşümün sabit noktasıdır.

(b) $X = [0,1]$ ve $F: X \rightarrow P(X)$

$$F(x) = \begin{cases} (0, x/6) & , & 0 < x \leq 1 \\ \{1\} & , & x = 0 \end{cases}$$

küme değerli dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

2.3. Tanım

X bir vektör uzayı ve bu uzayın boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Her $x, y \in A$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

gerçekleniyorsa A kümesine X uzayının bir konveks kümesi denir.

2.4. Tanım

(X, τ) bir Hausdorff uzay ve $A \subset X$ olsun. (A, τ_A) , X in alt uzayı olmak üzere A nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya X in kompakt bir alt kümesi denir. Ayrıca $\overline{A}$ kümesi X de kompakt ise A ya X in rölatif kompakt bir alt kümesi denir.

2.5. Tanım

X bir topolojik uzay, (Y, d) bir metrik uzay, $C(X, Y)$, X den Y ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların sınıfı ve $\Omega \subseteq C(X, Y)$ olsun. Eğer bir $x_0 \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\forall x \in U \text{ ve } \forall f \in \Omega \text{ için } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde x_0 in bir U açık komşuluğu varsa Ω kümesine x_0 noktasında eşsüreklidir denir. Eğer Ω kümesi X in her noktasında eşsüreklidir ise Ω , X de eşsüreklidir denir [14].

Eş süreklilik kavramı süreklilik kavramının bir genişletilmesidir. Ω kümesi X de eşsüreklidir ise, Ω nın herhangi bir elemanı da X de sürekli dir. Fakat tersi doğru olmayabilir.

2.3. Örnek

$X = (0, 1)$, $Y = \mathbb{R}$ ve üzerindeki metrik alışılmış metrik olsun ve

$$\Omega = \{f_n \in C(X, Y) : f_n(x) = x^n, n = 1, 2, 3, \dots\} \subset C(X, Y)$$

ile tanımlansın. Ω nın her elemanının X de sürekli olduğu açıktır. Fakat $x_0 \in X$,

$$\forall f_n \in \Omega \text{ ve her } \varepsilon > 0 \text{ için}$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| = |x^n - x_0^n| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunamayacağı açıktır. Yani Ω kümesi X de eşsüreklı değildir.

2.4. Örnek

$X = Y = \mathbb{R}$ ve üzerindeki metrik alışılmış metrik olsun ve

$$\Omega = \{f_n : f_n(x) = nx, x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots\} \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ile tanımlansın. Ω nın her bir elemanının süreklı olduğu açıktır. Fakat $x_0 \in X$,

$\forall f_n \in \Omega$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| = n|x - x_0| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunamayacağı açıktır. Yani Ω kümesi X de eşsüreklı değildir.

2.6. Tanım

X bir küme olsun. X in bir $\mathcal{A}$ ailesi için,

(a) $X \in \mathcal{A}$

(b) Her $E \in \mathcal{A}$ için $X - E \in \mathcal{A}$

(c) $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}$

koşulları sağlamıyorsa, $\mathcal{A}$ ailesine X üzerinde bir cebirdir.

Eğer (c) koşulu yerine

(d) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ bir küme olsun. X in bir $\mathcal{A}$ ailesi için,

koşulu alınırsa, $\mathcal{A}$ cebirine bir σ -cebiri denir.

2.7. Tanım

$\mathbb{R}^n$ deki bütün (a, b) aralıklarının doğurduğu σ cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n=1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel küğmesi denir. Bu tanıma göre $B(\mathbb{R})$ kümesi, tüm açık aralıkları ihtiva eden bir σ cebiridir.

2.8. Tanım

X bir küme olsun ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$ -ölçülebilir küme (veye kısaca ölçülebilir küme) denir.

2.9. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu,

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(c) Her ayrık $\{A_n\}$ dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa, bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü denir.

2.10. Tanım

Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ -cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne, bir ölçü uzayı adı verilir.

2.11. Tanım

X bir küme ve 2^X de X in kuvvet kümesi olsun. 2^X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu,

$$(a) \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$(b) \text{ Her } E \in 2^X \text{ için } \mu^*(E) \geq 0$$

$$(c) A \subset B \subset X \text{ için } \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

$$(d) \text{ Her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n \in 2^X \text{ ise } \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

koşullarını sağlarsa, μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

2.12. Tanım

(I_k) , $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\}$$

olsun. $2^{\mathbb{R}}$ üzerinde ,

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye, Lebesgue dış ölçüsü denir. Burada $l(I_k)$, I_k aralığının uç noktalarının farkıdır.

Bir μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset X$ kümelerinin sınıfı $M(X, \mu^*)$ ile gösterilir. λ^* Lebesgue dış ölçüsü ile ölçülebilen, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı kısaca M ile gösterilir. Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın $M(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da, $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue dış ölçüsü denir ve λ ile gösterilir.

2.13. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilen uzay olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ölçülebilen olması için gerekli ve yeterli koşul her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır.

2.14. Tanım

Reel sayılara $-\infty$ ve $+\infty$ katarak elde edilen yeni kümeye Genişletilmiş reel sayılar denir ve $\overline{\mathbb{R}}$ ile gösterilir. Yani, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ olur.

2.15. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilen uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}$ - ölçülebilen bütün fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

2.16. Tanım

f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

şeklinde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna, f nin pozitif parçası; f^- fonksiyonuna, f nin negatif parçası denir.

2.17. Tanım

Görüntü kümesi sonlu elemanlardan meydana gelen bir φ fonksiyonuna bir basit fonksiyon denir.

X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ -ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S=S(X, \mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi de S^+ ile gösterilir.

2.18. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Burada χ , A_k kümesinin

$$\chi_{A_k} = \begin{cases} 1, & x \in A_k \\ 0, & x \notin A_k \end{cases}$$

şeklinde tanımlı karakteristik fonksiyonudur.

2.19. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+, \varphi \leq f \right\}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. $E \in \mathcal{A}$ olmak üzere, f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre E üzerindeki integrali,

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$$

sayısıdır.

2.20. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, \mathcal{A})$ olsun. Eğer, $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise, f fonksiyonu X üzerinde μ ölçüsüne göre

integrallenebilir denir ve bu integral,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayıdır. Eğer $E \in \mathcal{A}$ ise, f 'nin μ ye göre E üzerindeki integrali,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

şeklinde tanımlanır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki integral tanımında $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = B(\mathbb{R}^n)$ ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü olarak alınırsa elde edilen integrale, Lebesgue integrali adı verilir. Bu integral,

$$\int f(x) dx \text{ veya } \int f(x) d(\lambda(x))$$

ile gösterilir.

2.1. Teorem (*Lebesgue Sınırlı Yakınsaklık Teoremi*)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$ olsun. (f_n) dizisi bir f fonksiyonuna hemen hemen yakınsak ve hemen hemen her yerde, $|f_n| \leq K$ ve μ sonlu ise f integrallenebilirdir ve

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

dır.

2.21. Tanım

$(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach uzayı $F: J \rightarrow 2^E$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $y \in E$ için

$$t \rightarrow d(y, F(t)) = \inf \{ \|y - x\|_E : x \in F(t) \}$$

fonksiyonu ölçülebilir ise F küme değerli dönüşümüne de ölçülebilir denir[13].

Bir $F: J \times E \rightarrow 2^E$ küme değerli dönüşümü için

$$|F(t, x)| = \{ \|u\|_E : u \in F(t, x) \}$$

ve

$$\|F(t, x)\| = \sup \{ \|u\|_E : u \in F(t, x) \}$$

gösterimleri kullanılacaktır.

2.22. Tanım

$F: J \times E \rightarrow 2^E$ küme değerli dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa F ye bir Carathéodory dönüşüm denir.

(i) Her $x \in E$ için $t \rightarrow F(t, x)$ fonksiyonu ölçülebilir,

(ii) Hemen hemen her $t \in J$ için $x \rightarrow F(t, x)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli [13].

2.23. Tanım

$F: J \times E \rightarrow 2^E$ küme değerli Carathéodory dönüşüm olsun. Eğer her $r > 0$ reel sayısı ve $|x|_E \leq r$ olacak şekildeki her $x \in E$ ve hemen hemen her $t \in J$ için

$$\|F(t, x)\| \leq h_r(t)$$

olacak şekilde bir $h_r \in L^n(J, \mathbb{R})$ ($n \geq 1$) fonksiyonu varsa F dönüşümüne L^n -Carathéodory dönüşümü denir [13].

2.24. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve E nin sınırlı alt kümelerinin ailesi Ω_E olsun.

$A \in \Omega_E$ için $A_i \in \Omega$ ve $\text{çap}(A_i) = \sup\{|x - y| : x, y \in A_i\}$ olmak üzere

$$\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ ve } \text{çap}(A_i) \leq \varepsilon, i=1, 2, \dots, n\}$$

şeklinde tanımlanan $\alpha: \Omega_E \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna Kuratowskii kompaktsızlık ölçüsü denir.

$A \in \Omega_E$ için $B(x_i, \varepsilon) = \{x \in A : d(x, x_i) < \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\beta(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{her } x_i \in A \text{ için, } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)\}$$

şeklinde tanımlanan $\beta: \Omega_E \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü denir.

Y, E nin bir alt uzayı olmak üzere, $A \subset Y$ sınırlı alt kümesi için

$$\beta_Y(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{her } x_i \in Y \text{ için } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)\}$$

ile tanımlıdır [5].

2.1. Önerme

Yukarıdaki tanımda yer alan şartların yanısıra $\gamma = \alpha$ veya $\gamma = \beta$ ve $A, B \subseteq E$ sınırlı alt kümeler; veya $\gamma = \beta_Y$ ve $A, B \subseteq Y$ sınırlı alt kümeler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$(i) \quad \gamma(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} \text{ kompakttır.}$$

$$(ii) \quad \gamma(\overline{A}) = \gamma(A)$$

$$(iii) \quad A \subseteq B \text{ ise } \gamma(A) \leq \gamma(B)$$

$$(iv) \quad \gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}$$

$$(v) \quad \gamma(\lambda A) = |\lambda| \gamma(A) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(vi) \quad \gamma(A + B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$$

$$(vii) \quad |\gamma(A) - \gamma(B)| \leq \gamma(A - B)$$

$$(viii) \quad \gamma(\text{conv}(A)) = \gamma(A)$$

$$(ix) \quad A \subseteq Y \text{ sınırlı alt kümesi için}$$

$$\beta(A) \leq \beta_r(A) \leq \alpha(A) \leq 2\beta(A)$$

dır [6].

2.1. Uyarı

Önerme 2.1 (i)-(iv) şıklarında yer alan koşullar, uzayın bir tam metrik uzay olması durumunda da sağlanır, diğer koşullar için uzayın bir Banach uzayı olması şartı kaldırılamaz. Tanımlardan da anlaşılacağı üzere Kuratowskii kompaktsızlık ölçüsünün tanımında keyfi kümeler yer alırken, Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünün tanımında yuvarlar yer almaktadır. Sonlu boyutlu Banach uzaylarında Kuratowskii ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri arasında Önerme 2.1.(ix) deki ilişki mevcuttur, fakat aralarında direkt bir ilişki olduğu söylenemez. Yine de α ve β arasında şu sonuçlara yer verebiliriz.

2.2. Teorem

Bir X Banach uzayında $B(0,1)$ açık birim yuvar olsun. X uzayı sonlu boyutlu ise,

$$\alpha(B(0,1)) = \beta(B(0,1)) = 0$$

ve X uzayı sonlu boyutlu değilse,

$$\alpha(B(0,1)) = 2, \quad \beta(B(0,1)) = 1$$

dir [16].

2.1. Sonuç

Bir X Banach uzayında $S(0,1)$ birim yuvar yüzeyi olsun. X uzayı sonlu boyutlu ise,

$$\alpha(S(0,1)) = \beta(S(0,1)) = 0$$

ve X uzayı sonlu boyutlu değilse,

$$\alpha(S(0,1)) = 2, \quad \beta(S(0,1)) = 1$$

dir [16].

2.2. Uyarı

α ve β genel olarak farklı kompaktsızlık ölçümleri olsa da bazı Banach uzaylarında aralarında yakın bir ilişki bulunabilir. Buna örnek olarak hiperkonveks Banach uzaylarını verebiliriz.

2.25. Tanım

X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $F : X \rightarrow Y$ dönüşüm olsun. $F(X)$, Y nin kompakt bir alt kümesi tarafından içeriliyorsa F ye kompakt bir dönüşüm denir [1].

2.26. Tanım

E bir Banach uzayı ve $F : X \subseteq E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Her sınırlı $Y \subseteq X$ kümesi için $F(Y)$ rölatif kompakt ise F dönüşümüne tamamen sürekli dönüşüm denir [1].

2.27. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve $D \subseteq E$ olmak üzere $F : D \rightarrow E$ sürekli ve sınırlı bir dönüşüm olsun.

(a) Her sınırlı $S \subseteq D$ için

$$\alpha(F(S)) \leq k\alpha(S)$$

koşulunu sağlayan bir $k \geq 0$ sabiti varsa F ye k -küme büzülme dönüşümü denir. Bir k -küme büzülme $k < 1$ ise kuvvetli küme büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

(b) Her sınırlı, rölatif kompakt olmayan $S \subseteq D$ için

$$\alpha(F(S)) < \alpha(S)$$

koşulu sağlanıyorsa F ye yoğunlaştırıcı dönüşüm denir [8].

Açıkça görülmektedir ki;

tamamen sürekli dönüşüm $\Rightarrow$ kuvvetli küme büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ yoğunlaştırıcı dönüşüm

bağıntısı her zaman vardır. Fakat tersi doğru olmayabilir.

Mazur teoreminin ifadesinden önce bu teoremin ispatında yararlanacağımız şu teoremleri verelim:

2.3. Teorem

(X, τ) bir lokal konveks uzay olsun. X uzayının τ - total sınırlı bir alt kümesi A ise A kümesinin τ - kapalı konveks zarfı, τ - total sınırlıdır.

2.4. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın kompakt olması için gerek ve yeter şart A kapalı ve total sınırlı olmalıdır.

2.5. Teorem (*Mazur Lemma*)

Bir X Banach uzayının her hangi bir kompakt alt kümesinin kapalı konveks zarfı da kompakt bir kümedir. Yani

$$A \subset X \text{ kompakt} \Rightarrow \overline{\text{conv}}(A) \text{ kompakt.}$$

(burada A kümesini kapsayan konveks kümelerin en darına A nın konveks zarfı denir

ve $\text{conv}(A) = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \}$ biçiminde tanımlıdır.)

İspat

Hipotezden X uzayının bir Banach uzayı olduğu biliniyor. Teorem 2.4 den $A \subset X$ kompakt ise total sınırlıdır. Her normlu uzay bir lokal konveks topolojik uzay olduğuna göre Teorem 2.3 den $\overline{\text{conv}}(A)$ total sınırlıdır, ayrıca kapalı olduğu için Teorem 2.4 den $\overline{\text{conv}}(A)$ kompaktır.

2.6. Teorem (*Bolzano Weierstrass Teoremi*)

(X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. A kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul A nın kapalı ve dizisel kompakt olmasıdır.

2.7. Teorem (*Ascoli-Arzelà*)

E bir reel Banach uzayı ve $C([a, b], E)$ $[a, b]$ den E ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların Banach uzayını göstermek üzere $H \subset C([a, b], E)$ alt kümesinin rölatif kompakt olması için gerek ve yeter şart H eşsürekli ve $\forall t \in [a, b]$ için $H(t)$, E de rölatif kompakt olmalıdır. Burada $H(t) = \{x(t) : x \in H\}$ dir [8].

2.2. Önerme

E bir reel Banach uzayı ve $C^1(J, E)$ J den E ye tanımlı 1. mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonların Banach uzayını göstermek üzere, $A \subset C^1(J, E)$ sınırlı bir alt küme olsun. O zaman A , $C^1(J, E)$ de rölatif kompakttır gerek ve yeter şart A ve A' eş süreklidir ve $t \in J$ için $\alpha(A(t)) \equiv 0$ dır. Burada $A(t) = \{x(t) : x \in A\}$ dır [6].

2.3. Önerme

E bir reel Banach uzayı, $J = [a, b]$ ve $C(J, E)$ uzayı J den E ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların uzayını göstermek üzere, $H \subset C(J, E)$ sınırlı ve eşsüreklidir ise o zaman $\alpha(H(t))$ J üzerinde süreklidir ve

$$\alpha\left(\left\{\int_J x(t)dt : x \in H\right\}\right) \leq \int_J \alpha(H(t))dt$$

dır [8].

2.4. Önerme

X ve Y Hausdorff topolojik uzaylar ve $F : X \rightarrow P(Y)$ kapalı bir dönüşüm ve $K \in P_k(X)$ ise o zaman $F(K)$, Y de kapalıdır (F nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $graph F$ kapalı olmalıdır) [12].

İspat

$y \in \overline{F(K)}$ olsun. Y de $y_n \rightarrow y$ olacak şekilde bir $(y_n) \subseteq F(K)$ dizisi bulmalıyız.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in K$ olmak üzere $y_n \in F(x_n)$ olsun. $K \subset X$ kompakt olduğu için

$x_{n_i} \rightarrow x$, $x \in K$ olacak şekilde $(x_{n_i}) \subset (x_n)$ alt dizisi bulabiliriz.

$((x_{n_i}, y_{n_i})) \in \text{graph}F$, $X \times Y$ de $(x_{n_i}, y_{n_i}) \rightarrow (x, y)$ ve $\text{graph}F$ kapalı olduğu için $(x, y) \in \text{graph}F$ dir. Böylece $y \in F(K)$ olur. Bu ise $F(K)$ nın Y de kapalı olması demektir.

2.28. Tanım

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyon içeren denklemlere, integral denklemler denir. Eğer integral denklemde, bilinmeyen fonksiyon, birinci dereceden ise, bu tip integral denklemlere, lineer integral denklemler denir. O halde en genel lineer integral denklemi,

$$\psi(x)f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

biçiminde yazılabilir. a ve b birer sabit sayı, λ bir parametre, ψ, ϕ ve K fonksiyonları tanım bölgesi $a \leq x \leq b$ ve $a \leq y \leq b$ olmak üzere bilinen fonksiyonlar, f ise bilinmeyen fonksiyondur. Özel olarak ϕ fonksiyonu, integral denklemin kaynak terimi, K fonksiyonu da, integral denklemin çekirdeği olarak adlandırılır.

2.29. Tanım

Bir integral denklemde, bilinmeyen fonksiyon integralin sadece içinde ise, bu tip integral denkleme, birinci tip; hem içinde hem de dışında ise; ikinci tip integral denklem adı verilir.

2.30. Tanım

Bir integral denklemde, integralin dışında ve bilinmeyen fonksiyonun haricinde bir fonksiyon varsa, bu denkleme homojen olmayan, böyle bir fonksiyon yok ise homojen integral denklem denir.

2.31. Tanım

Bir integral denklemde, integralin sınırlarından biri x gibi bir değişken ise, bu denkleme Volterra integral denklemi, sınırlardan her ikisi birden sabit olabileceği gibi, biri sabitken diğeri sonsuz ya da her iki sınırın sonsuz olması durumunda integral denkleme, Fredholm integral denklemi adı verilir.

Buna göre $y > x$ için $K(x, y) = 0$ koşulunu sağlayan

$$\phi(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

şeklindeki birinci tip lineer Volterra integral denklemleri ile

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

şeklindeki ikinci tip lineer Volterra integral denklemlerinin $K(x, y)$ çekirdeği $\{(x, y) : a \leq y < x \leq b\}$ üçgensel bölgede tanımlanmıştır.

Yukarıda verilen tanımlara göre,

$$\psi(x) f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

denklemini, Lineer III. tip Fredholm integral denklemi,

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

denklemini, Lineer II. tip Fredholm integral denklemi,

$$\phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy = 0$$

denklemini, Lineer I. tip Fredholm integral denklemidir. Benzer şekilde Volterra integral denklemleri de yazılabilir.

2.32. Tanım

Bir integral denklemde bilinmeyen fonksiyon birinci dereceden değilse, bu integral denkleme lineer olmayan integral denklem adı verilir. Buna göre,

$$\int_a^x H(x, y, f(y)) dy = F(x, f(x))$$

integral denklemini lineer olmayan Volterra integral denkleminin en genel halidir. Bu denkleme, Urysohn formunda Volterra integral denklemini denir. Bu denklemde

$$H(x, y, f(y)) = K(x, y)Q(y, f(y)) \text{ oluyorsa}$$

$$\int_a^x K(x, y)Q(y, f(y)) dy = F(x, f(x))$$

integral denklemine, Hammerstein formunda Volterra integral denklemini adı verilir.

Yine lineer olmayan,

$$\int_a^b H(x, y, f(y)) dy = F(x, f(x)), \quad a \leq x \leq b$$

integral denkleminde $H(x, y, f(y)) = K(x, y)Q(y, f(y))$ oluyorsa,

$$\int_a^b K(x, y)Q(y, f(y))dy = F(x, f(x))$$

denklemine, lineer olmayan Hammerstein integral denklemi denir.

3. MÖNCH TİPİ TEK DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Birinci kısımda Mönch sabit nokta teoreminin Schauder, Darbo ve Sadovskii nin sabit nokta teoremleri ile olan ilişkisine değinilecektir. İkinci kısımda Mönch ve Mönch ün alternatifli sabit nokta teoremleri ve ispatları verilecektir. Ayrıca birer uygulamaları olarak bir sınır değer probleminin ve bir Volterra integral denkleminin çözümlerinin olduğu gösterilecektir.

3.1. Mönch Sabit Nokta Teoreminin Schauder, Darbo ve Sadovskii Sabit Nokta Teoremleri ile Olan İlişkisi

Mönch ün sabit nokta teoremi Schauder, Darbo ve Sadovskii nin sabit nokta teoremlerinin bir genelleştirilmiştir. Mönch ün teoreminin ifadesinden önce bu teoremleri hatırlayalım ve bunların Mönch teoremiyle olan ilişkisinden bahsedelim.

3.1.1. Teorem (*Schauder*)

X normlu uzayının, kapalı, konveks bir alt kümesi C olsun. O zaman her kompakt, sürekli $F : C \rightarrow C$ dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir [1].

3.1.2. Teorem (*Darbo*)

X Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi D olsun. $F : D \rightarrow D$ bir kuvvetli küme büzülme dönüşümü ise F , D de bir sabit noktaya sahiptir [8].

3.1.3. Teorem (*Sadovskii*)

X Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi D olsun. $F : D \rightarrow D$ bir yoğunlaştırıcı dönüşüm ise F , D de bir sabit noktaya sahiptir [8].

3.1.4 Teorem (Mönch I)

D , X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi, $N: D \rightarrow D$ sürekli ve şu özelliklere sahip bir dönüşüm olsun. En az bir $x_0 \in D$ ve

$$\overline{C} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C))}$$

olacak şekildeki D nin sayılabilir her C alt kümesi için $\overline{C}$ kompakt ise N bir sabit noktaya sahiptir [17].

Bu teoremin ispatından önce Mönch ün diğer teoremlerle olan ilişkisinden söz edelim.

(Schauder) $\Rightarrow$ (Mönch 1) :

X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi D olsun. $F: D \rightarrow D$ sürekli ve kompakt bir dönüşüm olmak üzere Mönch koşulunu sağladığını görelim.

$F: D \rightarrow D$ kompakt dönüşüm ise $F(D)$, D nin kompakt bir alt kümesi tarafından içerilir. Yani $F(D) \subset K \subset D$ olacak şekilde kompakt bir K kümesi vardır.

$C \subset D$ sayılabilir ve $\overline{C} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))}$ olsun. $\overline{C}$ nin kompakt olduğunu gösterelim.

$\overline{F(D)} \subset K$, K kompakt olduğu için $\overline{F(D)}$ kompakt olur.

$C \subset D \Rightarrow \overline{F(C)} \subset \overline{F(D)}$, $\overline{F(D)}$ kompakt

$\Rightarrow \overline{F(C)}$ kompakt

$$\Rightarrow \{x_0\} \cup \overline{F(C)} \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))} \text{ kompakt (Mazur Lemma dan)}$$

$$\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))} = \overline{C} \text{ olup } \overline{C} \text{ kompakt bulunur.}$$

(her A kümesi için $\overline{\text{conv}(A)} = \overline{\text{conv}(\overline{A})}$ dir , fakat $\text{conv}(A) = \text{conv}(\overline{A})$ olmayabilir.)

(Sadovskii $\Rightarrow$ Mönch 1) :

E reel bir Banach uzayı, $D \subseteq E$ kapalı ve konveks bir alt küme olsun. $F : D \rightarrow E$ sürekli, sınırlı ve yoğunlaştırıcı bir dönüşüm olsun. Buna göre her sınırlı, rölatif kompakt olmayan $C \subset D$ için $((\alpha(C) \neq 0) \quad \alpha(F(C)) < \alpha(C)$ dir. F in bunların yanısıra Mönch koşulunu sağladığını görelim.

$C \subset D$ sayılabilir ve $\overline{C} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))}$ olsun. $\overline{C}$ kompakt olduğunu görelim.

Önerme 2.1 den

$$\begin{aligned} \alpha(C) &= \alpha(\overline{C}) \\ &= \alpha(\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))}) \\ &= \alpha(\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))) \\ &= \alpha(\{x_0\} \cup F(C)) \\ &= \max\{\alpha(\{x_0\}), \alpha(F(C))\} \\ &= \alpha(F(C)) \end{aligned}$$

bulunur. F yoğunlaştırıcı dönüşüm olduğu için,

$$\alpha(C) = \alpha(F(C)) \Rightarrow \alpha(C) = 0$$

olur. Önerme 2.1. (i) den $\alpha(C) = 0 \Rightarrow \overline{C}$ kompakttır.

(Darbo $\Rightarrow$ Mönch 1) :

Her kuvvetli küme büzülme dönüşümü bir yoğunlaştırıcı dönüşümdür. Gerçekten;

$F : D \rightarrow E$ sürekli, sınırlı ve bir kuvvetli küme büzülme dönüşümü olsun. Buna göre her sınırlı $S \subset D$ için $\alpha(F(S)) \leq k\alpha(S)$, $k < 1$

$\alpha(S) = 0 \Rightarrow \alpha(F(S)) = 0$ olur. Buna göre $\alpha(F(S)) = \alpha(S)$ olur ki bu da F nin kuvvetli küme büzülme dönüşümü olmasıyla çelişir. O halde $\alpha(S) \neq 0$ dır.

$$\alpha(S) \neq 0 \Rightarrow \frac{\alpha(F(S))}{\alpha(S)} \leq k < 1$$

$$\Rightarrow \alpha(F(S)) < \alpha(S)$$

bulunur. Buna göre F bir yoğunlaştırıcı dönüşümdür. Bir önceki sonucu da kullanarak F in Mönch koşulunu sağladığını söyleyebiliriz.

3.2. Mönch Tipi Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri ve Diferensiyel ve İntegral Denklemlere Uygulanması

Bu kısımda Mönch tipi tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve ispatlarına ve bunlarla ilgili uygulamalara birer örnekle yer verilecektir.

3.1.4. Teorem (Mönch 1)

D , X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi, $N : D \rightarrow D$ sürekli ve şu

özelliklere sahip bir dönüşüm olsun. En az bir $x_0 \in D$ ve

$$\overline{C} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C))} \quad (3.1)$$

olacak şekildeki D nin sayılabilir her C alt kümesi için $\overline{C}$ kompakt ise N bir sabit noktaya sahiptir [17].

İspat

$$B_0 = \{x_0\} \text{ ve } B_n = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \quad n = 1, 2, \dots$$

olsun. Kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsünün kompakt olması ve Mazur Lemma dan B_n rölatif kompaktır. Gerçekten;

B_0 kompaktır.

B_0 kompakt $\Rightarrow N(B_0)$ kompakt

$$\Rightarrow \{x_0\} \cup N(B_0) \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_0))} \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \overline{B_1} \text{ kompakt}$$

$\overline{B_{n-1}}$ kompakt olsun.

$\overline{B_n}$ ın kompakt olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\overline{B_{n-1}} \text{ kompakt} &\Rightarrow N(\overline{B_{n-1}}) \text{ kompakt} \\
&\Rightarrow \{x_0\} \cup N(\overline{B_{n-1}}) \text{ kompakt} \\
&\Rightarrow \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{B_{n-1}}))} \text{ kompakt}
\end{aligned}$$

$\overline{B_n} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{B_{n-1}}))} \subset \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{B_{n-1}}))}$ ve kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olacağı için $\overline{B_n}$ kompakttır.

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_{n-1} \subseteq B_n \subseteq \dots \subseteq D$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
B_0 \subseteq B_1 &\Rightarrow N(B_0) \subseteq N(B_1) \\
&\Rightarrow \{x_0\} \cup N(B_0) \subseteq \{x_0\} \cup N(B_1) \\
&\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_0)) \subseteq \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_1)) \\
&\Rightarrow B_1 \subseteq B_2
\end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_n$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
n=1,2,3,\dots \text{ için } N(B_{n-1}) \subset D &\Rightarrow \{x_0\} \cup N(B_{n-1}) \subset D \\
&\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \subset D \\
&\Rightarrow B_n \subset D, \quad n=1,2,3,\dots \text{ için}
\end{aligned}$$

Ayrıca her bir $\overline{B_n}$ ayrılabilirdir. Çünkü metrik uzayda dolayısıyla Banach uzayında kompakt bir küme aynı zamanda ayrılabilirdir. Sonuç olarak

$n=0,1,2,\dots$ için $\overline{C_n} = \overline{B_n}$, olacak şekilde sayılabilir kümelerden oluşan bir $\{C_n\}$ dizisi vardır.

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \quad \text{ve} \quad C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$$

alalım. (B_n) artan olduğu için;

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \quad (3.2)$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} B_{n-1} \subset B &\Rightarrow N(B_{n-1}) \subset N(B) \\ &\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \\ &\Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \\ &\Rightarrow B \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \\ N(B_{n-1}) \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} N(B_{n-1}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \\ &\Rightarrow N(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n-1}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \\ &\Rightarrow N(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \\ &\Rightarrow N(B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \\ &\Rightarrow \{x_0\} \cup N(B) \subset \{x_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \\ &\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \subset \text{conv}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1}))) \\ &\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B_{n-1})) \\ &\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B)) \subset B \end{aligned}$$

Her iki durumdan diyebiliriz ki $B = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(B))$ dir.

Şimdi de $\overline{B} = \overline{C}$ olduğunu görelim.

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} = \overline{B} \quad \text{ve} \quad \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n} = \overline{C} \quad (3.3)$$

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} \Rightarrow \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}} \subseteq \overline{\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n}} \Rightarrow \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}} \right)$$

3.2.1. Uyarı

N in sürekliliği ($N(\overline{B}) \subset \overline{N(B)}$ olur) ve Mazur Lemma dan

$$\{x_0\} \cup N(B) \subseteq \{x_0\} \cup N(\overline{B}) \subseteq \overline{\{x_0\} \cup N(B)} \subseteq \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(B))}$$

ve

$$\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{B}))} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(B))} \text{ olmasından}$$

$$\overline{\text{conv}(N(B) \cup \{x_0\})} = \overline{\text{conv}(N(\overline{B}) \cup \{x_0\})} \text{ bulunur.}$$

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Uyarı 3.2.1 ve N in sürekliliğinden

$$\begin{aligned} C \subset \overline{C} = \overline{B} &= \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(B))} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{B}))} \\ &= \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{C}))} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C))} \end{aligned} \quad (3.4)$$

C sayılabilir olduğu için teoremin hipotezlerinden $\overline{C}$ kompakt olur. Dolayısıyla $\overline{B}$ kompakttır. Eş. 3.4 den

$$\overline{B} = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{B}))}$$

ve bu yüzden $N(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$ olduğu için Tanım 2.25 den N kompakt dönüşümdür. Böylece Schauder in sabit nokta teoremini uygulayabiliriz. Yani Teorem 3.1.1 den $N, \overline{B}$ de bir sabit noktaya sahiptir. $\overline{B} \subset D$ olduğu için N, D de bir sabit noktaya sahiptir.

3.2.1. Teorem (Mönch 2)

K, X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi, U, K nın açık bir alt kümesi ve $N: \overline{U} \rightarrow K$ sürekli ve şu özelliklere sahip bir dönüşüm olsun. En az bir $x_0 \in U$,

$$C \subset \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C))} \quad (3.5)$$

olacak şekildeki sayılabilir her $C \subset \overline{U}$ alt kümesi için $\overline{C}$ kompakt ve ayrıca

$$\text{her } x \in \overline{U} - U \text{ ve } \lambda \in (0,1) \text{ için } x \neq (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x) \quad (3.6)$$

olsun. O zaman $N, \overline{U}$ da bir sabit noktaya sahiptir [17].

İspat

Kabul edelim ki $N, \overline{U} - U$ da hiç bir sabit noktaya sahip olmasın. (Aksi takdirde ispat tamamlanır.) O zaman

$$\text{her } x \in \overline{U} - U \text{ ve } \lambda \in [0,1] \text{ için } x \neq (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x) \quad (3.7)$$

dır.

3.2.2. Uyarı

* $\lambda = 0$ için

$x_0 \in U$, $x \in \overline{U} - U$ olduğu için $x \neq x_0$ dır. O halde $x \neq (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x)$ yazabiliriz.

** $\lambda = 1$ için

$x \in \overline{U} - U$ ve N , $\overline{U} - U$ da hiçbir sabit noktaya sahip olmayacaktı yani $x \in \overline{U} - U$ için $x \neq N(x)$. O halde $x \neq (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x)$ yazabiliriz.

Dolayısıyla

her $x \in \overline{U} - U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $x \neq (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x)$ yazabiliriz.

$A = \{x \in \overline{U} : x = (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x), \lambda \in [0,1]\}$ kümesini göz önüne alalım. $A \neq \emptyset$ (en azından x_0 var) ve kapalıdır. Gerçekten;

$n \rightarrow \infty$ iken $y_n \rightarrow y$ olacak şekilde A da her hangi bir dizi (y_n) olsun.

$$y_n \in A \Rightarrow y_n = (1-\lambda)x_0 + \lambda N(y_n)$$

N in sürekliliğinden,

$$y_n \rightarrow y \Rightarrow N(y_n) \rightarrow N(y)$$

dir.

$$y_n = (1-\lambda)x_0 + \lambda N(y_n) \text{ eşitliğinde}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ için } y = (1 - \lambda)x_0 + \lambda N(y)$$

olur ki bu da $y \in A$ olması demektir. A kapalıdır.

A kümesini tanımlandığından da açıktır ki $A \cap (\overline{U} - U) = \emptyset$ dir. Böylece Urysohn Lemma dan

$$\mu: \overline{U} \rightarrow [0,1]$$

$$\mu(A) = 1, \mu(\overline{U} - U) = 0$$

ile tanımlı sürekli bir μ fonksiyonu vardır.

$F: K \rightarrow K$ dönüşümü

$$F(x) = \begin{cases} \mu(x)N(x) + (1 - \mu(x))x_0, & x \in \overline{U}, \\ x_0, & x \in K - \overline{U}. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. F süreklidir. Bunun için F in dizisel sürekli olduğunu görmek yeterlidir.

(x_n) , $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde K da her hangi bir dizi olsun.

$F(x_n) \rightarrow F(x)$ olduğunu görmeye çalışalım.

* (x_n) dizisinin sonlu tane terimi hariç sonsuz tane terimi $\overline{U}$ da olsun. Yani

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in \overline{U}$ olsun. $\forall n \geq n_0$ için

$$F(x_n) = \mu(x_n)N(x_n) + (1 - \mu(x_n))x_0$$

ve μ ve N sürekli olduğu için

$n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x \Rightarrow \mu(x_n) \rightarrow \mu(x)$ ve $N(x_n) \rightarrow N(x)$ olur. Böylece

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \mu(x_n)N(x_n) + (1 - \mu(x_n))x_0 \rightarrow \mu(x)N(x) + (1 - \mu(x))x_0$$

olur ki bu da

$$F(x_n) \rightarrow F(x)$$

olması demektir .

** (x_n) dizisinin sonlu tane terimi hariç sonsuz tane terimi $K - \overline{U}$ da olsun. Yani $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $x_n \in K - \overline{U}$ olsun. $\forall n \geq n_0$ için

$$F(x_n) = x_0$$

olur. $(F(x_n))$ sabit dizisi x_0 a yakınsar. Yani $F(x_n) \rightarrow x_0$ dır. x için iki durum mümkündür:

(1) $x \in K - \overline{U}$ ise $F(x) = x_0$ olur.

(2) $x \in \overline{U}$ ise $F(x) = \mu(x)N(x) + (1 - \mu(x))x_0$ ayrıca $x \in \overline{U} - U$ veya $x \in U$ dir.

$x \in \overline{U} - U$ olması durumunda $\mu(x) = 0$ olduğu için $F(x) = x_0$ dır. $x \in U$ olması durumunda ise $x_n \rightarrow x$ olduğu için dizinin kuyruğu sonunda x in bir açık komşuluğu olan U da bulunmalıdır. Bu ise $x_n \in K - \overline{U}$ olması ile çelişir. O halde $x \in U$ olamaz.

*** (x_n) dizisinin hem $\overline{U}$, hem de $K - \overline{U}$ da sonsuz tane terimi bulunsun. Bu taktirde (x_n) dizisi bir $x \in K$ noktasına yakınsayamaz. Yani bu şekilde seçiliş x in yakınsaklığına aykırıdır.

Sonuç olarak

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n \rightarrow x \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$$

bulunur. F süreklidir.

Ayrıca F , Eş. 3.5 koşulunu sağlar.

Bunu görmek için

$C \subseteq \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup F(C))}$ olacak şekilde sayılabilir bir $C \subseteq K$ alt kümesini alalım.

$$F(C) \subseteq \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \overline{U}))$$

dır. Gerçekten;

$y \in F(C)$ olsun. $y = F(c)$ olacak şekilde $c \in C$ vardır.

$$\begin{aligned} y = F(c) &= \begin{cases} \mu(c)N(c) + (1 - \mu(c))x_0, & c \in \overline{U}, \\ x_0, & c \in K - \overline{U} \end{cases} \\ &= \begin{cases} N(c), & c \in A, \\ x_0, & c \in \overline{U} - U, \\ x_0, & c \in K - \overline{U} \end{cases} \\ &= \begin{cases} N(c), & c \in A, \\ x_0, & c \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

$c \in A$ olduğu için $c \in \bar{U}$ dir. Ayrıca $c \in C$ olup $c \in \bar{U} \cap C$ olur ki $N(c) \in N(\bar{U} \cap C)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} c \in A &\Rightarrow y = F(c) = N(c) \\ &\Rightarrow y \in (\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})) \\ &\Rightarrow y \in \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \notin A &\Rightarrow y = F(c) = \{x_0\} \\ &\Rightarrow y \in (\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})) \\ &\Rightarrow y \in \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})). \end{aligned}$$

$F(C) \subseteq \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U}))$ bulunur.

Hatta $\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U}))$ konveks ve

$$\{x_0\} \cup \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})) = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})) \text{ olduğu için}$$

$$\begin{aligned} C \subset \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup \text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U})))} &= \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U}))} \\ &= \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U}))} \end{aligned}$$

dir. Hatta dikkat edilirse $C \cap \bar{U}$ sayılabilir ve

$$C \cap \bar{U} \subset \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \bar{U}))}.$$

dir. $N: \bar{U} \rightarrow X$ dönüşümü Eş. 3.5 koşulunu sağladığı için $\overline{C \cap \bar{U}}$ kompakttır.

N sürekli olduğu için $\overline{N(C \cap \overline{U})}$ da kompaktır ve Mazur Lemma $\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \overline{U}))}$ kümesinin kompakt olduğunu garanti eder.

$C \subset \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(C \cap \overline{U}))}$ ve kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olacağı için $\overline{C}$ kompakt olur.

Sonuç olarak $F : K \rightarrow K$ sürekli ve Eş. 3.5 koşulunu sağlar. Teorem 3.1.4 $x = F(x)$ olacak şekilde $x \in K$ nın varlığını garantiler. Hatta bu sabit nokta U dadır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} x \in \overline{U} - U &\Rightarrow x = F(x) = \mu(x)N(x) + (1 - \mu(x))x_0 \\ &\Rightarrow x = 0N(x) + x_0 \\ &\Rightarrow x = x_0. \end{aligned}$$

Bu ise $x_0 \in U$ olmasıyla çelişir. $x \notin \overline{U} - U$ dır.

$$x \in K - \overline{U} \Rightarrow x = F(x) = x_0.$$

Bu ise $x_0 \in U$ olmasıyla çelişir. $x \notin K - \overline{U}$ dır.

O halde $x \in U$ dur.

Böylece $x = \mu(x)N(x) + (1 - \mu(x))x_0$ ve dolayısıyla $x \in A$ dır.

Sonuç olarak $\mu(x) = 1$ olup $x = N(x)$ bulunur. N, U da bir sabit noktaya sahiptir.

Biz burada Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.2.1 in diferensiyel ve integral denklemlerine uygulamaları ile ilgili birer örnekle yetineceğiz, daha fazla örnek için şu kaynaklara bakılabilir [2-8]. Teoremlere ait uygulamalara geçmeden önce bu uygulamalarda kullanacağımız Heinz in şu önermesini ifade edelim.

3.2.1. Önerme (Heinz)

(a) E ayrılabilir bir reel Banach uzayı ve $C \subset L^1([a, b], E)$ sayılabilir alt küme olmak üzere, h.h. $t \in [a, b]$ ve her $u \in C$ için $|u(t)| \leq h(t)$ dir. $h \in L^1[a, b]$, ise $\Psi(t) = \beta(C(t))$ fonksiyonu $L^1[a, b]$ ye aittir ve

$$\beta\left(\int_a^b C(t)dt\right) \leq \int_a^b \beta(C(t))dt$$

eşitsizliği sağlanır.

(b) E bir reel Banach uzayı (ayrılabilir olmak zorunda değil) ve $C \subset L^1([a, b], E)$ sayılabilir alt küme olmak üzere, h.h. $t \in [a, b]$ ve her $u \in C$ için $|u(t)| \leq h(t)$ dir. $h \in L^1[a, b]$ ise $\varphi(t) = \alpha(C(t))$ fonksiyonu $L^1[a, b]$ ye aittir ve

$$\alpha\left(\int_a^b C(t)dt\right) \leq 2 \int_a^b \alpha(C(t))dt$$

eşitsizliği sağlanır. (Burada $\int_a^b C(t)dt$ ile $\left\{\int_a^b u(t)dt : u \in C\right\} \subset E$ kümesi kastedilmektedir.)

3.2.1. Örnek

$\dim Y = \infty$ olan bir Y reel Banach uzayını alalım ve şu sınır değer problemini düşünelim:

$f : J \times Y \times Y \rightarrow Y$ sürekli ve $J \times Y^2$ de $|f(t, x, y)| \leq M$ ve

$$t \in J, A, B \subseteq Y \text{ sınırlı alt kümeleri için } \alpha(f(t, A, B)) \leq L(\alpha(A) + \alpha(B)) \quad (3.8)$$

olsun.

$$J = [0,1] \text{ de } x'' = f(t, x, x') \quad \text{ve} \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (3.9)$$

L olabildiğince küçük bir sabit iken Eş. 3.9 in $C^2(J, Y)$ de bir çözüme sahip olduğunu ispatlayalım [5].

Çözüm

Öncelikle Eş. 3.9 eşitliğinin

$$x(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds \quad (J \text{ de}) \quad (3.10)$$

eşitliğine denk olduğunu gösterelim . k fonksiyonu,

$$k(t, s) = \begin{cases} -t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ -s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Green fonksiyonudur.

Eş. 3.10 ile tanımlı integral denklemini göz önüne alalım ve Eş. 3.9 denklemini elde etmeye çalışalım.

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= \int_0^1 k(0, s) f(s, x(s), x'(s)) ds = 0 \\ x(1) &= \int_0^1 k(1, s) f(s, x(s), x'(s)) ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sınır koşulları sağlanır.}$$

Ayrıca Eş. 3.10 un t ye göre türevini alalım:

$$x(t) = \int_0^t k(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds + \int_t^1 k(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

$$x(t) = - \int_0^t s(1-t) f(s, x(s), x'(s)) ds - \int_t^1 t(1-s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

$$x'(t) = \int_0^t (s-0) f(s, x(s), x'(s)) ds + (t-1) t f(t, x(t), x'(t)) \\ - \int_t^1 (1-s) f(s, x(s), x'(s)) ds + (t-0)(1-t) f(t, x(t), x'(t))$$

$$x'(t) = \int_0^t s f(s, x(s), x'(s)) ds - \int_t^1 (1-s) f(s, x(s), x'(s)) ds$$

$$x''(t) = \frac{1}{1-0} [(t-0) f(t, x(t), x'(t)) + (1-t) f(t, x(t), x'(t))]$$

$$J \text{ de } x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

olur ki bu da Eş. 3.9 deklemini verir. Eş. 3.10 eşitliğinin sağ tarafı F ile tanımlansın.

$$F : X \rightarrow X \quad Fx(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds \quad \text{ile tanımlı bir dönüşüm olsun.}$$

Burada $X = C^1(J, Y)$ uzayı ve üzerinde tanımlanan $\|x\| = |x|_0 + |x'|_0$ normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

$$(|x|_0 = \sup_{t \in J} |x(t)|, \quad |x'|_0 = \sup_{t \in J} |x'(t)|).$$

Green fonksiyonunun özelliklerinden F nin sabit noktaları Eş. 3.9 un klasik çözümleridir. Diğer bir deyişle Eş. 3.9 un çözümleri F dönüşümünün sabit noktalarıdır. Yani kısaca,

x , Eş. 3.9 un bir çözümüdür $\Leftrightarrow x = Fx$, $F : X \rightarrow X$

yazabiliriz.

Şimdi F in Teorem 3.1.4 ün hipotezlerini sağladığını dolayısıyla bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim.

Mönch 1 de $D = X$ alalım. F in D den D ye tanımlı olduğunu görelim.

$D = X = C^1(J, Y)$, $x \in C^1(J, Y)$ olsun. Buna göre $x : J \rightarrow Y$ ve $x' : J \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlardır. $Fx \in C^1(J, Y)$ olduğunu gösterelim. Bunun için de $Fx : J \rightarrow Y$ ve $(Fx)' : J \rightarrow Y$ fonksiyonlarının sürekli olduğunu görmeliyiz.

$\forall t_1, t_2, s_1, s_2 \in J$ ve $\forall \varepsilon_0 > 0$ için

$|t_1 - t_2| < \delta_0$ olsun.

$$|Fx(t_1) - Fx(t_2)| = \left| \int_0^1 (k(t_1, s) - k(t_2, s)) f(s, x(s), x'(s)) ds \right|$$

$$\leq \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| |f(s, x(s), x'(s))| ds.$$

$k(t, s)$, J^2 de sürekli bir fonksiyon, yani

$\forall t_1, t_2, s_1, s_2 \in J$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\sqrt{(t_1 - t_2)^2 + (s_1 - s_2)^2} < \delta \Rightarrow |k(t_1, s_1) - k(t_2, s_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ vardır.

$s_1 = s_2 = s$ alınırsa,

$|t_1 - t_2| < \delta_0 \Rightarrow |k(t_1, s) - k(t_2, s)| < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$|t_1 - t_2| < \delta_0 \Rightarrow |Fx(t_1) - Fx(t_2)| < \varepsilon(M + 1) = \varepsilon_0 \quad (3.11)$$

olur. Yani $\forall \varepsilon_0 > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta_0$ iken $|Fx(t_1) - Fx(t_2)| < \varepsilon_0$ olacak şekilde bir $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) > 0$ sayısı vardır. O halde Fx süreklidir.

$t_1 < t_2$ olmak üzere $|t_1 - t_2| < \delta$ olsun.

$$\begin{aligned} |(Fx)'(t_1) - (Fx)'(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} sf(s, x(s), x'(s))ds - \int_{t_1}^1 (1-s)f(s, x(s), x'(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_2} sf(s, x(s), x'(s))ds + \int_{t_2}^1 (1-s)f(s, x(s), x'(s))ds \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} sf(s, x(s), x'(s))ds - \int_{t_1}^{t_2} (1-s)f(s, x(s), x'(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |sf(s, x(s), x'(s))|ds + \int_{t_1}^{t_2} |(1-s)f(s, x(s), x'(s))|ds \\ &\leq |f(s, x(s), x'(s))| |t_2 - t_1| + |f(s, x(s), x'(s))| |t_2 - t_1| \\ &\leq 2M\delta \end{aligned}$$

$$< 2(M+1)\delta = \varepsilon_1 \quad (3.12)$$

olur. Yani $\forall \varepsilon_1 > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|(Fx)'(t_1) - (Fx)'(t_2)| < \varepsilon_1$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ vardır. O halde $(Fx)'$ süreklidir. Dolayısıyla $(Fx) \in C^1(J, Y)$ dir. F , D den D ye tanımlıdır.

Şimdi de F in sürekli olduğunu gösterelim.

$(y_n) \subset C^1(J, Y)$ de bir dizi ve $C^1(J, Y)$ de $n \rightarrow \infty$ iken $y_n \rightarrow y$ olsun. Gösterelim ki $n \rightarrow \infty$ iken $Fy_n \rightarrow Fy$ dir.

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } Fy_n \rightarrow Fy \Rightarrow \|Fy_n - Fy\| \rightarrow 0$$

dır.

$$\|Fy_n - Fy\| = \|Fy_n - Fy\|_0 + \|(Fy_n)' - (Fy)'\|_0$$

olduğundan

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|Fy_n - Fy\|_0 \rightarrow 0 \text{ ve } \|(Fy_n)' - (Fy)'\|_0 \rightarrow 0$$

olduklarını görelim.

$$\forall s \in J \text{ için } |f(s, y(s), y'(s))| \leq M \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$X = C^1(J, Y)$ de $y_n \rightarrow y$ olduğundan $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ olur. O halde

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|y_n - y\|_0 \rightarrow 0 \text{ ve } \|y'_n - y'\|_0 \rightarrow 0$$

olur. Ayrıca

$$\|Fy_n - Fy\|_0 = \sup_{t \in J} |Fy_n(t) - Fy(t)|$$

$$\|(Fy_n)' - (Fy)'\|_0 = \sup_{t \in J} |(Fy_n)'(t) - (Fy)'(t)|$$

ile tanımlıdır.

Kompakt uzaylar üzerinde tanımlı her reel değerli sürekli fonksiyon bu uzaylar üzerinde sınırlıdır. J^2 kompakt ve k, J^2 de sürekli olduğu için sınırlıdır. Dolayısıyla $\forall t, s \in J$ için

$$|k(t, s)| < c \text{ olacak şekilde bir } c > 0 \text{ sayısı vardır.}$$

$$\|Fy_n(t) - Fy(t)\| \leq c \int_0^1 |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds$$

f sürekli olduğu için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } y_n \rightarrow y \text{ ve } y_n' \rightarrow y' \Rightarrow \text{h.h.s } J \text{ için } f(s, y_n(s), y_n'(s)) \rightarrow f(s, y(s), y'(s))$$

(s deki yakınsama düzgündür).

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))\| \rightarrow 0 \quad \text{dır.}$$

Ayrıca Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|Fy_n(t) - Fy(t)\| \leq c \int_0^1 |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds$$

eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra yakınsar.

Yani $\forall t \in J$ için $n \rightarrow \infty$ iken $|Fy_n(t) - Fy(t)| \rightarrow 0$ dır. O halde $n \rightarrow \infty$ iken $|Fy_n - Fy|_0 \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
 |(Fy_n)'(t) - (Fy)'(t)| &= \left| \int_0^t s f(s, y_n(s), y_n'(s)) ds - \int_t^1 (1-s) f(s, y_n(s), y_n'(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^t s f(s, y(s), y'(s)) ds + \int_t^1 (1-s) f(s, y(s), y'(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t s |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\
 &\quad + \int_t^1 (1-s) |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\
 &\leq \int_0^t |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\
 &\quad + \int_t^1 |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\
 &\leq \int_0^1 |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds
 \end{aligned}$$

yine Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \int_0^1 |f(s, y_n(s), y_n'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \rightarrow 0$$

bulunur. Yani $\forall t \in J$ için $n \rightarrow \infty$ iken $|(Fy_n)'(t) - (Fy)'(t)| \rightarrow 0$ dır. O halde $n \rightarrow \infty$ iken $|(Fy_n)' - (Fy)'|_0 \rightarrow 0$ olur.

$C^1(J, Y)$ de $n \rightarrow \infty$ iken $Fy_n \rightarrow Fy$ olur. O halde $F: D \rightarrow D$ fonksiyonu süreklidir.

$$\overline{C} = \overline{\text{conv}(\{0\} \cup F(C))} \quad (3.13)$$

olacak şekilde sayılabilir bir alt küme $C = \{x_n : n \geq 1\} \subset X$ olsun.

$B = F(C)$ nin rölatif kompakt olduğunu ispatlayalım. O zaman Eş. 3.13 den Mazur Lemma sını kullanarak $\overline{C}$ kompakt olarak bulunacaktır. Gerçekten;

$$\overline{\{0\}} \text{ ve } \overline{F(C)} \text{ kompakt} \Rightarrow \overline{\{0\} \cup F(C)} \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{conv}(\{0\} \cup F(C))} \text{ kompakt}$$

$$\text{ve } \overline{\text{conv}(\{0\} \cup F(C))} = \overline{\text{conv}(\{0\} \cup F(C))} = \overline{C} \quad \text{olduğu için } \overline{C} \text{ kompakt olur.}$$

Bu sonuca ulaşmak için X deki kompakt kümelerin aşağıdaki gibi karakterizasyonuna ihtiyaç duyarız. Bunu şöyle ispatlayalım:

1. $A \subset X$ olsun. A ve A' eş sürekli ve J de $\alpha(A(t)) \equiv 0$ ise A rölatif kompaktır. (Önerme 2.2 den bunu söyleyebiliriz.)

2. f düzgün sınırlı olduğu için $B'' = (F(C))''$ sınırlı ve $B'' = (F(C))''$ nin sınırlı olmasından B ve B' eş süreklidir. Gerçekten;

$$B'' = (F(C))'' = \{(Fx_n)'' : n \geq 1\}$$

$$\forall t \in J \text{ için } B''(t) = \{f(t, x_n(t), x'_n(t)) : n \geq 1\}$$

f düzgün sınırlı olduğundan $\forall t$ için $|f(t, x_n(t), x'_n(t))| \leq M$ dir. Bu ise B'' nün sınırlı olması demektir. Şimdi de B ve B' kümelerinin J de eşsürekli olduğunu görelim.

$B = F(C) = \{Fx_n : x_n \in C, n \geq 1\} \subset C^1(J, Y)$ olsun. Herhangi bir $t_0 \in J$ ve her $\varepsilon_2 > 0$ için,

$\forall t \in U$ ve $n \geq 1$ olmak üzere $\forall Fx_n \in B$ için Eş. 3.11 den

$$|Fx_n(t) - Fx_n(t_0)| < \varepsilon_2$$

olacak şekilde t_0 ın bir U açık komşuluğu vardır. Tanım 2.5 den B , t_0 da eşsürekli dir. t_0 keyfi olduğundan B , J de eşsürekli dir.

$B' = (F(C))' = \{(Fx_n)' : x_n \in C, n \geq 1\} \subset C(J, Y)$ olsun. Herhangi bir $t_1 \in J$ ve her $\varepsilon_3 > 0$ için,

$\forall t \in V$ ve $n \geq 1$ olmak üzere $\forall (Fx_n)' \in B'$ için Eş. 3.12 den

$$|(Fx_n)'(t) - (Fx_n)'(t_0)| < \varepsilon_3$$

olacak şekilde t_1 ın bir V açık komşuluğu vardır. Tanım 2.5 den B' , t_1 de eşsürekli dir. t_1 keyfi olduğundan B' , J de eşsürekli dir.

Her bir t için $B(t)$ nin rölatif kompakt olduğunu ispatlamak için

$$\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$t \rightarrow \varphi(t) = \alpha(B(t))$$

$$\Psi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$t \rightarrow \Psi(t) = \alpha(B'(t))$$

ile tanımlı sürekli φ ve Ψ fonksiyonlarını göz önüne alalım. O zaman Eş. 3.13 ve Önerme 3.2.1 den

$$\varphi(t) = \alpha(C(t)) \quad \text{ve} \quad \Psi(t) = \alpha(C'(t))$$

olur. F in tanımlanışından,

$$\varphi(t) = \alpha\left(\int_0^1 k(t,s)f(s, x_n(s), x'_n(s))ds : n \geq 1\right) \text{ dir.}$$

Şimdi $A(t,s) = k(t,s)\{f(s, x_n(s), x'_n(s)) : n \geq 1\}$ kümeleri için

$$\alpha\left(\int_0^1 A(t,s)ds\right) \leq \int_0^1 \alpha(A(t,s))ds$$

olduğunu görelim. O zaman Eş. 3.8 gösterir ki,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha\left(\int_0^1 A(t,s)ds\right) \leq \int_0^1 \alpha(A(t,s))ds = \int_0^1 \alpha(k(t,s)\{f(s, x_n(s), x'_n(s)) : n \geq 1\}) \\ &= \int_0^1 k(t,s) \alpha(\{f(s, x_n(s), x'_n(s)) : n \geq 1\})ds \\ &= \int_0^1 k(t,s) L\alpha(s, C(s), C'(s))ds \\ &\leq L \int_0^1 k(t,s) (\alpha(C(s)) + \alpha(C'(s)))ds \\ &= L \int_0^1 k(t,s) (\varphi(s) + \Psi(s))ds \end{aligned}$$

dır. k yerine k_t alarak benzer ifadeler $\Psi(t)$ için de yazılabilir. Yani,

$$\Psi(t) \leq L \int_0^1 k_t(t, s) |(\varphi(s) + \Psi(s))| ds.$$

Eğer L olabildiğince küçükse J de $\varphi(t) = \Psi(t) = 0$ olarak bulunur. Bu ise her bir t için $B(t)$ nin rölatif kompakt olduğunu gösterir.

3. Böylece her şey α ve $\int_0^1$ in eşitsizlikte yer değiştirmeyi sağlayıp sağlamadığı sorusuna dayanır. Bu ancak f sınırlı kümeler üzerinde düzgün sürekli ise mümkündür ama eğer f yalnızca sürekli ise cevabı bilmiyoruz.

Her $t \in J$ için $B(t) \subset Y$ olacak şekilde Y nin ayrılabilir kapalı bir alt uzayı Y_0 olsun. Ölçüm yuvarı $\beta_0 = \beta_{Y_0}$ için $\{x_n : n \geq 1\} \subset C(J, Y_0)$ ise

$$\beta_0(\{\int_0^1 x_n(s) ds : n \geq 1\}) \leq \int_0^1 \beta_0(\{x_n(s) : n \geq 1\}) ds$$

yazabiliriz. (Bu Mönch ve Von.Harten[7] tarafından gösterilmiştir ve β nın ayrılabilir uzaylar üzerindeki tanımlanışına dayanır.)

Dolayısıyla Önerme 3.2.1 (a) yı da göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq 2\beta(\int_0^1 A(t, s) ds) \leq 2\beta_0(\int_0^1 A(t, s) ds) \leq 2 \int_0^1 k(t, s) | \beta_0(\{f(s, x_n(s), x'_n(s)) : n \geq 1\}) | ds \\ &\leq 2 \int_0^1 k(t, s) | \alpha(\{f(s, x_n(s), x'_n(s)) : n \geq 1\}) | ds \end{aligned}$$

$$\leq 2L \int_0^1 |k(t,s)|(\varphi(s) + \Psi(s))ds$$

bulunur. Benzer ifadeler $\Psi(t)$ için de göz önüne alınırsa,

$$\Psi(t) \leq 2L \int_0^1 |k_t(t,s)|(\varphi(s) + \Psi(s))ds$$

bulunur. $2L$ yerine L alınarak istenen sonuç elde edilir.

3.2.2. Örnek

Burada ikinci çeşit lineer Volterra integral denklemi için genel varlık teoremini inceleyeceğiz.

$$u(t) = \int_0^t f(t,s,u(s))ds \quad t \in [0,T] \quad (3.14)$$

denkleminin, f , L^1 -Carathéodory dönüşümü iken bir $(E, |\cdot|)$ reel Banach uzayı yuvarında varlık teoremini ifade edelim.

$R > 0$ ve $T > 0$ olsun. B ile E nin $\overline{B_R}(0) = \{y \in E : |y| \leq R\}$ kapalı yuvarını gösterelim ve

$$\Lambda = \{(t,s) : t \in [0,T], s \in [0,T]\} \quad , \quad D = \Lambda \times B$$

kümelerini tanımlayalım.

Dolayısıyla

$$D = \{(t, s, x) : t \in [0, T], s \in [0, T], x \in E \quad \text{ve} \quad |x| \leq R\}$$

$f : D \rightarrow E$ bir dönüşüm ve her $t \in [0, T]$ için $|u(t)| \leq R$ olacak şekildeki $C([0, T], E)$ de u çözümlerini araştıralım.

Sabit bir $t \in [0, T]$ noktası için $f_t(s, x) = f(t, s, x)$ ile tanımlı $f_t : [0, t] \times B \rightarrow E$ dönüşümünü alalım.

Teorem

Kabul edelim ki

(A) Her bir $t \in [0, T]$ için f_t, t de düzgün L^1 - Carathéodory dönüşümü olduğu için

$$t - t' \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad \eta(t, t') \rightarrow 0 \quad \text{ve}$$

$$0 \leq t' < t \leq T \quad \text{için} \quad \int_{t'}^t \sup_{|x| \leq R} |f_t(s, x)| ds \leq \eta(t, t')$$

olacak şekilde sınırlı bir $\eta : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu vardır;

(B) Her bir $t \in [0, T]$ için

$$t' \rightarrow t \quad \text{iken} \quad \int_0^t \sup_{|x| \leq R} |f_t(s, x) - f_{t'}(s, x)| ds \rightarrow 0$$

burada $t_0 = \min\{t, t'\}$ dır;

(C) Her bir $t \in [0, T]$ için bir $\omega : \Lambda \times [0, 2R] \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü var ve $\omega_t = \omega(t, \cdot, \cdot)$ L^1 - Carathéodory dönüşümü olmak üzere,

h.h. $s \in [0, T]$ ve her $M \subset B$ için

$$\alpha(f(t, s, M)) \leq \omega(t, s, \alpha(M)) \quad (3.15)$$

ve

$$\varphi(t) \leq 2 \int_0^t \omega(t, s, \varphi(s)) ds \quad t \in [0, T]$$

eşitsizliğinin bir tek $\varphi \in C([0, T], [0, 2R])$ çözümü $\varphi \equiv 0$ dir;

(D) Her bir $\lambda \in (0, 1)$ için

$$u(t) = \lambda \int_0^t f(t, s, u(s)) ds, \quad t \in [0, T] \quad (3.16)$$

Eş. 3.16 nın çözümü olan her $u \in C([0, T], B)$ için $|u|_0 < R$ dir.

$$(|u|_0 = \max_{t \in [0, T]} |u(t)|)$$

O zaman Eş. 3.14, $C([0, T], B)$ de bir çözüme sahiptir [3].

İspat

Mönch ün alternatifli teoremini uygulayalım. $K = X = C([0, T], E)$ alalım. X uzayı

$| \cdot |_0$ normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

$U = \{u \in C([0, T], E); |u|_0 < R\}$, x_0 sıfır fonksiyonu ve

$$N: \bar{U} \rightarrow C([0, T], E)$$

$$N(u)(t) = \int_0^t f(t, s, u(s)) ds$$

ile tanımlı dönüşüm olsun.

f_t , L^1 - Carathéodory dönüşümü olduğu için her bir $u \in \bar{U}$ için $f_t(., u(.))$ fonksiyonu $[0, t]$ üzerinde Bochner integrallenebilirdir. (Bochner integrallenebilmeye 4.Bölüm de değinilecektir.)

Ayrıca

$$|N(u)(t)| \leq \int_0^t |f(t, s, u(s))| ds \leq \int_0^t \sup_{|x| \leq R} |f_t(s, x)| ds \leq \eta(t, 0) \leq \sup_{\Lambda} \eta < \infty. \quad (3.17)$$

Hatta $\forall u \in \bar{U}$ ve her $t, t' \in [0, T]$ için;

$t < t'$ ise,

$$\begin{aligned} |N(u)(t) - N(u)(t')| &= \left| \int_0^t f(t, s, u(s)) ds - \int_0^{t'} f(t', s, u(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_0^t (f(t, s, u(s)) - f(t', s, u(s))) ds - \int_t^{t'} f(t', s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(t, s, u(s)) - f(t', s, u(s))| ds + \int_t^{t'} |f(t', s, u(s))| ds \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^t \sup_{|x| \leq R} |f_t(s, x) - f_{t'}(s, x)| ds + \eta(t', t)$$

ya da $t' < t$ ise,

$$|N(u)(t) - N(u)(t')| \leq \int_0^{t'} \sup_{|x| \leq R} |f_t(s, x) - f_{t'}(s, x)| ds + \eta(t, t')$$

Her iki durumdan

$$|N(u)(t) - N(u)(t')| \leq \int_0^{t_0} \sup_{|x| \leq R} |f_t(s, x) - f_{t'}(s, x)| ds + \eta(t + t' - t_0, t_0) \quad (3.18)$$

burada $t_0 = \min\{t, t'\}$. Şimdi Eş. 3.18 gösterir ki;

$N(u) \in C([0, T], E)$ ve $N(\overline{U})$, $[0, T]$ de eşsüreklidir.

Ayrıca Eş. 3.17 gösterir ki $N(\overline{U})$ sınırlıdır.

N dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $u_n, u \in \overline{U}$ olmak üzere $C([0, T], E)$ de $u_n \rightarrow u$ olsun. f_t , L^1 -Carathéodory dönüşümü olduğu için, $h.h.s \in [0, t]$ için $f_t(s, \cdot)$ sürekli fonksiyon ve $h.h.s \in [0, t]$ ve her $x \in B$ için $|f_t(s, x)| \leq h_t(s)$ olacak şekilde $h_t \in L^1[0, t]$ fonksiyonu vardır.

Bu gösterir ki

$h.h.s \in [0, t]$, her $t \in [0, T]$ için

$n \rightarrow \infty$ iken $f(t, s, u_n(s)) \rightarrow f(t, s, u(s))$ ve

$$|f(t, s, u_n(s))| \leq h_t(s)$$

dır. Bunlarla birlikte Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden her $t \in [0, T]$ için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken} \quad N(u_n)(t) \rightarrow N(u)(t)$$

sağlanır. Eş. 3.18 garantiler ki t deki yakınsama düzgündür. Dolayısıyla

$$C([0, T], E) \text{ de } n \rightarrow \infty \text{ iken } N(u_n) \rightarrow N(u) \text{ olur.}$$

Eş. 3.5 şartını sağlamak için sayılabilir bir $M \subset \overline{U}$ alt kümesini alalım ve

$$M \subseteq \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))} \quad (3.19)$$

olsun. $N(M) \subset N(\overline{U})$ ve $N(\overline{U})$ sınırlı ve eşsürekli olduğu için Eş. 3.19 dan M sınırlı ve eşsürekli. Teorem 2.7 den her $t \in [0, T]$ için $M(t)$ nin E de rölatif kompakt olduğunu ispatlayalım. Bunun için

$$\begin{aligned} \varphi : [0, T] &\rightarrow R \\ t &\rightarrow \varphi(t) = \alpha(M(t)) \end{aligned}$$

ile tanımlı φ fonksiyonunu göz önüne alalım. α nın tanımlanışından φ nin anlamlı olduğu açık. Önerme 2.3 den φ , $[0, T]$ üzerinde süreklidir. Ayrıca,

$$\forall x \in M \text{ için } x(t) \leq R \leq 2R \text{ dir.}$$

O halde $\alpha(M(t)) \leq 2R$ dir. Dolayısıyla $\varphi \in C([0, T], [0, 2R])$ olur.

Şimdi Önerme 3.2.1 (b), Eş. 3.15 ve Eş. 3.19 eşitliklerinden şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = \alpha(M(t)) &\leq \alpha(N(M)(t)) = \alpha\left(\int_0^t f_t(s, M(s))ds\right) \\
&\leq 2 \int_0^t \alpha(f_t(s, M(s)))ds \\
&\leq 2 \int_0^t \omega(t, s, \alpha(M(s)))ds \\
&= 2 \int_0^t \omega(t, s, \varphi(s))ds
\end{aligned}$$

istenildiği gibi (C), $\varphi \equiv 0$ olduğunu garantiler. Son olarak (D) koşulundan Teorem 3.2.1 in Eş. 3.6 koşulu da gerçekleşir. Böylece Teorem 3.2.1 uygulanabilir. O halde Eş. 3.14 , $C([0, T], B)$ de bir çözüme sahiptir.

4. MÖNCH TİPİ KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Birinci kısımda bu bölümde kullanacağımız bazı tanım ve önermelere yer vereceğiz. İkinci kısımda bir önceki bölümde ifade ettiğimiz Mönch ün tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremlerini küme değerli dönüşümler için ifade edeceğiz. Son olarak üçüncü kısımda ise bu teoremlerin uygulamaları olarak Hammerstein ve Volterra integral içermeleri için varlık teoremlerini ifade ve ispat edeceğiz.

4.1. Tanımlar ve Önermeler

Bu bölümde yaralanacağımız bazı temel tanım ve önermeleri ifade edelim.

Boştan farklı herhangi bir X kümesi için X in bütün alt kümelerinin ailesi 2^X ve $P(X) = 2^X - \{\emptyset\}$ olsun. Bu durumda X bir Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere,

$$P_f(X) = \{A \subset X : A \text{ boştan farklı, kapalı} \}$$

$$P_k(X) = \{A \subset X : A \text{ boştan farklı, kompakt} \}.$$

Eğer X , $(E, \|\cdot\|)$ normlu uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi ise, o zaman

$$P_c(X) = \{A \subset X : A \text{ boştan farklı, konveks} \}$$

$$P_{fc}(X) = \{A \subset X : A \text{ boştan farklı, kapalı, konveks} \}$$

$$P_{kc}(X) = \{A \subset X : A \text{ boştan farklı, kompakt, konveks} \}$$

ile tanımlansın. Her $A \in P(E)$ için $|A| = \sup\{\|x\| : x \in A\}$ olsun ve $\text{conv}(A)$, A yı içeren konveks kümelerin en darını göstere.

X, Y iki küme olmak üzere $N : X \rightarrow 2^Y$ küme değerli bir dönüşüm ve $A \subset Y$ olsun.

$graph N = \{(x, y) : x \in X, y \in N(x)\}$ (N in grafiği)

$N(A) = \cup \{N(x) : x \in A\}$ (A nın görüntüsü)

$N^-(A) = \{x \in X : N(x) \cap A \neq \emptyset\}$ (A nın zayıf tersi)

ile tanımlansın.

X, Y iki topolojik uzay ve $N : X \rightarrow P(Y)$ bir dönüşüm olsun. Her kapalı $A \in P(Y)$ kümesi için $N^-(A)$ kümesi X de kapalı oluyorsa N üstten yarı süreklidir denir ve her açık $A \in P(Y)$ kümesi için $N^-(A)$ kümesi X de açık oluyorsa N alttan yarı süreklidir denir.

4.1.1. Örnek

$X = Y = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_1(x) = \begin{cases} [0, 1], & x = 0, \\ \{1\}, & x \neq 0. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\}, & x = 0, \\ [0, 1], & x \neq 0. \end{cases}$$

ile tanımlı küme değerli F_1 ve F_2 dönüşümleri için F_1 üstten yarı sürekli fakat alttan yarı sürekli değil ve F_2 de alttan yarı sürekli fakat üstten yarı sürekli değildir [12].

4.1.2. Örnek

$\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \leq \psi$ ile tanımlı fonksiyonlar olmak üzere F , küme değerli dönüşümü

$$F(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$$

şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. F in üstten yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\varphi(\cdot)$ alttan yarı sürekli ve $\psi(\cdot)$ üstten yarı sürekli olmalıdır. Ve F in alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $\varphi(\cdot)$ üstten yarı sürekli ve $\psi(\cdot)$ alttan yarı sürekli olmalıdır [12].

Şimdi küme değerli dönüşümlerin iyi bilinen bir kaç sonucunu ifade edelim.

(P1) X, Y Hausdorff topolojik uzaylar ve $N : X \rightarrow P_f(Y)$ bir dönüşüm olsun. Eğer N , üstten yarı sürekli ise, o zaman $graph N$, $X \times Y$ de kapalıdır. Karşıt olarak, eğer $graph N$ kapalı ve $\overline{N(X)}$ kompakt ise, o zaman N üstten yarı sürekli dir.

(P2) X, Y Hausdorff topolojik uzaylar ve $N : X \rightarrow P_k(Y)$ üstten yarı sürekli olsun. O zaman her kompakt $A \subset X$ alt kümesi için $N(A)$ kompakttır.

(P3) *Bohnenblust-Karlin sabit nokta teoremi:*

X bir Banach uzayı, $K \in P_{kc}(X)$ ve $N : K \rightarrow P_{fc}(K)$ dönüşümü üstten yarı sürekli ise, N bir sabit noktaya sahiptir.

(P4) *Michael in seçme teoremi:*

X bir metrik uzay, Y bir Banach uzayı ve $N : X \rightarrow P_{fc}(Y)$ alttan yarı sürekli ise, sürekli bir $N_0 : X \rightarrow Y$ fonksiyonu vardır ki her $x \in X$ için $N_0(x) \in N(x)$ dir.

$C([a, b], E)$ ile sürekli $u : [a, b] \rightarrow E$ fonksiyonlarının uzayını gösterelim ve üzerindeki norm $||\cdot||_0$, maksimum norm diyeceğimiz

$$||u||_0 = \max_{t \in [a, b]} |u(t)|$$

ile tanımlı norm olsun. Her $M \subset E$ için $C([a, b], M)$ ile M de değer alan $C([a, b], E)$ deki sürekli fonksiyonların tamamını gösterelim.

$u : [a, b] \rightarrow E$ sonlu değerli fonksiyon olarak adlandırılır, eğer ayrık, ölçülebilir sonlu sayıda I_j kümelerinin her birinin üzerinde sıfırdan farklı değer alıyorsa ve $[a, b] - \bigcup_j I_j$ de $u(t) = 0$ ise.

u nun I_j deki değeri x_j ve $\chi(I_j)$, I_j nin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere

$$\chi(I_j)(t) = \begin{cases} 1, & t \in I_j \\ 0, & t \in [a, b] - I_j \end{cases}$$

olsun. O zaman u fonksiyonu

$$u = \sum_j x_j \chi(I_j)$$

sonlu toplamı olarak ifade edilebilir ve

$$\sum_j x_j \mu(I_j) \in E$$

elemanı u nun $[a, b]$ üzerinde Bochner integrali olarak tanımlanır ve $\int_a^b u(t) dt$ ile gösterilir.

$$h.h.t \in [a, b] \text{ için } n \rightarrow \infty \text{ iken } u_n(t) \rightarrow u(t)$$

ve

$$\int_a^b |u_n(s) - u(s)| ds \rightarrow 0$$

olacak şekilde u ya yakınsayan sonlu değerli u_n fonksiyonlarının bir dizisi varsa $u: [a, b] \rightarrow E$ fonksiyonu $[a, b]$ de kuvvetli ölçülebilirdir denir. Ayrıca u nun Bochner integrali

$$\int_a^b u(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u_n(s) ds$$

ile tanımlanır.

Hatırlatacak olursak kuvvetli ölçülebilir bir u fonksiyonu Bochner integrallenebilirler gerek ve yeter şart $|u|$ Lebesgue integrallenebilirler [3].

Her reel $p \in [1, \infty]$ için bütün kuvvetli ölçülebilir $u: [a, b] \rightarrow E$ fonksiyonlarının uzayı $L^p([a, b], E)$ yi gözönüne alalım. $|u|^p$, $[a, b]$ de Lebesgue integrallenebilirler. $L^p([a, b], E)$ uzayı

$$p < \infty \text{ için } |u|_p = \left(\int_a^b |u(s)|^p ds \right)^{1/p}$$

normu altında bir Banach uzayıdır. Ayrıca,

$$|u|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} |u(t)| = \inf \{ c \geq 0 : |u(t)| \leq c \text{ h.h.t} \in [a, b] \text{ için} \}$$

ile tanımlı $|u|_\infty$ sayısına $|u(t)|$ nin esas sınırı da denir ve esas sınırlı fonksiyonların uzayı $L^\infty([a, b], E)$, $| \cdot |_ \infty$ normu altında bir Banach uzayıdır.

Özel olarak, $L^1([a,b],E)$ uzayı $[a,b]$ üzerinde Bochner integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. O zaman $E=\mathbb{R}$ alınırsa, $L^p([a,b],\mathbb{R})$ uzayı kısaca $L^p[a,b]$ ile gösterilir.

4.2. Mönch Tipi Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda ifade edeceğimiz teoremler, bir Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesinden yine kendine tanımlı dönüşümler için olan Mönch ün sabit nokta teoremlerinin küme değerli benzerleridir. Yani Mönch teoremlerinin küme değerli dönüşümlere genişlemesini sunacağız. Tabi ki bu genişleme Eş. 3.1, Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 ifadeleri ile bazı genel şartların yer değiştirmesiyle mümkündür. Yani bir tek C kümesi yerine bir (M,C) çiftinin alınması gerekir.

4.2.1. Teorem

Bir E Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi D ve $N:D \rightarrow P_c(D)$ bir dönüşüm olsun. $graph N$ kapalı, N kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştüren bir dönüşüm, en az bir $x_0 \in D$ ve

$$\left. \begin{aligned} M \subset D, \quad M &= conv(\{x_0\} \cup N(M)) \\ \overline{C} = \overline{M}, \quad C &\subset M, \text{ sayılabilir} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

olacak şekilde D nin her M alt kümesi için $\overline{M}$ kompakt ise $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır [17].

4.2.1. Uyarı

(a) $\forall x \in D$ için $\{x\}$ kompakt, N in özelliğinden $\overline{N(x)}$ kompakttır.

Önerme 2.4 ve $graphN$ in kapalı olmasından , $\{x\}$ kompakt iken $N(x)$ kapalıdır. $N(x) = \overline{N(x)}$ olduğundan $N(x)$ kompakt olur. Böylece N , D den $P_{kc}(D)$ ye tanımlı olur.

(b) (P1) ve (P2) ye göre Teorem 4.2.1 deki N için yapılan bütün kabuller eğer $N : D \rightarrow P_{kc}(D)$ üstten yarı sürekli ve Eş. 4.1 i sağlarsa gerçekleşir. Gerçekten, (P1) ve (P2) ye göre N üstten yarı sürekli dönüşüm ise $graphN$ kapalı ve her kompakt $A \subset D$ için $N(A)$ kompaktır.

İspat

$$(a) \quad M_0 = \{x_0\} \quad M_n = conv(\{x_0\} \cup N(M_{n-1})) \quad n \geq 1$$

ile tanımlansın.

$$\begin{aligned} N(M_{n-1}) \subset D \text{ ve } x_0 \in D &\Rightarrow \{x_0\} \cup N(M_{n-1}) \subset D \\ &\Rightarrow conv(\{x_0\} \cup N(M_{n-1})) \subset D, D \text{ konveks} \\ &\Rightarrow M_n \subset D \end{aligned}$$

Ayrıca M_n in konveks olduğu açıktır. Hatta tümevarımla gösterebiliriz ki $M_{n-1} \subset M_n$ dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \{x_0\} \subset conv(\{x_0\} \cup N(M_0)) &\Rightarrow M_0 \subset M_1 \\ &\Rightarrow N(M_0) \subset N(M_1) \\ &\Rightarrow \{x_0\} \cup N(M_0) \subset \{x_0\} \cup N(M_1) \\ &\Rightarrow conv(\{x_0\} \cup N(M_0)) \subset conv(\{x_0\} \cup N(M_1)) \\ &\Rightarrow M_1 \subset M_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilerek görülür ki $M_{n-1} \subset M_n$ dir.

Sonuç olarak $M = \cup\{M_n : n \geq 0\}$ ile tanımlanan küme konveks ve $\forall n \geq 0$ için

$M_n \subset D$ olduğundan $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n = M \subset D$ dir.

Ayrıca M_n ler artan olduğu için

$$M = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))$$

yazabiliriz. Gerçekten;

$$M_{n-1} \subset M \Rightarrow N(M_{n-1}) \subset N(M)$$

$$\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1})) \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1})) \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))$$

$$\Rightarrow M \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M)).$$

$$N(M_{n-1}) \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1})) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} N(M_{n-1}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))$$

$$\Rightarrow \{x_0\} \cup N(M) \subset \{x_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))$$

$$\Rightarrow N(\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))$$

$$\Rightarrow N(M) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))$$

$$\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M)) \subset \text{conv}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))\right)$$

$$\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M)) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))$$

$$\Rightarrow \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M)) \subset M.$$

Her iki durumdan $M = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))$ olduğunu söyleyebiliriz.

(b) M_n rölatif kompaktır. Bunu görmek için N in kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürme özelliği ve Mazur Lemma sını kullanacağız. Tümevarımla;

$M_0 = \{x_0\}$ kompaktır.

Hausdorff uzayı dolayısıyla Banach uzayında her tek nokta kümesi kompakt olduğu için M_0 kompaktır. Uyarı 4.2.1 (a) dan

$$\begin{aligned} \{x_0\} \text{ kompakt} &\Rightarrow N(x_0) \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \{x_0\} \cup N(x_0) \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(x_0))} \text{ kompakt.} \end{aligned}$$

$\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_0))} = \overline{M_1}$ olduğundan M_1 rölatif kompaktır.

M_{n-1} rölatif kompakt olsun.

$$\begin{aligned} \overline{M_{n-1}} \text{ kompakt} &\Rightarrow N(\overline{M_{n-1}}) \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \{x_0\} \cup N(\overline{M_{n-1}}) \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{M_{n-1}}))} \text{ kompakt.} \end{aligned}$$

Hausdorff uzayında kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olacağından,

$$\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))} \subset \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{M_{n-1}}))}$$

kompakt ve

$$\overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(M_{n-1}))} = \overline{M_n}$$

kompakttır.

M_n rölatif kompakttır.

Ayrıca her bir $\overline{M_n}$ ayrılabilir. Çünkü metrik uzayda dolayısıyla Banach uzayında kompakt bir küme aynı zamanda ayrılabilir. Sonuç olarak,

Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için $\overline{C_n} = \overline{M_n}$, $C_n \subset M_n$ olacak şekilde sayılabilir kümelerden oluşan bir $\{C_n\}$ dizisi vardır.

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$$

olsun. $C \subset M$ olduğu açık ve sayılabilir kümelerin sayılabilir sayıdaki birleşimi de sayılabilir olacağından C sayılabilir ve $\overline{C} = \overline{M}$ dir.

Şimdi $\overline{M}$ in kompakt olduğunu görelim.

$M \subset D$, $M = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M))$ ve $\overline{M} = \overline{C}$, $C \subset M$ sayılabilir dolayısıyla

Eş.4.1 bize $\overline{M}$ kümesinin kompakt olduğunu garantiler.

M nin boştan farklı(en azından x_0 var) ve konveks olduğu açık. Dolayısıyla $K = \overline{M} \in P_{kc}(E)$ dir.

(c) Hatta $K \subset N^-(K)$ dır. $N^-(K) = \{x \in E : N(x) \cap K = \emptyset\}$

$x \in K$ olsun. $x \in N^-(K)$ olduğunu görelim.

Eğer $x \in K$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset M$ dizisi vardır. Şimdi $\forall n$ için $y_n \in N(x_n)$ leri göz önüne alalım.

$N(M) \subset M$ olduğu için $y_n \in K$ dır. K nın kompakt olmasından $(y_n) \subset K$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $(y_{n_i}) \subseteq (y_n)$ olmak üzere

$n \rightarrow \infty$ iken $y_{n_i} \rightarrow y$

olsun. K kapalı olduğundan $y \in K$ dır. $(x_n, y_n) \in graph N$ ve $graph N$ kapalı olduğu için $(x, y) \in graph N$ dir. Böylece $y \in N(x) \cap K$ yani $N(x) \cap K \neq \emptyset$ olup $x \in N^-(K)$ dır. $K \subset N^-(K)$ olur.

(d) $\widehat{N} : K \rightarrow P_{fc}(K)$

$$\widehat{N}(x) = N(x) \cap K$$

ile tanımlı dönüşümü göz önüne alalım.

4.2.2. Uyarı

N in tanımlanışından $N(x)$ konveks ve K konveks olduğu için $N(x) \cap K$ konveks olur. $N(x)$ kapalıdır. Gerçekten;

$graphN$ kapalı olduğu için N in kapalı olduğunu biliyoruz ve $\{x_0\}$ kompakt olduğundan Önerme 2.4 bize $N(x)$ in kapalı olduğunu garantiler. Ayrıca K da kapalı olduğu için $N(x) \cap K$ kapalıdır. Yani bu şekilde tanımlı bir dönüşüm anlamlıdır.

$K \neq \emptyset$, $K \subset N^-(K)$ olup $N^-(K) \neq \emptyset$ dır. Yani $N(x) \cap K \neq \emptyset$ olacak şekilde E nin en az bir x elemanı vardır. Dolayısıyla $\widehat{N}(K) \neq \emptyset$ dır. Ayrıca $graph\widehat{N}$ in tanımlanışından $graphN$ gibi kapalı olacağı açıktır. Gerçekten,

$((a_n, b_n)) \subset graph\widehat{N}$ de bir dizi ve $n \rightarrow \infty$ iken $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ olsun.

$\forall n$ için $b_n \in \widehat{N}(a_n) = N(a_n) \cap K$ olup $b_n \in N(a_n)$ ve $b_n \in K$ dır.

* $b_n \in N(a_n)$ ise

$(a_n, b_n) \in graphN$ ve $graphN$ kapalı olduğu için $n \rightarrow \infty$ iken $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$.

$(a, b) \in graphN$ yani $b \in N(a)$.

* $b_n \in K$ ise

$n \rightarrow \infty$ iken $b_n \rightarrow b$ ve K kapalı olduğu için $b \in K$ olur.

$b \in N(a)$ ve $b \in K \Rightarrow b \in N(a) \cap K = \widehat{N}(a)$

$\Rightarrow (a, b) \in graph\widehat{N}$.

Dolayısıyla $graph\widehat{N}$ kapalıdır. Ayrıca K kompakt olup Önerme 2.4 den $N(K)$ kapalıdır ve N in kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürme özelliğinden $N(K)$ kompakttır. $N(K) \cap K = \widehat{N}(K)$ kompakt olur.

(P1) den $graph\widehat{N}$ kapalı ve $\widehat{N}(K)$ kompakt olduğu için $\widehat{N}$ üstten yarı süreklidir.

$\widehat{N}$ için (P3) Bohnenblust-Karlin sabit nokta teoremi bize $x \in \widehat{N}(x)$ olacak şekilde bir $x \in K$ nin varlığını garantiler. Hatta $K \subset D$ ve $\widehat{N}(x) \subset N(x)$ olduğu için $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır.

4.2.2. Teorem

Bir X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi K ve U , K nin açık bir alt kümesi olmak üzere $N: \overline{U} \rightarrow P_c(K)$ bir dönüşüm olsun. $graph N$ kapalı, N kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştüren bir dönüşüm, en az bir $x_0 \in U$ ve

$$\left. \begin{aligned} M \subset \overline{U}, \quad M &= conv(\{x_0\} \cup N(M)) \\ \overline{C} = \overline{M}, \quad C &\subset M, \text{ sayılabilir} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

olacak şekilde $\overline{U}$ in her M alt kümesi için $\overline{M}$ kompakt ve

$$\text{her } x \in \overline{U} - U, \quad \lambda \in (0,1) \text{ için} \quad x \notin (1-\lambda)x_0 + \lambda N(x) \quad (4.3)$$

olsun. O zaman $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in \overline{U}$ vardır.

İspat

Her $\lambda \in [0,1]$ için Eş. 4.3 sağlansın.

* $\lambda = 1$ için Eş. 4.3 sağlanmazsa sonuç aşıkâr olur. Yani $\lambda = 1$ için $x \in N(x)$, $x \in \overline{U} - U$ olduğundan $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in \overline{U}$ vardır.

* $\lambda = 0$ için $x \neq x_0$ bulunur. Bu ise $x \in \overline{U} - U$ ve $x_0 \in U$ olduğu için doğru bir ifadedir.

Hatta $U \neq K$ olduğunu kabul edebiliriz. (Aksi taktirde, $U = K$ ise $N : K \rightarrow P_c(K)$ tanımlı bir dönüşüm olup sonuç, Teorem 4.2.1 den hemen görülebilir.)

$U \neq K$ ise $\partial U \neq \emptyset$ böylece $\overline{U} - U \neq \emptyset$ dir.

$$H : \overline{U} \times [0,1] \rightarrow P(K)$$

$$H(x, \lambda) = (1 - \lambda)x_0 + \lambda N(x)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. $\Sigma = \{x \in \overline{U} : x \in H(x, \lambda), \text{ en az bir } \lambda \in [0,1] \text{ için} \}$ kümesini göz önüne alalım. $\Sigma \neq \emptyset$ olduğunu görelim.

$\lambda = 0$ için $H(x, \lambda) = \{x_0\}$ olduğu için $x_0 \in \Sigma$ (hipotezden $x_0 \in U$) dir.

$\Sigma \cap (\overline{U} - U) = \emptyset$ olduğunu görelim.

Kabul edelim ki arakesit boştan farklı olsun. En az bir $y \in \Sigma \cap (\overline{U} - U)$ var olsun.

$$\begin{aligned} y \in \Sigma &\Rightarrow \exists \lambda \in [0,1] \text{ için } y \in H(y, \lambda) \\ &\Rightarrow y \in (1 - \lambda)x_0 + \lambda N(y) . \end{aligned}$$

$$y \in \overline{U} - U \Rightarrow \forall \lambda \in [0,1] \text{ için } y \notin (1 - \lambda)x_0 + \lambda N(y) .$$

Bu bir çelişkidir. O halde $\Sigma \cap (\overline{U} - U) = \emptyset$ dir.

Σ kümesi $\overline{U} - U$ kümesi gibi kapalıdır. Gerçekten,

$n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $(x_n) \subset \Sigma$ dizisini göz önüne alalım. $x \in \Sigma$ olduğunu görelim. O zaman

$x_n \in \Sigma \Rightarrow x_n \in H(x_n, \lambda_n)$ olacak şekilde $\lambda_n \in [0,1]$ vardır

$$\Rightarrow x_n \in (1 - \lambda_n)x_0 + \lambda_n N(x_n)$$

$$\Rightarrow x_n = (1 - \lambda_n)x_0 + \lambda_n y_n \text{ olacak şekilde } y_n \in N(x_n) \text{ vardır.} \quad (4.4)$$

$((x_n, y_n)) \subset graph N$ dir.

(λ_n) , $[0,1]$ de bir dizi ve $[0,1]$ kompakt olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır.

Kabul edebiliriz ki $(\lambda_{n_i}) \subseteq (\lambda_n)$ olmak üzere

$\lambda \in [0,1]$ için $n_i \rightarrow \infty$ iken $\lambda_{n_i} \rightarrow \lambda$.

İki durum mümkündür:

(1) $\lambda \neq 0$ olsun.

O zaman $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n_i \geq n_0$ için $\lambda_{n_i} \neq 0$ olduğundan

$$y_{n_i} = \lambda_{n_i}^{-1}(x - (1 - \lambda_{n_i})x_0)$$

yazabiliriz.

$$n_i \rightarrow \infty \text{ iken } \lambda_{n_i}^{-1}(x - (1 - \lambda_{n_i})x_0) \rightarrow \lambda^{-1}(x - (1 - \lambda)x_0)$$

ve

$y = \lambda^{-1}(x - (1 - \lambda)x_0)$ olarak tanımlanırsa, $graphN$ kapalı olduğu için

$$n_i \rightarrow \infty \text{ iken } (x_{n_i}, y_{n_i}) \rightarrow (x, y)$$

olup $(x, y) \in graphN$ olur. Bu ise $y \in N(x)$ olması demektir.

$$\begin{aligned} y = \lambda^{-1}(x - (1 - \lambda)x_0) \in N(x) &\Rightarrow x \in (1 - \lambda)x_0 + \lambda N(x) \\ &\Rightarrow x \in \Sigma. \end{aligned}$$

(2) $\lambda = 0$ olsun.

$A = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\} = \overline{\{x_n : n \geq 1\}}$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim.

$\{U_i : i \in I\}$, A nın açık bir örtüsü olsun.

$x \in A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow x \in U_{i_0}$ olacak şekilde $\exists U_{i_0} \in \{U_i : i \in I\}$ vardır.

$x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists n_0 \in N \ni \forall n \geq n_0$ için $x_n \in U_{i_0}$

$x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $x_3 \in U_3$, ..., $x_{n_0-1} \in U_{n_0-1}$, $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots \in U_{i_0}$

olarak alınırsa

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} U_i$$

olur. Böylece A nın açık bir örtüsünün sonlu bir alt örtüsünü bulmuş oluruz yani A kompakttır. A kompakt olduğu için N altındaki görüntüsü rölatif kompakt dolayısıyla sınırlıdır. Bu gösterir ki $\{y_n : n \geq 1\}$ kümesi sınırlıdır. O halde

$\{y_{n_i} : n_i \geq 1\} \subseteq \{y_n : n \geq 1\}$ alt kümesi de sınırlıdır. Şimdi analizden biliyoruz ki

$$\lambda_{n_i} \rightarrow 0 \text{ ve } (y_{n_i}) \text{ sınırlı} \Rightarrow \lambda_{n_i} y_{n_i} \rightarrow 0$$

dır.

Eş. 4.4 de $n_i \rightarrow \infty$ alınırsa, $x = x_0$ elde ederiz. Böylece $x \in \Sigma$ olur. İddia edildiği gibi Σ kümesi kapalıdır.

Urysohn Lemma dan

$$\theta : \overline{U} \rightarrow [0,1]$$

$$\overline{U} - U \text{ da } \theta(x) = 0 \text{ ve } \Sigma \text{ de } \theta(x) = 1$$

ile tanımlı sürekli bir θ fonksiyonu vardır.

$D = \overline{\text{conv}(\{x_0\} \cup N(\overline{U}))}$ kümesini tanımlayalım ve $\tilde{N} : D \rightarrow P_c(D)$ dönüşümü

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)N(x), & x \in D \cap U \\ \{x_0\}, & x \in D - U \end{cases}$$

ile tanımlansın.

4.2.3. Uyarı

$\tilde{N}(x) \subset D$ olduğunu görelim.

* $x \in D \cap U$ ise

$\tilde{N}(x) = (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)N(x)$ olur.

$x_0 \in D$ ve $N(x) \subset D$ ve D konveks olduğu için konveksliğin tanımı gereği

$0 \leq \theta(x) \leq 1$ için $(1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)N(x) \subset D$ olur.

* $x \in D - U$ ise

$\tilde{N}(x) = \{x_0\} \subset D$

O halde her iki durumdan $\tilde{N}(x) \subset D$ bulunur.

Ayrıca N konveks değerli olup $N(x)$ konveks ve $\{x_0\}$ konveks olup konveks bir kümenin skaler katları da konveks olacağı için $(1 - \theta(x))\{x_0\}$ ve $\theta(x)N(x)$ kümeleri de konvekstir. Konveks kümelerin toplamları da konveks olacağı için $(1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)N(x) = \tilde{N}(x)$ konveks olur. Yani bu şekilde tanımlı bir dönüşüm anlamlıdır.

$graph \tilde{N}$ kapalıdır. Gerçekten,

* $(x_n) \subset D \cap U$ olmak üzere

$y_n \in \widetilde{N}(x_n)$ leri göz önüne alalım. $\forall n$ için $y_n = (1 - \theta(x_n))x_0 + \theta(x_n)z_n$ olacak şekilde $\exists z_n \in N(x_n)$ vardır.

$n \rightarrow \infty$ iken $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ olsun.

$(z_n) \subset N(x_n)$ de bir dizi ve $N(x_n)$ kompakt olduğu için her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır dolayısıyla (z_n) in de yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $(z_{n_i}) \subseteq (z_n)$ olmak üzere

$n_i \rightarrow \infty$ iken $z_{n_i} \rightarrow z$

ve $z \in N(x_n)$ olsun.

$n_i \rightarrow \infty$ iken $(x_{n_i}, z_{n_i}) \rightarrow (x, z)$

ve $((x_{n_i}, z_{n_i}))$, $graphN$ de bir dizi ve $graphN$ kapalı olduğu için $(x, z) \in graphN$ olduğundan $z \in N(x)$ dir.

$n_i \rightarrow \infty$ iken $(1 - \theta(x_{n_i}))x_0 + \theta(x_{n_i})z_{n_i} \rightarrow (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)z$

yani $n_i \rightarrow \infty$ iken $y_{n_i} \rightarrow (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)z$ olur. $n_i \rightarrow \infty$ iken $y_{n_i} \rightarrow y$ olduğunu biliyoruz. Hausdorff uzayda dolayısıyla bir Banach uzayında bir dizinin limiti tek olduğundan $y = (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)z$ bulunur.

$y = (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)z \in (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)N(x) = \widetilde{N}(x)$

$(x, y) \in graph\widetilde{N}$ olur.

* $(x_n) \subset D - U$ olmak üzere

D kapalı U açık olduğundan $D - U$ kapalıdır. $(x_n) \subset D - U$ da bir dizi ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ise $x \in D - U$ olur. Bu da $\tilde{N}(x) = \{x_0\}$ olması demektir.

$y_n \in \tilde{N}(x_n)$ leri göz önüne alalım. $n \rightarrow \infty$ iken $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ olsun.

$y_n \in \tilde{N}(x_n) = \{x_0\}$ olup (y_n) sabit dizisi kendisine yani x_0 a yakınsar, $y = x_0$ dır. O halde $y \in \tilde{N}(x)$ bulunur. $(x, y) \in \text{graph} \tilde{N}$ olur.

Böylece her iki durumdan $\text{graph} \tilde{N}$ kapalıdır.

Ayrıca $\tilde{N}$ kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürür. Gerçekten; K her hangi bir kompakt küme olsun.

* $K \subset D - U$ ise

$\tilde{N}(K) = \{x_0\}$ olup kompaktır.

* $K \subset D \cap U$ ise

$$\tilde{N}(K) = (1 - \theta(K))x_0 + \theta(K)N(K)$$

θ nın tanımından $\theta(K) = 1$ olup $\tilde{N}(K) = N(K)$ olur. Önerme 2.4 ve N in özelliğinden K kompakt iken $N(K)$ kompakt olur. Böylece $\tilde{N}$ kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürür.

Şimdi $\tilde{N}$ nın Teorem 4.2.1 in hipotezlerini sağladığını gösterelim.

$$M \subset D \text{ ve } M = \text{conv}(\{x_0\} \cup \tilde{N}(M))$$

ve

$\overline{M} = \overline{C}$, $C \subset M$ sayılabilir bir alt küme olsun.

4.2.4. Uyarı

$$\tilde{N}(M) = \begin{cases} (1 - \theta(M)x_0 + \theta(M)N(M)) , & M \subset D \cap U \\ \{x_0\} & , \quad M \subset D - U \end{cases}$$

θ nın tanımlanışından $M \subset D \cap U$ olduğu için $\theta(M) = 1$ dir.

$$\begin{aligned} M \subset D \cap U &\Rightarrow M \cap U \subset (D \cap U) \cap U \\ &\Rightarrow M \cap U \subset D \cap U \end{aligned}$$

olup $\tilde{N}(M)$ nin tanımlanışında M yerine $M \cap U$ yazabiliriz.

$$\tilde{N}(M) = \{x_0\} \cup N(M \cap U) \text{ olur.}$$

O halde $\text{conv}(\{x_0\} \cup \tilde{N}(M)) = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M \cap U))$ dir.

Uyarı 4.2.4 den

$$M \cap U \subset M \subset \text{conv}(\{x_0\} \cup \tilde{N}(M)) = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M \cap U))$$

$$\tilde{N}(M) = \begin{cases} (1 - \theta(M \cap U))x_0 + \theta(M \cap U)N(M \cap U) , & M \cap U \subset D \cap U \\ \{x_0\} & , \quad M - U \subset D - U \end{cases}$$

$$\overline{M \cap U} = \overline{C \cap U} \text{ ve } C \cap U \subset M \cap U \quad \text{sayılabilir.} \quad (4.5)$$

Eş. 4.5 i göz önüne alırsak Teorem 4.2.1 in hipotezlerinden $M \cap U$ rölatif kompaktır. $graph N$ kapalı olduğu için N kapalı dönüşüm (yani $A \subset \bar{U}$ için $\overline{N(A)} \subset N(\bar{A})$ dir.) olup $\overline{N(M \cap U)} \subset N(\overline{M \cap U})$ dir. $\overline{M \cap U}$ kompakt ve N in özelliği ve Önerme 2.4 den $\overline{N(M \cap U)}$ kompakt bir kümedir.

$\overline{N(M \cap U)} \subset N(\overline{M \cap U})$ ve kompakt bir Hausdorff uzayında kapalı her alt küme kompakt olacağı için $\overline{N(M \cap U)}$ kompaktır.

O zaman $\overline{N(M \cap U)}$ kompakt , Mazur Lemma ve Eş. 4.5 den

$\{x_0\}$ kompakt ve $\overline{N(M \cap U)}$ kompakt $\Rightarrow \overline{\{x_0\} \cup N(M \cap U)}$ kompakt

$\Rightarrow \overline{conv(\{x_0\} \cup N(M \cap U))}$ kompakt,

$\overline{conv(\{x_0\} \cup N(M \cap U))} = \overline{conv(\{x_0\} \cup N(M \cap U))},$

$\bar{M} \subset \overline{conv(\{x_0\} \cup N(M \cap U))}.$

Yukarıdaki açıklamaları da göz önünde bulundurarak $\bar{M}$ kompakt bir küme olarak bulunur. Böylece $\tilde{N}$ dönüşümü için Teorem 4.2.1 in hipotezleri sağlanır. Teorem 4.2.1 den $x \in \tilde{N}(x)$ olacak şekilde $x \in D \subset \bar{U}$ vardır.

Hatta $x \in U$ dur. Çünkü aksi taktirde $x \in \tilde{N}(x) = \{x_0\}$ olup $x = x_0$ bulunur. Bu ise $x_0 \in U$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $x \in U$ ve sonuç olarak

$$x \in (1 - \theta(x))x_0 + \theta(x)N(x) \quad (4.6)$$

Eş. 4.6 dan $x \in \Sigma$ ve θ nın tanımlanışından $\theta(x) = 1$ dir.

O zaman Eş. 4.6 gösterir ki $x \in N(x)$ dir. N , $\bar{U}$ da bir sabit noktaya sahiptir.

4.2.3. Teorem

D , bir X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi ve $N : D \rightarrow P_c(D)$ bir dönüşüm olsun. N alttan yarı sürekli bir dönüşüm, en az bir $x_0 \in D$ ve

$$\left. \begin{aligned} M \subset D, \quad M &= \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M)) \\ \bar{C} = \bar{M}, \quad C \subset M, &\text{ sayılabilir} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

olacak şekilde D nin her M alt kümesi için $\bar{M}$ kompakt ise $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır [17].

İspat

Michael in Seçme teoremi N in sürekli bir N_0 seçiminin varlığını garanti eder. Buna göre $N_0 : D \rightarrow D$ sürekli ve $\forall x \in D$ için $N_0(x) \in N(x)$ dir.

Şimdi N_0 dönüşümünün Teorem 4.2.1 in koşullarını sağladığını göstereyim.

N_0 ı küme değerli bir dönüşüm gibi düşünmemizde bir sakınca yoktur. Buna göre kabul edelim ki $N_0 : D \rightarrow P_c(D)$ olsun. Gerçekten, $\forall x \in D$ için $N_0(x) = \{y\}$ olacak şekilde $y \in D$ vardır.

$\{N_0(x)\}$ konveks olup N_0 , D den $P_c(D)$ ye tanımlı olur.

$\text{graph} N_0$ ın kapalı olduğunu görelim.

$((x_n, y_n)) \subset graph N_0$ da bir dizi ve $n \rightarrow \infty$ iken $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ olsun.

$y_n \in N_0(x_n) = \{y_n\}$ olduğu için

$x_n \rightarrow x$ ve N_0 sürekli olduğu için $N_0(x_n) \rightarrow N_0(x)$ olur yani $y_n \rightarrow N_0(x)$ dir.

$y_n \rightarrow N_0(x)$ ve $y_n \rightarrow y$ olduğu için Hausdorff uzayda bir dizinin limiti tek olacağından $N_0(x) = \{y\}$ olmalıdır. O halde $(x, y) \in graph N_0$ dir. $graph N_0$ kapalıdır.

Ayrıca N_0 kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürür. Gerçekten , $\{x_0\}$ kompakt, $N(x_0)$ tek nokta kümesi olup kompaktır.

Kabul edelim ki

$M \subset D$, $M \subset conv(\{x_0\} \cup N_0(M))$ ve $\overline{C} = \overline{M}$, $C \subset M$ sayılabilir olsun. $N_0(M) \subset N(M)$ olduğundan $M \subset conv(\{x_0\} \cup N(M))$, yukarıdaki koşullar göz önüne alındığında Eş. 4.7 den $\overline{M}$ kompaktır. O halde N_0 a Teorem 4.2.1 i uygularsak, $x \in N_0(x)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır. Yani $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır.

4.2.4. Teorem

Bir X Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi K , U , K nın açık bir alt kümesi ve $N: \overline{U} \rightarrow P_{fc}(K)$ bir dönüşüm olsun. N alttan yarı sürekli bir dönüşüm ve en az bir $x_0 \in U$ için Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 sağlansın. O zaman $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in \overline{U}$ vardır [17].

İspat

Michael in Seçme teoremi N in sürekli bir N_0 seçiminin varlığını garanti eder. Buna göre $N_0 : \bar{U} \rightarrow K$ sürekli ve $\forall x \in \bar{U}$ için $N_0(x) \in N(x)$ dir.

Şimdi N_0 ın Teorem 4.2.2 nin koşullarını sağladığını gösterelim. Kabul edelim ki $N_0 : \bar{U} \rightarrow P_{fc}(K)$ olsun. Gerçekten, $\forall x \in \bar{U}$ için $N_0(x)$ tek nokta kümesi olup kapalı ve konvektir. O halde N_0 ı K nın kapalı, konveks kümelerine tanımlı küme değerli bir dönüşüm gibi düşünmemizde bir sakınca yoktur.

Teorem 4.2.3. den de görüleceği gibi $graph N_0$ kapalı ve kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürür.

$M \subset D$, $M \subset conv(\{x_0\} \cup N_0(M))$ ve $\bar{C} = \bar{M}$, $C \subset M$ sayılabilir olduğunu kabul edelim. $N_0(M) \subset N(M)$ olduğundan $M \subset conv(\{x_0\} \cup N(M))$ ve Eş. 4.2 den $\bar{M}$ kompakttır.

Ayrıca $\forall x \in \bar{U}$ için $N_0(x) \in N(x)$ olmasından $x \in \bar{U} - U$ için de $N_0(x) \in N(x)$ olur ve

her $x \in \bar{U} - U$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $x \notin (1-\lambda)x_0 + \lambda N_0(x)$

yazabiliriz. Teoremin hipotezlerinden N_0 için Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 sağlanır. Yani

$$\left. \begin{array}{l} M \subset \bar{U} , \quad M = conv(\{x_0\} \cup N(M)) \\ \bar{C} = \bar{M} , \quad C \subset M, \text{ sayılabilir} \end{array} \right\}$$

olacak şekildeki D nin her M alt kümesi için $\overline{M}$ kompakt ve

her $x \in \overline{U} - U$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $x \notin (1-\lambda)x_0 + \lambda N_0(x)$

olur. Böylece N_0 a Teorem 4.2.2 yi uygulayabiliriz. Buna göre $x \in N_0(x)$ olacak şekilde $x \in \overline{U}$ vardır. $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in D$ vardır.

4.2.5. Uyarı (X üzerinde tanımlı iki norm varsa)

X , üzerindeki $\|\cdot\|$ normuna göre Banach uzayı ve üzerindeki diğer norm $\|\cdot\|'$ a göre tam uzay olmak zorunda olmasın.

Her $x \in X$ için $\|x\|' \leq c\|x\|$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabitinin var olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 4.2.1-4.2.4 deki sonuçlar eğer Eş. 4.2.1, Eş. 4.2.2 koşullarında yer alan M nin rölatif kompakt olma şartı $\|\cdot\|'$ normundan indirgenen topolojiye göre de sağlanıyorsa doğrudur. Hatta X üzerindeki $\|\cdot\|$ -topolojisi ve $D(N)$ (N in tanım kümesi) üzerindeki $\|\cdot\|'$ -topolojisi ile ilgili olarak bilinen $N : D(N) \rightarrow P(X)$ in bütün topolojik özellikleri sağlanır. Gerçekten, eğer N in grafiği $(\|\cdot\|', \|\cdot\|)$ -kapalı ise o zaman $(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$ -kapalı; eğer N , $\|\cdot\|'$ -kompakt kümeleri $\|\cdot\|$ -rölatif kompakt kümelere dönüştürüyorsa o zaman $\|\cdot\|$ -kompakt kümeleri de $\|\cdot\|$ -rölatif kompakt kümelere dönüştürür; eğer N , $(\|\cdot\|', \|\cdot\|)$ -üstten (alttan) yarı sürekli ise o zaman N , $(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$ -üstten (alttan) yarı sürekli dir.

4.3. Hammerstein ve Volterra İntegral İçermeleri İçin Varlık Teoremleri

Bu kısımda Mönch ün küme değerli teoremlerini Hammerstein ve Volterra integral içermelerine uygulayacağız.

Bu kesimde bir $(E, |\cdot|)$ Banach uzayı yuvarında

$$u(t) \in \int_0^T k(t,s)g(s,u(s))ds \quad , \quad t \in [0,T] \quad (4.8)$$

Hammerstein integral içermesini çalışacağız. Burada k reel tek değerli bir fonksiyon ve g, E de konveks değer alan küme değerli bir dönüşümdür. Özel olarak, eğer

$$k(t,s) = 0 \quad 0 \leq t < s \leq T$$

(Volterra durumu) ise, Eş. 4.8

$$u(t) \in \int_0^t k(t,s)g(s,u(s))ds \quad , \quad t \in [0,T] \quad (4.9)$$

Volterra integral içermesi olur. Böylece Eş. 4.8 in varlık teoremi otomatik olarak Eş. 4.9 un varlığı sonucunu sağlar. Bununla birlikte Eş. 4.8 için yapılan bazı kabuller farklı bir yolla veya ispatla Eş. 4.9 için ifade edilebilir.

$0 < T < \infty$, $0 < R < \infty$ olsun ve $\{x \in E : |x| \leq R\}$ kapalı yuvarını B ile gösterelim. En az bir $p \in (1, \infty]$ ve her bir $t \in [0, T]$ için

$$k(t, \cdot) \in L^p[0, T] \text{ olacak şekilde bir } k : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.10)$$

dönüşümü var ve $g : [0, T] \times B \rightarrow P(E)$ şeklinde bir dönüşüm olsun. Eş. 4.8 in bir

çözümü ile şunu kastediyoruz:

h.h. $s \in [0, T]$ için $w(s) \in g(s, u(s))$ olmak üzere $w \in L^q([0, T], E)$ ve $t \in [0, T]$ için

$$u(t) = \int_0^t k(t, s)w(s)ds$$

olacak şekilde $u \in C([0, T], B)$ dir.

Bu çalışma boyunca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğunu kabul edeceğiz.

$U = \{u \in C([0, T], E) : \|u\|_0 < R\}$ şeklinde tanımlansın. $\bar{U} = C([0, T], B)$ olduğu açık.

g nin yardımıyla ve $q \in [1, \infty)$ için küme değerli G_q operatörü (Nemitsky operatörü)

$$G_q : \bar{U} \rightarrow 2^{L^q([0, T], E)}$$

$$G_q(u) = \{w \in L^q([0, T], E) : \text{h.h. } s \in [0, T] \text{ için } w(s) \in g(s, u(s))\}$$

ile tanımlansın. Eş. 4.10 a ek olarak

$$t' \rightarrow t \text{ iken } \|k(t, \cdot) - k(t', \cdot)\|_p \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

olduğunu kabul edelim.

$$J_q : L^q([0, T], E) \rightarrow C([0, T], E)$$

$$J_q(w)(t) = \int_0^t k(t, s)w(s)ds \quad t \in [0, T]$$

olacak şekilde lineer bir J_q operatörü tanımlayabiliriz. Şimdi Eş. 4.8 in çözümleri

$$N: \overline{U} \rightarrow 2^{C([0,T],E)} \quad , \quad N = J_q \circ G_q$$

ile tanımlı küme değerli N operatörünün sabit noktaları olarak görünmektedir.

Teorem 4.2.2 aşağıdaki üstten yarı sürekli tipteki Hammerstein integral içermeleri için oldukça genel varlık kriterlerini sağlar.

4.3.1. Teorem

Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 sağlansın. Ayrıca

$$(H1) \quad N: \overline{U} \rightarrow P_c(C([0,T],E))$$

N grafiği kapalı, kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştüren bir dönüşüm,

(H2)

$$\left. \begin{aligned} M &\subset \overline{U} \quad , \quad M = \text{conv}(\{x_0\} \cup N(M)) \\ \overline{C} &= \overline{M} \quad , \quad C \subset M, \text{ sayılabilir} \end{aligned} \right\}$$

olacak şekildeki $\overline{U}$ ın her M alt kümesi için $\overline{M}$ kompakt

$$(H3) \quad |u|_0 = R \text{ olacak şekildeki } \forall u \in \overline{U} \text{ ve } \forall \lambda \in (0,1) \text{ için } u \notin \lambda N(u),$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim. O zaman Eş. 4.8 , $C([0,T],B)$ de bir çözüme sahiptir [17].

İspat

$X = C([0, T], E)$ ve üzerindeki $|\cdot|_0$ normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. $K = X = C([0, T], E)$, $x_0 = 0$, $\bar{U} = C([0, T], B)$ alınarak Teorem 4.2.2 yi uyguladığımız da (H1), (H2), (H3) koşulları teoremin hipotezlerini sağlar. O halde $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in C([0, T], B)$ vardır. Yani x , Eş. 4.8 in $C([0, T], B)$ de bir çözümüdür.

4.3.1. Uyarı

$N(\bar{U}) \subset \bar{U}$ ise o zaman (H3) ün sağlandığı aşıkardır. Gerçekten, $\forall u \in \bar{U}$ için $N(u) \subset \bar{U}$. Yani $|u|_0 = R$ olacak şekildeki $u \in \bar{U}$ için de $N(u) \subset \bar{U}$ olur. Kabul edelim ki (H3) koşulu sağlanmasın. O zaman $|u|_0 = R$ olacak şekilde en az bir $u \in \bar{U}$ ve en az bir $\lambda \in (0, 1)$ için $u \in \lambda N(u)$ olsun. $u \in \lambda \bar{U}$ olur fakat $\lambda < 1$ ve burada u , $|u|_0 = R$ olacak şekilde $u \in \bar{U}$ olduğundan $u \in \lambda \bar{U}$ olması u nun seçimi ile çelişir. O halde (H3) sağlanır.

Uygulanabilir varlık kriterleri elde etmek için (H1)-(H3) için gerekli şartları bulmak zorundayız.

4.3.2. Önerme

Eş. 4. ve Eş. 4.3.4 sağlansın. Eğer $g : [0, T] \times B \rightarrow P_{kc}(E)$ L^q -sınıfından ise o zaman N , (H1) koşulunu sağlar [17].

İspat

(a) Her bir $u \in \bar{U}$ için $N(u) \neq \emptyset$ dir. Gerçekten, g nin tanımından boştan farklı ve kompakt değer aldığı , ayrıca Tanım 2.22. deki (i) ve (ii) koşullarını sağladığı

açıktır. Her bir $u \in C([0, T], B)$ için $g(., u(.))$ nin kuvvetli ölçülebilir bir w seçimi vardır (Önerme 3.5.a)[5].

$h.h.s \in [0, T]$ için $w(s) \in g(s, u(s))$, $w: [0, T] \rightarrow E$ kuvvetli ölçülebilirdir.

Buna göre Tanım 2.23 bize $w \in L^q([0, T], E)$ olduğunu garantiler. Gerçekten, g, L^q - Carathéodory dönüşümü olduğu için Tanım 2.23 den

$|u|_0 \leq r$ olacak şekilde her $u \in C([0, T], B)$ ve $h.h.s \in [0, T]$ için $|g(s, u(s))| \leq h_r(s)$ olacak şekilde $h_r \in L^q[0, T]$ vardır.

$$h_r \in L^q[0, T] \text{ ise } \left(\int_0^T |h_r(s)|^q ds \right)^{1/q} < \infty \text{ dir.}$$

$h.h.s \in [0, T]$ için $w(s) \in g(s, u(s))$ ve $|g(s, u(s))| \leq h_r(s)$ olduğundan $w(s) \leq h_r(s)$

dolayısıyla $\left(\int_0^T |w(s)|^q ds \right)^{1/q} < \infty$ olup $w \in L^q([0, T], E)$ dir.

O zaman $v = J_q(w) \in N(u)$ ($N = J_q \circ G_q$) $N(u) \neq \emptyset$ dir.

(b) $N(u)$ konvektir. Gerçekten, $v, v_1 \in N(u)$, $\lambda \in (0, 1)$ olsun.

$h.h.s \in [0, T]$ için $w(s), w_1(s) \in g(s, u(s))$ ve $w, w_1 \in L^q([0, T], E)$ olmak üzere $v = J_q(w)$ ve $v_1 = J_q(w_1)$ olur.

$$\lambda v + (1 - \lambda)v_1 = \lambda J_q(w) + (1 - \lambda)J_q(w_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_0^T k(t, s) w(s) ds + (1 - \lambda) \int_0^T k(t, s) w_1(s) ds \\
&= \int_0^T k(t, s) (\lambda w(s) + (1 - \lambda) w_1(s)) ds
\end{aligned}$$

g konveks değer aldığı için $g(s, u(s))$ konveks dolayısıyla

$$\lambda w(s) + (1 - \lambda) w_1(s) \in g(s, u(s))$$

olduğundan

$\lambda w(s) + (1 - \lambda) w_1(s) = w_0(s)$ olacak şekilde $w_0(s) \in g(s, u(s))$ vardır.

$$\int_0^T k(t, s) w_0(s) ds = J_q(w_0) = v_0 \in N(u)$$

$\lambda v + (1 - \lambda) v_1 = v_0 \in N(u)$ olur. O halde $N(u)$ konvektir.

(c) $graphN$ kapalıdır. Gerçekten,

$((u_n, v_n)) \subset graphN$ de bir dizi ve

$n \rightarrow \infty$ iken $|u_n - u|_0 \rightarrow 0$ ve $|v_n - v|_0 \rightarrow 0$ olsun.

$v_n \in N(u_n) \Rightarrow$ h.h.s $\in [0, T]$ için $w_n(s) \in g(s, u_n(s))$ olacak şekilde

$$w_n \in L^q([0, T], E) \text{ var ve } v_n = J_q(w_n) \text{ dir.} \quad (4.12)$$

(w_n) dizisi L^q -zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir [17]. Bu dizinin limiti w olsun.

$g(s, u(s))$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olduğu için (P1) den $graphg$ kapalıdır. O

halde $h.h.s \in [0, T]$ için $w(s) \in g(s, u(s))$ olur. Hatta Eş. 4.12 den $v = J_q(w)$ olduğu sonucuna ulaşabiliriz. Bu ise $v \in N(u)$ olması demektir.

$(u, v) \in graph N$ dir. Böylece $graph N$ kapalıdır.

(d) N kompakt kümeleri rölatif kompakt kümelere dönüştürür. Yani her bir $M \subset \overline{U}$ kompakt kümesi için $N(M)$ nin rölatif kompakt olduğunu görmeliyiz.

Önerme 2.4 den $N(M)$ kümesinin kapalı olduğunu biliyoruz. Bolzano Weierstrass teoreminden $N(M)$ kümesinin kompakt olması için $N(M)$ nin dizisel kompakt olduğunu görmek yeterlidir. (Bir topolojik uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa dizisel kompakt diyorduk.)

Buna göre herhangi bir $M \subset \overline{U}$ kompakt kümesini ve $N(M)$ de herhangi bir (v_n) dizisini alalım. (v_n) in yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu görelim. Bunun için de $\{v_n : n \geq 1\}$ in rölatif kompakt olduğunu görmeliyiz.

$C([0, T], E)$ de Ascoli-Arzela kompaktlık kriterini kullanalım.

$v_n \in N(M) \Rightarrow h.h.s \in [0, T]$ için , $w_n(s) \in g(s, u_n(s))$ olacak şekilde $u_n \in M$ ve

$$w_n \in L^q([0, T], E) \text{ var ve } v_n = J_q(w_n) \text{ olur}$$

Önerme 3.2.1(b) yi kullanarak

$$\alpha(\{v_n(t) : n \geq 1\}) = \alpha(\{ \int_0^T k(t, s) w_n(s) ds : n \geq 1\}) \leq 2 \int_0^T \alpha(\{k(t, s) w_n(s) : n \geq 1\}) ds \quad (4.13)$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. Diğer taraftan $g(s, \cdot)$ üsttenyarı sürekli olduğu için kompakt değer alır ve $M(s)$, E de kompakt bir küme olduğu için $g(s, M(s))$ kümesi

kompakttır. Sonuç olarak,

$$h.h.s \in [0, T] \text{ için } \alpha(\{w_n(s) : n \geq 1\}) = 0.$$

Ayrıca

$$h.h.s \in [0, T] \text{ için } \alpha(\{k(t, s)w_n(s) : n \geq 1\}) = |k(t, s)|\alpha(\{w_n(s) : n \geq 1\}).$$

Eş. 4.13 bize gösterir ki

$\alpha(\{v_n(s) : n \geq 1\}) = 0$ yani her bir $t \in [0, T]$ için $\{v_n(t) : n \geq 1\}$ kümesi E de rölatif kompakttır.

Ek olarak

$$|v_n(t) - v_n(t')| \leq |k(t, \cdot) - k(t', \cdot)|_p |w_n|_q \leq |k(t, \cdot) - k(t', \cdot)|_p |h|_q \quad (4.14)$$

burada $h.h.s \in [0, T]$ ve her $x \in B$ için $|g(s, x)| \leq h(s)$ olmak üzere $h \in L^q[0, T]$ dir.

Eş. 4.11 ve Eş. 4.12 den

$t \rightarrow t'$ iken $|v_n(t) - v_n(t')| \rightarrow 0$. Yani $\{v_n : n \geq 1\}$ eş süreklidir. Sonuç olarak Teorem 2.7 den $\{v_n : n \geq 1\} \subset C([0, T], E)$ de rölatif kompakttır. Bu ise $N(M)$ nin rölatif kompakt olması demektir. Böylece N , (H1) i sağlar.

4.3.2. Uyarı

(H1) i sağlamak için diğer bir yol küme değerli G_q Nemitsky operatörünün L^p topolojisinden L^q topolojisine üstten yarı sürekli olma şartını koymaktır. Ve sonra

Uyarı 4.2.5 i kullanırız. Burada $\|\cdot\|_p \leq c\|\cdot\|_0$ dir.

L^p den L^q ya küme değerli Nemitsky operatörünün üstten yarı sürekliliği ile ilgili sonuçlar için şu kaynaklara bakılabilir [9-10].

4.3.3. Önerme

Eş. 4.3.3 ve Eş. 4.3.4 sağlansın. $g:[0,T] \times B \rightarrow P(E)$ dönüşümü, $h.h.s \in [0,T]$, her $x \in B$ ve en az bir $h \in L^q[0,T]$ için

$$|g(s,x)| \leq h(s) \quad (4.15)$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca

$h.h.s \in [0,T]$ ve her $M \subset B$ için

$$\alpha(g(s,M)) \leq w(s,\alpha(M)) \quad (4.16)$$

olacak şekilde bir $w:[0,T] \times [0,2R] \rightarrow \mathbb{R}_+$ L^q - Carathéodory dönüşümü var ve

$$\varphi(t) \leq 2 \int_0^t k(t,s) |w(s,\varphi(s))| ds \quad t \in [0,T] \quad (4.17)$$

eşitsizliğinin bir tek $\varphi \in C([0,T],[0,2R])$ çözümünün $\varphi \equiv 0$ olduğunu kabul edelim.

O zaman N , (H2) yi sağlar [17].

İspat

$M \subset \bar{U}$ alt kümesi için $M \subset \text{conv}(\{0\} \cup N(M))$ ve sayılabilir bir $C \subset M$ alt kümesi

için $\overline{C} = \overline{M}$ olduğunu kabul edelim. $\overline{M}$ kümesinin kompakt olduğunu görmek için $C([0, T], E)$ de Ascoli-Arzela kompaktlık kriterini uygulayalım.

$\forall v \in N(M)$ için

$v \in N(M) \Rightarrow h.h.s \in [0, T]$ için $w(s) \in g(s, u(s))$ olacak şekilde $u \in M$ ve $w \in L^q([0, T], E)$ var ve $v = J_q(w)$ olur.

Eş. 4.15 i kullanarak

$$|v(t) - v(t')| \leq |k(t, \cdot) - k(t', \cdot)|_p |w|_q \leq |k(t, \cdot) - k(t', \cdot)|_p |h|_q$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Eş. 4.11 i kullanarak

$$t \rightarrow t' \Rightarrow |v(t) - v(t')| \rightarrow 0$$

olur, $N(M)$ eşsüreklî dönüşümdür. O zaman $M \subset \text{conv}(\{0\} \cup N(M))$ olmasından M nin de eşsüreklî olduğu sonucuna varabiliriz.

Şimdi her bir $t \in [0, T]$ için $M(t)$ nin E de rölatif kompakt olduğunu görelim.

$C \subset M \subset \text{conv}(\{0\} \cup N(M))$ ve C sayılabilir olduğu için $C \subset \text{conv}(\{0\} \cup V)$ olacak şekilde sayılabilir bir $V = \{v_n : n \geq 1\} \subset N(M)$ kümesini bulabiliriz.

O zaman $v_n \in N(M)$ ise $h.h.s \in [0, T]$ için , $w_n(s) \in g(s, u_n(s))$ olacak şekilde $u_n \in M$ ve $w_n \in L^q([0, T], E)$ var ve $v_n = J_q(w_n)$ dir.

$M \subset \overline{C} \subset \overline{\text{conv}(\{0\} \cup V)}$ olduğundan Önerme 3.2.1 (b) den

$$\begin{aligned}
\alpha(M(t)) &\leq \alpha(\overline{C}(t)) \\
&\leq \alpha(V(t)) \\
&= \alpha(\{J_q(w_n(t)) : n \geq 1\}) \\
&= \alpha(\{\int_0^T k(t,s)w_n(s)ds : n \geq 1\}) \\
&\leq 2 \int_0^T \alpha(\{k(t,s)w_n(s) : n \geq 1\})ds
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi $w_n(s) \in g(s, u_n(s))$ ve $u_n \in M$ olduğu için Eş. 4.16

$$\begin{aligned}
\alpha(\{k(t,s)w_n(s) : n \geq 1\}) &\leq |k(t,s)|\alpha(g(s, M(s))) \\
&\leq |k(t,s)|w(s, \alpha(M(s)))
\end{aligned}$$

olduğunu garantiler. Bu da bize

$$\alpha(M(t)) \leq 2 \int_0^T |k(t,s)|w(s, \alpha(M(s)))ds \quad t \in [0, T] \quad (4.18)$$

olmasını garantiler. Hatta $\varphi(t) = \alpha(M(t))$ şeklinde tanımlı φ fonksiyonu $C([0, T], [0, 2R])$ ye aittir. Çünkü $\forall x \in M$ için $|x(t)| \leq R \leq 2R$ dir. O halde

$$\alpha(M(t)) \leq 2R$$

dir. Ayrıca Önerme 2.3 den φ , $[0, T]$ üzerinde süreklidir. Sonuç olarak teoremin kabullerine göre $\varphi \equiv 0$ dır. Bu ise her $t \in [0, T]$ için $\alpha(M(t)) = 0$ olması demektir. Teorem 2.7 den M , $C([0, T], E)$ de rölatif kompakttır.

4.3.3. Uyarı

Volterra durumunda Eş. 4.17 eşitsizliği

$$t \in [0, T] \text{ için } \varphi(t) \leq 2 \int_0^t |k(t, s)| w(s, \varphi(s)) ds$$

olur.

4.3.4. Önerme

Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 sağlansın. Ayrıca her $t \in [0, T]$ için $|k(t, \cdot)|_p \leq 1$,

$g : [0, T] \times B \rightarrow P(E)$ bir dönüşüm olsun. $h, s \in [0, T]$ ve her $x \in B - \{0\}$ için,

$$|g(s, x)| \leq \delta(s) \psi(|x|)$$

olacak şekilde bir $\delta \in L^q[0, T]$ dönüşümü, sürekli ve azalmayan bir $\psi : (0, R] \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu var olsun.

(a) Eğer

$$|\delta|_q \leq R / \psi(R) \tag{4.19}$$

ise o zaman $N(\overline{U}) \subset \overline{U}$ olmak üzere N , (H3) ü sağlar.

(b) Volterra durumunda

$$|\delta|_q^q \leq q \int_0^R \left(r^{q-1} / \psi(r)^q \right) dr \tag{4.20}$$

ise, o zaman N , (H3) ü sağlar [17].

İspat

(a) $u \in \overline{U}$ olmak üzere $v \in N(u)$ olsun. O zaman $v = J_q(w)$ olmak üzere $h.h.s \in [0, T]$ için, $w(s) \in g(s, u(s))$ olacak şekilde $w \in L^q([0, T], E)$ vardır.

$|u(s)| \leq R$, ψ azalmayan ve $|k(t, \cdot)|_p \leq 1$ olduğu için Hölder eşitsizliğini de kullanarak

$$\begin{aligned}
 |v(t)| &\leq \int_0^t |k(t, s)| |w(s)| ds \\
 &\leq \int_0^t |k(t, s)| \delta(s) \psi(|u(s)|) ds \\
 &\leq \psi(R) \int_0^t |k(t, s)| \delta(s) ds \\
 &\leq \psi(R) \left(\int_0^t |k(t, s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^t |\delta(s)|^q ds \right)^{1/q} \\
 &\leq \psi(R) |k(t, \cdot)|_p |\delta|_q \\
 &\leq \psi(R) |\delta|_q
 \end{aligned}$$

elde ederiz. $(\psi(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t))$ Eş. 4.19 ile birlikte düşünülecek olursa her $t \in [0, T]$

için $|v(t)| \leq R$ olur. Dolayısıyla $v \in \overline{U}$ bulunur. $N(\overline{U}) \subset \overline{U}$ olduğundan N , (H3) koşulunu sağlar.

(b) Volterra durumu sağlansın. En az bir $\lambda \in (0, 1)$ için $u \in \lambda N(u)$ olsun. O zaman Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \lambda \int_0^t |k(t,s)| \delta(s) \psi(|u(s)|) ds \\
&\leq \lambda \left(\int_0^t |k(t,s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^t [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q} \\
&\leq \lambda |k(t, \cdot)|_p \left(\int_0^t [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q} \\
&\leq \lambda \left(\int_0^t [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde ederiz. Her $t \in [0, T]$ için

$$c(t) = \min \left\{ R, \lambda \left(\int_0^t [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q} \right\}$$

olsun. Açıkthat ki c azalmayandır. Gerçekten, $t_1 < t_2$ iken $c(t_1) \leq c(t_2)$ olduğunu görelim.

* $c(t_1) = R$ ise

$$R < \lambda \left(\int_0^{t_1} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q}$$

olur. Ayrıca

$$\int_0^{t_1} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds < \int_0^{t_2} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds$$

olup

$$R < \lambda \left(\int_0^{t_2} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q}$$

olur ki bu da $c(t_2) = R$ olması demektir. Yani $c(t_1) = c(t_2)$ bulunur.

$$* \quad c(t_1) = \lambda \left(\int_0^{t_1} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q} \quad \text{ise}$$

$$\lambda \left(\int_0^{t_1} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q} < R$$

dir. Ayrıca

$$\int_0^{t_1} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds < \int_0^{t_2} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds$$

Olduğundan

$$c(t_2) = R \quad \text{veya} \quad c(t_2) = \lambda \left(\int_0^{t_2} [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q ds \right)^{1/q}$$

olur. Her iki durumda da $c(t_1) \leq c(t_2)$ bulunur.

İddia ediyoruz ki $c(T) < R$ dir. Kabul edelim ki aksi sağlansın. O zaman $c(0) = 0$ olduğu için (a, b) üzerinde $c(a) = 0$, $c(b) = R$ ve $0 < c(t) < R$ olmak üzere bir $[a, b] \subset [0, T]$ alt aralığı vardır. Eş. 4.21 den $[a, b]$ üzerinde $|u(t)| \leq c(t) \leq R$ ve ψ azalmayan olduğu için

$$h.h.s \in [a, b] \text{ için } (c(s)^q)' = \lambda^q [\delta(s) \psi(|u(s)|)]^q \leq \lambda^q \delta(s)^q \psi(c(s))^q$$

dir.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(c(s)^q)'}{\psi(c(s))^q} ds &= q \int_0^R \frac{r^{q-1}}{\psi(r)^q} dr \\ &\leq \lambda^q \int_a^b \delta(s)^q ds \\ &\leq \lambda^q |\delta|_q^q \\ &\leq |\delta|_q^q \end{aligned}$$

(integralde $c(s) = r$ değişken değiştirmesi yapılmıştır) Bu ise Eş. 4.20 ile çelişir. Dikkat edilirse son eşitsizlikten $|\delta|_q > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü aksi taktirde ispatımız tamamlanmaz.

4.3.4. Uyarı

Eş. 4.20 şartı Eş. 4.19 şartından daha hafifleticidir. Gerçekten, ψ azalmayan olduğu için her $r \in [0, R]$ için $\psi(r) \leq \psi(R)$ yazabiliriz. Sonuç olarak

$$q \int_0^R \left(\frac{r^{q-1}}{\psi(r)^q} \right) dr \geq q \left(\frac{1}{\psi(R)^q} \right) \int_0^R r^{q-1} dr = \left(\frac{R}{\psi(R)} \right)^q$$

bu da bizim iddiamızı destekler.

Şimdi Teorem 4.3.1 ve Önerme 4.3.2-4.3.4 e göre Eş. 4.8 için esas varlık sonucumuzu ifade edebiliriz.

4.3.5. Teorem

$k:[0,T]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm ve en az bir $q \in [1, \infty)$ için $g:[0,T] \times B \rightarrow P_{kc}(E)$ bir L^q -Carathéodory dönüşümü olsun. Kabul edelim ki

(A) $k(t, \cdot) \in L^p[0,T]$, her bir $t \in [0,T]$ için $|k(t, \cdot)|_p \leq 1$ ve

$$t' \rightarrow t \text{ iken } |k(t, \cdot) - k(t', \cdot)|_p \rightarrow 0 \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

(B) $h.h.s \in [0,T]$, her $M \subset B$ için

$$\alpha(g(s, M)) \leq w(s, \alpha(M)) \quad (4.22)$$

olacak şekilde bir $w:[0,T] \times [0, 2R] \rightarrow \mathbb{R}_+$ L^q -Carathéodory dönüşümü var ve

$$\varphi(t) \leq 2 \int_0^t |k(t, s)| w(s, \varphi(s)) ds \quad t \in [0, T] \quad (4.23)$$

eşitsizliğinin $C([0, T], [0, 2R])$ de bir tek çözümü $\varphi \equiv 0$,

(C) $h.h.s \in [0, T]$, $x \in B - \{0\}$ için

$$|g(s, x)| \leq \delta(s) \psi(|x|) \quad (4.24)$$

ve

$$|\delta|_q \leq \frac{R}{\psi(R)} \quad (4.25)$$

olacak şekilde bir $\delta \in L^q[0, T]$ dönüşümü ve sürekli ve azalmayan bir $\psi : (0, R] \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu var,

olsun. O zaman Eş. 4.8, $C([0, T], B)$ de bir çözüme sahiptir [17].

Volterra durumu için de teoremi şöyle ifade edebiliriz.

4.3.6. Teorem

Kabul edelim ki Volterra durumu sağlansın. Teorem 4.3.5 deki bütün kabuller Eş. 4.25 hariç sağlansın, bunun yerine şu koşulun sağlandığını kabul edelim.

$$|\delta|_q^q \leq q \int_0^R \left(\frac{r^{q-1}}{\psi(r)^q} \right) dr \quad . \quad (4.26)$$

O zaman Eş. 4.9, $C([0, T], B)$ de bir çözüme sahiptir.

Altan yarı sürekli tipteki fonksiyonlarda genel varlık kriteri için şu sonuca varabiliriz.

4.3.7. Teorem

Eş. 4.9 ve Eş. 4.10 sağlansın. Ayrıca

(h1) $N : \overline{U} \rightarrow P_{fc}(C([0, T], E))$ alttan yarı sürekli,

(h2)

$$\left. \begin{array}{l} M \subset \overline{U} \ , \quad M \subset \text{conv}(\{0\} \cup N(M)) \\ \overline{C} = \overline{M} \ , \quad C \subset M, \text{ sayılabilir} \end{array} \right\}$$

olacak şekildeki $\overline{U}$ in her M alt kümesi için $\overline{M}$ kompakt

(h3) $|u|_0 = R$ olacak şekildeki her $u \in \overline{U}$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $u \notin \lambda N(u)$,

koşullarının sağlandığını kabul edelim. O zaman Eş. 4.8, $C([0,T], B)$ de bir çözüme sahiptir [17].

İspat

$X = C([0,T], E)$ üzerindeki $|\cdot|_0$ normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

$K = X = C([0,T], E)$, $x_0 = 0$, $\overline{U} = C([0,T], B)$ alınarak Teorem 4.2.4 ü uyguladığımız da (h1), (h2), (h3) koşulları teoremin hipotezlerini sağlar. O halde $x \in N(x)$ olacak şekilde $x \in C([0,T], B)$ vardır. Yani x , Eş. 4.8 in $C([0,T], B)$ de bir çözümüdür.

4.3.5. Uyarı

L^p den L^q ya tanımlı G_q Nemitsky operatörü için alttan yarı süreklilik sonuçlarını kullanarak (h1) i garanti edebiliriz. Bu sonuçlar için şu kaynaklara bakılabilir [11-12].

5. CHANDRABHAN TİPİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Şimdiye kadar Mönch tipi tek ve küme değerli sabit nokta teoremlerinden bahsettik ve bunları Hammerstein ve Volterra integral içermelerinin varlık kriterlerini oluşturmada kullandık. Ayrıca Mönch ün Schauder, Darbo ve Sadovskii nin sabit nokta teoremlerinin bir genelleştirilmişini sunduğunu belirtmiştik. Şimdi ise Mönch ün de bir genelleştirilmiş olan yeni bir dönüşüm tipi, Chandrabhan dönüşümler sınıfından bahsedeceğiz. Birinci kısımda bu bölümde kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer vereceğiz. İkinci kısımda Leray-Schauder tipi bir sabit nokta teoremini ve bununla ilgili sonuçları ifade ve ispat edeceğiz.

5.1. Tanımlar ve Teoremler

Bu kesimde yaralanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri ifade edelim.

5.1.1. Tanım

X bir Banach uzayı ve $T: X \rightarrow P_f(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. A , X in sayılabilir her hangi bir alt kümesi olmak üzere

$$A \subset \overline{\text{conv}(C \cup T(A))} \Rightarrow \bar{A} \text{ kompakt} \quad (5.1)$$

koşulu sağlanıyor ise, T ye Chandrabhan dönüşümü denir. C , X de T nin destek (support) kümesi olarak adlandırılan X in rölatif kompakt bir alt kümesidir [15].

Dikkat edilirse,

Mönch tipi dönüşüm $\Rightarrow$ Chandrabhan tipi dönüşüm

bağıntısı her zaman vardır, fakat tersinin her zaman doğru olmayacağı yeterince açıktır.

Böyle bir bağıntıyı ispatlamak istersek;

X bir Banach uzayı ve $T : X \rightarrow P_f(X)$ Mönch tipi bir dönüşüm olsun. O zaman en az bir $x_0 \in X$ için Eş. 3.1 şartı sağlanır. Hausdorff uzayında dolayısıyla Banach uzayında her tek nokta kümesi kompakttır. O halde Eş. 5.1 şartının sağlandığı da aşikardır.

5.1.1. Teorem

X bir Banach uzayı, $K \subset X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T : K \rightarrow P_{kc}(K)$ üstten yarı sürekli ve C, K da destek küme olmak üzere Chandrabhan tipi bir dönüşüm olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir [15].

İspat

K nın alt kümelerinden oluşan

$$C_0 = C, \quad C_{n+1} = \text{conv}(C \cup T(C_n)) \quad (5.2)$$

ile tanımlanan bir $\{C_n\}$ dizisi oluşturalım.

$$C' = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \quad \text{ve} \quad C^* = \overline{C'}$$

kümelerini tanımlayalım.

Her bir $n = 0, 1, 2, \dots$ için $C_n \subset C_{n+1}$ olduğu için C' K nın konveks bir alt kümesidir.

Ayrıca $\{C_n\}$ artan olduğu için $C' = \text{conv}(C \cup T(C'))$ dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
 C_{n-1} \subset C' &\Rightarrow T(C_{n-1}) \subset T(C') \\
 &\Rightarrow \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \subset \text{conv}(C \cup T(C')) \\
 &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \subset \text{conv}(C \cup T(C')) \\
 &\Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \subset \text{conv}(C \cup T(C')) \\
 &\Rightarrow C' \subset \text{conv}(C \cup T(C'))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(C_{n-1}) \subset \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) &\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} T(C_{n-1}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \\
 &\Rightarrow T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n-1}\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \\
 &\Rightarrow T\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \\
 &\Rightarrow T(C') \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \\
 &\Rightarrow C \cup T(C') \subset C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \\
 &\Rightarrow \text{conv}(C \cup T(C')) \subset \text{conv}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1}))\right) \\
 &\Rightarrow \text{conv}(C \cup T(C')) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(C \cup T(C_{n-1})) \\
 &\Rightarrow \text{conv}(C \cup T(C')) \subset C'
 \end{aligned}$$

Her iki durumdan diyebiliriz ki $C' = \text{conv}(C \cup T(C'))$ dir.

Dolayısıyla C^* , K nın kapalı, konveks bir alt kümesidir ve $T: C^* \rightarrow P_{kc}(C^*)$ dir.

Diğer taraftan, tümevarımla her bir $n \in N$ için C_n kümesinin rölatif kompakt olduğunu görelim.

Teoremin hipotezlerinden $\overline{C}$ nın kompakt olduğunu biliyoruz ve $\overline{C_0} = \overline{C}$ olduğu için $\overline{C_0}$ kompakttır. T üstten yarı sürekli olduğu için (P2) den $T(\overline{C_0})$ kompakt olur.

Ayrıca

$$T(C_0) \subset T(\overline{C_0}) \Rightarrow \overline{T(C_0)} \subset \overline{T(\overline{C_0})} = T(\overline{C_0})$$

olduğundan kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olduğu için $\overline{T(C_0)}$ kompakt olur.

Mazur Lemma dan

$$\begin{aligned} \overline{C \cup T(C_0)} \text{ kompakt} &\Rightarrow \overline{\text{conv}(C \cup T(C_0))} \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(\overline{C \cup T(C_0)})} = \overline{\text{conv}(C \cup T(C_0))} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(C \cup T(C_0))} = \overline{C_1} \\ &\Rightarrow \overline{C_1} \text{ kompakt} \end{aligned}$$

$\overline{C_{n-1}}$ kompakt olsun.

$\overline{C_{n-1}}$ kompakt, T üstten yarı sürekli olduğu için (P2) den $T(\overline{C_{n-1}})$ kompakt ve $\overline{T(C_{n-1})} \subset T(\overline{C_{n-1}})$ olup kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olacağı için $\overline{T(C_{n-1})}$ kompakttır. Mazur Lemma dan

$$\begin{aligned} \overline{C} \text{ ve } \overline{T(C_{n-1})} \text{ kompakt} &\Rightarrow \overline{C \cup T(C_{n-1})} \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(C \cup T(C_{n-1}))} \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(\overline{C \cup T(C_{n-1})})} = \overline{\text{conv}(C \cup T(C_{n-1}))} \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(C \cup T(C_{n-1}))} = \overline{C_n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{C_n} \text{ kompakt}$$

Böylece her bir $\overline{C_n}$ ayrılabilir. Çünkü metrik uzayda dolayısıyla Banach uzayında kompakt bir küme aynı zamanda ayrılabilir. Sonuç olarak,

Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için $\overline{S_n} = \overline{C_n}$, $S_n \subset C_n$ olacak şekilde sayılabilir kümelerden oluşan bir $\{S_n\}$ dizisi vardır.

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

olsun. Sayılabilir kümelerin sayılabilir sayıdaki birleşimi de sayılabilir olacağından S sayılabilir.

$$\overline{S} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{S_n}} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{C_n}} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n} = \overline{C'}$$

$C' \subset C^*$, $C' = \text{conv}(C \cup T(C'))$ ve $\overline{S} = \overline{C'}$, $S \subset C'$ sayılabilir bir alt küme olduğu için Eş. 4.1 bize $\overline{C'}$ kümesinin kompakt olduğunu garantiler.

$T: C^* \rightarrow P_{kc}(C^*)$ dönüşümü üstten yarı sürekli ve Eş. 4.1 şartını sağlayan bir dönüşüm olduğu için Teorem 4.2.1 in hipotezleri sağlanır. Böylece Teorem 4.2.1 i uygularsak T dönüşümü bir sabit noktaya sahip olur.

5.1.1. Sonuç

X bir Banach uzayı, $K \subset X$ kapalı, konveks bir alt küme olmak üzere $T: K \rightarrow P_{kc}(X)$ üstten yarı sürekli ve K nın sayılabilir bir S alt kümesi ve K da en az sonlu bir F kümesi için

$$S \subset \overline{\text{conv}}(F \cup T(S)) \Rightarrow \bar{S} \text{ kompakt} \quad (5.3)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir [15].

İspat

F sonlu ise F kompaktır. Eş. 5.3 den ve F nin kompakt olmasından diyebiliriz ki T Chandrabhan tipi bir dönüşümdür. Teorem 5.1.1 den T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

T tek değerli bir dönüşüm olduğunda aşağıdaki şu teorem ve sonuçları yazabiliriz.

5.1.2. Teorem

X bir Banach uzayı, $K \subset X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T : K \rightarrow K$ sürekli ve Chandrabhan tipi bir dönüşüm olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir [15].

5.1.2. Sonuç

X bir Banach uzayı, $K \subset X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T : K \rightarrow K$ sürekli ve K da sayılabilir bir S kümesi için

$$S \subset \overline{\text{conv}}(F \cup T(S)) \Rightarrow \bar{S} \text{ kompakt,}$$

koşulu K da en az sonlu bir F kümesi için sağlansın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

5.2. Leray-Schauder Tipi Bir Sabit Nokta Teoremi

Şimdi Teorem 5.1.1 e benzer olarak Leray-Schauder tipi küme değerli bir sabit nokta teoreminin ispatına yer verelim.

5.2.1. Teorem

X bir Banach uzayı, $K \subset X$ kapalı, konveks bir alt küme ve U , K da açık ve sınırlı bir alt küme olsun. $T: \overline{U} \rightarrow P_{kc}(K)$ üstten yarı sürekli ve C , $\overline{U}$ da destek küme olmak üzere Chandrabhan tipi bir dönüşüm olsun. Ayrıca

$$\text{her } x \in \partial U \text{ ve } \lambda \in [0,1] \text{ için } x \notin (1-\lambda)\overline{\text{conv}}(C) + \lambda T(x) \quad (5.4)$$

koşulu sağlansın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir [15].

İspat

$U = K$ ise, sonuç Teorem 5.1.1 den direkt olarak görülür. Buna göre $U \neq K$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $\partial U \neq \emptyset$ dır. ($\partial U = \emptyset$ olsaydı U kapalı olurdu ki bu da U nun K da açık olması kabulüyle çelişirdi.)

Küme değerli bir H dönüşümü ve Σ kümesi

$$H: \overline{U} \times [0,1] \rightarrow P_{kc}(K)$$

$$H(x, \lambda) = (1-\lambda)\overline{\text{conv}}(C) + \lambda T(x) \quad (5.5)$$

ve

$$\Sigma = \{x \in \overline{U} : x \in H(x, \lambda), \text{ en az bir } \lambda \in [0,1] \text{ için } \} \quad (5.6)$$

ile tanımlansın. H dönüşümünün kompakt, konveks değerli bir dönüşüm olduğu açıktır. H nin üstten yarı sürekli olduğunu görelim. Bunun için (P1) den $\text{graph} H$ nin kapalı ve $\overline{H(\overline{U} \times [0,1])}$ kümesinin kompakt olduğunu görmeliyiz.

$((x_n, \lambda_n), y_n) \in \text{graph}H$ de bir dizi ve $n \rightarrow \infty$ iken $((x_n, \lambda_n), y_n) \rightarrow ((x, \lambda), y)$ olsun.

$$\begin{aligned} ((x_n, \lambda_n), y_n) \in \text{graph}H &\Rightarrow y_n \in H(x_n, \lambda_n) \\ &\Rightarrow y_n = (1 - \lambda_n)c_n + \lambda_n t_n \end{aligned} \quad (5.7)$$

olacak şekilde $c_n \in \overline{\text{conv}}(C)$ ve $t_n \in T(x_n)$ vardır.

$((x_n, t_n)) \in \text{graph}T$ de bir dizidir.

Açıktır ki (λ_n) , $[0,1]$ de bir dizi ve $[0,1]$ kompakt olduğu için yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $(\lambda_{n_i}) \subset (\lambda_n)$ olmak üzere

$$\lambda \in [0,1] \text{ için } n_i \rightarrow \infty \text{ iken } \lambda_{n_i} \rightarrow \lambda,$$

olsun. Benzer şekilde $\overline{\text{conv}}(C)$ kompakt olduğu için dizisel kompaktır. Yani her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu durumda $(c_{n_i}) \subset (c_n)$ olmak üzere

$$n_i \rightarrow \infty \text{ iken } c_{n_i} \rightarrow c$$

olsun. $c \in \overline{\text{conv}}(C)$ yazabiliriz.

λ için iki durum mümkündür:

(1) $\lambda \neq 0$ olsun.

O zaman $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n_i \geq n_0$ için $\lambda_{n_i} \neq 0$ olduğu için

$$t_{n_i} = \lambda_{n_i}^{-1}(y_{n_i} - (1 - \lambda_{n_i})c_{n_i})$$

şeklinde bir dizi tanımlayabiliriz.

$$n_i \rightarrow \infty \text{ iken } \lambda_{n_i}^{-1}(y_{n_i} - (1 - \lambda_{n_i})c_{n_i}) \rightarrow \lambda^{-1}(y - (1 - \lambda)c)$$

ve

$$t = \lambda^{-1}(y - (1 - \lambda)c)$$

olarak tanımlanırsa

$$n_i \rightarrow \infty \text{ iken } (x_{n_i}, t_{n_i}) \rightarrow (x, t)$$

olur ki bu da $(x_{n_i}, t_{n_i}) \in \text{graph}T$ ve $\text{graph}T$ kapalı olduğu için $t \in T(x)$ olması demektir. Dolayısıyla

$$\lambda^{-1}(y - (1 - \lambda)c) \in T(x) \Rightarrow y \in (1 - \lambda)c + \lambda T(x)$$

$$\Rightarrow y \in (1 - \lambda)\overline{\text{conv}(C)} + \lambda T(x)$$

$$\Rightarrow y \in H(x, \lambda).$$

(2) $\lambda = 0$ olsun.

$A = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\} = \overline{\{x_n : n \geq 1\}}$ kümesinin kompakt olduğunu görelim.

$\{U_i : i \in I\}$, A nın açık bir örtüsü olsun.

$x \in A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow x \in U_{i_0}$ olacak şekilde $\exists U_{i_0} \in \{U_i : i \in I\}$ vardır.

$x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $x_n \in U_{i_0}$

$x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $x_3 \in U_3$, ..., $x_{n_0-1} \in U_{n_0-1}$, $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots \in U_{i_0}$

olarak alınırsa

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} U_i$$

olur. Böylece A nın açık bir örtüsünün sonlu bir alt örtüsünü bulmuş oluruz yani A kompakttır. A kompakt olduğu için T altındaki görüntüsü rölatif kompakt dolayısıyla sınırlıdır. Bu gösterir ki $\{t_n : n \geq 1\}$ kümesi sınırlıdır. O halde

$$\{t_{n_i} : n_i \geq 1\} \subset \{t_n : n \geq 1\}$$

alt kümesi de sınırlıdır. Şimdi analizden biliyoruz ki

$$\lambda_{n_i} \rightarrow 0 \text{ ve } (t_{n_i}) \text{ sınırlı} \Rightarrow \lambda_{n_i} t_{n_i} \rightarrow 0$$

dır.

Eş. 5.6 da

$n_i \rightarrow \infty$ alınırsa , $y = c$ elde ederiz. Böylece $y \in H(x, 0)$ olur. O halde her iki durumdan $graph H$ kapalıdır.

$\overline{C}$ kompakt olduğu için Mazur Lemma dan $\overline{\text{conv}(\overline{C})} = \overline{\text{conv}(C)}$ kompakt olur. T kompakt değerli olduğu için $T(\overline{U})$ kompakt olur. O halde her $\lambda \in [0,1]$ için $(1-\lambda)\overline{\text{conv}(C)} + \lambda T(\overline{U})$ kompakt yani $\overline{H(\overline{U} \times [0,1])}$ kompakt olur. Böylece H üstten yarı süreklidir.

Şimdi de Σ kümesinin kapalı olduğunu görelim. Bunun için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n \rightarrow x$$

olacak şekilde bir $(x_n) \subset \Sigma$ dizisini göz önüne alalım ve x in Σ de olduğunu görmeye çalışalım.

$x_n \in \Sigma$ olduğundan $x_n \in H(x_n, \lambda_n)$ olacak şekilde bir $\lambda_n \in [0,1]$ dizisi vardır. $[0,1]$ kompakt olduğu için kompakt bir kümede her dizinin yakınsak bir alt dizisi bulunabileceğinden (λ_n) in yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $(\lambda_{n_i}) \subset (\lambda_n)$ olmak üzere

$$\lambda \in [0,1] \text{ için } n_i \rightarrow \infty \text{ iken } \lambda_{n_i} \rightarrow \lambda ,$$

olsun.

$$x_{n_i} \in H(x_{n_i}, \lambda_{n_i}) \Rightarrow ((x_{n_i}, \lambda_{n_i}), x_{n_i}) \in \text{graph} H \text{ dir.}$$

$n_i \rightarrow \infty$ iken $((x_{n_i}, \lambda_{n_i}), x_{n_i}) \rightarrow ((x, \lambda), x)$ ve $\text{graph} H$ kapalı olduğu için $((x, \lambda), x) \in \text{graph} H$ olur. Dolayısıyla $x \in H(x, \lambda)$ olur ki bu da $x \in \Sigma$ olması demektir. Σ kümesi kapalıdır.

Eş. 5.4 şartı bize Σ ve ∂U kümelerinin ayrık olduğunu garantiler. Gerçekten;

Kabul edelim ki $\Sigma \cap \partial U \neq \emptyset$ olsun. O zaman en az bir $y \in \Sigma \cap \partial U$ vardır. $y \in \Sigma$ ise $y \in H(y, \lambda)$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ vardır ve $y \in (1 - \lambda)\overline{\text{conv}}(C) + \lambda T(y)$ dir.

$y \in \partial U$ ise Eş. 5.4 den

her $\lambda \in [0, 1]$ için $y \notin (1 - \lambda)\overline{\text{conv}}(C) + \lambda T(y)$ olur. Bu ise $y \in \Sigma$ olması ile çelişir. O halde Σ ve ∂U ayrık kümelerdir.

Urysohn Lemma dan

$$\nu : \overline{U} \rightarrow [0, 1]$$

$$\partial U \text{ da } \nu(x) = 0 \text{ ve } \Sigma \text{ da } \nu(x) = 1$$

ile tanımlı sürekli bir ν fonksiyonu vardır.

Bir $D = \overline{\text{conv}}(C \cup T(\overline{U}))$ kümesi ve küme değerli bir $\hat{T} : D \rightarrow P_k(D)$ dönüşümü

$$\hat{T}(x) = \begin{cases} H(x, \nu(x)), & x \in \overline{U} \\ \overline{\text{conv}}(C), & x \notin \overline{U} \end{cases} \quad (5.8)$$

ile tanımlansın. $\overline{\text{conv}}(C)$ kompakt ve konveks ayrıca H kompakt ve konveks değerli olduğu için $H(x, \nu(x))$ kompakt ve konveks olup $\hat{T}$ kompakt, konveks küme değerli bir dönüşümdür.

Şimdi $\hat{T}$ nin üstten yarı sürekli bir dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için (P1) den $\text{graph} \hat{T}$ nin kapalı ve $\overline{\hat{T}(D)}$ nin kompakt olduğunu görmek yeterli.

$n \rightarrow \infty$ iken $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ olacak şekilde her hangi bir $((x_n, y_n)) \subset \text{graph} \hat{T}$ dizisini göz önüne alalım ve $(x, y) \in \text{graph} \hat{T}$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} (1) \quad x_n \in \overline{U} &\Rightarrow \hat{T}(x_n) = H(x_n, \nu(x_n)) \\ &\Rightarrow y_n \in H(x_n, \nu(x_n)) \\ &\Rightarrow (x_n, y_n) \in \text{graph} H \end{aligned}$$

$\text{graph} H$ kapalı olduğu için

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) \in \text{graph} H &\Rightarrow (x, y) \in \text{graph} H \\ &\Rightarrow y \in H(x, \nu(x)) \\ &\Rightarrow y \in \hat{T}(x) \\ &\Rightarrow (x, y) \in \text{graph} \hat{T}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x_n \notin \overline{U} &\Rightarrow \hat{T}(x_n) = \overline{\text{conv}(C)} \\ &\Rightarrow y_n \in \overline{\text{conv}(C)} \end{aligned}$$

x için iki durum mümkündür;

* $x \notin \overline{U}$ ise

$\hat{T}(x) = \overline{\text{conv}(C)}$ olur. Ayrıca $\hat{T}(x_n) = \overline{\text{conv}(C)} = \hat{T}(x)$ olduğu için $y_n \in \hat{T}(x)$ dir. $n \rightarrow \infty$ iken $y_n \rightarrow y$ ve $\hat{T}(x)$ kompakt olduğu için $y \in \hat{T}(x)$ olur. Yani $(x, y) \in \text{graph} \hat{T}$ dir.

** $x \in \overline{U}$ ise

$\hat{T}(x) = H(x, \nu(x))$ olur. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \notin \bar{U}$ olup $x \in \partial U$ olur. $x \in \partial U$ olduğu için $\nu(x) = 0$ olur ki bu da $\hat{T}(x) = H(x, 0) = \overline{\text{conv}(C)}$ olduğundan $y_n \in \hat{T}(x)$ olması demektir. $n \rightarrow \infty$ iken $y_n \rightarrow y$ ve $\hat{T}(x)$ kompakt olduğu için $y \in \hat{T}(x)$ olur. Yani $(x, y) \in \text{graph} \hat{T}$ dır.

Her iki durumdan da diyebiliriz ki $\text{graph} \hat{T}$ kapalıdır.

$\overline{\hat{T}(D)}$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim.

$$\overline{\hat{T}(D)} = \overline{H(D, \nu(D)) \cup \text{conv}(C)} = \overline{H(D, \nu(D))} \cup \overline{\text{conv}(C)}$$

$$\overline{H(D, \nu(D))} = \overline{H(D, 0)} \cup \overline{H(D, 1)} = \overline{\text{conv}(C)} \cup \overline{T(D)} \text{ olup}$$

$$\overline{\hat{T}(D)} = \overline{\text{conv}(C)} \cup \overline{T(D)}$$

$\bar{C}$ kompakt olduğu için Mazur Lemma dan $\overline{\text{conv}(\bar{C})}$ kompakt olur, $\overline{\text{conv}(\bar{C})} = \overline{\text{conv}(C)}$ olduğu için $\overline{\text{conv}(C)}$ kompakt olur.

T üstten yarı sürekli olduğu için (P1) den $\overline{T(\bar{U})}$ kompakt olur.

$\overline{C \cup T(\bar{U})}$ kompakt olduğundan Mazur Lemma dan $\overline{\text{conv}(C \cup T(\bar{U}))}$ kompakt olur, $\overline{\text{conv}(C \cup T(\bar{U}))} = \overline{\text{conv}(C \cup T(\bar{U}))}$ olduğu için $\overline{\text{conv}(C \cup T(\bar{U}))}$ kompakttır. Ayrıca T üstten yarı sürekli olduğu için $T(\overline{\text{conv}(C \cup T(\bar{U}))})$ kompakt olur. Yani $T(D)$ kümesi kompakttır. Dolayısıyla $\overline{\hat{T}(D)}$ kompakttır. $\hat{T}$ üstten yarı sürekli.

Şimdi $\hat{T}$ nin D üzerinde küme değerli bir Chandrabhan tipi dönüşüm olduğunu ispatlayalım. Bunun için $\bar{S} = \overline{\text{conv}(C \cup \hat{T}(S))}$ olmak üzere D nin sayılabilir bir S alt kümesini alalım ve $\bar{S}$ ın kompakt olduğunu görmeye çalışalım.

Eş. 5.8 i kullanarak

$$\overline{\text{conv}(C \cup \hat{T}(S))} = \overline{\text{conv}(C \cup T(S \cap \bar{U}))}$$

eşitliğini elde edelim.

$$\begin{aligned} S \cap \bar{U} \subset S &\Rightarrow \hat{T}(S \cap \bar{U}) \subset \hat{T}(S) \\ &\Rightarrow H(S, \nu(S)) \subset \hat{T}(S) \end{aligned}$$

$$H(S, \nu(S)) = \begin{cases} \overline{\text{conv}(C)}, & S \subset \partial U \\ T(S), & S \subset \Sigma \end{cases}$$

olduğu için

$$\begin{aligned} T(S) \subset \hat{T}(S) &\Rightarrow T(S \cap \bar{U}) \subset \hat{T}(S) \\ &\Rightarrow \overline{\text{conv}(C \cup T(S \cap \bar{U}))} \subset \overline{\text{conv}(C \cup \hat{T}(S))} \dots (1) \end{aligned}$$

$$\hat{T}(S) = \begin{cases} H(S, \nu(S)), & S \subset \bar{U} \\ \text{conv}(C), & S \not\subset \bar{U} \end{cases} \quad \text{ve} \quad H(S, \nu(S)) = \begin{cases} \overline{\text{conv}(C)}, & S \subset \partial U \\ T(S), & S \subset \Sigma \end{cases}$$

olduğu için

$$\hat{T}(S) = \overline{\text{conv}(C)} \cup T(S \cap \bar{U})$$

yazabiliriz.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\text{conv}}(C) \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U})) \\ T(S \cap \bar{U}) \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U})) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{\text{conv}}(C) \cup T(S \cap \bar{U}) \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))$$

$$\hat{T}(S) \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U})) \Rightarrow \overline{\text{conv}}(C \cup \hat{T}(S)) \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U})) \dots (2)$$

(1) ve (2) den

$$\overline{\text{conv}}(C \cup \hat{T}(S)) = \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))$$

olduğu görülür.

$$\bar{S} = \overline{\text{conv}}(C \cup \hat{T}(S))$$

idi. Dolayısıyla

$$S \cap \bar{U} \subset \overline{\text{conv}}(C \cup \hat{T}(S)) \Rightarrow S \cap \bar{U} \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))$$

olur.

$S \cap \bar{U}$ sayılabilir ve $S \cap \bar{U} \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))$ iken T Chandrabhan tipi dönüşüm olduğu için $\overline{\overline{S \cap \bar{U}}}$ kompakttır.

T üstten yarı sürekli olduğu için (P2) den $\overline{\overline{T(S \cap \bar{U})}}$ kompakttır. Mazur Lemma dan

$$\overline{\overline{C \cup T(S \cap \bar{U})}} \text{ kompakt} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))}} \text{ kompakt,}$$

$$\overline{\overline{\overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))}} = \overline{\overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))}$$

ve

$$\overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U})) \subset \overline{\text{conv}}(C \cup T(\overline{S \cap \bar{U}}))$$

olduğundan kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakt olacağı için $\overline{\text{conv}}(C \cup T(S \cap \bar{U}))$ kompakttır. $\bar{S}$ kompakt olur. O halde $\hat{T}$ Chandrabhan tipi bir dönüşümdür. Böylece Teorem 5.1.1 den $\hat{T}$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. $x \in \hat{T}(x)$ olacak şekilde bir $x \in D$ vardır.

$C \subset \bar{U}$ olduğu için bu sabit nokta $\bar{U}$ kümesindedir. Kabul edelim ki bu sabit nokta $\bar{U}$ da olmasın.

* $x \notin \bar{U}$ ise

$\hat{T}(x) = \overline{\text{conv}}(C)$ olduğu için $x \in \overline{\text{conv}}(C)$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} x \notin H(x, \nu(x)) &\Rightarrow x \notin H(x, 0) \wedge x \notin H(x, 1) \\ &\Rightarrow x \notin \overline{\text{conv}}(C) \wedge x \notin T(x) \end{aligned}$$

Bu ise $x \in \overline{\text{conv}}(C)$ olması ile çelişir. O halde $x \in \bar{U}$ olur.

* * $x \in \bar{U}$ ise

$x \in H(x, \nu(x))$ dir. $\nu(x) = 0$ ise $x \in \partial U$ olur ki bu da $x \in H(x, 0) = \overline{\text{conv}}(C)$ demektir. Yani $x \notin \bar{U}$ iken $\hat{T}(x) = \overline{\text{conv}}(C)$ olduğu için $x \in \bar{U}$ olması ile çelişir. O halde $\nu(x) = 1$ dir. $\nu(x) = 1$ ise $x \in \Sigma$ dir. Sonuç olarak $x \in H(x, 1) = T(x)$, $x \in T(x)$ olur. Yani T bir sabit noktaya sahiptir.

5.2.2. Teorem

$B_r(0)$ ve $\overline{B_r(0)}$ sırasıyla bir X Banach uzayının kapalı ve konveks bir K alt kümesinde, orijin merkezli, r yarı çaplı açık ve kapalı yuvarı gösterebiliriz. $T: \overline{B_r(0)} \rightarrow P_{kc}(K)$ üstten yarı sürekli ve destek küme $C = \{0\}$ olmak üzere Chandrabhan tipi bir dönüşüm olsun. Ayrıca kabul edelim ki

$$\|x\| = r \text{ olacak şekildeki her } x \in X \text{ ve } \lambda > 1 \text{ için } \lambda x \notin T(x),$$

olsun. O zaman $T, \overline{B_r(0)}$ da bir sabit noktaya sahiptir [15].

İspat

$$U = B_r(0), \partial U = \partial B_r(0) \text{ ve } \frac{1}{\lambda} \in (0,1) \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{1}{\lambda} \in (0,1) \text{ için } x \notin \frac{1}{\lambda} T(x)$$

hatta

$$x \in \partial U \text{ ve } \frac{1}{\lambda} \in (0,1) \text{ için } x \notin (1 - \frac{1}{\lambda}) \overline{\text{conv}(\{0\})} + \frac{1}{\lambda} T(x),$$

yazabiliriz. Böylece Teorem 5.2.1 in hipotezleri sağlanır. Teorem 5.1.1 i uyguladığımızda $T, \overline{B_r(0)}$ da bir sabit noktaya sahiptir.

5.2.1. Sonuç

$B_r(0)$ ve $\overline{B_r(0)}$ kümeleri sırasıyla bir X Banach uzayının kapalı ve konveks bir K alt

kümesinde, orijin merkezli, r yarı çaplı açık ve kapalı yuvarı gösterebilirsin. $T : \overline{B_r(0)} \rightarrow K$ sürekli ve destek küme $C = \{0\}$ olmak üzere Chandrabhan tipi bir dönüşüm olsun. Ayrıca

$$\|x\| = r \text{ olacak şekildeki her } x \in X \text{ ve } \lambda > 1 \text{ için } \lambda x \neq T(x),$$

olsun. O zaman $T, \overline{B_r(0)}$ da bir sabit noktaya sahiptir [15].

İspat

T dönüşümünü ,

$$T : \overline{B_r(0)} \rightarrow P_{kc}(K)$$

şeklinde yazmamızda bir sakınca yoktur. Gerçekten;

$\forall x \in \overline{B_r(0)}$ için $T(x)$ tek nokta kümesi kompakt ve konvektir. Ayrıca T üstten yarı süreklidir. Bunun için (P1) den $graph T$ nin kapalı ve $\overline{T(\overline{B_r(0)})}$ ın kompakt olduğunu görmemiz yeterli.

$n \rightarrow \infty$ iken $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ olacak şekilde $graph T$ de herhangi bir $((x_n, y_n))$ dizisini göz önüne alalım ve $(x, y) \in graph T$ olduğunu görelim.

T sürekli olduğu için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } x_n \rightarrow x \Rightarrow T(x_n) \rightarrow T(x).$$

Bu ise $T(x_n) = y_n$ olduğu için $y_n \rightarrow T(x)$ olması demektir.

$n \rightarrow \infty$ iken $y_n \rightarrow y$ ve $y_n \rightarrow T(x)$

olup bir Hausdorff uzayında yakınsak bir dizinin limiti tek olacağı için $y = T(x)$ bulunur. Dolayısıyla $(x, y) \in \text{graph}T$ yani $\text{graph}T$ kapalıdır.

$\overline{B_r(0)}$ in kompakt olduğunu biliyoruz. Kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de kompakt olacağı için $T(\overline{B_r(0)})$ kompakt olur.

T yi küme değerli bir dönüşüm gibi düşündüğümüz için

$\lambda > 1$ için $\lambda x \notin T(x)$,

yazabiliriz. Teorem 5.2.2 nin hipotezleri gerçekleştiğinden sonuç Teorem 5.2.2 den direkt olarak görülebilir.

6. SONUÇ

Çalışmamızda Mönch tipi tek ve küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve ispatları ifade edilerek bunların Hammerstein ve Volterra integral içermelerine dair uygulamalarına yer verilmiştir. Ayrıca Mönch ün Schauder, Darbo ve Sadovskii nin sabit nokta teoremlerinin bir genellemesini sunduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak Mönch ün sabit nokta teoremini de içeren yeni bir dönüşüm sınıfı olan Chandrabhan tipi dönüşüm kavramı verilerek bu dönüşüm için sabit nokta teoremleri ve ispatlarına yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Agarwal, R.P., Meehan, M., O'Regan, D., "Fixed Point Theory and Applications", *Cambridge University Press*, Cambridge, 1-64 (2001).
2. Agarwal, R.P., O'Regan, D., "Existence Criteria for Operator Inclusions in Abstract Spaces", *J. Comput. Appl. Math.*, 113: 183-193 (2000).
3. O'Regan, D., Precup, R., "Existence Criteria for Integral Equations in Banach Spaces", *J. Math. Anal. & Appl.*, 6: 77-97 (2001).
4. O'Regan, D., Precup, R., "Theorems of Leray-Schauder Type and applications", *3. Series in Mathematical Analysis and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam x+206 pp. (2001).
5. Deimling, K., "Nonlinear Functional Analysis", *Springer-Verlag*, Berlin, 200-202 (1985).
6. Mönch, H., "Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations of Second Order in Banach Spaces", *Nonlinear Analysis*, 4(5): 985-999 (1980).
7. Mönch, H., Von Harten, G.F., "On the Cauchy problem for ordinary differential equations in Banach spaces", *Arch. Math.*, 39: 153-160 (1982).
8. Guo, D., Lakshmikantham, V., Liu, X., "Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 9-22 (1996).
9. Cellina, A., Fryszkowski, A., Rzezuchowski, T., "Upper semicontinuity of Nemitskij operators", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 160:312-330 (1991).
10. Couchouron, J., F., Kamenski, M., "A unified topological point of view for integro-differential inclusions, in "Differential Inclusions and Optimal Control" ", *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, 2: 123-137 (1998).
11. Cardinali, T., Papageorgiu, N.S., "Hammerstein integral inclusions in Reflexive Banach spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1(127): 95-103 (1999).
12. Hu, S., Papageorgiou, N.S., "Handbook of Multivalued Analysis, 1: Theory", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 35-59 (1997).
13. Dhage, B. C., "A functional integral inclusion involving Carathéodories", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 14: 1-18 (2003).
14. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., "Principles of Real Analysis", *Academic Press*, San Diego, 75-76 (1998).

15. Dhage, B.C., "On Mönch Type Multi-Valued Maps and Fixed Points", *Applied Mathematics Letters*, 20: 622-628 (2007).
16. Kirk, A., W, Sims, B., " Handbook of Metric Fixed Point Theory ", *Kluwer Academic Publishers*, Dortrecht, 240-244 (2001).
17. O'Regan, D., Precup, R., "Fixed Point Theorems for Set-Valued Maps and Existence Principles for Integral Inclusions", *J. Math. Anal. & Appl.*, 245: 594-612 (2000).
18. Dhage, B. C., "A functional integral inclusion involving Carathéodories", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 14: 1-18 (2003).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÖKŞİN Maide
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 04.10.1983 Çumra
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0505 591 14 12
 e-mail : mgoksin_83@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Tezsiz Yüksek Lisans	Başkent Üniversitesi / Matematik Eğitimi Bölümü(1.)	2005
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü(2.)	2004
Lise	Ankara Mamak Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-2008	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce