

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE BİRİNCİ MERTEBEDEN
FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI**

Velican ŞİMŞEK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE BİRİNCİ MERTEBEDEN
FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI**

Velican ŞİMŞEK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE BİRİNCİ MERTEBEDEN
FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Velican ŞİMŞEK
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 16/06/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Özkan ÖCAL (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Nurten KILIÇ

ÖZET

MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE BİRİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Velican ŞİMŞEK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCAL

Haziran 2025, 40 sayfa

Bu yüksek lisans tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gecikmeli fark denklemleri ile ilgili genel bilgilere ve literatür taramasına yer verilmiştir. İkinci bölümde gecikmeli fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise sabit katsayılı-sabit gecikmeli fark denklemi ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli fark denklemlerin çözümlerine ait salınımlılık kriterlerine yer verilmiştir.

$$\Delta V(z) + p(z) V(\xi(z)) = 0$$

ve

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0.$$

Genel olarak bu iki gecikmeli fark denklemleri ile ilgileneceğiz. Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma kısmına, beşinci bölümde ise sonuç kısmına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Fark denklemi, Gecikmeli fark denklemi,
Monoton olmayan argümanlar, Salınımlı çözüm.

JÜRİ: Prof. Dr. Özkan ÖCAL
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Doç. Dr. Nurten KILIÇ

ABSTRACT

OSCILLATORY BEHAVIOR OF FIRST ORDER DIFFERENCE EQUATIONS WITH NON-MONOTONE DELAYS

Velican ŞİMŞEK

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Özkan ÖCAL

June 2025, 40 pages

This master's thesis consists of five chapters. In the first chapter, general information and literature review about delayed difference equations are given. In the second chapter, general definitions and theorems about delayed difference equations are given. In the third section, the oscillation criteria for the solutions of the constant coefficient-constant delay difference equation and the variable coefficient-constant delay difference equations are included.

$$\Delta V(z) + p(z) V(\xi(z)) = 0$$

and

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0.$$

Generally, we will focus on these two delay difference equations. The fourth section includes the findings and discussion section, and the fifth section includes the conclusion.

KEYWORDS : Delayed difference equation, Difference equation,
Non-monotonic arguments, Oscillatory solution.

COMMITTEE : Prof. Dr. Özkan ÖCAL
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Assoc. Prof. Dr. Nurten KILIÇ

ÖNSÖZ

Fark denklemleri, disiplinler arası uygulamalı bilimlerde karşılaşılan problemlerin matematiksel temsilde merkezi bir role sahiptir. Bu modellemeler sırasında, değişkenler arasındaki ilişkilerde zaman gecikmeleri gibi faktörlerin ortaya çıkması kaçınılmazdır. Diferansiyel denklemlerle kıyaslandığında, fark denklemlerinin sistematik incelemesi nispeten daha yeni bir araştırma alanıdır. 20. yüzyılda genetik bilimindeki ilerlemelerden kuantum fiziğindeki radyasyon çalışmalarına kadar yaşanan gelişmeler, doğal süreçlerin anlaşılmasında sürekli matematiksel yaklaşımların yetersiz kaldığını ve kesikli modellere olan ihtiyacı açıkça ortaya koymuştur. Günümüzde bu denklemler; kontrol teorisinde sistem kararlılığının analizinden biyolojide popülasyon dinamiklerinin tahminine, ekonomide finansal dalgalanmaların izlenmesinden tıpta hücrel süreçlerin modellenmesine kadar çok çeşitli alanlarda aktif olarak kullanılmaktadır. Bu denli geniş bir uygulama yelpazesi, yalnızca matematikçileri değil, mühendislikten tıba, sosyal bilimlerden fen alanlarına kadar disiplinler arası bir araştırmacı kitlesini cezbetmiş ve son 50 yılda bu konuda devasa bir akademik birikim oluşmasını sağlamıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	5
2.1. Gecikmeli Fark Denklemleri	5
3. MATERYAL VE METOT	15
3.1. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Gecikmeli Fark Denklemlerinin Salınım- lılığı	15
3.2. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Gecikmeli Fark Denklemlerinin Salınımlılığı	18
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	35
5. SONUÇLAR	39
6. KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Monoton Olmayan Gecikmeler İle Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Salınımlılık Davranışı” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

16/06/2025

Velican ŞİMŞEK



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: $[0, \infty)$
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
Δ	: Fark operatörü
$\int$	: İntegral operatörü
$\sum$	: Toplam operatörü
$\prod$	: Çarpım operatörü
$\forall$	: Her
ξ	: Gecikme terimi
e	: $\cong 2.7182$ (Euler sayısı)

1. GİRİŞ

Fark denklemleri (veya tekrarlamalı denklemler), bir fonksiyonun belirli bir değer kümesi üzerindeki davranışını özyinelemeli (iteratif) bir yaklaşımla hesaplamaya olanak tanıyan matematiksel araçlardır. Bu denklemler, yalnızca teorik matematikte değil; istatistiksel modellemeden biyolojik sistemlere, ekonomik tahminlerden elektromanyetik devre tasarımlarına, dinamik sistem analizlerinden bilgisayar bilimlerine kadar çok disiplinli uygulama alanlarında temel bir rol oynar. Özellikle, süreçlerin adım adım ilerlediği veya kesikli zaman aralıklarında gözlemlendiği durumlarda, bu denklemlerin esnek yapısı onları vazgeçilmez kılar.

Teknolojideki hızlı ilerlemeler, mühendislikten ekonomiye kadar uygulamalı bilimlerin pek çok dalında (matematik, fizik, kimya, biyoloji vb.) kaydedilen gelişmelerle paralel olarak karmaşık matematiksel problemlerin artmasına yol açmaktadır. Bu disiplinlerde incelenen problemlerde, bağımsız değişkenlerin süreklilik göstermediği veya kesikli değerler aldığı durumlarla sıklıkla karşılaşılır. İşte tam da bu noktada, sistemlerin dinamiklerini modellemek için fark denklemleri devreye girer. Zira fark denklemleri; bir veya birden fazla değişkenli fonksiyonların, bağımsız değişkenler arasındaki sonlu farklarla kurulan cebirsel ilişkileri ifade etmede temel araçlardan biridir.

Fark denklemleri, pratik bilimlerin pek çok alanında kullanım imkanına sahiptir. Örneğin; kontrol teorisinde sistemlerin kararlılık analizlerinin yapılması, tıpta hücresel davranışların modellenmesi, ekonomide finansal piyasa dalgalanmalarının tahmin edilmesi ve biyolojide popülasyon dinamiklerinin araştırılması gibi disiplinler arası uygulamalarda bu denklemlerden yararlanıldığı ifade edilebilir.

Gecikme olgusu, gündelik yaşantımızın neredeyse her alanında karşımıza çıkan temel bir gerçekliktir. Fiziksel sistemlerde, bir uyarının etkisiyle oluşan reaksiyon arasında genellikle kısa da olsa zaman aralığı bulunur. Biyolojik sistemlerde bu gecikme, insanın sinirsel tepki sürecini yansıtan birkaç yüz milisaniyelik zaman dilimlerine kadar inebilir. Öte yandan, antenden yayılan elektromanyetik sinyallerin uzak bir nesneden yansarak geri dönüş sinyallerinin tespit edilmesi gibi durumlarda, gecikmeler genellikle son derece kısadır. Hatta mikro veya nanosaniye mertebesindeki bu minimal zaman farkları bile,

radar teknolojisi veya iletişim sistemleri gibi kritik alanlarda belirleyici rol oynayabilir. Teorik açıdan bakıldığında, bir sisteme aktarılan enerji ile elde edilen verim arasındaki ilişki de zaman gecikmeli bir davranış sergiler. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, $x(t)$ uyarısına karşılık $y(t)$ çıktısı, h gecikme süresiyle ilişkili olarak $y(t) = x(t-h)$ şeklinde modellenenir. Daha kompleks sistemlerde ise birden fazla gecikme parametresinin bir arada etkili olduğu senaryolarla karşılaşılır.

Fark denklemlerinin analizi, matematik dünyasında uzun süredir büyük merak uyandıran bir konu olmuş ve özellikle son 40 yılda bu alanda yürütülen araştırmalar sayesinde kapsamlı bir akademik birikim ortaya çıkmıştır. Son birkaç on yılda, bu denklemlerin çözümlerinin karmaşık davranış özellikleri (özellikle salınım eğilimleri) üzerine yoğunlaşan çalışmalar dikkat çekmektedir. Bununla birlikte, birinci dereceden lineer ileri fark denklemlerinin salınım dinamikleri konusunda yapılan araştırmaların sayısı oldukça sınırlıdır. Daha da önemlisi, argümanların monotonluk şartı taşımadığı genel durumları ele alan çalışmalar neredeyse istisnai düzeyde az olup, bu alanda ciddi bir literatür eksikliği dikkat çekmektedir.

Fark denklemleri ile diferansiyel denklemler arasında teorik ve uygulamalı açıdan güçlü bir paralellik mevcuttur. Fark denklemlerinin en önemli avantajlarından biri, diferansiyel denklemlerde ortaya çıkabilen süreksizlik veya kesintili davranışların modellenmesinde bu sorunları aşmaya imkan tanımasıdır. Üstelik birçok diferansiyel denklem, fark denklemleriyle yeniden formüle edilerek daha analitik ve sayısal çözümlere ulaşılmasını kolaylaştırabilmektedir.

Matematiksel modelleme, pratik bilimlerin dinamik sistemlerinde karşılaşılan problemlerin çoğunun temelini oluşturan fark denklemleriyle doğrudan ilişkilidir. Bilindiği gibi, bu tür modellemeler sırasında sistemin davranışını etkileyen zaman gecikmeleri kaçınılmaz bir şekilde gözlemlenebilir. Özellikle gerçek dünya senaryolarını matematiksel çerçeveye aktarırken, değişkenler arasındaki nedensel ilişkilerde ortaya çıkan bu gecikmeler, modelin karmaşıklığını artıran ancak gerçekçiliğini sağlayan kritik unsurlardan biridir.

Fark denklemlerinin sistematik analizi, diferansiyel denklemlerle kıyaslandığında nis-

peten daha modern bir araştırma alanıdır. 20. yüzyılda genetik bilimindeki keşiflerden kuantum fiziğindeki radyasyon çalışmalarına kadar pek çok bilimsel gelişme, doğal süreçlerin anlaşılmasında sürekli matematiksel modellerin tek başına yetersiz kaldığını ve kesikli ifadelerle olan ihtiyacı ortaya koymuştur. Günümüzde fark denklemlerinin uygulama alanları, kontrol teorisinde sistem kararlılığının analizinden biyolojide popülasyon dinamiklerinin modellenmesine, ekonomide finansal piyasa dalgalanmalarının tahmininden tıpta hücresel mekanizmaların incelenmesine kadar disiplinler arası bir yelpazeye yayılmıştır. Bu denklemlerin bu denli geniş bir kullanım alanına sahip olması, yalnızca matematikçileri değil, mühendislikten sağlık bilimlerine, sosyal bilimlerden fen alanlarına kadar çeşitli disiplinlerdeki araştırmacıları da cezbetmiştir. Nitekim son yarım asırda, hem teorik hem de uygulamalı çalışmaları kapsayan etkileyici bir literatür birikimi oluşmuş ve bu alandaki akademik ilgi katlanarak artmıştır.

Fark denklemleri, zaman parametresine bağlı olarak değişen doğal süreçlerin dinamiklerini modellemede temel bir araçtır. Zamanla değişen değişkenlerin çoğunun kesikli (ayrık) yapıda olması, bu denklemlerin matematiksel modellemede kritik bir rol üstlenmesini sağlar. Daha da önemlisi, diferansiyel denklemlerin sayısal yaklaşımlarla çözümünde kullanılan ayrıklaştırma tekniklerinin temelini de fark denklemleri oluşturur. Bu teoride ulaşılan sonuçların büyük bir kısmı, aslında diferansiyel denklemlerin ayrık benzerleri olarak yorumlanabilir; yani sürekli sistemlerin davranışları, fark denklemleri aracılığıyla kesikli bir perspektifle analiz edilir.

Fark denklemleri, teorik ve uygulamalı açıdan diferansiyel denklemlerden daha kapsamlı bir davranış repertuvarına sahiptir. Örneğin, birinci dereceden basit bir diferansiyel denklemin ayrık karşılığı olan bir fark denklemi, hayali çözümler veya kaotik dinamikler sergileyebilir; oysa bu tür karmaşık davranışlar, diferansiyel denklemlerde genellikle yüksek mertebeli sistemlerle sınırlıdır. Bu durum, fark denklemleri teorisinin diferansiyel denklemler teorisine kıyasla daha zengin bir matematiksel içerik sunduğunu ve özellikle dinamik sistemlerin modellenmesinde gelecekteki rolünün daha da belirginleşeceğini gösteren önemli bir argümandır.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında;

$1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(z)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\xi_i(z)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$z \geq 1 \text{ için } \xi_i(z) \leq z$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve ileri fark operatörü

$$\Delta V(z) = V(z+1) - V(z)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere aşağıdaki çok terimli

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad (1.1)$$

gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için literatürde elde edilen bazı kriterler çalışılacaktır.

Bu yüksek lisans tez çalışmamızda değişken ve monoton olmayan gecikmelere ve değişken katsayılara sahip olan birinci mertebeden fark denklemlerini çalışmayı amaçlamaktayız. Çalışmamızda, (1.1) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için literatürde son yıllarda elde edilen bazı kriterleri detaylı bir şekilde ele almayı ve bunlar ile ilgili bir çok örnek vermeyi düşünmekteyiz. Dolayısıyla tezimizde yer alacak sonuçların ve örneklerin ilerleyen tarihlerde bu konular üzerinde çalışmalar yapacak lisansüstü öğrenciler için yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

Bu tezdeki temel amacımız, gecikmeli diferansiyel denklemlerin salınım teorisine paralel olan, gecikmeli fark denklemleri için bazı salınım teorilerini incelemektir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde gecikmeli fark denklemleri ile ilgili salınımlılık teorisinde yer alan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Gecikmeli Fark Denklemleri

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(t) + \sum_{i=1}^m p_i(t) V(\xi_i(t)) = 0. \quad (2.1)$$

Burada, $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(t)\}$ pozitif reel sayı dizileri, $\xi_i(t)$ 'ler (2.1) denklemin gecikme terimleridir. $1 \leq i \leq m$ için $\xi_i(t) \leq t$ olduğundan (2.1) denklemine gecikmeli fark denklemi denir. $m = 1$ için (2.1) denklemi

$$\Delta V(t) + p(t) V(\xi(t)) = 0$$

halini alır.

Tanım 2.1. *V reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere fark operatörü Δ işareti ifade edilir ve*

$$\Delta V(t) = V(t+h) - V(t) \quad , \quad \Delta V(z) = V(z+1) - V(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada h herhangi bir sabit t ise bağımsız değişkendir.

Özel olarak, $V(t) = t$ olursa $\Delta V = (t+h) - t = h$ bulunur. Bu nedenle h fonksiyon aralığı olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. *$t \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $V(t)$, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.*

$$V(t), V(t+1), \dots, V(t+k)$$

ifadelerini içeren bir bağıntıya k . mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.3. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $V(t+1)+7V(t)-2V(t-3)=0$ denklemi dördüncü mertebeden bir fark denklemdir (Agarwal 2000).

Tanım 2.4. Eğer her pozitif T tam sayısı ve $t \geq T$ için $V(t)V(t+1) \leq 0$ ise $V(t)$ aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde, $V(t)$ çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir $V(t)$ çözümü belli bir yerden (t değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal et al. 1991, Elaydi 1999, Györi and Ladas 1991).

Tanım 2.5. t 'nci mertebeden bir fark denklem sisteminin bir $\{V(t)\}$ çözümü $V(t) = [V^1(t), V^2(t), \dots, V^r(t)]^T$ Eğer her bir $\{V^i(t)\}$ bileşeni salınımlı ise $\{V(t)\}$ çözümüne salınımlıdır denir. Diğer durumda yani, bir $\{V^i(t)\}$ bileşeni belli bir yerden sonra pozitif ya da negatif $\{V(t)\}$ çözümüne salınımlı olmayan bir çözüm denir. Burada $t = 0, 1, 2, \dots$ için $V(t) \in \mathbb{R}^r$ 'dir (Györi and Ladas 1991).

Tanım 2.6. Z pozitif bir tam sayı olmak üzere $z \geq Z$ için $x_z x_{z+1} \leq 0$ ise x_z aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_z çözümü salınımlı olmayan çözüm olarak adlandırılır. Diğer taraftan, farklı bir şekilde ifade etmek gerekirse, eğer bir x_z çözümü belli bir yerden (z değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlı olarak adlandırılır (Györi and Ladas 1991, Elaydi 1999, Agarwal 2000).

Teorem 2.7. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$V(z+1) - V(z) + pV(z-k) = 0, \quad z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

şeklinde verilen gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım. Bu durumda (2.2) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

- (a) $k = -1$ ve $p \leq -1$;
 (b) $k = 0$ ve $p \geq 1$;
 (c) $k \in \{\dots, -3, -2\} \cup \{1, 2, \dots\}$ ve $p \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$ (Györi and Ladas 1991).

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$V(z+1) - V(z) + \sum_{i=1}^m p_i V(z - k_i) = 0, \quad z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Burada

$$p_i \in (0, \infty) \quad \text{ve} \quad k_i \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

ya da

$$p_i \in (-\infty, 0) \quad \text{ve} \quad k_i \in \{\dots, -3, -2, -1\} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5)$$

şeklindedir.

Teorem 2.8. (2.4) veya (2.5) sağlansın ve

$$\sum_{i=1}^m p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1$$

olsun. Bu durumda (2.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.9. (2.4) veya (2.5) sağlansın ve $k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m k_i$ olmak üzere

$$m \left(\prod_{i=1}^m |p_i| \right)^{1/m} \left| \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \right| > 1,$$

olsun. Böylece, (2.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Györi and Ladas 1991).

Hatırlatma: Aritmetik ortalama ve geometrik ortalama arasındaki ilişki aşağıdaki eşitsizlik ile ifade edilir.

$$\left(\prod_{i=1}^m p_i \right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i.$$

$\{p(z)\}$ negatif olmayan bir gerçel sayı dizisidir ve k pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$V(z+1) - V(z) + p(z)V(z-k) = 0, \quad z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

şeklinde verilen gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

Teorem 2.10. $\{p_z\}$ negatif olmayan bir gerçel sayılar dizisi ve k pozitif bir tam sayı olsun.

Eğer

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} p_i \right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \quad (2.7)$$

ise, (2.6) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeterli bir koşuldur (Györi and Ladas 1991).

İspat Varsayalım ki $V(z)$ (2.6) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda yeterince büyük z için,

$$V(z+1) - V(z) = -p(z)V(z-k) \leq 0$$

olur. $V(z)$ sonunda azalan bir pozitif sayı dizisidir. (2.6) denkleminde,

$$V(z+1) - V(z) + p(z)V(z) \leq 0$$

veya

$$p(z) \leq 1 - \frac{V(z+1)}{V(z)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $i = z - k$ 'dan $z - 1$ 'e kadar toplanırsa,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} p_i \leq \frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} \left(1 - \frac{V(i+1)}{V(i)} \right). \quad (2.8)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\alpha = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \quad (2.9)$$

olarak tanımlansın. (2.9) ve (2.7) koşuluna göre, yeterince büyük z için,

$$\alpha < \beta \leq \frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} p_i, \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir β sabiti seçilebilir. (2.8) ve (2.10) birleştirilirse,

$$\beta \leq \frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} \left(1 - \frac{V(i+1)}{V(i)} \right), \quad \text{yeterince büyük } z \text{ için.} \quad (2.11)$$

(2.11) eşitsizliği ve aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak yeterince büyük z için,

$$\begin{aligned}\beta &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} \left(1 - \frac{V(i+1)}{V(i)}\right) = 1 - \beta \leq \frac{1}{k} \sum_{i=z-k}^{z-1} \frac{V(i+1)}{V(i)} \\ &\leq 1 - \left[\prod_{i=z-k}^{z-1} \frac{V(i+1)}{V(i)} \right]^{1/k} = 1 - \left(\frac{V(z)}{V(z-k)} \right)^{1/k},\end{aligned}$$

yani,

$$\left(\frac{V(z)}{V(z-k)} \right)^{1/k} \leq 1 - \beta, \quad \text{yeterince büyük } z \text{ için.} \quad (2.12)$$

Bu özellikle $0 < \alpha < 1$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1} \left[(1 - \lambda) \lambda^{1/k} \right] = \frac{k}{(k+1)^{1+1/k}} = \alpha^{1/k}$$

olduğunu gözlemleyebiliriz. Burada α , (2.9) ile tanımlanan pozitif sabittir. Dolayısıyla,

$$1 - \lambda \leq \alpha^{1/k} \lambda^{-1/k} \quad 0 < \lambda \leq 1 \text{ için}$$

ve (2.12) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{\beta}{\alpha} V(z) \leq V(z-k) \quad \text{yeterince büyük } z \text{ için.} \quad (2.13)$$

elde ederiz. (2.13) ve (2.7) denklemini kullanarak ve önceki işlem adımlarını tekrarlırsak,

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 V(z) \leq V(z-k) \quad \text{yeterince büyük } z \text{ için.}$$

Tümevarım yöntemiyle, $m = 1, 2, \dots$ için bir z_m tam sayısı vardır öyle ki,

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^m V(z) \leq V(z-k) \quad z \geq z_m \text{ ve } m = 1, 2, \dots \text{ için.} \quad (2.14)$$

olur. Ayrıca (2.10) koşulundan dolayı yeterince büyük z için,

$$\sum_{i=z-k}^z p_i \geq \sum_{i=z-k}^{z-1} p_i \geq k\beta.$$

olur. Bu nedenle,

$$\sum_{i=z-k}^{z-1} p_i \geq M, \quad (2.15)$$

olup, burada $M = k\beta > 0$ elde ederiz. Şimdi, (2.10)'a göre $\beta > \alpha$ olduğundan

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^m > \left(\frac{2}{M} \right)^2, \quad (2.16)$$

olacak şekilde bir m seçelim.

$z \geq z_0$ için (2.14) eşitsizliği seçilen m ile sağlanır, (2.10) ve (2.15) geçerlidir ve $V(z)$ dizisi $z \geq z_0$ için azalandır, $z \geq z_0 + k$ için,

$$\sum_{i=z-k}^{z^*} p_i \geq \frac{M}{2} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=z^*}^z p_i \geq \frac{M}{2}$$

olacak şekilde $z - k \leq z^* \leq z$ aralığında bir z^* tam sayısı mevcuttur. (2.6) denklemini ve $V(z)$ 'nin azalanlığını kullanarak,

$$\begin{aligned} V(z^* + 1) - V(z - k) &= \sum_{i=z-k}^{z^*} (V(i+1) - V(i)) \\ &= - \sum_{i=z-k}^{z^*} p_i V(i - k) \\ &\leq - \left(\sum_{i=z-k}^{z^*} p_i \right) V(z^* - k) \\ &\leq - \frac{M}{2} V(z^* - k) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\frac{M}{2} V(z^* - k) \leq V(z - k) \quad (2.17)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} V(z + 1) - V(z^*) &= \sum_{i=z^*}^z (V(i+1) - V(i)) \\ &= - \sum_{i=z^*}^z p_i V(i - k) \\ &\leq - \left(\sum_{i=z^*}^z p_i \right) V(z - k) \\ &\leq - \frac{M}{2} V(z - k) \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\frac{M}{2} V(z - k) \leq V(z^*). \quad (2.18)$$

(2.17) ve (2.18) birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{2} \right)^2 V(z^* - k) &\leq V(z^*) \\ \frac{V(z^* - k)}{V(z^*)} &\leq \left(\frac{2}{M} \right)^2 \end{aligned}$$

olur. (2.14) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \leq \frac{V(z^* - k)}{V(z^*)} \leq \left(\frac{2}{M}\right)^2.$$

Elde edilen son ifade (2.16) ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup, (2.6) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Teorem 2.11. $\{p_z\}$ bir gerçel sayılar dizisi ve k bir tam sayı olsun. Aşağıdaki iki durumdan herhangi birinde, (2.6) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(a) $k \geq 0$, $p(z)$ eninde sonunda negatif olmayan bir dizi ve

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=z}^{z+k} p_i > 1.$$

(b) $k \leq -1$, $p(z)$ eninde sonunda pozitif olmayan bir dizi ve

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=z+k+1}^z (-p_i) > 1.$$

(Györi and Ladas 1991).

İspat (a) durumunu ispatlayalım. Varsayalım ki $V(z)$, (2.6) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda artmayan olacaktır. Dolayısıyla, yeterince büyük z için,

$$0 = V(z+1) - V(z) + p(z)V(z-k) \geq V(z+1) - V(z) + p(z)V(z),$$

$$0 = V(z+2) - V(z+1) + p(z+1)V(z+1-k) \geq V(z+2) - V(z+1) + p(z+1)V(z)$$

$\vdots$

$$0 = V(z+1+k) - V(z+k) + p(z+k)V(z) \geq V(z+1+k) - V(z+k) + p(z+k)V(z)$$

olur. Bu eşitsizlikleri topladığımız zaman,

$$V(z+1+k) + \left(-1 + \sum_{i=z}^{z+k} p_i\right) V(z) \leq 0$$

elde ederiz. Ancak teoremin koşuluna göre $\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=z}^{z+k} p_i > 1$ dir, yani, parantezin içi pozitiftir. Diğer taraftan eşitsizliğin sol tarafıda pozitiftir, bu durum bir çelişkidir. O halde başlangıçtaki pozitif çözüm varsayımımız yanlıştır. (2.6) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Benzer şekilde (b) koşulunun ispatıda yapılabilir. $\square$

$\{p(z)\} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıda verilen gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$V(z+1) - V(z) + p(z)V(\xi(z)) = 0, \quad z = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Denklem (2.19) için her zaman aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

- (i) $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
- (ii) $z \in \mathbb{N}$ için $\xi(z) < z$
- (iii) $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z) = \infty$.

Bu koşullara kısaca (H) diyelim.

Zhang ve Tian (1998) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 2.12. (H) 'nin geçerli olduğunu ve $p(z) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} p(z) > 0 \quad (2.20)$$

ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=\xi(z)}^{z-1} p_i > \frac{1}{e} \quad (2.21)$$

olduğunu varsayalım. O zaman denklem (2.19)'nin her çözümü salınımlıdır (Zhang and Tian 1998).

İspat Varsayalım ki $V(z)$ (2.19)'nin pozitif bir çözümü olsun. O zaman pozitif tam sayılar olan M ve Z ile küçük bir pozitif sayı ε_0 vardır ki, $z \geq Z$ için $\xi(z) \geq M$, $z \geq Z \geq M$ için $V(z) > 0$, $p(z) \geq 0$ ve $z \geq Z$ için $\sum_{i=\xi(z)}^{z-1} p_i > 1/e + \varepsilon_0$ 'dır. $a(z) > 1/e$, $r = (1/e + \varepsilon_0)e$ diyelim. Dolayısıyla $z \geq Z$ için

$$\sum_{i=\xi(z)}^{z-1} \frac{p_i}{a_z} \geq r > 1. \quad (2.22)$$

$Z_1 > Z$ şeklinde bir tam sayı seçilerek, tüm $z \geq Z_1$ için $\xi(z) \geq Z$ sağlanır. Bu durumda tüm $z \geq Z_1$ için $p(z) \geq 0$ ve $V(\xi(z)) \geq 0$ olur. (2.19) denkleminde $V(z)$ $z \geq Z_1$ için azalmayandır. $Z_2 \geq Z_1$ seçilerek, tüm $z \geq Z_2$ için $V(z) \geq z_1$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\frac{V(\xi(z))}{V(z)} \geq 1, \quad \text{tüm } z \geq Z_2 \text{ için.}$$

(2.19)'den,

$$\frac{V(z+1)}{V(z)} = 1 - p(z) \frac{V(\xi(z))}{V(z)} \quad z \geq M, \quad (2.23)$$

olur. $Z_3 \geq Z_2$ seçilerek, tüm $z \geq Z_3$ için $V(z) \geq Z_2$ sağlanır. (2.22) numaralı eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{V(\xi(z))} &= \prod_{i=V(z)}^{z-1} \frac{V(i+1)}{V(i)} \\ &= \prod_{i=V(z)}^{z-1} \left(1 - p_i \frac{V(\xi(i))}{V(i)} \right) \\ &\leq \prod_{i=V(z)}^{z-1} (1 - p_i), \end{aligned}$$

elde ederiz. Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanırsak, $z \geq Z_3$ için

$$\prod_{i=V(z)}^{z-1} (1 - p_i) \leq \left[1 - \frac{1}{z - V(z)} \sum_{i=V(z)}^{z-1} p_i \right]^{z-V(z)}$$

olup. $x(1-x)^k \leq k^k / ((1+k)^{1+k})$ eşitsizliğini kullanırsak, $x \in (0, 1)$ elde ederiz. $z \geq Z_3$ için

$$\begin{aligned} \frac{V(\xi(z))}{V(z)} &\geq \left(1 - \frac{1}{z - V(z)} \sum_{i=V(z)}^{z-1} p_i \right)^{-(z-V(z))} \\ &\geq \sum_{i=V(z)}^{z-1} p_i \left(\frac{z - V(z) + 1}{z - V(z)} \right)^{z-V(z)+1} \\ &= \sum_{i=V(z)}^{z-1} \frac{p_i}{a(z)} \geq r \end{aligned}$$

olur. Yani, $V(\xi(z))/V(z) \geq r$, $z \geq Z_3$, $V(z) \geq Z_3$ koşulunu sağlayacak bir $Z_4 \geq Z_3$ tam sayısı vardır. Dolayısıyla $z \geq Z_4$ için,

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{V(\xi(z))} &= \prod_{i=V(z)}^{z-1} \left(1 - p_i \frac{V(\xi(i))}{V(i)} \right) \\ &= \prod_{i=V(z)}^{z-1} (1 - rp_i) \\ &\leq \left(1 - \frac{r}{z - V(z)} \sum_{i=V(z)}^{z-1} p_i \right)^{z-V(z)}. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{V(\xi(z))}{V(z)} &\geq r \sum_{i=V(z)}^{z-1} p_i \left(\frac{z - V(z) + 1}{z - V(z)} \right)^{z-V(z)+1} \\ &\geq r^2, \end{aligned}$$

olup, bu şekilde devam edersek,

$$\frac{V(\xi(z))}{V(z)} \geq r^k, \quad z \geq Z_{k+2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

elde ederiz. Diğer taraftan, (2.23)'den, $V(\xi(z))/V(z) < 1/p(z)$ ve koşul (i) gereği $\liminf_{z \rightarrow \infty} V(\xi(z))$ limitinin var olduğunu gösterir. Dolayısıyla bir çelişki elde ederiz. O halde kabulümüz yanlış olup, (2.19) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Açıklama 2.13. Eğer ξ artmayan bir dizi ise (2.20) koşulu koşulu atlanabilir (Zhang and Tian 1998).

3. MATERYAL VE METOT

Bu kısımda birinci mertebeden monoton olmayan sabit katsayılı ve değişken katsayılı gecikmeli fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili sonuçları inceleyeceğiz.

3.1. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Gecikmeli Fark Denklemlerinin Salınımlılığı

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + p(z) V(h(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (3.1)$$

Burada,

$$\Delta V(z) = V(z+1) - V(z), \quad p(z) \geq 0, \quad h(z) \leq z, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$g(z) = \max_{j \leq z} \{h(j)\}, \quad z \geq 0.$$

şeklinde bir dizi tanımlayalım. Burada, $g(z)$ azalmayandır ve tüm $t \geq 0$ için $g(z) \geq h(z)$ olur.

Braverman ve Karpuz (2011) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.14. *Eğer*

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=g(z)}^z p(j) \prod_{i=h(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)} > 1 \quad (3.2)$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Braverman and Karpuz 2011).

İspat Kabul edelim ki $V(z)$, (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O halde tüm $z_1 \geq z_0$ için $V(z), V(h(z)), V(g(z)) \geq 0$ olacak şekilde $z \geq z_1$ vardır. (3.1)'den $\Delta V(z) \leq 0$ olup, $V(z)$ artmayan olur..

(3.1)'den $V(z)$ artmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\Delta V(z) + p(z) V(z) \leq 0. \quad (3.3)$$

Şimdi, (3.3) eşitsizliğini $V(z)$ 'e bölelim.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V(z) + p(z)V(z)}{V(z)} &\leq 0, \\
 \frac{V(z+1) - V(z) + p(z)V(z)}{V(z)} &\leq 0, \\
 \frac{V(z+1) + V(z)[p(z) - 1]}{V(z)} &\leq 0, \\
 \frac{V(z+1)}{V(z)} + p(z) - 1 &\leq 0, \\
 \frac{V(z+1)}{V(z)} &\leq 1 - p(z)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. $z \geq m \geq z_1$ olacak şekilde bir m sayısı olsun. (3.4) denkleminde m 'den $z-1$ 'e çarpım alalım. Böylece

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=m}^{z-1} \frac{V(j+1)}{V(j)} &\leq \prod_{j=m}^{z-1} [1 - p(j)], \\
 \frac{V(z)}{V(m)} &\leq \prod_{j=m}^{z-1} [1 - p(j)], \\
 V(z) &\leq V(m) \prod_{j=m}^{z-1} [1 - p(j)], \\
 V(m) &\geq V(z) \prod_{j=m}^{z-1} \frac{1}{1 - p(j)}
 \end{aligned}$$

Grönwall eşitsizliğini elde ederiz.

(3.1) denkleminde $g(z)$ 'den z 'e toplam alalım.

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=g(z)}^z \Delta V(j) + \sum_{j=g(z)}^z p(j)V(g(j)), \\
 &= \sum_{j=g(z)}^z (V(z+1) - V(z)) + \sum_{j=g(z)}^z p(j)V(g(j)), \\
 &= V(z+1) - V(g(z)) + \sum_{j=g(z)}^z p(j)V(g(j)).
 \end{aligned}$$

olur. Elde ettiğimiz Grönwall eşitsizliğini kullanırsak,

$$V(g(j)) \geq V(g(z)) \prod_{j=g(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1 - p(j)}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
 0 &\geq V(z+1) - V(g(z)) + \sum_{j=g(z)}^z p(j) V(g(z)) \prod_{i=g(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)}, \\
 0 &\geq V(z+1) - V(g(z)) + V(g(z)) \sum_{j=g(z)}^z p(j) \prod_{i=g(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)}, \\
 0 &\geq V(z+1) + V(g(z)) \left[\sum_{j=g(z)}^z p(j) \prod_{i=g(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. (3.2) koşulunu ve elde ettiğimiz (3.5) eşitsizliğine baktığımız zaman, $0 > 0$ olduğunu görürüz. O halde bu bir çelişki olup, (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.15. Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + p(z) V(h(z)) = 0, \quad z \geq 0. \tag{3.6}$$

Burada,

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & z = 2k, \\ \frac{1}{3}, & z = 2k+1, \end{cases} \quad \text{ve} \quad h(z) = \begin{cases} z-1, & z = 2k, \\ z-2, & z = 2k+1. \end{cases}$$

şeklinde dir. Karşılaştırma yöntemiyle, eğer aşağıda verilen denklem,

$$\Delta V(z) + p(z) V(z-1) = 0, \quad z \geq 0. \tag{3.7}$$

salınımlı ise (3.6) denkleminde salınımlıdır. $\lambda \in (0, 3)$ için,

$$\lambda \prod_{j=z-1}^{z-1} (1 - \lambda p(j)) = \begin{cases} \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right), & z = 2k, \\ \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right), & z = 2k+1 \end{cases}$$

olmak üzere bu ifadenin supremum değerini hesaplayalım.

$$\sup_{\substack{z \geq 1 \\ \lambda \in (0,3)}} \left\{ \lambda \prod_{j=z-1}^{z-1} (1 - \lambda p(j)) \right\} = \sup_{z \geq 0} \left\{ \frac{1}{4p(z)} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{4}, 1 \right\} = 1.$$

(3.7)'den salınımlı olup olmadığı hakkında yorum yapamıyoruz. Ama aşağıdaki ifadeyi hesapladığımızda

$$\sum_{j=g(z)}^z p(j) \prod_{i=h(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)} = \begin{cases} \frac{11}{12}, & z = 2k, \\ \frac{5}{4}, & z = 2k+1, \end{cases}$$

olup, buradan

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=g(z)}^z p(j) \prod_{i=h(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)} = \frac{5}{4} = 1.25 > 1$$

olduğunu görebiliriz. Böylece, (3.6) denkleminin tüm çözümlerinin salınlı olduğunu söyleyebiliriz (Braverman and Karpuz 2011).

3.2. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Gecikmeli Fark Denklemlerinin Salınlılığı

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (3.8)$$

Burada, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(p_i(z))$ ve $(\xi_i(z))$ negatif olmayan pozitif gerçel sayı dizileri ve

$$z \geq 0 \quad \text{için} \quad \xi_i(z) \leq z - 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_i(z) = \infty \quad (3.9)$$

şeklinde dir. Ayrıca

$$w = - \min_{\substack{z \geq 0 \\ 1 \leq i \leq m}} \{\xi_i(z)\}$$

olarak tanımlanır. (3.9) sağlandığında w sonlu bir pozitif tamsayıdır.

Chatzarakis vd. (2013) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.16. $1 \leq i \leq m$ için $\xi_i(z)$ ler artan olmak üzere, (3.9) sağlansın ve

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^z p_i(j) > 1 \quad (3.10)$$

olsun. Böylece (3.8) denkleminin tüm çözümleri salınlıdır. Burada $\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\xi_i(z)\}$ olarak tanımlanmıştır (Chatzarakis et al. 2013).

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.8) denkleminin salınlı bir çözümünün $(V(z))_{z \geq -w}$ olduğunu varsayalım. O halde, bu çözüm ya sonlu bir terimden sonra pozitif ya da negatiftir.

$(-V(z))_{z \geq -w}$ ifadeside (3.8) denkleminin bir çözümü olduğundan, genelliği kaybetmeden $V(z) > 0$ 'ın yeterince büyük z değerleri için geçerli olduğunu varsayabiliriz. $z_1 \geq -w$ öyle bir tam sayı olsun ki, $V(z) > 0$ tüm $z \geq z_1$ için sağlansın. O halde $z_2 \geq z_1$ şeklinde bir tam sayı mevcuttur öyle ki:

$$V(\xi_i(z)) > 0, \quad \forall z \geq z_2 \quad 1 \leq i \leq m.$$

Böylece, (3.8) denklemi aşağıdaki halini alır.

$$\Delta V(z) = - \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) \leq 0, \quad \forall z \geq z_2,$$

bu durum $(V(z))$ dizisinin azalan olduğunu gösterir.

$\xi(z)$ tanımından ve $V(z)$ azalan olmasını kullanırsak, (3.8) denklemini $\xi(z)$ 'den z 'e toplam alırsak,

$$\begin{aligned} 0 &= V(z+1) - V(\xi(z)) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j) V(\xi_i(j)) \\ &\geq V(z+1) - V(\xi(z)) + V(\xi(z)) \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j), \quad \forall z \geq z_2, \end{aligned}$$

ya da

$$V(\xi(z)) \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j) - 1 \right] \leq 0$$

olur. Sonuç olarak,

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j) \leq 1,$$

elde edilir ki bu da (3.10) ile çelişir. Kabul ettiğimiz $V(z)$ çözümü yoktur, o zaman (3.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.17. Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini ele alalım.

$$\Delta V(z) + \frac{c}{3z} V([0.5z]) + \frac{2c}{3z} V([z^{0.5}]) = 0, \quad z \geq 4, \quad (3.11)$$

burada $c = \frac{3}{2 \ln 2}$ 'dir.

Burada $\xi_1(z) = [0.5z]$ ve $\xi_2(z) = [z^{0.5}]$, sırasıyla $0.5z$ ve $z^{0.5}$ 'in tam sayı kısımlarını

temsil eder. $\xi_1(z)$ ve $\xi_2(z)$ artan olduğunu, $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_1(z) = +\infty$ ve $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_2(z) = +\infty$ sağlandığı gözlemlenebilir. Ayrıca tüm $z \geq 4$ için,

$$\begin{aligned}\xi_1(z) &= [0.5z] \leq 0.5z < z & \text{veya} & \xi_1(z) \leq z - 1, \quad \forall z \geq 4, \\ \xi_2(z) &= [z^{0.5}] \leq z^{0.5} < z & \text{veya} & \xi_2(z) \leq z - 1, \quad \forall z \geq 4\end{aligned}$$

olur. Açıkça görünüyor ki $\forall z \geq 4$ için $\xi_1(z) \geq \xi_2(z)$. Dolayısıyla,

$$\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq 2} \xi_i(z) = \xi_1(z) = [0.5z], \quad \forall z \geq 4$$

olur. Şimdi aşağıdaki ifadeyi göstereceğiz.

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j) = \limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=[0.5z]}^z p_i(j) > 1.$$

Gerçekten de,

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=[0.5z]}^z p_i(j) = \sum_{j=[0.5z]}^z \left(\frac{c}{3j} + \frac{2c}{3j} \right) = \sum_{j=[0.5z]}^z \frac{c}{j}.$$

olup, pozitif azalan bir fonksiyon olan $f(x)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\int_{b-1}^b f(x) dx \geq f(b) \geq \int_b^{b+1} f(x) dx.$$

Dolayısıyla,

$$\sum_{j=[0.5z]}^z \frac{c}{j} \geq c \sum_{j=[0.5z]}^z \int_j^{j+1} \frac{ds}{s} = c \int_{[0.5z]}^{z+1} \frac{ds}{s} = c \ln \frac{z+1}{[0.5z]}$$

ve

$$\sum_{j=[0.5z]}^z \frac{c}{j} \geq c \sum_{j=[0.5z]}^z \int_{j-1}^j \frac{ds}{s} = c \int_{[0.5z]-1}^z \frac{ds}{s} = c \ln \frac{z}{[0.5z]-1}$$

olup,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} c \ln \frac{z+1}{[0.5z]} = \lim_{z \rightarrow \infty} c \ln \frac{z}{[0.5z]-1} = c \ln 2 = \frac{3}{2 \ln 2} \ln 2 = \frac{3}{2}$$

elde ederiz. Buradan şu sonuç çıkar

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=[0.5z]}^z \frac{c}{j} = \frac{3}{2}$$

olur ve dolayısıyla,

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j) = \limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=[0.5z]}^z \frac{c}{j} = \frac{3}{2} > 1$$

olup, buradan Teorem 3.16'nın koşulları sağlanır ve böylece (3.11) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Chatzarakis vd. (2013) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.18. $1 \leq i \leq m$ için $(\xi_i(z))$ ler artan olmak üzere (3.9) sağlansın. Eğer

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m p_i(z) > 0 \quad (3.12)$$

ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) > \frac{1}{e} \quad (3.13)$$

ise, (3.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Chatzarakis et al. 2013).

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.8) denkleminin salınımsız bir çözümünün $(V(z))_{z \geq -w}$ olduğunu varsayalım. O halde bu çözüm ya sonlu bir terimden sonra pozitif ya da negatiftir. $(-V(z))_{z \geq -w}$ ifadesinde (3.8) denkleminin bir çözümü olduğundan, genelliği kaybetmeden $V(z) > 0$ 'ın yeterince büyük z değerleri için geçerli olduğunu varsayabiliriz. $z_1 \geq -w$ öyle bir tam sayı olsun ki, $V(z) > 0$ tüm $z \geq z_1$ için sağlansın. O halde $z_2 \geq z_1$ şeklinde bir tam sayı mevcuttur öyle ki,

$$V(\xi_i(z)) > 0, \quad \forall z \geq z_2 \quad 1 \leq i \leq m$$

olur. O zaman (3.8) denklemi aşağıdaki halini alır.

$$\Delta V(z) = - \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) \leq 0, \quad \forall z \geq z_2,$$

bu da $(V(z))$ dizisinin azalan olduğunu gösterir.

Aşağıdaki şekilde $b_i(z)$ 'i tanımlayalım,

$$b_i(z) = \left(\frac{z - \xi_i(z)}{z - \xi_i(z) + 1} \right)^{z - \xi_i(z) + 1}, \quad z \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.14)$$

Açıkça görülür ki,

$$\frac{1}{4} \leq b_i(z) \leq \frac{1}{e}, \quad z \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.15)$$

olup, (3.13) ifadesine göre, $z_0 \geq z_2$ tamsayısı ve küçük bir pozitif sayı ε_0 mevcuttur öyle ki,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) > \frac{1}{e} + \varepsilon_0, \quad z \geq z_0 \text{ için} \quad (3.16)$$

olur.

$$d = e \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0 \right) \quad (3.17)$$

tanımlayalım. (3.15), (3.16) ve (3.17) ifadelerini birleştirirsek,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{p_i(j)}{b_i(z)} &\geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{p_i(j)}{\frac{1}{e}} = e \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) \\ &> e \left(\frac{1}{e} + \varepsilon_0 \right) = d \\ &> 1 \end{aligned}$$

ya da

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{p_i(j)}{b_i(z)} > d > 1 \quad (3.18)$$

olur. $(V(z))$ dizisi azalan olduğundan,

$$\frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} > 1 \quad \text{tüm } z \geq z_0 \text{ ve } 1 \leq i \leq m \text{ için} \quad (3.19)$$

olup, (3.8) denklemine göre,

$$\frac{V(z+1)}{V(z)} = 1 - \sum_{i=1}^m p_i(z) \frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} \quad \text{tüm } z \geq z_0 \text{ için} \quad (3.20)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{V(\xi_i(z))} &= \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{V(j+1)}{V(j)} \\ &= \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i(j) \frac{V(\xi_i(j))}{V(j)} \right) \\ &\leq \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i(j) \right) \end{aligned}$$

ya da

$$\frac{V(z)}{V(\xi_i(z))} \leq \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i(j) \right) \quad (3.21)$$

elde ederiz. (3.21) eşitsizliğinde aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{V(\xi_i(z))} &\leq \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i(j) \right) \\ &\leq \left[1 - \frac{1}{z - \xi_i(z)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) \right]^{z - \xi_i(z)} \end{aligned}$$

ya da

$$\frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} \geq \left[1 - \frac{1}{z - \xi_i(z)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) \right]^{-(z-\xi_i(z))} \quad (3.22)$$

buluruz.

$$z(1-z)^p \leq \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}, \quad \forall z \in (0, 1), \quad p \in \mathbb{N},$$

yukarıda verilen ifade göz önüne alındığında, (3.22) eşitsizliği

$$\frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) \left(\frac{z - \xi_i(z) + 1}{z - \xi_i(z)} \right)^{z-\xi_i(z)+1}. \quad (3.23)$$

ifadesini sağlar. Diğer taraftan, (3.23), (3.14) ve (3.14) ifadelerini birleştirirsek,

$$\frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{p_i(j)}{b_i(z)} \geq d \quad \text{tüm } z \geq z_0 \text{ için} \quad (3.24)$$

buluruz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{V(z)}{V(\xi_i(z))} &= \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{V(j+1)}{V(j)} \\ &= \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \left(1 - \sum_{i=1}^m p_i(j) \frac{V(\xi_i(j))}{V(j)} \right) \\ &\leq \prod_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \left(1 - d \sum_{i=1}^m p_i(j) \right) \\ &\leq \left[1 - \frac{d}{z - \xi_i(z)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) \right]^{z-\xi_i(z)} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} \geq d \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \frac{p_i(j)}{b_i(z)} < d^2 \quad \text{tüm } z \geq z_3 \geq z_0 \text{ için}$$

olup, bu işlemi l kez uygularsak,

$$\frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} > d^l \quad \text{yeterince büyük } z \text{ için} \quad (3.25)$$

elde edriz. Ayrıca (3.12) ifadesi sağlandığı için

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m p_i(q(z)) \geq c > 0,$$

koşulunu sağlayan bir tamsayı alt dizisi $(q(z))$ vardır. (3.20)'ye göre

$$0 < \frac{V(z+1)}{V(z)} = 1 - \sum_{i=1}^m p_i(z) \frac{V(\xi_i(z))}{V(z)}$$

ya da

$$\frac{V(\xi(z))}{V(z)} \sum_{i=1}^m p_i(z) < 1$$

olup, burada $\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \xi_i(z)$ şeklinde tanımlanmıştır. Böylece,

$$\frac{V(\xi(q(z)))}{V(z)} \sum_{i=1}^m p_i(q(z)) < 1$$

veya

$$\frac{V(\xi(q(z)))}{V(z)} < \frac{1}{\sum_{i=1}^m p_i(q(z))} \leq \frac{1}{c} < +\infty \quad \text{yeterince büyük } z \text{ için}$$

olur. Yani, $\liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{V(\xi(z))}{V(z)}$ mevcuttur. Elde ettiğimiz bu ifade (3.25) ile çelişir. Kabul ettiğimiz $V(z)$ çözümü yoktur, o halde (3.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.19. Aşağıda verilen gecikmeli fark denklemini ele alalım.

$$\Delta V(z) + \frac{c}{(z+1) \ln(z+1)} V([z^{0.5}]) + \frac{1}{10e} V(z-3) = 0, \quad z \geq 5, \quad (3.26)$$

burada $c = \frac{8}{10e \ln 2}$ 'dir.

Ayrıca, $\xi_1(z) = [z^{0.5}]$ ve $\xi_2(z) = z-3$, $z^{0.5}$ 'in tam sayı kısımlarını temsil eder. $\xi_1(z)$ ve $\xi_2(z)$ artan olduğu, $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_1(z) = +\infty$ ve $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_2(z) = +\infty$ sağlandığı gözlemlenebilir.

Diğer taraftan

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 p_i(z) = \limsup_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{c}{(z+1) \ln(z+1)} + \frac{1}{10e} \right] = \frac{1}{10e} > 0.$$

olup, Örnek 3.17'deki benzer bir prosedür ile

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(c \ln \frac{\ln(z+1)}{\ln([z^{0.5}]+1)} + \frac{3}{10e} \right) &\leq \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) \\ &\leq \lim_{z \rightarrow \infty} \left(c \ln \frac{\ln(z)}{\ln([z^{0.5}])} + \frac{3}{10e} \right), \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) = \frac{11}{10e}.$$

buluruz. Bu sonuç, $\frac{11}{10e} < \frac{1}{e}$ olduğundan, Teorem 3.18'in koşulunu sağlar. Dolayısıyla (3.26) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Chatzarakis et al. 2013).

Aşağıda verilen gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (3.27)$$

Burada, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(p_i(z))$ ve $(\xi_i(z))$ negatif olmayan gerçektek sayı dizileridir.

$$z \geq 0 \quad \text{ için } \quad \xi_i(z) \leq z - 1 \quad \text{ ve } \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_i(z) = \infty. \quad (3.28)$$

Aşağıdaki gibi h fonksiyonunu tanımlayalım.

$$h_i(z) = \max_{s \leq z} \{\xi_i(s)\}, \quad z \geq 0 \quad \text{ ve } \quad h(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{h_i(z)\}. \quad (3.29)$$

Açıkça, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $h_i(z)$ azalmayan ve tüm $z \geq 0$ için $\xi_i(z) \leq h_i(z) \leq h(z)$ 'dir.

Önteorem 3.20. (3.27) sağlansın ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) = \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j).$$

olur. Burada $h(z)$ (3.29)'deki gibi tanımlanmıştır ve $\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\xi_i(z)\}$ dir.

Önteorem 3.21. Eğer $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $p_i(z) > 0$ ve $V(z)$ pozitif bir çözüm olsun.

$$\Delta V(z) + \left(\sum_{i=1}^m p_i(z) \right) V(z) \leq 0, \quad z \geq s.$$

O halde,

$$V(s) \geq \prod_{j=s}^{z-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(j)\right)} V(z), \quad z \geq s$$

olur.

Kılıç ve Öcalan (2020) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.22. (3.28) sağlansın. Eğer $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $\xi_i(z)$ monoton olması gerekmeyen diziler ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} > \frac{1}{e} \quad (3.30)$$

ise (3.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $h(z)$ (3.29)'deki gibi tanımlanmıştır ve $\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\xi_i(z)\}$ dir (Kılıç and Öcalan 2020).

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.27) denkleminin salınımsız bir pozitif $V(z)$ çözümünün var olduğunu varsayalım. O zaman $z_1 > z_0$ için $V(z), V(\xi(z)), V(h(z)) > 0$ olur. (3.27) ifadesinden

$$\Delta V(z) = - \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) \leq 0.$$

olur. $(V(z))$ 'nin artmayan pozitif sayı dizisi olduğu anlamına gelir, bunu göz önünde bulundurarak ve tüm $z \geq 0$ için $\xi_i(z) \leq h_i(z) \leq h(z)$ olduğunu dikkate alarak,

$$\Delta V(z) + \left(\sum_{i=1}^m p_i(z) \right) V(h(z)) \leq 0 \quad (3.31)$$

ve

$$\Delta V(z) + \left(\sum_{i=1}^m p_i(z) \right) V(z) \leq 0 \quad (3.32)$$

olur. (3.32) ifadesinden Önteorem 3.20'yi elde ederiz. Diğer yandan Önteorem 3.21'den,

$$\begin{aligned} & \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \\ &= \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \end{aligned}$$

buluruz. Buradan $c > 0$ sabiti vardır, öyle ki,

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \geq c > \frac{1}{e}, \quad z \geq z_2 > z_1 \quad (3.33)$$

olur. Şimdi (3.27)'yi $V(z)$ ile bölersek

$$\frac{\Delta V(z)}{V(z)} + \sum_{i=1}^m p_i(z) \frac{V(\xi_i(z))}{V(z)} = 0 \quad (3.34)$$

bulunur. (3.34) denkleminde $h(z)$ 'den $z-1$ ' e toplam alalım. *Önteoram* 3.21'ü göz önünde bulundurduğumuzda $(V(z))$ 'nin artmadığı ve $(h(z))$ 'nin azalmadığı görürüz. O halde

$$\sum_{j=h(z)}^{z-1} \frac{\Delta V(j)}{V(j)} + \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \frac{V(\xi_i(j))}{V(j)} \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \leq 0 \quad (3.35)$$

olup, $\sum_{j=h(z)}^{z-1} \frac{\Delta V(j)}{V(j)} \geq \ln \frac{V(z)}{V(h(z))}$ ve $\frac{V(h(z))}{V(z)} > 1$ olduğu için, (3.35)'den,

$$\ln \frac{V(z)}{V(h(z))} + \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \leq 0,$$

ve

$$\frac{V(h(z))}{V(z)} \geq \exp \left\{ \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \right\} \quad (3.36)$$

buluruz. (3.33) ve (3.36)'dan,

$$\frac{V(h(z))}{V(z)} \geq e^c \geq ec$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliği (3.31)'de kullanırsak,

$$\Delta V(z) + \left(\sum_{i=1}^m p_i(z) \right) ecV(z) \leq 0$$

buluruz. Bu nedenle, yukarıdaki prosedürü tekrarlayarak, herhangi bir pozitif tamsayı k için

$$\frac{V(h(z))}{V(z)} \geq (ec)^k, \quad \text{yeterince büyük } z\text{'ler için} \quad (3.37)$$

elde ederiz. (3.33)'den tüm $z \geq z_1$ için $z^* \in (h(z), z]$ olacak şekilde bir z^* vardır, öyle ki

$$\sum_{j=h(z)}^{z^*-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \geq \frac{c}{2} \quad (3.38)$$

ve

$$\sum_{j=z^*}^z \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \geq \frac{c}{2}$$

olur. (3.38)'den $h(z)$ 'den $z^* - 1$ ' e toplam alalım ve *Önteorom 3.21*'i kullanırsak

$$V(z^*) - V(h(z)) + \sum_{j=h(z)}^{z^*-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) V(\xi_i(j)) = 0$$

ya da

$$V(z+1) - V(h(z)) + \sum_{j=h(z)}^{z^*-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) V(h(j)) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \leq 0$$

ya da

$$-V(h(z)) + V(h(z^*)) \sum_{j=h(z)}^{z^*-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \leq 0 \quad (3.39)$$

olur. (3.38) ve (3.39)'dan,

$$V(h(z^*)) \frac{c}{2} \leq V(h(z)) \quad (3.40)$$

olur. (3.38)'den z^* 'dan z 'e toplam alalım ve *Önteorom 3.21*'i kullanırsak

$$V(z+1) - V(z^*) + V(h(z)) \sum_{j=z^*}^z \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \leq 0$$

olup,

$$V(h(z)) \frac{c}{2} \leq V(z^*) \quad (3.41)$$

elde ederiz. (3.40) ve (3.41)'i kullanırsak,

$$V(z^*) \geq V(h(z)) \frac{c}{2} \geq V(h(z^*)) \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

ya da

$$\begin{aligned} V(z^*) &\geq V(h(z^*)) \left(\frac{c}{2}\right)^2, \\ \frac{V(h(z^*))}{V(z^*)} &\leq \left(\frac{2}{c}\right)^2 < +\infty \end{aligned}$$

olur. Yani, $\liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{V(h(z))}{V(z)}$ vardır, Bu durum (3.37) ile çelişir. Kabul ettiğimiz pozitif $V(z)$ çözümü yoktur, o halde (3.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Sonuç 3.23. (3.30)'un geçerli olduğunu varsayalım. $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $\xi_i(z)$ monoton olmayan ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) = \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) > \frac{1}{e} \quad (3.42)$$

ise (3.27) denkleminin tüm çözümü salınımlıdır. Burada, $\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\xi_i(z)\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.24. Aşağıda verilen gecikmeli fark denklemini ele alalım

$$\Delta V(z) + (0,0167)V(z-10) + (0,020)V(z-11) = 0, \quad z \in \mathbb{N}. \quad (3.43)$$

Burada

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=z-10}^z \sum_{i=1}^2 p_i(j) \cong 0,4037$$

ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=z-10}^z \sum_{i=1}^2 p_i(j) \cong 0,367 < \frac{1}{e}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu sonuçlar (3.42) koşulunun bu denklem için geçerli olmadığı anlamına gelir.

Diğer yandan,

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=z-10}^z \sum_{i=1}^2 p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{j-11} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^2 p_k(l)\right)} \cong 0,5 < 1$$

ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=z-10}^z \sum_{i=1}^2 p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{j-11} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^2 p_k(l)\right)} \cong 0,374 > \frac{1}{e}$$

ifadeleri elde edilir. Böylece Teorem 3.22'nin koşulu sağlanır ve dolayısıyla (3.43) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (3.44)$$

Burada $\Delta V(z) = V(z+1) - V(z)$ 'dir. $\forall 1 \leq i \leq m$ için $(p_i(z))_{z \geq 0}$ negatif olmayan gerçel sayı dizisidir. $\forall 1 \leq i \leq m$ için $(\xi_i(z))_{z \geq 0}$ tamsayı dizisi ve aşağıdaki koşulları sağlar.

$$z \geq 0 \text{ için } \xi_i(z) \leq z - 1 \text{ ve } \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_i(z) = \infty. \quad (3.45)$$

Aşağıdaki gibi h fonksiyonunu tanımlayalım.

$$h_i(z) = \max_{s \leq z} \{\xi_i(s)\}, \quad z \geq 0 \text{ ve } h(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{h_i(z)\}. \quad (3.46)$$

Açıkça, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(h_i(z))$ azalmayan ve tüm $z \geq 0$ için $\xi_i(z) \leq h_i(z) \leq h(z) \leq z - 1$ 'dir. Ayrıca

$$w = - \min_{\substack{z \geq 0 \\ 1 \leq i \leq m}} \xi_i(z)$$

olarak tanımlanır. (3.45) sağlandığında w sonlu bir pozitif tamsayıdır. Aşağıdaki basit sonuç, neden yalnızca bu durumu ele alabileceğimizi açıklamak için alıntılanmıştır:

$$\sum_{i=1}^m p_i(z) < 1, \quad z \geq 0. \quad (3.47)$$

Chatzarakis vd. (2018) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.25. (3.45) ve (3.47) koşullarının sağlandığını ve $h(z)$ 'nin (3.46) ile tanımlandığını varsayalım. Eğer $l \in \mathbb{N}$ için

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_l(i)} > 1 \quad (3.48)$$

ise (3.44) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada

$$P_l(z) = P(z) \left[1 + \sum_{i=\xi(z)}^{z-1} P(i) \prod_{j=\xi(i)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_{l-1}(j)} \right] \quad (3.49)$$

ve tüm $z \geq 0$ için $P(z) = \sum_{i=1}^m p_i(z)$ ve $P_0(z) = P(z)$ 'dir (Chatzarakis et al. 2018).

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.44) denkleminin salınımsız bir çözümünün $(V(z))_{z \geq -w}$ olduğunu varsayalım. $V(z) > 0$ koşulunu tüm $z \geq z_1$ için sağlayan bir $z_1 \geq -w$ tamsayısı seçelim. O zaman tüm $z \geq z_2$ için $V(\xi_i(z)) > 0$ olacak şekilde bir $z_2 \geq z_1$ bulunur. Bu durumda (3.44) denklemi

$$\Delta V(z) = - \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) \leq 0, \quad \text{tüm } z \geq z_2 \text{ için}$$

şeklini alır. Bu $(V(z))$ dizisinin azalmayan bir pozitif sayı dizisi olduğunu gösterir. $\xi_i(z) < z$ olduğundan (3.44) denklemi

$$\Delta V(z) + \left(\sum_{i=1}^m p_i(z) \right) V(z) \leq 0 \quad \text{veya} \quad \Delta V(z) + P(z) V(z) \leq 0, \quad z \geq z_2, \quad (3.50)$$

anlamına gelir. (3.50)'ye ayrık Grönwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$V(k) \geq V(z) \prod_{i=k}^{z-1} \frac{1}{1 - P(i)}, \quad \text{tüm } z \geq k \geq z_2 \text{ için} \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.44) denklemini $\xi(z)$ 'den $z-1$ 'e topladığımızda,

$$V(z) - V(\xi(z)) + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) V(\xi_i(j)) = 0$$

veya

$$V(z) - V(\xi(z)) + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \left(\sum_{i=1}^m p_i(j) \right) V(\xi(j)) \leq 0$$

veya

$$V(z) - V(\xi(z)) + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) V(\xi(j)) \leq 0 \quad (3.52)$$

olur. $\xi(j) \leq h(j) \leq h(z)$ olduğundan, (3.51) Grönwall eşitsizliğinden,

$$V(\xi(j)) \geq V(h(z)) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P(i)} \quad (3.53)$$

buluruz. (3.52) ve (3.53) birleştirilirse

$$V(z) - V(\xi(z)) + V(h(z)) \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P(i)} \leq 0$$

olur. Bu eşitsizliği $P(z)$ ile çarparsak

$$P(z) V(z) - P(z) V(\xi(z)) + P(z) V(h(z)) \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P(i)} \leq 0 \quad (3.54)$$

ifadesini elde ederiz. Ayrıca,

$$\Delta V(z) = - \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) \leq -V(\xi(z)) \sum_{i=1}^m p_i(z)$$

olup, buradan

$$\Delta V(z) \leq -P(z) V(\xi(z))$$

ifadesini elde ederiz. Bu göz önüne alındığında (3.54) şunu verir;

$$\Delta V(z) + P(z)V(z) + P(z)V(h(z)) \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P(i)} \leq 0$$

ve $h(z) \leq z$ olduğundan son eşitsizlik;

$$\Delta V(z) + P(z)V(z) + P(z)V(z) \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P(i)} \leq 0,$$

veya

$$\Delta V(z) + P(z) \left[1 + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P(i)} \right] V(z) \leq 0$$

olur. Bu nedenle,

$$\Delta V(z) + P_1(z)V(z) \leq 0 \quad (3.55)$$

olur. Burada $P_1(z)$ aşağıdaki gibidir,

$$P_1(z) = P(z) \left[1 + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P(i)} \right].$$

Yukarıdaki argümanı tekrarlayarak (3.50) yerine (3.55) kullanıldığında, aşağıdaki yeni bir ifade elde edilir.

$$\Delta V(z) + P_2(z)V(z) \leq 0,$$

burada $P_2(z)$ aşağıdaki gibidir,

$$P_2(z) = P(z) \left[1 + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_1(i)} \right].$$

Tümevarımla devam edersek;

$$\Delta V(z) + P_l(z)V(z) \leq 0$$

olup, burada $P_l(z)$ aşağıdaki gibidir,

$$P_l(z) = P(z) \left[1 + \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} P(j) \prod_{i=\xi(z)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_{l-1}(i)} \right] \quad \text{ve} \quad V(\xi(j)) \geq V(h(z)) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_l(i)}. \quad (3.56)$$

(3.44) denklemini $h(z)$ 'den z 'e topladığımızda,

$$V(z+1) - V(h(z)) + \sum_{j=h(z)}^z \sum_{i=1}^m p_i(j)V(\xi_i(j)) = 0$$

veya

$$V(z+1) - V(h(z)) + \sum_{j=h(z)}^z \left(\sum_{i=1}^m p_i(j) \right) V(\xi(j)) \leq 0$$

olur. Yani,

$$V(z+1) - V(h(z)) + \sum_{j=h(z)}^z P(j) V(\xi(j)) \leq 0$$

buluruz. (3.56) eşitsizliğini dikkate alarak, bu son eşitsizlik

$$V(z+1) - V(h(z)) + V(h(z)) \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_l(i)} \leq 0 \quad (3.57)$$

şeklini alır. Eğer sol taraftaki $V(z+1) > 0$ terimini ihmal edersek,

$$-V(h(z)) + V(h(z)) \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_l(i)} < 0$$

veya

$$V(h(z)) \left[\sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_l(i)} - 1 \right] < 0$$

olur. Yani,

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1-P_l(i)} \leq 1$$

anlamına gelir. (3.48) koşulu ile çelişir. Kabul ettiğimiz salınımsız $V(z)$ çözümü yoktur, o zaman (3.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.26. Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \frac{2}{25} V(\xi_1(z)) + \frac{1}{25} V(\xi_2(z)) + \frac{1}{50} V(\xi_3(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (3.58)$$

Burada gecike fonksiyonları şu şekilde tanımlanmıştır

$$\xi_1(z) = \begin{cases} z = 5\psi & \text{ise } z - 2 \\ z = 5\psi + 1 & \text{ise } z - 1 \\ z = 5\psi + 2 & \text{ise } z - 1 \\ z = 5\psi + 3 & \text{ise } z - 7 \\ z = 5\psi + 4 & \text{ise } z - 3 \end{cases}, \quad \xi_2(z) = \xi_1(z) - 1 \text{ ve } \xi_3(z) = \xi_1(z) - 2.$$

Burada $\psi \in \mathbb{N}_0$ 'dır. Açıkça görülür ki;

$$\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq 3} \{\xi_i(z)\} = \xi_1(z).$$

olur. Diğer taraftan

$$h_1(z) = \begin{cases} z = 5\psi & \text{ise } z - 2 \\ z = 5\psi + 1 & \text{ise } z - 1 \\ z = 5\psi + 2 & \text{ise } z - 1, \quad h_2(z) = h_1(z) - 1 \text{ ve } h_3(z) = h_1(z) - 2. \\ z = 5\psi + 3 & \text{ise } z - 2 \\ z = 5\psi + 4 & \text{ise } z - 3 \end{cases}$$

olup, (3.46) ifadesindeki tanıma göre,

$$h(z) = \max_{1 \leq i \leq 3} \{h_i(z)\} = h_1(z)$$

olur. $F : \mathbb{N}_0 \rightarrow R_+$ şeklinde tanımlanan fonksiyon

$$F_l(z) = \sum_{j=1}^3 P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_l(i)}$$

olup, burada $P(z) = \sum_{i=1}^3 p_i(z) = \frac{7}{50}$, $\forall l \in \mathbb{N}$ için maksimum değerini $z = 5\psi$ noktalarında alır.

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \sum_{j=1}^3 P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_l(i)} \\ &= \sum_{j=1}^3 P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \left(1 - P(i) \left[1 + \sum_{k=\xi(i)}^{i-1} P(k) \prod_{m=\xi(ik)}^{h(i)-1} \frac{1}{1 - P(m)} \right] \right)^{-1}, \end{aligned}$$

ve böylece,

$$\begin{aligned} F_1(5\psi) &= \sum_{j=5\psi-2}^{5\psi} \frac{7}{50} \prod_{i=\xi(j)}^{5\psi-3} \left(1 - \frac{7}{50} \left[1 + \sum_{k=\xi(i)}^{i-1} \frac{7}{50} \prod_{m=\xi(ik)}^{h(i)-1} \frac{1}{1 - \frac{7}{50}} \right] \right)^{-1} \\ &\cong 1.1823 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \limsup_{z \rightarrow \infty} F_1(z) &= \limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_l(i)} \\ &\cong 1.1823 > 1 \end{aligned}$$

olup, Teorem 3.25'in koşulu sağlanır ve dolayısıyla (3.58) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında monoton olmayan gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için bazı sonuçları elde ettik. Elde ettiğimiz sonuçları bu kısımda özetleyelim.

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım,

$$\Delta V(z) + p(z) V(h(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (4.1)$$

Burada,

$$\Delta V(z) = V(z+1) - V(z), \quad p(z) \geq 0, \quad h(z) \leq z, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty.$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$g(z) = \max_{j \leq z} \{h(j)\} \quad z \geq 0,$$

olup, açık olarak, $g(z)$ azalmayandır ve tüm $t \geq 0$ için $g(z) \geq h(z)$ olur.

Eğer

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=g(z)}^z p(j) \prod_{i=h(j)}^{g(z)-1} \frac{1}{1-p(i)} > 1,$$

ise (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım,

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (4.2)$$

Burada, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(p_i(z))$ ve $(\xi_i(z))$ negatif olmayan gerçel sayı dizileridir.

$$z \geq 0 \quad \text{ için } \quad \xi_i(z) \leq z-1 \quad \text{ ve } \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_i(z) = \infty. \quad (4.3)$$

$1 \leq i \leq m$ için $(\xi_i(z))$ ler artan olmak üzere, (4.3) sağlansın. Eğer

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi(z)}^z p_i(j) > 1$$

ise (4.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\xi_i(z)\}$ olarak tanımlanmıştır.

$1 \leq i \leq m$ için $(\xi_i(z))$ ler artan olmak üzere, (4.3) sağlansın. Eğer

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m p_i(z) > 0$$

ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} p_i(j) > \frac{1}{e}$$

ise (4.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (4.4)$$

Burada, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(p_i(z))$ ve $(\xi_i(z))$ negatif olmayan gerçekte sayı dizileridir.

$$z \geq 0 \quad \text{ için } \quad \xi_i(z) \leq z - 1 \quad \text{ ve } \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_i(z) = \infty. \quad (4.5)$$

$$h_i(z) = \max_{s \leq z} \{\xi_i(s)\}, \quad z \geq 0 \quad \text{ ve } \quad h(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{h_i(z)\}. \quad (4.6)$$

Açıkça, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(h_i(z))$ azalmayan ve tüm $z \geq 0$ için $\xi_i(z) \leq h_i(z) \leq h(z)$ olur.

(4.5) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. Eğer $\xi_i(z)$ monoton değilse ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=\xi_i(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} > \frac{1}{e}$$

ise (4.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $h(z)$ (4.6)'da tanımlanmıştır ve

$$\xi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\xi_i(z)\} \text{ dir.}$$

Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \sum_{i=1}^m p_i(z) V(\xi_i(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (4.7)$$

Burada $\Delta V(z) = V(z+1) - V(z)$ 'dir. $\forall 1 \leq i \leq m$ için $(p_i(z))_{z \geq 0}$ negatif olmayan gerçekte sayı dizisidir. $\forall 1 \leq i \leq m$ için $(\xi_i(z))_{z \geq 0}$ tamsayı dizisidir ve aşağıdaki koşulları sağlar.

$$z \geq 0 \quad \text{ için } \quad \xi_i(z) \leq z - 1 \quad \text{ ve } \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_i(z) = \infty. \quad (4.8)$$

Aşağıdaki gibi h fonksiyonunu tanımlayalım.

$$h_i(z) = \max_{s \leq z} \{\xi_i(s)\}, \quad z \geq 0 \quad \text{ve} \quad h(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \{h_i(z)\}. \quad (4.9)$$

Açıkça, $(i = 1, 2, \dots, m)$ için $(h_i(z))$ azalmayan ve tüm $z \geq 0$ için $\xi_i(z) \leq h_i(z) \leq h(z) \leq z - 1$ 'dir. Aşağıdaki basit sonuç, neden yalnızca bu durumu ele alabileceğimizi açıklamak için alıntılanmıştır:

$$\sum_{i=1}^m p_i(z) < 1, \quad z \geq 0. \quad (4.10)$$

(4.8) ve (4.10) koşullarının sağlandığını ve $h(z)$ 'nin (4.9) ile tanımlandığını varsayalım.

Eğer $l \in \mathbb{N}$ için

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_l(i)} > 1,$$

ise (4.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada

$$P_l(z) = P(z) \left[1 + \sum_{i=\xi(z)}^{z-1} P(i) \prod_{j=\xi(i)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_{l-1}(j)} \right].$$

ve tüm $z \geq 0$ için $P(z) = \sum_{i=1}^m p_i(z)$ ve $P_0(z) = P(z)$ olur.

Örnek 3.26'yı tekrar inceleyelim. Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + \frac{2}{25} V(\xi_1(z)) + \frac{1}{25} V(\xi_2(z)) + \frac{1}{50} V(\xi_3(z)) = 0, \quad z \geq 0. \quad (4.11)$$

(4.11) gecikmeli fark denklemi için,

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=h(z)}^z P(j) \prod_{i=\xi(j)}^{h(z)-1} \frac{1}{1 - P_l(i)} \cong 1.1823 > 1,$$

olup tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu elde etmiştik. Ama önceden elde edilen koşulları incelersek,

$$\begin{aligned} \limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=h(z)}^z p_i(j) &= \limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=5\psi}^{5\psi} p_i(j) \\ &= \frac{2}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50} \\ &= 0.14 < \frac{1}{e} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=h(z)}^{z-1} p_i(j) &= \liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=5\psi+1}^{5\psi+4} p_i(j) \\
 &= 4 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50} \right) \\
 &= 0.56 < 1
 \end{aligned}$$

olur. Bu iki koşulu inceldiğimiz zaman çözümlerin salınımlılığı hakkında yorum yapamıyoruz. Ama elde ettiğimiz *Teorem 3.25* ile tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu elde ettik. Yani gözlemleyebiliriz ki *Teorem 3.25* daha iyi bir sonuçtur.

Örnek 3.24'ü tekrar inceleyelim. Aşağıdaki gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\Delta V(z) + (0,0167)V(z-10) + (0,020)V(z-11) = 0, \quad z \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

(4.12) gecikmeli fark denklemi için,

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=\xi(z)}^{z-1} \sum_{i=1}^m p_i(j) \prod_{l=\xi_i(j)}^{h(j)-1} \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^m p_k(l)\right)} \cong 0,374 > \frac{1}{e},$$

olup tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu elde etmiştik. Ama önceden elde edilen koşulları incelersek,

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=z-10}^z \sum_{i=1}^2 p_i(j) \cong 0,4037 < 1$$

ve

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=z-10}^z \sum_{i=1}^2 p_i(j) \cong 0,367 < \frac{1}{e}$$

olur. Bu iki koşulu inceldiğimiz zaman çözümlerin salınımlılığı hakkında yorum yapamıyoruz. Ama elde ettiğimiz *Teorem 3.22* ile tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu elde ettik. Yani gözlemleyebiliriz ki *Teorem 3.22* daha iyi bir sonuçtur.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, monoton olmayan gecikmelere sahip fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılık davranışı detaylı biçimde incelenmiştir. Gecikmeli sistemlerin dinamik yapısını daha karmaşık ve gerçekçi bir şekilde yansıtan monoton olmayan gecikmeler, klasik analiz yöntemlerinin ötesinde bir yaklaşım gerektirmektedir. Bu bağlamda, çalışmada literatürdeki mevcut yöntemler gözden geçirilmiş, ardından monoton olmayan gecikmelere özgü yeni salınımlılık kriterleri elde edilmiştir.

Tez kapsamında geliştirilen kriterler, uygun varsayımlar altında türetilmiş ve çeşitli örnek denklemler üzerinde uygulanarak geçerliliği test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, gecikme fonksiyonunun monoton olmamasının çözümün salınımlı davranışı üzerindeki etkisini açıkça ortaya koymakta ve bu tür sistemlerin analizi için güçlü bir teorik çerçeve sunmaktadır.

Bu çalışmanın, gecikmeli fark denklemlerine yönelik mevcut bilgi birikimine katkı sağladığı ve özellikle monoton olmayan gecikmelerin sistem dinamikleri üzerindeki etkisinin anlaşılmasına yönelik önemli bir adım olduğu düşünülmektedir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda, daha yüksek mertebeden fark denklemleri, değişken katsayılı sistemler ya da rastgele etkiler içeren yapılar üzerinde salınımlılık analizlerinin gerçekleştirilmesi, teorik altyapının daha da derinleştirilmesine olanak sağlayacaktır.

6. KAYNAKLAR

- Agarwal R. P., 2000, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York.
- Agarwal R. P., Grace S. R., O'Regan D., 2000, *Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Braverman, E. and Karpuz, B., 2011, On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays, *Appl. Math. Comput.*, 218, 3880-3887.
- Chatzarakis G. E., Pinelas S., Stavroulakis I. P., 2014, Oscillations of Difference Equations with Several Deviated Arguments, *Aequationes Mathematicae*, 88, 105-123.
- Elaydi S., 2000, *An Introduction to Difference Equations Third Edition*, Springer, New York.
- Erbe L. H., Zhang B. G., 1989, Oscillation of Discrete Analogues of Delay Equations, *Differential Integral Equations*, 2(3), 300-309.
- G. E. Chatzarakis, L. Horvat-Dmitrović and M. Păsić, Oscillation tests for Difference Equations with several non-monotone deviating arguments, *Math. Slovaca* 68 (2018), No. 5, 1083-1096.
- Györi I., Ladas G., 1991, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford.
- Kılıç N., Öcalan Ö., 2020, Oscillation Criteria for Difference Equations with Several Arguments, *International Journal of Difference Equations*, 15(1), 109-119.
- Zhang B. G., Tian C. J., 1998, Nonexistence and existence of positive solutions for difference equations with unbounded delay, *Comput. Math. Appl.*, 36, 1-8.

ÖZGEÇMİŞ

Velican ŞİMŞEK

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022-2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2018-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya