

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI**

Kübra AKBULUT

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2025

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI**

Kübra AKBULUT

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Kübra AKBULUT
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 21/01/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Özkan ÖCAL (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

ÖZET

MONOTON OLMAYAN GECİKMELER İLE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Kübra AKBULUT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCAL

Ocak 2025, 35 sayfa

Bu yüksek lisans tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemleri ile ilgili genel bilgilere ve literatür taramasına yer verilmiştir. İkinci bölümde gecikmeli diferensiyel denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise monoton olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ve birinci mertebeden doğrusal olmayan gecikme diferensiyel denklemlerinin çözümlerine ait salınımlılık kriterlerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma kısmına, beşinci bölümde ise sonuç kısmına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Diferensiyel denklem, Gecikmeli diferensiyel denklem, Monoton olmayan argüman, Salınlımlı çözüm.

JÜRİ: Prof. Dr. Özkan ÖCAL

Prof .Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

ABSTRACT

OSCILLATION BEHAVIOR OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONMONOTONOUS DELAYS

Kübra AKBULUT

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Özkan ÖCAL

January 2025, 35 pages

This master's thesis consists of five chapters. In the first chapter, general information and literature review about delayed differential equations are given. In the second chapter, general definitions and theorems about delayed differential equations are given. In the third chapter, the oscillation criteria for the solutions of the non-monotonic delay differential equation and the first-order non-linear delay differential equations are included. The fourth section includes the findings and discussion section, and the fifth section includes the conclusion.

KEYWORDS : Delayed differential equation, Differential equation,
Non-Monotonic argument, Oscillatory solution.

COMMITTEE : Prof. Dr. Özkan ÖCAL
Prof .Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

ÖNSÖZ

Uygulamalı matematiğin önemli alanlarından birisi olan diferensiyel denklem kavramı birçok bilim insanının dikkatini çekmiştir ve özellikle uygulama alanında birçok çalışmanın temel taşı oluşturmuştur. Ayrıca ele alınan problemlerin birçoğunda, bu problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde diferensiyel denklemlerin yardımı alınmaktadır. Matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler söz konusu olabilir. Böylece diferensiyel denklemlerden farklı olarak gecikmeli diferensiyel denklemler ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasında önceki çalışmalarda yer alan monoton olmayan sabit katsayılı ve değişken katsayılı gecikmeli diferensiyel denklemler çalışılmıştır.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Gecikmeli Diferensiyel Denklemler	4
3. MATERYAL VE METOT	16
3.1. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	16
3.2. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	25
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	32
5. SONUÇLAR	34
6. KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Monoton Olmayan Gecikmeler ile Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılık Davranışı” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

21/01/2025

Kübra AKBULUT



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^+$: Pozitif reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}_+$: $[0, \infty)$

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

μ : Gecikme terimi

$\int$: İntegral sembolü

C : Sürekli fonksiyonların kümesi

e : $\cong 2.7182$

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler gerçek hayatta karşılaştığımız birçok heyecan verici problem için matematiksel model olarak rol oynamasının yanı sıra, sadece bilim ve teknoloji alanında değil, ekonomi, fizyoloji, savunma ve nüfus bilimi gibi bir çok alanda da karşımıza çıkmaktadır. Mühendislik ve matematik biliminin ortak konusu olması diferensiyel denklem gelişimini hızlandırmıştır. Yeni problemler ve yeni denklemlerin üretilmesine neden olmuştur.

Gecikme günlük hayatımızda sürekli karşılaştığımız bir durumdur. Bütün fiziksel sistemlerde uygulanan bir uyancıyla ilgili tepkinin meydana gelmesi arasında muhtemelen kısa olmakla birlikte bir zaman arası olur. Biyolojik sistemlerde gecikme birkaç yüz milisaniye süresindedir ki bu insandaki tepki sürecidir. Bir antenden elektromanyetik dalgaların iletilmesiyle, uzak bir nesneden yansıması alması arasındaki gecikmenin kısa süreli olması başlıca özelliğidir. Dikkate değer bir işlemde gecikmeler mikrosaniye ya da daha kısa zamanla ölçülse de çok önemli olabilir. Teorik bir zaman gecikmesi bir makineye verilen enerji ile alınan randımanla aynı formda bir özelliktir. Uyarıcı $x(p)$, $y(p)$ tepkisiyle sonuçlanır. Burada p zaman, h gecikme olmak üzere $y(p)$ tepkisi $x(p - h)$ 'ye eşit olur. Daha karmaşık sistemlerde birden fazla gecikme olabilir.

Salınımlılık teorisi ise geniş anlamda teknoloji, doğa ve sosyal bilimlerdeki uygulamalı problemlerden kaynaklanan salınımsal olayları inceleyen modern diferensiyel denklemler teorisinin önemli ve köklü bir dalıdır. Ayrıca salınım teorisinin kuramsal yönleri, belirli bir denkleme veya sisteme salınan (periyodik, hemen hemen periyodik vb.) çözümlerinin varlığını, yokluğunu ve bu tür çözümlerin asimptotik davranışlarını tanımlamaktadır. Diğer taraftan salınım teorisi, matematiksel biyolojide yer alan bazı denklemlerin çözümü için de büyük ölçüde önem arz etmektedir. Bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık karakterizasyonları ile ilgili de birçok sonuca yer vermektedir.

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının birçoğunda ele alınan problemlerin matematiksel modellemesine bir diferensiyel denklem karşılık gelmektedir. Ayrıca matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler ortaya çıkabilir. Ortaya çıkan bu gecikmeler göz

önünde bulundurulursa, bu modellemeler adi diferensiyel denklemlerden farklı bir yapı sergilerler. Bu durumda gecikmeli diferensiyel denklemler ortaya çıkar.

Gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar literatüre ilk olarak 1770 yılından sonra girmiştir. Ancak gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan sistematik ve kayda değer çalışmalar son 70 yılda ortaya çıkmıştır. Gecikmeli diferensiyel denklemler, fizik, biyoloji, ekonomi ve fizyoloji gibi bilim dallarında kullanım alanına sahiptirler.

Aşağıdaki 1. mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım.

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(p - \mu_i(p)) = 0, \quad (1.1)$$

burada $i = 1, 2, \dots$ için $l_i \in C[[p_0, \infty), \mathbb{R}]$ ve $\mu_i \in \mathbb{R}^+$.

k , sonsuz bir aralıkta $[a, \infty)$ tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer k fonksiyonu keyfi sayıda sıfıra yerine sahipse salınımlı olduğu söylenir. Yani, her $b > a$ için $k(c) = 0$ olacak şekilde bir $c > b$ noktası vardır. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, eninde sonunda(sonuç olarak) pozitif ya da eninde sonunda negatiftir (Györi and Ladas 1991).

Doğrusal bir diferensiyel denklem için, bir çözümün tersi de aynı denklemin bir çözümüdür ve bu nedenle, eğer bir doğrusal diferensiyel denklem salınımsız bir çözüme sahipse, o zaman sonunda pozitif (veya sonunda negatif) bir çözüme sahiptir.

(1.1) denklemin salınımsız bir çözüme sahip olduğunu kanıtlamak istediğimizde, (1.1) denkleminin sonunda pozitif bir k çözümüne sahip olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

Özellikle son yıllarda literatürde gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım,

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(\mu_i(p)) = 0, \quad (1.2)$$

burada $1 \leq i \leq n$ için $l_i(d) \geq 0$, $\mu_i(p) \leq p$ ve $\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_i(p) = \infty$ dur.

1972 yılında Ladas, Lakshmikantham ve Papadakis, $n = 1$ için (1.2) diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için elde etmişlerdir ki, eğer $\mu(p)$ gecikme terimi

azalmayan ve

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds > 1 \quad (1.3)$$

ise bu durumda (1.2) denklemlerin her çözümü salınımlıdır.

1982 yılında ise Koplatadze ve Canturija, $n = 1$ için (1.2) diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için elde etmişlerdir ki, eğer $\mu(p)$ gecikme terimi monoton olmayan ve

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds > \frac{1}{e} \quad (1.4)$$

ise bu durumda (1.2) denklemlerin her çözümü salınımlıdır.

Daha sonraki yıllarda, $\mu(p)$ gecikme terimi monoton olmayan olmak üzere (1.2) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için (1.3) ve (1.4) şartlarına paralel bir çok yeni kriterler elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında ise, elde edilen bu yeni kriterlerinden bazılarını detaylı bir biçimde incelemeyi hedeflemekteyiz.

Bu yüksek lisans tez çalışmamızda değişken gecikmelere ve katsayılara sahip olan birinci mertebeden diferensiyel denklemleri çalışmayı amaçlamaktayız. Çalışmamızda, (1.2) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için literatürde son yıllarda elde edilen bazı kriterleri detaylı bir şekilde çalışacağız ve bunlar ile ilgili bir çok örnek vermeyi düşünmekteyiz. Dolayısıyla tezimizde yer alacak sonuçların ve örneklerin ilerleyen tarihlerde bu konular üzerinde çalışmalar yapacak lisansüstü öğrenciler için yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında gecikme terimlerinin monoton olmayan argümanlar ve katsayıların birden çok terimli ve değişken olduğu aşağıdaki birinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için son yıllarda literatürde elde edilen kriterler çalışılacaktır

Son olarak ise tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili salınımlılık teorisinde yer alan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Aşağıdaki lineer gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım,

$$k'(p) + \sum_{i=1}^m l_i(p) k(\mu_i(p)) = 0. \quad (2.1)$$

Burada $1 \leq i \leq m$ için, $\mu_i(p) \leq p$ ve $l_i \in C[[p_0, \infty), \mathbb{R}]$ 'dir. Burada $\mu_i(p)$ 'ler (2.1) denklemin gecikme terimleridir, $\mu_i(p) \leq p$ olduğundan (2.1) denklemine gecikmeli diferensiyel denklem denir.

$m=1$ için (2.1) denklemi

$$k'(p) + l(p) k(\mu(p)) = 0 \quad (2.2)$$

şeklini alır.

Tanım 2.1. $1 \leq i \leq m$ için $\mu_i(p) \in \mathbb{R}^+$, $\mu_i(p) = p - \mu_i$ ve $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ olmak üzere $p \geq p_1$ için k , $[p_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve k (2.1) denklemini sağlıyorsa $k \in C[[p_1 - \mu, \infty), \mathbb{R}]$ fonksiyonu (2.1) denkleminin bir çözümüdür ve bu çözüm $[p_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. Bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü k olsun. Eğer $k(p)$ çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse, yani; $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ olacak şekilde bir $\{p_n\}$ dizisi vardır öyle ki $k(p_n) = 0$ ise k çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ya pozitifdir ya da negatiftir. Yani, $\forall p > p_1$ için $k(p) \neq 0$ olacak biçimde bir p_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde et al. 1987).

Aşağıdaki diferensiyel denklemi ele alalım

$$k''(p) - k(-p) = 0,$$

diferensiyel denkleminin $k_1(p) = \sin(p)$ salınımlı bir çözümü, $k_2(p) = e^p + e^{-p}$ ise salınımlı olmayan bir çözümdür. O zaman bu diferensiyel denklemin tüm çözümleri salınımlı değildir denir.

Tanım 2.3. (2.1) denkleminin aşikar olmayan bir k çözümü için, J herhangi bir sayı olmak üzere (J, ∞) aralığında, eğer k çözümü işaret değiştiriyorsa k çözümüne salınımlıdır denir (Ladde et al. 1987).

Şimdi gecikmeli diferensiyel denklemler için salınımlılık koşullarını inceleyelim.

Aşağıda Györi ve Ladas'ın (1991), gecikmeli diferensiyel denklemler için elde etmiş oldukları bazı salınımlılık koşullarına yer verilmiştir.

Teorem 2.4.

$$k'(p) + l(p) k(p - \mu) = 0 \quad (2.3)$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $l, \mu \in \mathbb{R}$. O zaman aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(a) (2.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır;

(b) $l\mu > \frac{1}{e}$ (Györi and Ladas 1991).

Örnek 2.5.

$$k'(p) + \frac{1}{3}k\left(p - \frac{3}{e}\right) = 0 \quad (2.4)$$

denklemini ele alalım. Burada $l = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{3}{e}$ olduğundan $l\mu = \frac{1}{e}$ olur. Teorem 2.1'den dolayı (2.5) gecikmeli diferensiyel denklemini salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım,

$$k'(p) + l(p) k(p - \mu) = 0, \quad p \geq p_0. \quad (2.5)$$

Teorem 2.6.

$$l \in C \left[[p_0, \infty), \mathbb{R}^+ \right], \quad \mu > 0$$

olmak üzere, eğer

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\mu}^p l(s) ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.7.

$$l \in C \left[[p_0, \infty), \mathbb{R}^+ \right], \quad \mu > 0$$

olmak üzere, eğer

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\mu}^p l(s) ds > 1$$

ise (2.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 2.8.

$$l \in C \left[[p_0 - \mu, \infty), \mathbb{R}^+ \right], \quad \mu > 0$$

olmak üzere, eğer

$$\int_{p-\mu}^p l(s) ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.4) denklemini salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir (Györi and Ladas 1991).

Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım,

$$k'(p) + \sum_{i=1}^m l_i(p) k(p - \mu_i(p)) = 0 \quad (2.6)$$

(2.6) denkleminde $l_i(p) > 0$, $\mu_i(p) > 0$ ve süreklidirler.

Aşağıdaki verilen sonuçlar Ladde vd. (1984) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.9. Eğer

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\mu_i(p)}^p \sum_{i=1}^m l_i(s) ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.6) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde et al. 1987).

Teorem 2.10. *Eğer*

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\mu_i(p)}^p \sum_{i=1}^m l_i(s) ds > 1$$

ise (2.6) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde et al. 1987).

Teorem 2.11. *Eğer*

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\mu_i(p)}^p \sum_{i=1}^m l_i(s) ds < \frac{1}{e}$$

ise (2.6) denklemini salınımsız çözümlere sahiptir (Ladde et al. 1987).

Şimdi aşağıdaki doğrusal gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım,

$$k'(p) + l(p)k(\delta(p)) = 0. \quad (2.7)$$

Burada,

$$l, \delta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \delta(p) \leq p \text{ and } \lim_{p \rightarrow \infty} \delta(p) = \infty.$$

$$m = \liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\delta(p)}^p l(s) ds, \quad (2.8)$$

olsun.

Aşağıdaki verilen sonuç Ladde vd. (1984) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.12. *Eğer*

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\delta(p)}^p l(s) ds > \frac{1}{e} \quad (2.10)$$

ise (2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde et al. 1984).

İspat Kabul edelim ki $k(p)$ (2.7)'ün pozitif bir çözümü olsun. O halde $p \geq p_1$ için $k(\mu(p)) > 0$ vardır.

$\mu(p) = \sup_{s \leq p} \{\delta(s)\}$ alalım. Bu durumda $\mu(p) \geq \delta(p)$ dir. O zaman (2.10)'dan,

$$\int_{\mu(p)}^p l(s) ds \geq c > \frac{1}{e}, \quad p \geq p_2, \quad (2.11)$$

$p_2 \geq p_1$ olacak şekilde bir p_2 vardır. $c \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bir c sabiti vardır. (2.7) denkleminde $p \geq p_1$ için $k'(p) \leq 0$ 'dır. Yani k 'nın artmayan olduğunu elde ederiz. (2.7) denkleminde ve k 'nın artmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$k'(p) + l(p)k(p) \leq 0. \quad (2.12)$$

(2.12)'yi $k(p)$ 'ye bölüp, $\mu(p)$ 'den p 'ye integral alalım,

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + l(p)k(p)}{k(p)} &\leq 0, \quad p \geq p_2, \\ \int_{\mu(p)}^p \left(\frac{k'(s)}{k(s)} + l(s) \right) ds &\leq 0, \\ \ln(k(s)) \Big|_{\mu(p)}^p + \int_{\mu(p)}^p l(s) ds &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))} \right) + \int_{\mu(p)}^p l(s) ds &\leq 0, \\ \ln \left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)} \right) &\geq \int_{\mu(p)}^p l(s) ds, \end{aligned}$$

burada (2.11)'i kullanırsak,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)} \right) &\geq c, \\ \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq e^c. \end{aligned}$$

Kolayca görülür ki $a \geq 0$ iken $e^a \geq ea$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq e^c \geq ec, \\ \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq ec, \\ k(\mu(p)) &\geq k(p)ec, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği (2.7)'de kullanırsak,

$$k'(p) + l(p)k(p)ec \leq 0$$

elde ederiz. Yukarıdaki prosedürü tekrarlırsak

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + l(p)k(p)ec}{k(p)} &\leq 0, \\ \int_{\mu(p)}^p \left(\frac{k'(s)}{k(s)} + l(s)ec \right) ds &\leq 0, \\ \ln(k(s)) \Big|_{\mu(p)}^p + \int_{\mu(p)}^p l(s)ec ds &\leq 0, \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))}\right) + ec \int_{\mu(p)}^p l(s) ds &\leq 0, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) &\geq ec \int_{\mu(p)}^p l(s) ds, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) \frac{1}{ec} &\geq \int_{\mu(p)}^p l(s) ds \geq c,\end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{y(\mu(t))}{y(t)}\right) \frac{1}{ec} &\geq c, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) &\geq ec^2, \\ \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq (ec)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu prosedürü devam ettirirsek öyle bir b tamsayısı için,

$$\frac{k(\mu(t))}{k(t)} \geq (ec)^b \quad (2.13)$$

olur.

(2.11)'den öyle bir p^* bulabiliriz ki $p^* \in (\mu(p), p)$ için

$$p \geq p_l \quad \text{için} \quad \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s) ds \geq \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \int_{p^*}^p l(s) ds \geq \frac{c}{2} \quad (2.14)$$

yazabiliriz. (2.12)'den $\mu(p)$ 'den p^* 'a integral alırsak

$$\begin{aligned}\int_{\mu(p)}^{p^*} [k'(s) + l(s)k(\mu(s))] ds &\leq 0, \\ \int_{\mu(p)}^{p^*} k'(s) ds + \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s)k(\mu(s)) ds &\leq 0, \\ k(p^*) - k(\mu(p)) + \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s)k(\mu(s)) ds &\leq 0,\end{aligned}$$

burada integralde k 'nın azalanlığını kullanarak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p^* 'da alacağından,

$$k(p^*) - y(\mu(p)) + k(\mu(p^*)) \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s) ds \leq 0$$

olur. k 'nın azalanlığını kullanarak $k(p^*)$ 'ı ihmal edelim ve (2.14)'ten,

$$-k(\mu(p)) + k(\mu(p^*)) \frac{c}{2} \leq 0,$$

$$k(\mu(p)) \geq k(\mu(p^*)) \frac{c}{2}. \quad (2.15)$$

olur. Şimdi (2.7)' den p^* 'dan p 'ye integral alırsak

$$\begin{aligned} \int_{p^*}^p [k'(s) + l(s)k(\mu(s))] ds &\leq 0, \\ \int_{p^*}^p k'(s) ds + \int_{p^*}^p l(s)k(\mu(s)) ds &\leq 0, \\ k(p) - k(p^*) + \int_{p^*}^p l(s)k(\mu(s)) ds &\leq 0, \end{aligned}$$

burada integralde k 'nın azalanlığını kullanarak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p 'de alacağından,

$$k(p) - k(p^*) + k(\mu(p)) \int_{p^*}^p l(s) ds \leq 0$$

olur. (2.14)'ten,

$$\begin{aligned} -k(p^*) + k(\mu(p)) \frac{c}{2} &\leq 0, \\ k(p^*) &\geq k(\mu(p)) \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir. (2.15) ve (2.16)'ten

$$\begin{aligned} k(\mu(p)) &\geq k(\mu(p^*)) \frac{c}{2}, \quad k(p^*) \geq k(\mu(p)) \frac{c}{2}, \\ k(t^*) &\geq k(\mu(t^*)) \left(\frac{c}{2}\right)^2, \\ \left(\frac{2}{c}\right)^2 &\geq \frac{k(\mu(p^*))}{k(p^*)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.13) ve (2.17)'den şu sonuç çıkar

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 \geq \frac{k(\mu(p^*))}{k(p^*)} \geq (ec)^b. \quad (2.18)$$

Yeterince büyük bir b sayısı seçerek aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz

$$(ec)^b > \left(\frac{2}{c}\right)^2.$$

$ec > 1$ olduğundan bu mümkündür, dolayısıyla (2.18) ile çelişir. O zaman (2.7) denkleminin pozitif bir çözümü yoktur.

Şimdi, kabul edelim ki $k(p)$ (2.7)'nin negatif bir çözümü olsun. $p \geq p_1$ için $k(\mu(p))$

< 0 vardır.

$\mu(p) = \sup_{s \leq p} \{\delta(p)\}$ alalım. Bu durumda $\mu(p) \geq \delta(p)$ dir. O zaman (2.10)'dan

$$p \geq p_2 \text{ için } \int_{\mu(p)}^p l(s) ds \geq c > \frac{1}{e}. \quad (2.19)$$

$p_2 \geq p_1$ olacak şekilde bir p_2 vardır. $c \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. (2.7) denkleminde $p \geq p_1$ için $k'(p) \geq 0$ 'dır. Yani k 'nın azalmayan olduğunu elde ederiz.

(2.7) denkleminde ve k 'nın azalmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$k'(p) + l(p)k(p) \geq 0. \quad (2.20)$$

(2.20)'yi $k(p)$ 'ye bölerek $\mu(p)$ 'den p 'ye integral alalım

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + l(p)k(p)}{k(p)} &\leq 0, \quad p \geq p_2, \\ \int_{\mu(p)}^p \left(\frac{k'(s)}{k(s)} + l(s) \right) ds &\leq 0, \\ \ln(k(s)) \Big|_{\mu(p)}^p + \int_{\mu(p)}^p l(s) ds &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))}\right) + \int_{\mu(p)}^p l(s) ds &\leq 0, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) &\geq \int_{\mu(p)}^p l(s) ds \end{aligned}$$

olur. (2.19)'dan

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) &\geq c, \\ \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq e^c. \end{aligned}$$

Kolayca görülür ki $a \geq 0$ iken $e^a \geq ea$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq e^c \geq ec, \\ \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq ec, \\ k(\mu(p)) &\geq k(p)ec \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$k'(p) + l(t)k(p)ec \geq 0.$$

elde ederiz; yukarıdaki prosedürü tekrarlırsak,

$$\begin{aligned}\frac{k'(p) + l(p)k(p)ec}{k(p)} &\leq 0, \\ \int_{\mu(p)}^p \left(\frac{k'(s)}{k(s)} + l(s)ec \right) ds &\leq 0, \\ \ln(k(s)) \Big|_{\mu(p)}^p + \int_{\mu(p)}^p l(s)ec ds &\leq 0.\end{aligned}$$

Olur. Buradan

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))}\right) + ec \int_{\mu(p)}^p l(s) ds &\leq 0, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) &\geq ec \int_{\mu(p)}^p l(s) ds,\end{aligned}$$

burada (2.19)'dan,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) \frac{1}{ec} &\geq \int_{\mu(p)}^p l(s) ds \geq c, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) \frac{1}{ec} &\geq c, \\ \ln\left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)}\right) &\geq ec^2, \\ \frac{k(\mu(p))}{k(p)} &\geq (ec)^2.\end{aligned}$$

olur. Bu prosedürü devam ettirirsek öyle bir b tamsayısı vardır ki

$$\frac{k(\mu(p))}{k(p)} \geq (ec)^b \quad (2.21)$$

olur.

(2.19)'dan öyle bir p^* vardır ki $p^* \in (\mu(p), p)$ için

$$p \geq p_l \quad \text{için} \quad \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s) ds \geq \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \int_{p^*}^p l(s) ds \geq \frac{c}{2}. \quad (2.22)$$

(2.20)'den $\mu(p)$ 'den p^* 'a integral alırsak

$$\begin{aligned}\int_{\mu(p)}^{p^*} [k'(s) + l(s)k(\mu(s))] ds &\geq 0, \\ \int_{\mu(p)}^{p^*} k'(s) ds + \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s)k(\mu(s)) ds &\geq 0, \\ k(p^*) - k(\mu(p)) + \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s)k(\mu(s)) ds &\geq 0\end{aligned}$$

olur. Burada integralde k 'nin artanlığını kullanırsak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en büyük değerini p^* 'da alacağından,

$$k(p^*) - k(\mu(p)) + k(\mu(p^*)) \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s) ds \geq 0.$$

$k(p)$ 'nin artanlığını kullanarak $k(p^*)$ 'ı ihmal edelim ve (2.22)'den

$$\begin{aligned} -k(\mu(p)) + k(\mu(p^*)) \frac{c}{2} &\geq 0, \\ k(\mu(p)) &\geq k(\mu(p^*)) \frac{c}{2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Şimdi (2.20)'den p^* 'dan p 'ye integral alırsak

$$\begin{aligned} \int_{p^*}^p [k'(s) + l(s)k(\mu(s))] ds &\geq 0, \\ \int_{p^*}^p k'(s) ds + \int_{p^*}^p l(s)k(\mu(s)) ds &\geq 0, \\ k(p) - k(p^*) + \int_{p^*}^p l(s)k(\mu(s)) ds &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. Burada integralde k 'nin artanlığını kullanırsak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en büyük değerini p^* 'da alacağından,

$$k(p) - k(p^*) + k(\mu(p)) \int_{p^*}^p l(s) ds \geq 0.$$

$k(p)$ 'nin artanlığını kullanarak $k(p)$ 'yi ihmal edelim,

$$\begin{aligned} -k(p^*) + k(\mu(p)) \frac{c}{2} &\leq 0, \\ k(p^*) &\geq k(\mu(p)) \frac{c}{2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2.23) ve (2.24)'den

$$\begin{aligned} k(p^*) &\geq k(\mu(p)) \frac{c}{2}, \quad k(\mu(p)) \geq k(\mu(p^*)) \frac{c}{2}, \\ k(p^*) &\geq k(\mu(p^*)) \left(\frac{c}{2}\right)^2, \\ \left(\frac{2}{c}\right)^2 &\geq \frac{k(\mu(p^*))}{k(p^*)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.21) ve (2.25)'ten şu sonuç çıkar,

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 \geq \frac{k(\mu(p^*))}{k(p^*)} \geq (ec)^b. \quad (2.26)$$

Yeterince büyük bir b sayısı seçerek aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz

$$(ec)^b > \left(\frac{2}{c}\right)^2.$$

$ec > 1$ olduğundan bu mümkündür, dolayısıyla (2.26) ile çelişir. O zaman (2.7) denkleminin negatif bir çözümü yoktur.

(2.7) denklemini ne pozitif ne de negatif bir çözümü olmadığına göre, (2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aşağıdaki verilen sonuç Ladde vd. (1984) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.13. *Eğer*

$$l, \mu \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \mu(p) \leq p \quad \text{ve} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \mu(p) = \infty,$$

μ azalmayan ve

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds > 1 \quad (2.27)$$

ise (2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde et al. 1984).

İspat $p \geq p_1$ olacak şekilde bir p_1 vardır, $k(p) > 0$ salınımsız pozitif bir çözüm olsun, o zaman $k(\mu(p)) > 0$ olur. (2.7)'den kolayca görebiliriz ki $k'(p) \leq 0$ dır, o zaman $k(p)$ artmayandır. (2.7)'den $\mu(p)$ 'den p 'ye integral alalım.

$$\begin{aligned} \int_{\mu(p)}^p k'(s) ds + \int_{\mu(p)}^p l(s) k(\mu(s)) ds &= 0, \\ k(tp) - k(\mu(p)) + \int_{\mu(p)}^p l(s) k(\mu(s)) ds &= 0 \end{aligned}$$

olur. Burada integralde k 'nin artmayanlığını kullanırsak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p 'de alacağından,

$$\begin{aligned} k(p) - k(\mu(p)) + k(\mu(p)) \int_{\mu(p)}^p p(s) ds &\leq 0, \\ k(p) + k(\mu(p)) \left[\int_{\mu(p)}^p l(s) ds - 1 \right] &\leq 0. \end{aligned}$$

(2.27)'deki koşul ile çelişir. O zaman denklem (2.7) bu koşullar sağlandığında tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmadan aşağıda bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek 2.14. Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemi inceleyelim,

$$k'(p) + \left(\left(\sqrt{2} + \frac{1}{e} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right) + \cos p \right) k \left(p - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Burada $l(p) = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{e} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right) + \cos p$, $\mu(p) = p - \frac{\pi}{2}$; $l(p) > 0$ ve $\mu(p) \leq p$ koşulları sağlanıyor.

$$\int_{p-\frac{\pi}{2}}^p \left(\left(\sqrt{2} + \frac{1}{e} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right) + \cos s \right) ds = \sqrt{2} + \frac{1}{e} + \sin p + \cos p,$$

buradan

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\frac{\pi}{2}}^p l(s) ds = \frac{1}{e},$$

Teorem 2.6'ya göre yorum yapamıyoruz.

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{p-\frac{\pi}{2}}^p l(s) ds = 2\sqrt{2} + \frac{1}{e} > 1,$$

Teorem 2.7'ye göre (2.28) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladde et al. 1984).

Aşağıdaki verilen sonuç Ladde vd. (1984) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.15. Eğer

$$l, \mu \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \mu(p) \leq p \quad \text{ve} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \mu(p) = \infty$$

ve

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds < \frac{1}{e} \quad (2.29)$$

ise (2.14) denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir (Ladde et al. 1984).

3. MATERYAL VE METOT

Bu kısımda birinci mertebeden monoton olmoyan sabit katsayılı ve değişken katsayılı gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili sonuçları inceleyeceğiz.

3.1. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım,

$$k'(p) + l(t)k(h(p)) = 0, \quad (3.1)$$

burada,

$$l(p) \geq 0, \quad h(p) \leq p, \quad p \geq 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} h(p) = \infty.$$

$$\mu(p) = \max_{s \leq p} h(s), \quad p \geq 0. \quad (3.2)$$

Açıkcası, $\mu(p)$ azalmayandır ve tüm $p \geq 0$ için $\mu(p) \leq h(p)$ olur.

Braverman ve Karpuz (2011) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.16. *Eğer*

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(v) dv \right\} du > 1 \quad (3.3)$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümü salınımlıdır (Braverman and Karpuz 2011).

İspat Kabul edelim ki $k(p)$ (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman tüm $p \geq p_1$ için $k(p), k(\mu(p)), k(h(p)) \geq 0$ olacak şekilde $p_1 \geq p_0$ vardır. (3.1)'den $k'(p) \leq 0$ olduğunu görebiliriz, o zaman $k(p)$ azalandır. O zaman $k(p) \leq k(\mu(p))$ eşitsizliği elde ederiz.

(3.1) denkleminde ve $k(p)$ 'nin artmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$k'(p) + l(p)k(p) \leq 0. \quad (3.4)$$

(3.4)'yi $k(p)$ 'ye bölüp, $h(u)$ 'dan $\mu(p)$ 'ye integral alalım,

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + l(p)k(p)}{k(p)} &\leq 0, \quad p \geq p_1, \\ \int_{h(u)}^{\mu(p)} \left(\frac{k'(s)}{k(s)} + l(s) \right) ds &\leq 0, \\ \ln(k(s)) \Big|_{h(u)}^{\mu(p)} + \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(\mu(p))}{k(h(u))} \right) + \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds &\leq 0, \\ \ln \left(\frac{k(h(u))}{k(\mu(p))} \right) &\geq \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds, \\ \frac{k(h(u))}{k(\mu(p))} &\geq \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right). \end{aligned}$$

Buradan,

$$k(h(u)) \geq k(\mu(p)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right) \quad (3.5)$$

Grönwall eşitsizliğini elde ederiz.

Denklem (3.1)'den $\mu(p)$ 'den p 'ye integral alalım.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mu(p)}^p k'(u) du + \int_{\mu(p)}^p l(u) k(h(u)) du, \\ &= k(p) - k(\mu(p)) + \int_{\mu(p)}^p l(u) k(h(u)) du, \end{aligned}$$

Bulduğumuz (3.5) eşitsizliğini kullanırsak,

$$k(h(u)) \geq k(\mu(p)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right).$$

O zaman,

$$\begin{aligned} 0 &\geq k(p) - k(\mu(p)) + \int_{\mu(p)}^p l(u) k(\mu(p)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right) du, \\ &= k(p) - k(\mu(p)) + k(\mu(p)) \int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right) du, \\ &= k(p) + k(\mu(p)) \left[\int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right) du - 1 \right], \end{aligned}$$

Son durumda elde ettiğimiz denklemde k fonksiyonu pozitif, parantezin içinde pozitif, son bulduğumuz eşitlik pozitif; bu da bir çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır, o zaman (3.3) koşulu sağlanırsa denklem (3.1)'in tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmada aşağıda bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.17. Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım,

$$k'(p) + \frac{1}{e}k(h(p)) = 0, \quad p \geq 0, \quad (3.6)$$

Burada $h(p)$,

$$h(p) = \begin{cases} p - 1, & p \in [3n, 3n + 1], \\ -3p + (12n + 3), & p \in [3n + 1, 3n + 2], \\ 5p - (12n + 13), & p \in [3n + 2, 3n + 3]. \end{cases}$$

Verilen sınırları,

$$\int_{h(p)}^p l(u) du,$$

integralini inceleyelim,

$$\begin{aligned} \int_{3n-1}^{3n} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n-1}^{3n} = \frac{3n}{e} - \frac{3n-1}{e} = \frac{1}{e}, \\ \int_{3n}^{3n+1} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n}^{3n+1} = \frac{3n+1}{e} - \frac{3n}{e} = \frac{1}{e}, \\ \int_{3n-3}^{3n+2} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n-3}^{3n+2} = \frac{3n+2}{e} - \frac{3n-3}{e} = \frac{5}{e}, \\ \int_{3n+2}^{3n+3} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n+2}^{3n+3} = \frac{3n+3}{e} - \frac{3n+2}{e} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

O zaman,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{h(p)}^p \frac{1}{e} du = \frac{1}{e},$$

salınımlı olup olmadığı hakkında yorum yapamıyoruz.

$$\mu(p) = \max_{s \leq p} h(s), \quad p \geq 0,$$

Bu eşitliği kullanırsak; o zaman $\mu(p)$ fonksiyonunu yazalım.

$$\mu(p) = \begin{cases} p - 1, & t \in [3n, 3n + 1], \\ 3n, & t \in [3n + 1, 3n + 2.6], \\ 5p - (12n + 13), & t \in [3n + 2.6, 3n + 3]. \end{cases}$$

Verilen sınırları,

$$\int_{\mu(p)}^p l(u) du$$

integralini inceleyelim.

$$\begin{aligned} \int_{3n-1}^{3n} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n-1}^{3n} = \frac{3n}{e} - \frac{3n-1}{e} = \frac{1}{e}, \\ \int_{3n}^{3n+1} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n}^{3n+1} = \frac{3n+1}{e} - \frac{3n}{e} = \frac{1}{e}, \\ \int_{3n}^{3n+2.6} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n}^{3n+2.6} = \frac{3n+2.6}{e} - \frac{3n}{e} = \frac{2.6}{e}, \\ \int_{3n+2}^{3n+3} \frac{1}{e} du &= \frac{u}{e} \Big|_{3n+2}^{3n+3} = \frac{3n+3}{e} - \frac{3n+2}{e} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

O zaman,

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p \frac{1}{e} du = \frac{2.6}{e} < 1.$$

Salınımlı olup olmadığı hakkında yorum yapamıyoruz.

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(v) dv \right\} du > 1.$$

O zaman,

$$\begin{aligned} \int_{\mu(3n+3)}^{3n+3} \frac{1}{e} \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(3n+3)} \frac{1}{e} dv \right\} du &= \int_{3n+2}^{3n+3} \frac{1}{e} \exp \left\{ \int_{5u-(12n+13)}^{3n+2} \frac{1}{e} dv \right\} du, \\ &= \frac{1}{5} \left(\exp \left\{ \frac{5}{e} \right\} - 1 \right), \\ &\cong 1.059 > 1. \end{aligned}$$

Denklem (3.6)'nın tüm çözümleri salınımlıdır (Braverman and Karpuz 2011).

Dix J. P. ve Dix J. D. (2016) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.18. *Eğer*

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(u)} l(v) dv \right\} du > \frac{1}{e} \quad (3.7)$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümü salınımlıdır (Dix J. P. and Dix J. D. 2016; Chatzarakis and Öcalan 2016).

İspat Kabul edelim ki $k(p)$ (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman tüm $p \geq p_1$ için $k(p), k(\mu(p)), k(h(p)) \geq 0$ olacak şekilde $p_1 \geq p_0$ vardır. (3.1)'den $k'(p) \leq 0$ olduğunu görebiliriz, o zaman $k(p)$ azalandır. O zaman $k(p) \leq k(\mu(p))$ eşitsizliği elde ederiz.

(3.1) denklemden ve $k(p)$ 'nin artmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$k'(p) + l(p)k(p) \leq 0. \quad (3.8)$$

(3.8)'yi $k(p)$ 'ye bölüp, $h(u)$ 'dan $\mu(p)$ 'ye integral alalım,

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + l(p)k(p)}{k(p)} &\leq 0, \quad p \geq p_1, \\ \int_{h(u)}^{\mu(p)} \left(\frac{k'(s)}{k(s)} + l(s) \right) ds &\leq 0, \\ \ln(k(s)) \Big|_{h(u)}^{\mu(p)} + \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(\mu(p))}{k(h(u))} \right) + \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds &\leq 0, \\ \ln \left(\frac{k(h(u))}{k(\mu(p))} \right) &\geq \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds, \\ \frac{k(h(u))}{k(\mu(p))} &\geq \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right), \\ k(h(u)) &\geq k(\mu(p)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(s) ds \right). \end{aligned}$$

Grönwall eşitsizliğini elde ederiz. (3.1) denkleminde Grönwall eşitsizliğini kullanırsak,

$$0 \geq k'(p) + l(p)k(\mu(p)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right). \quad (3.9)$$

(3.9) eşitsizliğini $k(p)$ 'ye bölüp, $\mu(p)$ 'den p 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{k'(p)}{k(p)} + l(p) \frac{k(\mu(p))}{k(p)} \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right), \\ 0 &\geq \int_{\mu(p)}^p \frac{k'(u)}{k(u)} du + \int_{\mu(p)}^p l(s) \frac{k(\mu(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds, \\ 0 &\geq \ln \left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))} \right) + \int_{\mu(p)}^p l(s) \frac{k(\mu(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.7)'ten $p_2 \geq p_1$ için sabit bir α vardır,

$$\int_{\mu(p)}^p l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds \geq \alpha > \frac{1}{e}, \quad p \geq p_2. \quad (3.11)$$

Açıkcası $\frac{k(\mu(s))}{k(s)} \geq 1$ 'tür. O zaman (3.11) eşitsizliğini (3.10) eşitsizliğinde kullanırsak,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))} \right) + \alpha &\leq 0, \\ \alpha &\leq \ln \left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)} \right), \\ e^\alpha &\leq \frac{k(\mu(p))}{k(p)}. \end{aligned}$$

Tüm α için $\alpha e \leq e^\alpha$ eşitsizliği sağlanır,

$$\begin{aligned} \alpha e &\leq e^\alpha \leq \frac{k(\mu(p))}{k(p)}, \\ \alpha e &\leq \frac{k(\mu(p))}{k(p)}, \\ \alpha e k(p) &\leq k(\mu(p)). \end{aligned}$$

Son bulduğumuz eşitsizliği (3.1) denkleminde kullanırsak,

$$k'(p) + l(p) \alpha e k(p) \leq 0. \quad (3.12)$$

(3.9) denkleminde Grönwall eşitsizliğini kullanırsak,

$$0 \geq k'(p) + l(p) \alpha e k(\mu(p)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right). \quad (3.13)$$

(3.9) eşitsizliğini $k(p)$ 'ye bölüp, $\mu(p)$ 'den p 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{k'(p)}{k(p)} + l(p) \alpha e \frac{k(\mu(p))}{k(p)} \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right), \\ 0 &\geq \int_{\mu(p)}^p \frac{k'(u)}{k(u)} du + \int_{\mu(p)}^p l(s) \alpha e \frac{k(\mu(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds, \\ 0 &\geq \ln \left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))} \right) + \alpha e \int_{\mu(p)}^p l(s) \frac{k(\mu(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Açıkcası $\frac{k(\mu(s))}{k(s)} \geq 1$ 'tür. O zaman (3.11) eşitsizliğini (3.14) eşitsizliğinde kullanırsak,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(p)}{k(\mu(p))} \right) + e\alpha^2 &\leq 0, \\ e\alpha^2 &\leq \ln \left(\frac{k(\mu(p))}{k(p)} \right), \\ e^{e\alpha^2} &\leq \frac{k(\mu(p))}{k(p)}. \end{aligned}$$

Tüm α için $e\alpha \leq e^{\alpha}$ eşitsizliği sağlanır,

$$(e\alpha)^2 \leq e^{e\alpha^2} \leq \frac{k(\mu(p))}{k(p)},$$

$$\begin{aligned} (e\alpha)^2 &\leq \frac{k(\mu(p))}{k(p)}, \\ (e\alpha)^2 k(p) &\leq k(\mu(p)). \end{aligned}$$

Eşitsizliğini elde ederiz. Bu prosedürü devam ettirirsek öyle bir b tamsayısı vardır ki

$$\frac{k(\eta(p))}{k(p)} \geq (e\alpha)^b \quad (3.15)$$

olur.

$p^* \in (\mu(p), p)$ olacak şekilde öyle bir p^* bulabiliriz, o zaman (3.11)'den,

$$\int_{p^*}^p l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{ve} \quad \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds \geq \frac{\alpha}{2}. \quad (3.16)$$

(3.9) eşitsizliğinden, $\mu(p)$ 'den p^* 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} \int_{\mu(p)}^{p^*} k'(u) du + \int_{\mu(p)}^{p^*} l(s) k(\mu(s)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds &\leq 0, \\ k(p^*) - k(\mu(p)) + \int_{\eta(p)}^{p^*} l(s) k(\mu(s)) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds &\leq 0. \end{aligned}$$

Burada integralde k 'nın azalanlığını kullanırsak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p^* 'da alacağından,

$$k(p^*) - k(\mu(p)) + k(\mu(p^*)) \int_{\eta(p)}^{p^*} l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds \leq 0.$$

$k(p^*) > 0$ olduğu için $k(p^*)$ 'ı ihmal edelim,

$$k(\mu(p^*)) \int_{\eta(p)}^{p^*} l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right) ds \leq k(\mu(p)),$$

(3.16)'yı kullanırsak,

$$\begin{aligned} k(\mu(p^*)) \frac{\alpha}{2} &\leq k(\mu(p)), \\ k(\mu(p^*)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(\mu(p)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.9) eşitsizliğinden, p^* 'dan p 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} \int_{p^*}^p k'(u) du + \int_{p^*}^p l(s) k(\mu(s)) \exp\left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr\right) ds &\leq 0, \\ k(p) - k(p^*) + \int_{p^*}^p l(s) k(\mu(s)) \exp\left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr\right) ds &\leq 0. \end{aligned}$$

Burada integralde k 'nın azalanlığını kullanırsak $k(\mu(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p 'de alacağından,

$$k(p) - k(p^*) + k(\mu(p)) \int_{p^*}^p l(s) \exp\left(\int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr\right) ds \leq 0,$$

$k(p) > 0$ olduğu için $k(p)$ 'yi ihmal edelim.

$$k(\mu(p)) \int_{p^*}^p l_i(p) \exp\left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr\right) ds \leq k(p^*),$$

(3.16)'yı kullanırsak,

$$\begin{aligned} k(\mu(p)) \frac{\alpha}{2} &\leq k(p^*), \\ k(\mu(p)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(p^*). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Elde ettiğimiz (3.17) ve (3.18) eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} k(\mu(p^*)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(\eta(p)), & k(\mu(p)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(p^*), \\ k(\mu(p^*)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(\eta(p)), & \frac{2}{\alpha} k(\mu(p)) &\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 k(p^*), \\ k(\mu(p^*)) &\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 k(p^*), \\ \frac{k(\mu(p^*))}{k(p^*)} &\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.15) eşitsizliği ve (3.19) eşitsizliğinden,

$$(\alpha e)^b \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2. \quad (3.20)$$

yeterince büyük bir b sayısı seçerek aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz

$$(\alpha e)^b > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2$$

$e\alpha > 1$ olduğundan bu mümkündür, dolayısıyla (3.20) ile çelişir. O zaman (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Aynı çalışmada aşağıda bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek 3.19.

$$k'(p) + \frac{10}{11e}k(h(p)) = 0, \quad p \geq 0$$

birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım. Burada

$$h(p) = \begin{cases} p-1, & p \in [3n, 3n+1], \\ -3p+12t+3, & p \in [3n+1, 3n+2], \\ 5p-12t-13, & p \in [3n+2, 3n+3]. \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\mu(p) = \max_{s \leq p} h(s)$ kullanırsak

$$\mu(p) = \max_{s \leq p} h(s) = \begin{cases} p-1, & p \in [3n, 3n+1], \\ 3t, & p \in [3n+1, 3n+2], \\ 5p-12t-13, & p \in [3n+2, 3n+3]. \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}_0$$

olur. $g : \mathbb{R}_0 \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

$$g(p) = \int_{\mu(p)}^p l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(u)} l(r) dr \right) ds$$

fonksiyonunu tanımlanmış olsun. Verilen g fonksiyonu en küçük değerini $p = 3t$ noktasında alır. Yani

$$\begin{aligned} g_{\min} &= \int_{\mu(3t)}^{3t} l(s) \exp \left(\int_{h(u)}^{\mu(3t)} l(r) dr \right) ds \\ &= \frac{10}{11e} \int_{3t-1}^{3t} \exp \left(\frac{10}{11e} \int_{u-1}^{3t-1} dr \right) ds \\ &= \frac{10}{11e} \int_{3t-1}^{3t} \exp \left(\frac{10}{11e} (3t-s) \right) ds \\ &= \exp \left(\frac{10}{11e} \right) - 1 \\ &\cong 0,397151967 \end{aligned}$$

olur ve

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(r) dr \right\} ds \cong 0,397151967 > \frac{1}{e}$$

oldugundan Teorem 3.2'nin tüm koşulları sağlanır. Böylece örneğimizdeki denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

Diğer yandan,

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds = \liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{p-1}^p \frac{10}{11e} ds = \frac{10}{11e} < \frac{1}{e}$$

elde edilir. Önceki elde ettiğimiz Teorem 2.8 koşulu sağlanmaz. O zaman burada gözlemlerimizdeki Teorem 3.2'de elde ettiğimiz sonuç daha iyi bir sonuçtur (Chatzarakis and Öcalan 2016).

3.2. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Aşağıdaki gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım;

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(\mu_i(p)) = 0, \quad p \geq p_0. \quad (3.21)$$

Burada $\mu_i : [p_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $p \geq p_0$ için $\mu_i(p) < p$ ve $\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_i(p) = \infty$. $l_i(p) \geq 0$ ve $l_i(p)$ sürekli fonksiyondur.

Fonksiyonları tanımlıyalım,

$$\mu_0(p) = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i(p), \quad \eta(p) = \max_{p_0 \leq s \leq p} \mu_0(s).$$

η azalmayandır, o zaman $\mu_i(p) \leq \mu_0(p) \leq \eta(p) < p$ olduğunu görürüz, ve

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_0(p) = \infty, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \eta(p) = \infty.$$

Dix J. P. ve Dix J. D. (2016) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.20. *Eğer*

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds > 1 \quad (3.22)$$

ise (3.21)'nin tüm çözümleri salınımlıdır (Dix J. P. and Dix J. D. 2016).

İspat Kabul edelim ki $k(p)$ (3.21) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman tüm $p \geq p_0$ için $k(p)$, $k(\mu_i(p)) \geq 0$ olacak şekilde $p_0 \geq p_1$ vardır. (3.21)'den $k'(p) \leq 0$ olduğunu görebiliriz, o zaman $k(p)$ artmayandır. O zaman $k(p) \leq k(\mu_i(p))$ eşitsizliğini elde ederiz.

(3.21) denkleminde ve $k(p)$ 'nin artmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(p) \leq 0. \quad (3.23)$$

(3.23)'ü $k(p)$ 'ye bölüp, $\mu_i(p)$ 'den $\eta(p)$ 'ye integral alalım

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(p)}{k(p)} &\leq 0, \quad p \geq p_0, \\ \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \frac{k'(u)}{k(u)} du + \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du &\leq 0, \\ \ln \left(\frac{k(\eta(p))}{k(\mu_i(p))} \right) + \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(\mu_i(p))}{k(\eta(p))} \right) &\geq \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du, \\ \frac{k(\mu_i(p))}{k(\eta(p))} &\geq \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du \right), \\ k(\mu_i(p)) &\geq k(\eta(p)) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du \right) \end{aligned}$$

Grönwall eşitsizliğini elde ederiz.

(3.23) denkleminde $\eta(p)$ 'den p 'ye integral alalım,

$$\begin{aligned} \int_{\eta(p)}^p k'(u) du + \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(u) k(\mu_i(p)) du &= 0, \\ k(p) - k(\eta(p)) + \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(u) k(\mu_i(p)) du &= 0. \end{aligned}$$

Yukarıda bulduğumuz Grönwall eşitsizliği kullanırsak,

$$k(\mu_i(p)) \geq k(\eta(p)) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(v) dv \right),$$

o zaman,

$$\begin{aligned} k(p) - k(\eta(p)) + \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(u) k(\eta(p)) \exp\left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(v) dv\right) du &\leq 0, \\ k(p) - k(\eta(p)) + k(\eta(p)) \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(u) \exp\left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(v) dv\right) du &\leq 0, \\ k(p) + k(\eta(p)) \left\{ \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(u) \exp\left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(v) dv\right) du - 1 \right\} &\leq 0 \end{aligned}$$

Son durumda elde ettiğimiz denklemde k fonksiyonu pozitif, parantezin içinde pozitif, son bulduğumuz eşitlik pozitif; bu da bir çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır, o zaman (3.22) koşulu sağlanırsa denklem (3.21)'in tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

Dix J. P. ve Dix J. D. (2016) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.21. *Eğer*

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \exp\left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr\right) ds > \frac{1}{e}, \quad (3.24)$$

ise, (3.21) denkleminin tüm çözümü salınımlıdır (Dix J. P. and Dix J. D. 2016).

İspat Kabul edelim ki $k(p)$ (3.21) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman tüm $p \geq p_0$ için $k(p)$, $k(\mu_i(p)) \geq 0$ olacak şekilde $p_0 \geq p_1$ vardır. (3.21)'den $k'(p) \leq 0$ olduğunu görebiliriz, o zaman $k(p)$ artmayandır. O zaman $k(p) \leq k(\mu_i(p))$ eşitsizliğini elde ederiz.

(3.21) denkleminde ve $k(p)$ 'nin artmayan olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(p) \leq 0. \quad (3.25)$$

(3.25)'i $k(p)$ 'ye bölüp, $\mu_i(p)$ 'den $\eta(p)$ 'ye integral alalım

$$\begin{aligned} \frac{k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(p)}{k(p)} &\leq 0, \quad p \geq p_0, \\ \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \frac{k'(u)}{k(u)} du + \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du &\leq 0, \\ \ln\left(\frac{k(\eta(p))}{k(\mu_i(p))}\right) + \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{K(\mu_i(p))}{K(\eta(p))} \right) &\geq \int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du, \\ \frac{k(\mu_i(p))}{k(\eta(p))} &\geq \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du \right), \\ k(\mu_i(p)) &\geq k(\eta(p)) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{i=1}^n l_i(u) du \right)\end{aligned}$$

Grönwall eşitsizliğini elde ederiz. (3.21) denkleminde Grönwall eşitsizliğini kullanırsak,

$$0 \geq k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(\eta(p)) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right). \quad (3.26)$$

(3.26) eşitsizliğini $k(p)$ 'ye bölüp, $\eta(p)$ 'den p 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned}0 &\geq \frac{k'(p)}{k(p)} + \sum_{i=1}^n l_i(p) \frac{k(\eta(p))}{k(p)} \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right), \\ 0 &\geq \int_{\eta(p)}^p \frac{k'(u)}{k(u)} du + \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \frac{k(\eta(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds, \\ 0 &\geq \ln \left(\frac{k(p)}{k(\eta(p))} \right) + \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \frac{k(\eta(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds. \quad (3.27)\end{aligned}$$

(3.24)'den $p_2 \geq p_1$ için sabit bir α vardır,

$$\int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \geq \alpha > \frac{1}{e}, \quad p \geq p_2. \quad (3.28)$$

Açıkcası $\frac{k(\mu(s))}{k(s)} \geq 1$ 'tür. O zaman (3.28) eşitsizliğini (3.27) eşitsizliğinde kullanırsak,

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{k(p)}{k(\eta(p))} \right) + \alpha &\leq 0, \\ \alpha &\leq \ln \left(\frac{k(\eta(p))}{k(p)} \right), \\ e^\alpha &\leq \frac{k(\eta(p))}{k(p)}.\end{aligned}$$

Tüm α için $\alpha e \leq e^\alpha$ eşitsizliği sağlanır,

$$\alpha e \leq e^\alpha \leq \frac{k(\eta(p))}{k(p)},$$

$$\begin{aligned}\alpha e &\leq \frac{k(\eta(p))}{k(p)}, \\ \alpha e k(p) &\leq k(\eta(p)).\end{aligned}$$

Son bulduğumuz eşitsizliği (3.21)'de kullanırsak,

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) \alpha e k(p) \leq 0. \quad (3.29)$$

Yukarıdaki yaptığımız işlemleri tekrarlırsak. (3.29) eşitsizliğinde Grönwall eşitsizliğini kullanırsak,

$$0 \geq k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) \alpha e k(\eta(p)) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right).$$

Bu eşitsizliği $k(p)$ 'ye bölüp, $\eta(p)$ 'den p 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{k'(p)}{k(p)} + \sum_{i=1}^n l_i(p) \alpha e \frac{k(\eta(p))}{k(p)} \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right), \\ 0 &\geq \int_{\eta(p)}^p \frac{k'(u)}{k(u)} du + \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \alpha e \frac{k(\eta(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds, \\ 0 &\geq \ln \left(\frac{k(p)}{k(\eta(p))} \right) + \alpha e \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \frac{k(\eta(s))}{k(s)} \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Açıkcası $\frac{k(\mu(s))}{k(s)} \geq 1$ 'tür. O zaman (3.28) eşitsizliğini (3.30) eşitsizliğinde kullanırsak,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{k(p)}{k(\eta(p))} \right) + e\alpha^2 &\leq 0, \\ e\alpha^2 &\leq \ln \left(\frac{k(\eta(p))}{k(p)} \right), \\ e^{e\alpha^2} &\leq \frac{k(\eta(p))}{k(p)}. \end{aligned}$$

Tüm α için $\alpha e \leq e^\alpha$ eşitsizliği sağlanır,

$$(\alpha e)^2 \leq \frac{k(\eta(p))}{k(p)}.$$

Eşitsizliğini elde ederiz. Bu prosedürü devam ettirirsek öyle bir b tamsayısı vardır ki

$$\frac{k(\eta(p))}{k(p)} \geq (e\alpha)^b \quad (3.31)$$

olur.

$p^* \in (\eta(p), p)$ olacak şekilde öyle bir p^* bulabiliriz, (3.28)'den,

$$\int_{\eta(p)}^{p^*} l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{ve}$$

$$\int_{p^*}^p l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \geq \frac{\alpha}{2}. \quad (3.32)$$

(3.26) eşitsizliğinden, $\eta(p)$ 'den p^* 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} \int_{\eta(p)}^{p^*} k'(u) du + \int_{\eta(p)}^{p^*} k(\eta(s)) l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds &\leq 0, \\ k(p^*) - k(\eta(p)) + \int_{\eta(p)}^{p^*} k(\eta(s)) l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds &\leq 0, \end{aligned}$$

burada integralde k 'nın azalanlığını kullanırsak $k(\eta(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p^* 'da alacağından,

$$k(p^*) - k(\eta(p)) + k(\eta(p^*)) \int_{\eta(p)}^{p^*} l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \leq 0,$$

$k(p^*) > 0$ olduğu için $k(p^*)$ 'yi ihmal edelim,

$$k(\eta(p^*)) \int_{\eta(p)}^{p^*} l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \leq k(\eta(p)),$$

(3.32)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} k(\eta(p^*)) \frac{\alpha}{2} &\leq k(\eta(p)), \\ k(\eta(p^*)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(\eta(p)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde ederiz.

$$0 \geq k'(p) + k(\eta(p)) l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right).$$

Bu son eşitsizlikten, p^* 'dan p 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} \int_{p^*}^p k'(u) du + \int_{p^*}^p k(\eta(s)) l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds &\leq 0, \\ k(p) - k(p^*) + \int_{p^*}^p k(\eta(s)) l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds &\leq 0, \end{aligned}$$

burada integralde k 'nın azalanlığını kullanırsak $k(\eta(s))$ 'i integralden çıkaralım, en küçük değerini p 'de alacağından,

$$k(p) - k(p^*) + k(\eta(p)) \int_{p^*}^p l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \leq 0,$$

$k(p) > 0$ olduğu için $k(p)$ 'yi ihmal edelim,

$$k(\eta(p)) \int_{p^*}^p l_i(p) \exp \left(\int_{\mu_i(p)}^{\eta(p)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds \leq k(p^*),$$

(3.32)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} k(\eta(p)) \frac{\alpha}{2} &\leq k(p^*), \\ k(\eta(p)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(p^*) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Elde ettiğimiz (3.33) ve (3.34) eşitsizliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} k(\eta(p^*)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(\eta(p)), & k(\eta(p)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(p^*), \\ k(\eta(p^*)) &\leq \frac{2}{\alpha} k(\eta(p)), & \frac{2}{\alpha} k(\eta(p)) &\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 k(p^*), \\ k(\eta(p^*)) &\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 k(p^*), \\ \frac{k(\eta(p^*))}{k(p^*)} &\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.31) eşitsizliği ve (3.35) eşitsizliğinden,

$$(\alpha e)^b \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2. \quad (3.36)$$

yeterince büyük bir b sayısı seçerek aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz

$$(\alpha e)^b > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2$$

$e\alpha > 1$ olduğundan bu mümkündür, dolayısıyla (3.36) ile çelişir. O zaman (3.21) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında monoton olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için bazı sonuçları elde ettik.

Aşağıdaki diferensiyel denklemi ele alalım

$$k'(p) + l(p)k(\delta(p)) = 0. \quad (4.1)$$

Burada,

$$l, \delta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \delta(p) \leq p, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \delta(p) = \infty, \quad \mu(p) = \max_{s \leq p} \delta(s)$$

ve $\mu(p)$ azalmayan olmak üzere.

Eğer

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds > \frac{1}{e}$$

ise (4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu elde edilmiştir.

Eğer

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds > 1$$

ise (4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu elde edilmiştir.

Eğer

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(s) ds < \frac{1}{e}$$

ise (4.1) denklemi salınımsız bir çözüme sahip olduğu elde edilmiştir.

Aşağıdaki diferensiyel denklemi ele alalım

$$k'(p) + l(p)k(h(p)) = 0. \quad (4.2)$$

Burada

$$l(p) \geq 0, \quad h(p) \leq p, \quad p \geq 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} h(p) = \infty$$

ve

$$\mu(p) = \max_{s \leq p} h(s), \quad p \geq 0$$

olmak üzere.

Eğer

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(v) dv \right\} du > 1$$

ise denklem (4.2)'nin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu elde edilmiştir.

Eğer

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\mu(p)}^p l(u) \exp \left\{ \int_{h(u)}^{\mu(p)} l(v) dv \right\} du > \frac{1}{e}$$

ise denklem (4.2)'nin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu elde edilmiştir.

Gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım;

$$k'(p) + \sum_{i=1}^n l_i(p) k(\mu_i(p)) = 0, \quad p \geq p_0. \quad (4.3)$$

Burada $\mu_i : [p_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $p \geq p_0$ için $\mu_i(p) < p$ ve $\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_i(p) = \infty$. $l_i(p) \geq 0$ ve $l_i(p)$ sürekli fonksiyondur.

Fonksiyonları tanımlıyalım,

$$\mu_0(p) = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i(p), \quad \eta(p) = \max_{p_0 \leq s \leq p} \mu_0(s).$$

η azalmayandır, o zaman $\mu_i(p) \leq \mu_0(p) \leq \eta(p) < p$ olduğunu görürüz, ve

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mu_0(p) = \infty, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \eta(p) = \infty.$$

Eğer

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds > 1$$

ise denklem (4.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu elde edilmiştir.

Eğer

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\eta(p)}^p \sum_{i=1}^n l_i(s) \exp \left(\int_{\mu_i(s)}^{\eta(s)} \sum_{j=1}^n l_j(r) dr \right) ds > \frac{1}{e},$$

ise, (4.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu elde edilmiştir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında monoton olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler incelenmiş ve bu denklemlere ait salınımlılık kriterleri ele alınmıştır. Birinci mertebeden doğrusal olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan önceki çalışmalarda gecikme terimlerinin monotonluğu söz konusuydu ancak literatürde elde edilen yeni sonuçlarla birlikte gecikme terimlerinin monoton olma şartı kaldırılmıştır. Böylece bu tezde, elde edilen yeni salınımlılık kriterleri ile birlikte monoton olmayan gecikmeleri içeren birinci mertebeden doğrusal olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı incelenmiştir.

6. KAYNAKLAR

- Braverman, E. and Karpuz, B. 2011. On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays, *Appl. Math. Comput.*, 218, 3880-3887.
- Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. 2016. Oscillations of differential equations with non-monotone retarded arguments. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 19 (1): 98-104.
- Dix, J. P. and Dix, J. D. 2016. Oscillation of solutions to nonlinear first-order delay differential equations, *Involve*, 9 (3), 465-482.
- Erbe, L. H., Kong, Q. and Zhang, B. G. 1995. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 482s.
- Fukagai, N. and Kusano, T. 1984. Oscillation theory of first order functional differential equations with deviating arguments, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 136, 95-117
- Györi, I. and Ladas, G. 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations*, Clarendon, Press, Oxford, 368s.
- Koplatadze, R. G. and Chanturiya, T. A. 1982. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating arguments, (Russian), *Differentsial'nye Uravneniya*, 8, 1463-1465.
- Ladde, G. S., Lakshmikantham, V. and Zhang, B. G. 1987. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating arguments*, Marcel Dekker, New York, 308s.

ÖZGEÇMİŞ

Kübra AKBULUT

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022-2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2012-2016	Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Erzurum

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2022-Devam Ediyor	Hikmet Uluğbay Ortaokulu, İstanbul MEB Öğretmen
Öğretmen 2019-2022	Bahçeşehir Koleji Fen Lisesi, Kahramanmaraş Öğretmen
Öğretmen 2017-2019	Vip Delta Eğitim Kursu, İzmir Öğretmen