

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MTAR MODELİNİN FOURIER
FONKSİYONLARI İLE YORUMLANMASINA
DAYANAN YENİ BİR DOĞRUSAL OLMAYAN
BİRİM KÖK TEST ÖNERİSİ

Gülçin ÇELİKBIÇAK

2501191721

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Burak GÜRİŞ

İSTANBUL 2022

ÖZ

**MTAR MODELİNİN FOURIER FONKSİYONLARI İLE
YORUMLANMASINA DAYANAN YENİ BİR DOĞRUSAL
OLMAYAN BİRİM KÖK TEST ÖNERİSİ**

Gülçin ÇELİKBIÇAK

Zaman serisi çalışmaları incelendiğinde birçok doğrusal ve doğrusal olmayan birim kök testinin olduğu görülmektedir. Bu birim kök testleri, test sürecinde kullanılan model yapısı ve yapısal kırılma gibi durumlara bağlı olarak birbirinden farklılık göstermektedir veya biri diğerinden daha güçlü olabilmektedir.

Bu çalışmanın amacı, literatüre yeni bir doğrusal olmayan birim kök testi kazandırmaktır. Bu doğrultuda önerilen yeni birim kök test sürecinde doğrusal olmama durumu, Enders ve Granger (1998) tarafından önerilen momentum eşik değerli otoregresif model (MTAR) kullanılarak modellenmektedir. Yapısal kırılmalar ise Fourier fonksiyonları ile incelenmektedir.

Bu çalışmada, Fourier Enders ve Granger birim kök testi için bir prosedür önerilmektedir. Monte Carlo simülasyonları kullanılarak kritik değerler üretilmektedir. Sonlu örneklerde boyut (size) ve güç (power) özellikleri incelenmektedir. Elde edilen ampirik sonuçlara göre, önerilen Fourier Enders ve Granger birim kök testinin trendli yapıdaki modelinden hareket edildiğinde, Enders ve Granger (1998) çalışmasına göre daha güçlü sonuçlar elde edildiği sonucuna varılabilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Birim Kök, Doğrusal Olmayan Zaman Serisi Modelleri, Fourier Fonksiyonu

ABSTRACT
A NEW NONLINEAR UNIT ROOT TEST PROPOSAL BASED
ON THE INTERPRETATION OF THE MTAR MODEL WITH
FOURIER FUNCTIONS

Gülçin ÇELİKBIÇAK

When the time series studies are examined, it is seen that there are many linear and nonlinear unit root tests. These unit root tests differ from each other depending on the model structure and structural break used in the testing process, or one may be stronger than the other.

The aim of this study is to introduce a new nonlinear unit root test to the literature. In this direction, in the proposed new unit root test process, nonlinearity is modeled using the momentum threshold autoregressive model (MTAR) proposed by Enders and Granger (1998). Structural breaks are investigated with Fourier functions.

In this study, a procedure for Fourier Enders and Granger unit root testing is proposed. Critical values are produced using Monte Carlo simulations. In finite examples, size and power properties are examined. According to the empirical results obtained, it can be concluded that the proposed Fourier MTAR unit root test has stronger results than the study of Enders and Granger (1998), when the model with a trend structure is used.

Keywords: Unit Root, Nonlinear Time Series Models, Fourier Function

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, birim kök testleri yapısal kırılmalar dikkate alınarak doğrusal olma ve doğrusal olmama durumu olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir. Çalışmanın temelini oluşturan üçüncü bölümde, Fourier fonksiyonun birim kök testlerinde kullanımına değinilmiş olup yeni bir doğrusal olmayan birim kök testi önerisinde bulunulmuştur. Elde edilen bulguların literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu tezin her aşamasında bana yol gösteren, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgisini ve tecrübesini benimle paylaşan, doğrusal olmayan zaman serisi ve ekonometride paket program kullanımı konusunda temelimin oluşmasını sağlayan kıymetli tez danışman hocam Prof. Dr. Burak GÜRİŞ'e bana göstermiş olduğu sabır ve anlayıştan dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca istatistik bilgilerini ve akademik tecrübelerini bana aktaran, her konuda yol gösteren ve verdiği ödevler ile bana çalışma disiplini kazandıran kıymetli hocam Prof. Dr. Mustafa TEKİN'e; pazar araştırmaları ve veri madenciliği derslerinde akıcı anlatımı ile istatistik bilgilerimi uygulamalı olarak pekiştirmemi sağlayan kıymetli hocam Doç. Dr. Hakan BEKTAŞ'a; yüksek lisans eğitimim boyunca çeşitli projelerde yer almama ve bilimsel araştırma yöntemleri konusunda tecrübe edinmeme olanak sağlayan kıymetli hocalarım Prof. Dr. Murat ŞEKER ve Doç. Dr. Arif SALDANLI'ya; finansal ekonometri derslerinde bilgilerini paylaşan ve her zaman güler yüzüyle sorularıma yardımcı olmaya çalışan hocam Doç. Dr. Aycan HEPSAĞ'a; programlama alanında temelimin oluşmasına katkıda bulunan hocam Prof. Dr. Hakan SATMAN'a; panel veri analizi alanında bilgilerini benden esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Ferda YERDELEN TATOĞLU'na; doğrusal zaman serisi derslerinde bilgi ve tecrübelerini paylaşan hocam Burcu KIRAN BAYGIN'a ekonometri temelimin oluşmasını sağlayan hocam Prof. Dr. Nilgün ÇİL'e; tez savunma jürim sayın Doç. Dr. Nazan ŞAK hocama ve adını burada yazamadığım İstanbul Üniversitesi'ndeki diğer hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Son olarak, her konuda yanımda olan, benden desteklerini asla esirgemeyen ve tez sürecim boyunca stresime ve heyecanıma ortak olan sevgili annem Sevda ÇELİKBIÇAK, babam Murat ÇELİKBIÇAK ve ablam Seda ELEN'e teşekkürlerimi sunarım.



Gülçin ÇELİKBIÇAK
İstanbul / 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	x
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMA DURUMUNDA KULLANILAN BİRİM KÖK TESTLERİ

1.1. DURAĞANLIK KAVRAMI.....	3
1.2. BİRİM KÖK KAVRAMI	4
1.3. DOĞRUSAL OLMA DURUMU	5
1.4. DOĞRUSAL BİRİM KÖK TESTLERİ	6
1.4.1. Dickey ve Fuller Birim Kök Testi (1979).....	7
1.4.2. Genişletilmiş Dickey ve Fuller (ADF) Birim Kök Testi (1981).....	8
1.4.3. Phillips ve Perron Birim Kök Testi(1988).....	11
1.4.4. Kwiatkowski, Phillips, Schmidt ve Shin (KPSS) Durağanlık Testi (1992)	14
1.4.5. Ng ve Perron Birim Kök Testi (2001)	16
1.5. YAPISAL KIRILMALARI DİKKATE ALAN BİRİM KÖK TESTLERİ....	18
1.5.1. Perron Birim Kök Testi (1989).....	19
1.5.2. Zivot ve Andrews Birim Kök Testi (1992).....	21
1.5.3. Lumsdaine ve Papell Birim Kök Testi (1997).....	22
1.5.4. Lee ve Strazicich Birim Kök Testi (2003).....	23
1.5.5. Kapetanios Birim Kök Testi (2005)	26
1.5.6. Carrion-i Silvestre vd. Birim Kök Testi (2009).....	28
1.5.7. Narayan ve Popp Birim Kök Testi (2010).....	29

İKİNCİ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMAMA DURUMUNDA KULLANILAN BİRİM KÖK TESTLERİ

2.1.	DOĞRUSAL OLMAMA DURUMU	32
2.2.	DOĞRUSALLIK TESTLERİ.....	33
2.2.1.	McLeod ve Li Testi (1983).....	34
2.2.2.	Keenan (1985).....	35
2.2.3.	Tsay Testi (1986).....	36
2.2.4.	Brock, Dechert ve Scheinkman Testi (1987).....	37
2.2.5.	Hansen Testi (1999)	38
2.3.	DOĞRUSAL OLMAMANIN KAYNAĞI.....	39
2.4.	ORTALAMADA DOĞRUSAL OLMAYAN MODELLER	41
2.4.1.	Doğrusal Olmayan AR Modeli (NLAR)	41
2.4.2.	Bilinear Model	42
2.4.3.	Rejim Değişimini Dikkate Alan Modeller.....	43
2.4.3.1.	Kendinden Uyarımlı Eşik Değerli Otoregresif Model (SETAR).....	44
2.4.3.2.	Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif Model (STAR)	48
2.4.3.3.	Momentum Eşik Değerli Otoregresif Model (MTAR)	50
2.5.	DOĞRUSAL OLMAYAN BİRİM KÖK TESTLERİ.....	51
2.5.1.	Enders ve Granger Birim Kök Testi (1998).....	51
2.5.2.	Leybourne, Newbold ve Vouglas Birim kök Testi (1998)	53
2.5.3.	Caner ve Hansen Birim Kök Testi(2001)	54
2.5.4.	Kapetanios, Shin ve Snell Birim Kök Testi(2003)	57
2.5.5.	Sollis Doğrusal Olmayan Birim Kök Testi (2004)	58
2.5.6.	Pascalau Birim Kök Testi (2007).....	60
2.5.7.	Sollis Birim Kök Testi (2009)	62
2.5.8.	Kruse Birim Kök Testi (2011).....	63
2.5.9.	Cuestas ve Ordóñez Birim Kök Testi (2014).....	65
2.5.10.	Chen ve Xie Testi (2017).....	67

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

FOURIER BİRİM KÖK TESTLERİ VE TEST ÖNERİSİ

3.1.	FOURIER FONKSİYONU VE EKONOMETRİDE KULLANIMI.....	71
3.2.	FOURIER BİRİM KÖK TESTLERİ.....	72
3.2.1.	Enders ve Lee Fourier Birim Kök Testi (2004).....	73
3.2.2.	Becker, Enders ve Lee Fourier Birim Kök Testi (2006).....	75

3.2.3.	Christopoulos ve Lean – Ledesma Fourier Birim Kök Testi (2010)	78
3.2.4.	Enders ve Lee LM Tipi Fourier Birim Kök Testi (2012a)	81
3.2.5.	Enders ve Lee Dickey Fuller Tipi Fourier Birim Kök Testi (2012b)	83
3.2.6.	Ranjbar, Chang, Elmi ve Lee Birim Kök Testi (2018).....	85
3.2.7.	Güriş Fourier Birim Kök Testi (2019).....	88
3.3.	MTAR MODELİNİN FOURIER FONKSİYONLARI İLE YORUMLANMASINA DAYANAN YENİ BİR DOĞRUSAL OLMAYAN BİRİM KÖK TEST ÖNERİSİ.....	90
3.3.1.	Monte Carlo Simülasyonları İle Test Özelliklerinin İncelenmesi	91
3.3.1.1.	Kritik Değerlerin Elde Edilmesi	92
3.3.1.2.	Sonlu Örnekler İçin Boyut Özellikleri	93
3.3.1.3.	Sonlu Örnekler İçin Güç Özellikleri	95
SONUÇ		99
KAYNAKÇA		100

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için kritik değerler.....	92
Tablo 2. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için boyut özellikleri	94
Tablo 3. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için sabitli denklem üzerinden güç özelliklerinin belirlenmesi	96
Tablo 4. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için trendli denklem üzerinden güç	97



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. Yapısal kırılmanın regresyon doğrusunda gösterimi 19



KISALTMALAR LİSTESİ

ADF	: Genişletilmiş Dickey ve Fuller birim kök testi
AESTAR	: Asimetrik üstel fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif model
AIC	: Akaike bilgi kriteri
AR	: Otoregresif zaman serisi süreci
ARMA	: Otoregresif hareketli ortalamalar süreci
BIC	: Bayesian bilgi kriteri
BL	: Bilinear model
DF	: Dickey ve Fuller birim kök testi
ESTAR	: Üstel dağılım fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif model
HQ	: Hannan Quin bilgi kriteri
IID	: Bağımsız ve eş dağılımlı
KPSS	: Kwiatkowski, Phillips, Schmidt ve Shin birim kök testi
LM	: Lagrange çarpanı
LSTAR	: Lojistik dağılım fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif model
MA	: Hareketli ortalama süreci
MIC	: Modifiye edilmiş bilgi kriterleri
MTAR	: Momentum eşik değerli otoregresif model
NAIC	: Normalleştirilmiş Akaike bilgi kriteri
NIID	: Eş ve bağımsız normal dağılımlı
SETAR	: Kendinden uyarımlı eşik değerli otoregresif model

SIC	: Schwarz bilgi kriteri
SSR	: Kalıntı kareler toplamı
STAR	: Yumuşak geçişli eşik değerli otoregresif model
TAR	: Eşik değerli otoregresif model
Var	: Varyans



GİRİŞ

Ekonometri alanında zaman serilerinin açıklanmasında kullanılan yöntemler tarihsel bir sürece dayanmaktadır. Teknolojinin ilerlemesi ile birlikte ilk ortaya atılan yöntemlere eleştiriler yönetilmiştir. Bu durum bir öncekilerden ilham alınarak yeni metodolojilerin ortaya çıkmasına olanak sağlamıştır ve hala bu gelişmeler devam etmektedir. Bu çalışmada, birim kök analizlerinde kullanılan önceki yöntemlerden yararlanılarak yeni bir doğrusal olmayan birim kök testi önerilmiştir.

Zaman serileri analizleri gerçekleştirilirken doğrusal olma ve doğrusal olmama durumları dikkate alınmalıdır. Uygulamada genellikle doğrusal yöntemlerin kullanımına eğilim olduğu görülmektedir. Bunun sebebi bazı araştırmacıların doğrusal yöntemleri, doğrusal olmayan yöntemlere göre daha kolay uygulayabilmesi ve yorumlayabilmesidir. Fakat her zaman serisinin, önsel olarak doğrusal kabul edilmesi ve bu şekilde incelenmesi doğru olmayan yorumlanmalara sebep olabilir. Bu nedenle doğrusal olma ve doğrusal olmama ayrımına dikkat edilmedilir. Bu çalışmada önerilen birim kök testinde doğrusal olmayan yapı momentum eşik değerli otoregresif model (MTAR) kullanılarak modellenmiştir.

Zaman serileri analizlerinde göz ardı edilemeyecek diğer konu ise yapısal kırılma kavramıdır. Geleneksel yöntemlere göre yapısal kırılmaların sayısı ve yapısı önsel olarak belirlenmektedir. Belirleme aşamasında ani değişimler dikkate alınmakta ve bu kırılma noktaları gölge değişkenler kullanılarak modele dahil edilmektedir. Fakat zamanla bu tanımlamalara karşı eleştiri getirilmiş ve Fourier denklemlerinin kullanılması önerilmiştir. Bu denklemler sayesinde yapısal kırılmaların etkileri uzaklaştırılmaktadır. Böylece kırılma sayısı ve yapısı gibi bilgilerin önceden belirlenmesine gerek duyulmamaktadır. Çalışmada önerilen doğrusal olmayan birim kök testinde de yapısal kırılma kavramı Fourier fonksiyonu üzerinden açıklanacaktır.

Çalışmanın amacı, MTAR modelinin Fourier fonksiyonları ile yorumlanmasına dayanan yeni bir doğrusal olmayan birim kök testi önermektir. Test metodolojisi oluşturulurken Enders ve Granger (1998) çalışması dikkate alınmıştır.

Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde durağanlık, birim kök, doğrusallık ve yapısal kırılma kavramları açıklanmıştır. Doğrusallık durumu altında geleneksel birim kök testleri ve yapısal kırılmaları dikkate alan birim kök testleri incelenmiştir.

İkinci bölümde doğrusal olmama durumu açıklanmış ve bir serinin doğrusal olup olmadığına karar vermede kullanılan doğrusallık testleri incelenmiştir. Doğrusal olmama durumunun geçerli olması halinde bunun neden kaynaklanabileceği açıklanmış ve bu çalışmada yalnızca ortalamada doğrusal olmayan modellere değinilmiştir. Ardından ortalamada doğrusal olmayan modelleri dikkate alan doğrusal olmayan birim kök testleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak Fourier fonksiyonu ve ekonometride kullanımı açıklanmıştır. Ardından literatüre kazandırılmış olan Fourier birim kök testleri incelenmiştir. Bu bölüme kadar açıklanan birim kök testleri birbirlerine göre farklılıkları veya üstünlükleri dikkate alınarak incelenmiştir. Üçüncü bölümün sonunda ise bu bilgiler ışığında, MTAR modelinin Fourier fonksiyonları ile yorumlanmasında dayanan doğrusal olmayan yeni bir test önerisinde bulunulmuştur. Geliştirilen test için Monte Carlo simülasyonları kullanılarak kritik değerler üretilmiştir ve sonlu örnekler için boyut ve güç özellikleri tespit edilmiştir. Önerilen testin boyut özellikleri incelendiğinde ciddi boyut bozulmalarının bulunmadığı sonucuna varılabilmektedir. Testin güç özellikleri incelendiğinde ise trendli yapıdaki seriler için uygulabilir güce sahip olduğu ve alternatif olarak kullanılabileceği söylenebilmektedir.

BİRİNCİ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMA DURUMUNDA KULLANILAN BİRİM KÖK TESTLERİ

Zaman serisi analizlerinde durağanlık temel bir kavramdır. Durağanlık analizleri, doğrusal olma ve doğrusal olmama durumu olmak üzere iki şekilde gerçekleştirilebilir. Analizlerin doğru sonuçlar vermesi için bu ayrıma dikkat edilmesi ve uygun metotların kullanılması gerekmektedir. Bu bölümde öncelikle durağanlık ve birim kök kavramları açıklanacaktır. Ardından doğrusal olma durumunda kullanılan birim kök testleri incelenecektir. Son olarak yapısal kırılmaları dikkate alan birim kök testlerine değinilecektir.

1.1. DURAĞANLIK KAVRAMI

Zaman serisi analizlerinde çıkarımların çoğu serinin durağanlığına dayanmaktadır. Etkin ve tutarlı tahminler için durağanlık varsayımının sağlanması gerekmektedir. Durağanlık, bir serinin dönemler itibariyle sürekli artma veya azalma eğiliminde olmayıp yatay bir eksenle dağılım göstermesidir (Sevültekin ve Çınar, 2017).

Zaman serilerinde olasılık modelleri stokastik süreç veya rassal süreç olarak adlandırılmaktadır. Olasılık teorilerinin önemli bir bölümü de durağan zaman serileri ile ilgilidir. Durağan stokastik süreçte iki dönem arasındaki kovaryans, bu kovaryansın hesaplandığı döneme bağlı olmayıp yalnızca iki dönem arasındaki uzaklığa bağlıdır. Bu olasılıklı süreç zayıf durağanlık ya da kovaryans durağanlık olarak nitelendirilmektedir (Gujarati, 1995).

Y_t olasılıklı bir zaman serisi olmak üzere, zayıf durağan süreç aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Gujarati, 1995):

$$\text{Ortalama} : E(Y_t) = \mu \quad (1.1)$$

$$\text{Varyans} : Var(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2] = \sigma_Y^2 \quad (1.2)$$

$$\text{Kovaryans} : Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = \gamma_k \quad (1.3)$$

Burada, μ serinin ortalaması ve σ_Y^2 varyansıdır. γ_k ise Y_t ile arasında k dönem fark olan Y_{t+k} serisi arasındaki kovaryanstır. (1.3) numaralı eşitlikte $k = 0$ olduğunda

γ_0 elde edilir ve böyle bir koşulda bu terim Y 'nin varyansına (σ_Y^2) eşit olur. Eğer bir zaman serisi zayıf durağan ise yukarıda ifade edildiği gibi ortalaması, varyansı ve kovaryansı zamandan bağımsızdır (Gujarati, 1995).

Y_t zaman serisinin zayıf durağanlık özellikleri ile birlikte, dağılımının zaman içerisinde değişmeme özelliğine de sahip olması güçlü durağanlık olarak ifade edilmektedir. Tüm bunların yanı sıra Y_t 'nin bileşik dağılımının normal olması durumu ise kesin durağanlık olarak nitelendirilmektedir (Akgül, 2003).

1.2. BİRİM KÖK KAVRAMI

Bir zaman serisinin, geçmiş dönem değerleri kullanılarak açıklanması ile oluşturulan otoregresif zaman serilerinde (AR) durağanlık, serinin karakteristik denkleminin kökleri ile ilgilidir. Karakteristik denklemin köklerinin mutlak değer olarak 1'den küçük olması durumunda seri durağandır. Köklerden en az bir tanesi mutlak değer olarak 1'e eşit veya 1'den büyük ise seri durağan değildir. Köklerin mutlak değer olarak 1 olması durumu ise 'birim köklü (unit root) zaman serisi' olarak isimlendirilmektedir (Akdi, 2003).

Y_t zamana bağlı bir seri olmak üzere rassal yürüyüş modeli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Gujarati, 1995):

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (1.4)$$

Burada ε_t , stokastik hata terimidir. Ortalaması sıfır, varyansı sabit ve ardışık bağımlı olmama gibi klasik varsayımlara uymaktadır. Bu özelliklere sahip olması ile beyaz gürültü hata terimi olarak adlandırılır. Y_{t-1} 'in katsayısı $\rho = 1$ değerini alırsa durağan olmama durumu ile karşılaşılmaktadır. Yani serinin birim köklü olduğu sonucuna varılmaktadır. Ekonometride birim kök özelliği olan zaman serisi rassal yürüyüş olarak nitelendirilmektedir (Gujarati, 1995).

(1.4) numaralı eşitlik, $\rho = 1$ olması durumunda aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir (Gujarati, 1995):

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.5)$$

$$\Delta Y = (\rho - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.6)$$

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.7)$$

Burada $\delta = (\rho - 1)$ ve $\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1})$ olduğu görülmektedir. Bu durumda temel hipotez $\delta = 0$ olmaktadır. Temel hipotez reddedilemez ise eşitlik aşağıdaki gibi olacaktır (Gujarati,1995):

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = u_t \quad (1.8)$$

Bu ifade, rassal bir yürüyüşün birinci farklarının (u_t) durağan bir zaman serisi olduğunu açıklamaktadır. Çünkü u_t rassaldır (Gujarati,1995).

Durağan serilerde, sabit ortalama etrafındaki dalgalanmalar ortalamaya dönme eğilimindedir, varyans zamanla değişmemektedir ve gecikme uzunluğu artıkcı otokorelasyon azalmaktadır. Durağan olmayan bir seri ise uzun dönemli bir ortalamaya sahip değildir. Varyans, zaman sonsuza giderken sonsuza yaklaşır. Otokorelasyonlar azalarak ortadan kalkmaz (Sevültekin ve Çınar, 2017).

1.3. DOĞRUSAL OLMA DURUMU

Doğrusallık, matematiksel bir kavram olup ekonometride de kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu konuyu matematiksel olarak ifade etmek gerekmektedir (Güriş, 2020:1). X ve Y , belirli bir iktisadi konuyla ilgili iki değişken olsun ve aralarındaki ilişki $E(Y|X_i) = f(X_i)$ şeklinde bir fonksiyonla açıklansın. Burada $f(X_i)$, X ' in doğrusal bir fonksiyonudur. $E(Y|X_i)$ ise X_i ' nin doğrusal bir fonksiyonudur. Değişkenler arasındaki doğrusal ilişki matematiksel olarak aşağıdaki denklem ile ifade edilebilir (Gujarati, 1995):

$$E(Y|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i \quad (1.9)$$

Bu denklem, Y ' nin koşullu beklenen değerinin X_i ile doğrusal bir ilişkide olduğunu ortaya koymaktadır (Gujarati, 1995).

Zaman serisi analizlerinde doğrusal modeller sıklıkla kullanılmaktadır. Bunun sebebi, doğrusal modellerin uygulama aşamalarının daha kolay gerçekleştirilmesi ve yorumlamalarının daha kolay yapılabilmesidir (Güriş ve Gökçen, 2008).

1.4. DOĞRUSAL BİRİM KÖK TESTLERİ

Bir ekonometrik model oluşturulmadan önce serinin durağanlığının incelenmesi gerekmektedir. Durağanlığın saptanmasında kullanılan birtakım yöntemler bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak grafik analizi, korelogram analizi ve birim kök analizleri verilebilir. Bir değişkenin durağan olup olmadığını veya durağanlık derecesini belirlemede kullanılan en geçerli yöntem birim kök testidir (Gujarati, 1995).

Zaman serileri analizlerinde durağanlığın saptanmasında kullanılan ilk birim kök testi Dickey ve Fuller (1979) tarafından geliştirilmiştir. Bu testte, hata terimlerinin istatistiki olarak bağımsız ve sabit varyansa sahip olduğu yani otokorelasyonsuz olduğu varsayımı kabul edilmektedir (Dickey ve Fuller, 1979). Dickey ve Fuller (1981) çalışmalarında, uygun gecikmeli değerleri modele eklemişlerdir. Böylece, Dickey ve Fuller (1979) testi otokorelasyon problemine karşı yeniden düzenlenerek Genişletilmiş Dickey ve Fuller (ADF) testi oluşturulmuştur (Bozkurt, 2007). Phillips ve Perron (1988) çalışmalarında, Dickey ve Fuller (1979) testindeki hata terimleri ile ilgili varsayımı genişletmişlerdir. Phillips ve Perron (1988) testinde, hata terimlerinin zayıf derecede bağımlı olmasına ve heterojen olarak dağılmasına izin verilmektedir. Böylece otokorelasyon problemi giderilmektedir (Enders, 2004).

Kwiatkowski, Phillips, Schmidt ve Shin (1992) çalışmalarında birim kök analizini gerçekleştirirken test hipotezlerini standart birim kök testlerindeki hipotezlerin tersi şeklinde sınımışlardır. Bu testin sıfır hipotezi durağanlığı, alternatif hipotezi ise birim kökün varlığını ifade etmektedir (Kwiatkowski vd., 1992). Ng ve Perron (2001) çalışmalarında ise Phillips ve Perron (1988) testinin hata terimlerinin boyut bozulması problemini düzelteren yeni bir test geliştirmişlerdir.

Doğrusal birim kök testleri yapısal kırılmaları dikkate almayan ve yapısal kırılmaları dikkate alan testler olmak üzere iki ayrı grupta incelenmektedir. Bu bölümde yapısal kırılmanın dikkate alınmadığı Dickey ve Fuller (1979), Genişletilmiş Dickey ve Fuller (1981), Phillips ve Perron (1988), Kwiatkowski, Phillips, Schmidt ve Shin (1992) ve Ng ve Perron (2001) testleri detaylı olarak incelenecektir.

1.4.1. Dickey ve Fuller Birim Kök Testi (1979)

Dickey ve Fuller (1979) tarafından geliştirilen test, birim kök testlerinin temelini oluşturmaktadır. Zaman serilerinin durağanlığının saptanmasında kullanılan diğer birim kök testlerinin geliştirilmesine öncü olmuştur (Harvey ve Mills, 2002).

Dickey ve Fuller (1979) testi, birinci mertebeden otoregresif süreç olan ve AR(1) olarak ifade edilen denklemin tahminine dayanmaktadır. Y_t , Y serisinin t dönemindeki değerleri; Y_{t-1} ise Y serisinin bir dönem önceki değerleri olmak üzere denklem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

$Y_0 = 0$, ρ bir reel sayı ve e_t ise ortalaması sıfır ve varyansı sabit [$e_t \sim NIID(0, \sigma^2)$] bağımsız normal rassal değişkenlerin dizisidir (Dickey ve Fuller, 1979).

Eğer;

$|\rho| < 1$ ise t sonsuza yaklaştığında ($t \rightarrow \infty$) zaman serisi Y_t durağandır.

$|\rho| = 1$ olması durumunda Y_t serisi durağan değildir. Y_t serisinin varyansı $t\sigma^2$ ifadesine eşit olmaktadır. $\rho = 1$ olması, rassal yürüyüş (random walk) olarak ifade edilmektedir.

$|\rho| > 1$ ise zaman serisi Y_t durağan değildir. Y_t serisinin varyansı, t artıkça katlanarak büyür. Bu durumda Y_t , patlayan (exploding) seri özelliği göstermektedir (Dickey ve Fuller, 1979).

(1.10) numaralı modelin her iki tarafından Y_{t-1} terimi çıkartılır ise aşağıdaki eşitliğe ulaşılır (Gujarati, 1995):

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + e_t \quad (1.11)$$

$$\Delta Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + e_t \quad (1.12)$$

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + e_t \quad (1.13)$$

Bu durumda δ parametresi, $(\rho - 1)$ olarak tanımlanır.

Dickey ve Fuller (1979) çalışmasında üç farklı model tanımlamıştır. Bu modeller şu şekildedir:

$$Model A : \Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad Y_0 = 0 \quad (1.14)$$

$$Model B : \Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad Y_0 = 0 \quad (1.15)$$

$$Model C : \Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad Y_0 = 0 \quad (1.16)$$

Model A, trend ve sabiti olmayan denklemdir. *Model B* yalnızca sabitli(μ) ve *model C* ise sabitli(μ) ve trendli(βt) yapıda bir denklemdir.

Dickey ve Fuller (1979) testinin hipotezleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H_0: \rho = 1 \text{ veya } \delta = 0 \text{ (Seri durağan değildir, birim kök vardır.)} \quad (1.17)$$

$$H_1: \rho < 1 \text{ veya } \delta < 0 \text{ (Seri durağandır, birim kök yoktur.)}$$

Test hipotezleri sınanırken t dağılımı kullanılmaz. Bunun sebebi en küçük kareler yöntemi kullanılarak tahmin edilen modelde, ρ parametresinin en küçük kareler tahmincisinin normal dağılım göstermemesidir. Dickey ve Fuller (1979) her bir model için τ, τ_μ, τ_t olmak üzere üç test istatistiği tanımlamıştır. Bu test istatistikleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\hat{\tau} = (\hat{\rho} - 1)(S_{e1}^2 c_1)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

$$\hat{\tau}_\mu = (\hat{\rho}_\mu - 1)(S_{e2}^2 c_2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

$$\hat{\tau}_t = (\hat{\rho}_T - 1)(S_{e3}^2 c_3)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.20)$$

Yukarıda yer alan S_{ek}^2 terimi $k = 1, 2, 3$ için kalıntıların ortalama kareleridir. $U_1 = Y_{t-1}$, $U_2 = 1, Y_{t-1}$ ve $U_3 = 1, t, Y_{t-1}$ olmak üzere c_k terimi $(U_k' U_k)^{-1}$ 'in sağ alt ögesidir. Hesaplanan τ istatistik değerleri, Dickey ve Fuller (1979) çalışmasında Monte Carlo simülasyonları kullanılarak tablolastırılan ve Mac Kinnon (1991) tarafından geliştirilen kritik değerler ile kıyaslanır.

1.4.2. Genişletilmiş Dickey ve Fuller (ADF) Birim Kök Testi (1981)

Dickey ve Fuller (1979) testi, hata terimlerinde otokorelasyon olmaması varsayımına dayanmaktadır. Genişletilmiş Dickey ve Fuller (ADF) testi ise hata

terimlerinin otokorelasyonlu olması durumunda birim kökün varlığını test etmek amacıyla geliştirilen bir testtir (Dickey ve Fuller, 1981). Dickey ve Fuller (1981) çalışmalarında, bağımlı değişkenin gecikmeli değerlerinin modele eklenmesiyle otokorelasyon sorunun giderilebileceğini ileri sürmüşlerdir.

ADF testinde, modele eklenmesi gereken gecikme uzunluğunun belirlenmesi önemlidir. Gecikme uzunluğunun gerekenden az sayıda belirlenmesi, gerçekte reddedilmemesi gereken hipotezi reddetmeye neden olurken; gerekenden fazla sayıda belirlenmesi ise gereksiz sayıda parametre ekleneceği için serbestlik derecesinin azalmasına sebep olur ve testin gücü azalır (Harris ve Sollis, 2003:49). Modelin kaçınıcı dereceden gecikmeli yapıda olması gerektiği belirlenirken bazı kriterler kullanılmaktadır. Bunlara örnek olarak; Akaike bilgi kriteri (AIC), Schwarz bilgi kriteri (SIC) ve Hannan Quin bilgi kriteri (HQ) gösterilebilir (Alp, 2007).

Dickey ve Fuller (1979) testinde kurulan birinci dereceden otoregresif model [AR(1)] aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

Eğer Y_t serisi, gerçekte p dereceden otoregresif bir süreci [AR(p)] izlemesine rağmen basit AR(1) modeli olarak ifade ediliyor ise spesifikasyon hatası meydana gelmiştir ve hata terimleri otokorelasyonlu olacaktır. Bu durumda, hata terimlerinin beyaz gürültü (white noise) sürecine sahip olduğu varsayımına dayanan Dickey ve Fuller (1979) dağılımları geçersiz olacaktır (Harris ve Sollis, 2003:48).

Dickey ve Fuller (1981) çalışmalarında, otokorelasyonu gidermek için Y_t serisinin p . dereceden otoregresif [AR(p)] sürece sahip olduğu denklemleri aşağıdaki gibi geliştirmişlerdir:

$$\text{Model A :} \quad \Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta Y_{t-i} + u_t, \quad Y_0 = 0 \quad (1.22)$$

$$\text{Model B :} \quad \Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta Y_{t-i} + u_t, \quad Y_0 = 0 \quad (1.23)$$

$$Model C : \quad \Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta Y_{t-i} + u_t, \quad Y_0 = 0 \quad (1.24)$$

Yukarıdaki denklemler, Dickey ve Fuller (1979) birim kök testinde kullanılan üç modelin sağ tarafına bağımlı değişkenin farkının gecikmeli değerlerinin eklenmesiyle oluşturulmuştur. *Model A* trend ve sabiti olmayan denklem, *model B* sabitli (μ) denklem ve *model C* ise sabitli (μ) ve trendli (βt) denklemdir (Dickey ve Fuller, 1979).

Dickey ve Fuller (1981) birim kök testinde katsayıların ortak hipotezini test etmek amacıyla Φ_1, Φ_2, Φ_3 olarak ifade edilen F istatistikleri kullanılmaktadır. Φ_1 test istatistiği *model B* dikkate alınarak hesaplanır ve temel hipotez $H_0: \delta = \mu = 0$ olarak ifade edilir. *Model C* için Φ_2 test istatistiği hesaplanır ve temel hipotez $H_0: \delta = \mu = \beta = 0$ olarak oluşturulur. *Model A* için Φ_3 test istatistiği hesaplanır ve temel hipotez $H_0: \delta = \beta = 0$ şeklinde ifade edilir. Model tercih etmek için kullanılan test istatistik değeri aşağıdaki gibi hesaplanır (Dickey ve Fuller, 1981):

$$\Phi_i = \frac{[SSR_{(kısıtlı model)} - SSR_{(kısıtsız model)}]/r}{\frac{SSR_{(kısıtsız model)}}{(T - k)}} \quad (1.25)$$

Burada SSR hata terimleri kareler toplamı, r kısıtlama sayısı, T gözlem sayısı, k kısıtsız modeldeki tahmin edilen parametre sayısı ve $(T - k)$ kısıtsız modelin serbestlik derecesidir. Hesaplanan test istatistiklerinin kritik değerler ile kıyaslanması sonucunda temel hipotez reddedilemez ise kısıtlı model geçerli olacaktır.

Uygun modele karar verildikten sonra, birim kök temel hipotezi aşağıdaki τ istatistikleri ile test edilmektedir (Dickey ve Fuller, 1981):

$$\hat{\tau}_{\alpha\mu} = S_{\alpha\mu}^{-1} \hat{\alpha}_{\mu} \quad (1.26)$$

$$S_{\alpha\mu}^2 = S_{e\mu}^2 \left[(n - 1)^{-1} + \bar{y}_{(-1)}^2 \left\{ \sum_{t=2}^n (Y_{t-1} - \bar{y}_{(-1)})^2 \right\}^{-1} \right] \quad (1.27)$$

$$S_{e\mu}^2 = S_{e\mu}^2(n-3)^{-1} \sum_{t=2}^n (Y_t - \hat{\alpha}_\mu - \hat{\rho}_\mu Y_{t-1})^2 \quad (1.28)$$

$$\hat{\tau}_{\alpha\tau} = (C_{11}S_{e\tau}^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{\alpha}_\tau \quad (1.29)$$

$$\hat{\tau}_{\beta\tau} = (C_{22}S_{e\tau}^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{\beta}_\tau \quad (1.30)$$

$$S_{e\tau}^2 = (n-4)^{-1}Y'[I - X(X'X)^{-1}]Y \quad (1.31)$$

Burada C_{ij} , $(X'X)^{-1}$ 'in ij . terimidir. Hesaplanan test istatistik değerleri, Dickey ve Fuller (1981) çalışmasında yer alan $\tau_{\alpha\mu}$, $\tau_{\alpha\tau}$ ve $\tau_{\beta\tau}$ kritik değer tabloları ile kıyaslanmaktadır. Birim kök analizinin hangi model üzerinden gerçekleştirileceği ve hangi test istatistik değerinin kullanılacağı önemlidir. Geremediği sürece modele sabit terim ya da trend teriminin eklenmesi testlerin gücünü azaltmaktadır. Bu yüzden, modele sabit terim ya da trend terimi eklenmeden önce anlamlılıklarının test edilmesi gerekir (Göktaş, 2005).

1.4.3. Phillips ve Perron Birim Kök Testi(1988)

Dickey ve Fuller (1979) birim kök testi, hata terimlerinin bağımsız ve sabit varyansa sahip oldukları varsayımına dayanmaktadır. Phillips ve Perron (1988) çalışmalarında, hata terimleri ile ilgili varsayımları yumuşatarak Dickey ve Fuller testlerini genelleştirmeye çalışmışlardır (Nemlioğlu, 2005:31).

Phillips ve Perron (1988) çalışmalarında parametrik olmayan (non-parametrik) yeni bir test geliştirmişlerdir. Bu testte, hata terimlerinin zayıf derecede bağımlı olmasına ve heterojen olarak dağılmasına izin verilmektedir. Bu nedenle, Dickey ve Fuller t istatistiklerinin geliştirilmesinde hata terimlerinin varsayımları ile ilgili sınamalar, Phillips ve Perron (1988) testinde dikkate alınmamaktadır (Çil Yavuz, 2014:304).

Zaman serisi y_t için veri yaratma süreci $y_t = \alpha y_{t-1} + u_t$, ($t = 1, 2, \dots$) ve $\alpha = 1$ olsun. Başlangıç koşulları şu şekildedir; $t = 0$ olarak belirlenmiştir ve y_0 bir sabit içeren, dağılımı sabit ve bağımsız olan herhangi bir rastgele değişken olabilir. Hata terimi u_t için iki koşul bulunmaktadır. Birincisi, tüm t 'ler için $E(u_t) = 0$ 'dır. İkincisi,

α_m birleşik katsayıları ile u_t güçlü birleşik bir terimdir ve $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{1-\frac{2}{\beta}}$, yı sağlamaktadır (Phillips ve Perron, 1988).

Phillips ve Perron (1988) birim kök testinde iki adet en küçük kareler regresyon denklemini tanımlanmıştır. Bu denklemler aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$y_t = \hat{\mu} + \hat{\alpha}y_{t-1} + \hat{u}_t, \quad (1.32)$$

$$y_t = \tilde{\mu} + \tilde{\beta}\left(t - \frac{1}{2}T\right) + \tilde{\alpha}y_{t-1} + \tilde{u}_t, \quad (1.33)$$

Burada $(\hat{\mu}, \hat{\alpha})$ ve $(\tilde{\mu}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ en küçük kareler regresyon katsayılarıdır. Test sürecinde kullanılacak olan t istatistikleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$t_{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha} - \alpha) \left\{ \sum (y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} / \hat{S} \quad (1.34)$$

$$t_{\hat{\mu}} = (\hat{\mu} - \mu) \left\{ \sum (y_{t-1} - \bar{y}_{-1})^2 / \sum y_{t-1}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} / \hat{S} \quad (1.35)$$

$$t_{\tilde{\mu}} = (\tilde{\mu} - \mu) / (\tilde{S}^2 c_1)^{\frac{1}{2}} \quad (1.36)$$

$$t_{\tilde{\beta}} = (\tilde{\beta} - \beta) / (\tilde{S}^2 c_2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

$$t_{\tilde{\alpha}} = (\tilde{\alpha} - \alpha) / (\tilde{S}^2 c_3)^{\frac{1}{2}} \quad (1.38)$$

Burada $\hat{S}$ ve $\tilde{S}$ terimleri regresyon denklemlerinin standart hatalarını ifade etmektedir. c_i terimi $(X'X)^{-1}$ matrisinin i. köşegen elemanı ve $\bar{y}_{-1} = T^{-1} \sum y_{t-1}$ 'dir.

Parametre bağımlılığını asimptotik olarak ortadan kaldırmak için (1.26) ve (1.27) regresyonlarından elde edilen geleneksel test istatistikleri basit dönüşümler uygulanarak aşağıdaki Z istatistikleriyle yeniden tanımlanmaktadır (Phillips ve Perron, 1988):

$$Z(\hat{\alpha}) = T(\hat{\alpha} - 1) - \hat{\lambda} / \bar{m}_{yy} \quad (1.39)$$

$$Z(t_{\hat{\alpha}}) = (\hat{S} / \hat{\sigma}_{Tl}) t_{\hat{\alpha}} - \hat{\lambda}' \hat{\sigma}_{Tl} / m_{yy}^{\frac{1}{2}} \quad (1.40)$$

$$Z(t_{\hat{\mu}}) = (\hat{s}/\hat{\sigma}_{Tl})t_{\hat{\mu}} - \hat{\lambda}'\hat{\sigma}_{Tl}m_y/m_{yy}^{\frac{1}{2}}m_{yy}^{\frac{1}{2}} \quad (1.41)$$

$$Z(\tilde{\alpha}) = T(\tilde{\alpha} - 1) - \tilde{\lambda}/M \quad (1.42)$$

$$Z(t_{\tilde{\alpha}}) = (\tilde{s}/\tilde{\sigma}_{Tl})t_{\tilde{\alpha}} - \hat{\lambda}'\tilde{\sigma}_{Tl}/M^{\frac{1}{2}} \quad (1.43)$$

$$Z(t_{\tilde{\mu}}) = (\tilde{s}/\tilde{\sigma}_{Tl})t_{\tilde{\mu}} - \hat{\lambda}'\tilde{\sigma}_{Tl}m_y/M^{\frac{1}{2}}(M + m_y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.44)$$

$$Z(t_{\tilde{\beta}}) = (\tilde{s}/\tilde{\sigma}_{Tl})t_{\tilde{\beta}} - \hat{\lambda}'\tilde{\sigma}_{Tl}(\frac{1}{2}m_y - m_{ty})/(M/12)^{\frac{1}{2}}m_{yy}^{\frac{1}{2}} \quad (1.45)$$

Burada:

$$m_{yy} = T^{-2} \sum y_t^2 \quad (1.46)$$

$$\bar{m}_{yy} = T^{-2} \sum (y_t - \bar{y})^2 \quad (1.47)$$

$$m_y = T^{-\frac{3}{2}} \sum y_t \quad (1.48)$$

$$m_{ty} = T^{-\frac{5}{2}} \sum ty_t \quad (1.49)$$

$$M = (1 - T^{-2})m_{yy} - 12m_{ty}^2 + 12(1 + T^{-1})m_{ty}m_y - (4 + 6T^{-1})m_{ty}m_y - (4 + 6T^{-1} + 2T^{-2})m_y^2 \quad (1.50)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{Tl}^2 - \hat{s}^2), \quad \hat{\lambda}' = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\sigma}_{Tl}^2} \quad (1.51)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{Tl}^2 - \tilde{s}^2), \quad \tilde{\lambda}' = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\sigma}_{Tl}^2} \quad (1.52)$$

olarak tanımlanmaktadır. Phillips ve Perron (1988) birim kök testinin en çok kullanılan test istatistiklerine ait hipotezler aşağıdaki gibidir:

$$Z(t_{\hat{\alpha}}) : \hat{\alpha} = 1 \quad (1.53)$$

$$Z(t_{\tilde{\alpha}}) : \tilde{\alpha} = 1 \quad (1.54)$$

$$Z(t_{\tilde{\beta}}) : \tilde{\beta} = 1 \quad (1.55)$$

$$Z(\Phi_3) : \tilde{\alpha} = 1 \text{ ve } \tilde{\beta} = 1 \quad (1.56)$$

$Z(t_{\tilde{\alpha}})$ ve $Z(t_{\tilde{\beta}})$ test istatistiklerinin hipotezleri Dickey ve Fuller (1981) tablosunda yer alan τ_{μ} ve τ_{τ} kritik değerleri ile $Z(\Phi_3)$ istatistik değerine ait hipotez ise Φ_3 kritik değerleri ile kıyaslanmaktadır (Enders, 1995:239).

1.4.4. Kwiatkowski, Phillips, Schmidt ve Shin (KPSS)

Durağanlık Testi (1992)

Kwiatkowski vd. (1992) alışmalarında klasik birim kök testlerinin temel hipotezi reddetmede başarısız olduğunu belirtmişlerdir. Temel hipotezi, serinin durağan olduğunu ifade eden yeni bir test geliştirmişlerdir (Kwiatkowski vd., 1992).

Kwiatkowski vd. (1992) birim kök testi $t = 1, 2, \dots, T$ olmak üzere Y_t zaman serisinin, deterministik bir trend, rassal yürüyüş süreci ve durağan hata toplamına ayrıştırılabileceğini varsayar. Test sürecinde aşağıdaki modelden hareket edilir (Kwiatkowski vd., 1992):

$$Y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.57)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t \quad (1.58)$$

Burada ξt terimi deterministik trend ve ε_t hata terimidir. r_t rassal yürüyüş sürecini ifade etmektedir. u_t , 0 ortalama ve σ_u^2 varyansla bağımsız ve özdeş dağılıma sahiptir [$u_t \text{ iid}(0, \sigma_u^2)$].

Test hipotezlerinin sınanması için Lagrange arpanı (Lagrange Multiplier – LM) istatistiği önerilmiştir. LM istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Kwiatkowski vd., 1992):

$$LM = \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} \quad (1.59)$$

Burada $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ terimi, regresyonun hata varyansıdır ve σ_{ε}^2 'ye olasılıkla yakınsamaktadır. Hata terimlerinin bağımsız ve benzer dağılımlı olmaması durumunda, test istatistiğinin hesaplanmasında σ_{ε}^2 yerine σ^2 kullanılması daha

uygundur. S_t kalıntıların kısmi toplamlarıdır ve şu şekilde tanımlanmaktadır (Kwiatkowski vd., 1992):

$$S_t = \sum_i^t e_i; t = 1, 2, \dots \quad (1.60)$$

Burada e_t terimi, Y_t 'nin düzey durağanlık için sadece sabitli regresyonundan, trend durağanlık için sabitli ve trendli regresyonundan elde edilen kalıntılardır. Uzun dönem varyans aşağıdaki gibidir (Kwiatkowski vd., 1992):

$$\sigma^2 = T^{-1}(S_T^2) \quad (1.61)$$

σ^2 'nin tutarlı tahmincisi olan $s^2(l)$ aşağıdaki gibi ifade edilir (Kwiatkowski vd., 1992):

$$s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^T e_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s, l) \sum_{t=s+1}^T e_t e_{t-s} \quad (1.62)$$

Burada $w(s, l)$ ağırlık fonksiyonu ve l gecikmeyi ifade etmektedir.

Otokorelasyon açısından gecikmenin doğru belirlenmesi gerekir. Hata terimlerinin bağımsız ve benzer dağılıma sahip olması durumunda $l = 0$ olarak alınmalıdır. Bu durumda (1.56) numaralı denklemin sağ tarafının ikinci terimi sıfır olacaktır (Çil Yavuz, 2004:243).

LM test istatistiği aşağıdaki gibi standartlaştırılmaktadır (Kwiatkowski vd., 1992):

$$\hat{\eta}_\mu = \frac{\eta_u}{S^2(l)} = T^{-2} \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{S^2}(l) \quad (1.63)$$

Test hipotezleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} H_0: \sigma_u^2 &= 0 \text{ (Seri durağandır.)} \\ H_1: \sigma_u^2 &> 0 \text{ (Seri durağan değildir.)} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Hesaplanan test istatistik değeri simülasyon yöntemiyle elde edilen kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Temel hipotezin reddedilememesi durumunda serinin durağan olduğu sonucuna varılmaktadır.

1.4.5. Ng ve Perron Birim Kök Testi (2001)

Ng ve Perron (2001) çalışmalarında, hata terimlerinin hacminde meydana gelebilecek boyut bozulmasını (size distortion) düzelten dört farklı M - testi geliştirmişlerdir. Dickey ve Fuller birim kök testlerinde boyut bozulması problemi çok büyük sorun yaratmasa da göz ardı edilememektedir (Sevültekin ve Nargeleçekenler, 2007:365).

Birim kök sınamalarının yapılması önemli çıkarımlar yapılmasını sağlar. Fakat testlerden çıkarılan sonuçlar konusunda çoğu araştırmacı şüpheli yaklaşmaktadır. Bu şüphe iki sorundan kaynaklanmaktadır. Birincisi, otoregresif polinom kökleri bire yakın fakat birden küçük değer ise birçok testin gücü düşük olmaktadır. İkincisi, testlerin çoğunluğunda negatif hareketli ortalama polinomunun köklerinin bire yaklaşması durumunda hata teriminde boyut dağılım çarpıklığı meydana gelmektedir (Ng ve Perron, 2001).

Birim kök testlerinde gecikme uzunluğunun uygun belirlenmesi test süreci için önemlidir. Akaike bilgi kriteri (AIC), Schwarz bilgi kriteri (SIC) ve Bayesian bilgi kriteri (BIC) gibi seçim kriterleri dikkate alındığında gecikme uzunluğu olarak genellikle minimum olan değer tercih edilmektedir. Ng ve Perron (2001) çalışmasında ise modifiye edilmiş bilgi kriterleri (Modified Information Criteria – MIC) önerilmiştir.

Ng ve Perron (1996) birim kök testinde veri yaratma süreci aşağıdaki gibidir;

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.65)$$

Burada hata terimi $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ olarak varsayılmaktadır. Phillips ve Perron (1988) birim kök testinde kullanılan Z_α test istatistiğinin modifiye edilmiş hali olan MZ_α test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Ng ve Perron, 1996):

$$MZ_{\alpha} = (T^{-1}Y_T^2 - s^2) \left(2T^{-2} \sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2 \right)^{-1} \quad (1.66)$$

Z_{α} ile MZ_{α} ilişkisi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$MZ_{\alpha} = Z_{\alpha} + \left(\frac{T}{2} \right) (\hat{\alpha} - 1)^2 \quad (1.67)$$

Burada, $\left(\frac{T}{2} \right) (\hat{\alpha} - 1)^2$ terimi düzeltme faktörüdür. Standart varsayımlar altında T oranında $\hat{\alpha}$ 'nın bire yakınsaması, Z_{α} ve MZ_{α} değerinin asimptotik olarak eşdeğer olmasını sağlamaktadır. Bu nedenle Z_{α} ve MZ_{α} 'nın asimptotik kritik değerleri aynıdır (Ng ve Perron, 1996).

İkinci test istatistiği olan MSB aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Ng ve Perron, 1996):

$$MSB = \left(T^{-2} \sum_{t=1}^T \frac{Y_{t-1}^2}{s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.68)$$

MSB test istatistiği ile Phillips ve Perron (1988) birim kök testi arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilmektedir:

$$Z_t = MSB * Z_{\alpha} \quad (1.69)$$

Bu bilgilerden hareketle modifiye edilmiş Phillips ve Perron birim kök testi $MZ_t = MSB * MZ_{\alpha}$ olarak tanımlanmaktadır. MZ_t istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$MZ_t = Z_t + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\sum_{t=1}^T Y_{t-1} / s^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\alpha} - 1)^2 \quad (1.70)$$

Ng ve Perron (2001) çalışmalarında ise ADF-GLS testlerini değiştirerek MP_t test istatistiğini kullanmışlardır. Sabitli model için test istatistiği şu şekildedir:

$$MP_t = \frac{[c^{-2}T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 - \underline{c} T^{-1} \tilde{y}_T^2]}{S_{AR}^2} \quad (1.71)$$

Sabitli ve trendli model için test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$MP_t = \frac{[c^{-2}T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 + (1 - \underline{c})T^{-1} \tilde{y}_T^2]}{S_{AR}^2} \quad (1.72)$$

Ng ve Perron (2001) birim kök testinde modifiye edilmiş bilgi kriterleri şu şekilde ifade edilmektedir:

$$IC(k) = \ln(\hat{\sigma}_k^2) + (k + p + 1)C_T / (T - k_{max}) \quad (1.73)$$

Burada $\hat{\sigma}_k^2$ terimi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\hat{\sigma}_k^2 = (t - k_{max})^{-1} \sum_{t=k+1}^T \hat{e}_{tk}^2 \quad \text{ve} \quad CT / T \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty \quad \text{ve} \quad C_T > 0 \quad (1.74)$$

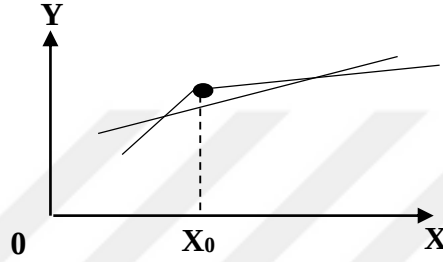
Ng ve Perron (2001) birim kök testinde hesaplanan test istatistiklerinin hipotezleri birbirinden farklılık göstermektedir. MZ_a ve MZ_t test istatistikleri için temel hipotez serinin durağan olmadığını, yani birim köklü olduğunu ifade etmektedir. MSB ve MPT testlerinde ise hipotezler yer değiştirmektedir ve temel hipotez serinin durağan olduğunu ifade etmektedir.

1.5. YAPISAL KIRILMALARI DİKKATE ALAN BİRİM KÖK TESTLERİ

İktisadi değişkenler trend etkisi altında olabilir. Gösterdikleri bu eğilim zaman içinde birtakım faktörlerden etkilenecek değişikliğe uğrayabilir. Bu değişiklikler, “yapısal kırılma” veya “yapısal değişiklik” olarak adlandırılmaktadır (Güriş ve Çağlayan, 2000:359). Başka bir ifade ile yapısal kırılma; serideki trendde ani sıçrama, trendin eğiminde ani değişim ya da birim kökte ani sıçrama olarak tanımlanabilir (Tarı, 2011:403).

Yapısal kırılmalar savaş, kuraklık, deprem, politika değişiklikleri, salgın hastalıklar ve teknolojik değişiklikler gibi faktörlerden kaynaklanabilir. Bu tür olayların etkileri, olaylar bittikten sonra da devam edebilmektedir.

Ekonometrik analizlerde yapısal kırılmaların varlığı test edilmelidir. Çünkü analizin uygulandığı seride yapısal kırılma mevcut olmasına rağmen, kırılma modele dahil edilmez ise; modelin fonksiyonel formu hatalı belirlenmiş olacaktır ve spesifikasyon hatası meydana gelecektir (Güriş ve Çağlayan, 2000:360). Bu durumda, seriye uygulanan birim kök testi sonuçları durağanlığı reddetme yönünde olacaktır. Aşağıda yapısal kırılmanın regresyon doğrusu üzerinde meydana getirdiği değişikliğin gösterimi yer almaktadır.



Şekil 1. Yapısal kırılmanın regresyon doğrusunda gösterimi (Güriş ve Çağlayan, 2000:360)

Şekil 1’de X yatay eksen ve Y dikey eksenidir. X_0 noktasında bir kırılma meydana gelmiştir. Buradaki kırılma dikkate alınmadan regresyon doğrusu tahmin edilir ise modelin fonksiyonel formu yanlış belirlenmiş olur (Güriş ve Çağlayan, 2000:360).

1.5.1. Perron Birim Kök Testi (1989)

Perron (1989) çalışmasında, özünde durağan olan bir seriye yapısal kırılmalar dikkate alınmadan durağanlık analizi yapılması durumunda sonuçların durağan olmama yönünde belirlenebileceğini belirtmiştir. Yeni geliştirdiği test, kırılma noktasının tek olduğu ve bu kırılma noktasının bilindiği varsayımına dayanmaktadır.

Perron, 1929 Büyük Buhran ve 1973 Petrol Krizi’nin makroekonomik değişkenler üzerinde kalıcı etkilere sebep olduğunu belirtmiştir. Bu iki olayın sebep olduğu kırılmaları modele dışsal olarak eklemiştir. 1929 Büyük Buhran’ın birçok değişkenin ortalamasında bir düşüşe, 1973 Petrol Krizi’nin ise değişkenlerin trendinin eğiminde bir değişime sebep olduğunu ortaya koymuştur (Perron, 1989).

Perron (1989) testinde temel hipotez, $T + 1$ sayıda gözleme sahip belirli bir $\{y_t\}_0^T$ serisinin birim kök ve sıfırdan farklı bir kesmenin varlığı ile nitelendirilen bir

zaman serisi sürecinin gerçekleşmesidir. Bununla birlikte, bu yaklaşım ilgili serinin yapısında T_B zamanında ($1 < TB < T$) meydana gelen kırılmaya tek seferlik izin verecek şekilde genelleştirilmiştir (Perron, 1989).

Perron (1989) testi, tek kırılmanın olması durumunda üç tip model üzerinden gerçekleştirilmektedir. Model(A) “crash model” serinin düzeyinde meydana gelen dışsal bir kırılmaya izin vermektedir. Model(B) “changing growth” serinin büyüme oranında trend fonksiyonun eğiminde dışsal bir kırılmaya izin veren modeldir. Model(C) ise her iki etkinin de olduğu modeli ifade etmektedir. Bu modeller şu şekildedir (Perron, 1989):

$$Model A : y_t = \mu + dD(TB)_t + y_{t-1} + e_t \quad (1.75)$$

$$Model B : y_t = \mu_1 + y_{t-1} + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + e_t \quad (1.76)$$

$$Model C : y_t = \mu_1 + y_{t-1} + dD(TB)_t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + e_t \quad (1.77)$$

Burada $D(TB)_t$ ve DU_t değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$D(TB)_t = \begin{cases} 1 & t = T_B + 1 \\ 0 & t \neq T_B + 1 \end{cases}, \quad DU_t = \begin{cases} 1 & t > T_B \\ 0 & t \leq T_B \end{cases} \quad (1.78)$$

$A(L)$ ve $B(L)$ sırasıyla p. ve q. dereceden polinomlar ve L gecikme operatörü olmak üzere $A(L)e_t = B(L)v_t$ 'dir. v_t , 0 ortalama ve σ^2 varyansla bağımsız ve özdeş dağılmaktadır [$v_t \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$] (Perron, 1989).

Testin alternatif hipotezi y_t serisinin durağan bir seri olduğunu ifade etmektedir. Alternatif hipotez altında incelenen modeller şu şekildedir (Perron, 1989):

$$Model A : y_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + e_t \quad (1.79)$$

$$Model B : y_t = \mu + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t^* + e_t \quad (1.80)$$

$$Model C : y_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + (\beta_2 - \beta_1)DT_t + e_t \quad (1.81)$$

Burada DT_t^* ve DT_t değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$DT_t^* = \begin{cases} t - T_B, & t > T_B \\ 0, & t \leq T_B \end{cases}, \quad DT_t = \begin{cases} t, & t > T_B \\ 0, & t \leq T_B \end{cases} \quad (1.82)$$

TB , kırılma zamanıdır. $D(TB)_t$, DU_t ve DT_t^* ise kırılmaları ifade etmek için kullanılan gölge değişkenlerdir (Perron, 1989).

Hipotezlerin sınanmasında kullanılan test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Perron, 1989):

$$\tau = \frac{\hat{\delta} - 1}{sh(\hat{\delta})} \quad (1.83)$$

Kırılma noktası $\lambda = TB/T$ oranıyla bulunmaktadır. Test istatistiğinin kıyaslanmasında kullanılan kritik değerler bu kırılma noktasına(λ) bağlı olarak hesaplanmış olup Perron (1989) çalışmasında yer almaktadır.

1.5.2. Zivot ve Andrews Birim Kök Testi (1992)

Zivot ve Andrews (1992) çalışmalarında, Perron (1989) birim kök testinde kırılmanın dışsal olarak belirlenmesini eleştirmektedirler. Kırılmanın içsel olarak belirlendiği yeni bir test prosedürü geliştirmişlerdir. Kırılma noktasının veriye bağlı olarak gerçekleştiğini, dolayısıyla kırılma döneminin önceden belirlenemeyip tahmin edilebileceğini belirtmektedirler. Kırılma noktası seçiminin önsel gözlemlere dayandırılması gerektiğini, aksi takdirde “ön test (pre - testing)” ile ilgili problemlerin doğabileceğini ve Perron (1989) testinde bu gibi problemlerin var olduğunu öne sürmüşlerdir (Zivot ve Andrews, 1992).

Zivot ve Andrews (1992) birim kök testinin temel hipotezi, serinin birim köklü olduğunu fakat yapısal kırılmanın olmadığını belirtmektedir. Alternatif hipotez ise serinin durağan olduğunu ve trend fonksiyonunda tek kırılmanın olduğunu ifade etmektedir. Perron (1989)’un ADF test stratejisi takip edilerek birim kök test sürecinde kullanılan modeller aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Zivot ve Andrews, 1992):

$$y_t = \hat{\mu}^A + \hat{\theta}^A DU_t(\hat{\lambda}) + \hat{\beta}^A t + \hat{\alpha}^A y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \hat{c}_j^A \Delta y_{t-j} + \hat{e}_t \quad (1.84)$$

$$y_t = \hat{\mu}^B + \hat{\beta}^B t + \hat{\gamma}^B DT_t^*(\hat{\lambda}) + \hat{\alpha}^B y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \hat{c}_j^B \Delta y_{t-j} + \hat{e}_t \quad (1.85)$$

$$y_t = \hat{\mu}^c + \hat{\theta}^c DU_t(\hat{\lambda}) + \hat{\beta}^c t + \hat{\gamma}^c DT_t^*(\hat{\lambda}) + \hat{\alpha}^c y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \hat{c}_j^c \Delta y_{t-j} + \hat{e}_t \quad (1.86)$$

Burada $\lambda = T_B/T$ kırılma noktasıdır. DU_t ve DT_t gölge değişkenlerdir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$DU_t(\lambda) = \begin{cases} 1, & t > T_\lambda \\ 0, & t \leq T_\lambda \end{cases}, \quad DT_t^*(\lambda) = \begin{cases} t - T_\lambda, & t > T_\lambda \\ 0, & t \leq T_\lambda \end{cases} \quad (1.87)$$

Zivot ve Andrews (1992) birim kök testinde, $\alpha^i = 1$ ifadesinin sınanması için Perron (1989) ile aynı prosedür kullanılarak t istatistik değerleri hesaplanmaktadır. Kırılma yılı, en küçük t istatistiğinin olduğu yıl olarak kabul edilmektedir. Hesaplanan test istatistiği, Zivot ve Andrews (1992) kritik değerleriyle kıyaslanmaktadır.

1.5.3. Lumsdaine ve Papell Birim Kök Testi (1997)

Lumsdaine ve Papell (1997) çalışmalarında, Zivot ve Andrews birim kök testinde önerilen tek içsel kırılma yerine iki kırılmaya izin veren bir test geliştirmişlerdir. İki kırılmaya izin veren birim kök testlerinin tek kırılmaya izin veren birim kök testlerine göre daha güçlü olduğunu belirtmişlerdir (Glynn vd., 2007).

Lumsdaine ve Papell (1997) birim kök testinin temel hipotezi, yapısal kırılma olmadan birim kökün ($\alpha = 0$) varlığını ifade etmektedir. Alternatif hipotez ise trend fonksiyonunda iki farklı noktada kırılmanın meydana geldiğini ve serinin durağan olduğunu ifade etmektedir. Testin uygulamasında aşağıdaki denklemler kullanılmaktadır (Lumsdaine ve Papell, 1997):

Model AA:

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \alpha y_{t-1} + \theta DU1_t + \omega DU2_t + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t \quad (1.88)$$

Model CA:

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \alpha y_{t-1} + \theta DU1_t + \gamma DT1_t + \omega DU2_t + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t \quad (1.89)$$

Model CC:

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \alpha y_{t-1} + \theta DU1_t + \gamma DT1_t + \omega DU2_t + \psi DT2_t + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t \quad (1.90)$$

Model AA düzeyde iki kırılmalı, model CA düzeyde iki kırılmalı ve eğimde tek kırılmalı, model CC ise hem düzeyde hem de eğimde iki kırılmalı modeldir. Modelde yer alan gölge değişkenler şu şekilde tanımlanmaktadır (Lumsdaine ve Papell, 1997):

$$DU1_t = \begin{cases} 1, & t > TB1 \\ 0, & t \leq TB1 \end{cases}, \quad DU2_t = \begin{cases} 1, & t > TB2 \\ 0, & t \leq TB2 \end{cases} \quad (1.91)$$

$$DT1_t = \begin{cases} t - TB1, & t > TB1 \\ 0, & t \leq TB1 \end{cases}, \quad DT2_t = \begin{cases} t - TB2, & t > TB2 \\ 0, & t \leq TB2 \end{cases} \quad (1.92)$$

Burada TB_1 birinci kırılma noktası ve TB_2 ikinci kırılma noktasıdır. $DU1_t$ ve $DU2_t$ bu kırılma noktalarının ortalamada, $DT1_t$ ve $DT2_t$ kırılmaların trendde meydana geldiğini göstermektedir. Mümkün tüm kırılma tarihleri denenerek α 'nın t istatistiğini minimum yapan değer, kırılma tarihi olarak seçilmektedir (Lumsdaine ve Papell, 1997).

Lumsdaine ve Papell (1997) birim kök testinde iki kırılmanın ardışık iki tarihte meydana gelme ihtimali dikkate alınmamaktadır. Yani negatif şok ile onu takip eden pozitif şok iki ayrı bölüm olarak değerlendirilemez (Lumsdaine ve Papell, 1997). Ayrıca, hesaplanan kritik değerler yapısal kırılmayı dikkate almamaktadır (Glynn vd., 2007).

1.5.4. Lee ve Strazicich Birim Kök Testi (2003)

Lumsdaine ve Papell (1997) iki kırılmalı birim kök testinin temel hipotezi bir önceki bölümde belirtildiği üzere, yapısal kırılma olmadan birim kökün varlığını ifade etmektedir. Test süreci gerçekleştirildikten sonra elde edilen sonuçlar temel hipotezin reddedilmesi yönünde çıkabilir. Bu sonuç yalnızca birim kökün olmadığı anlamına

gelmemekte; yapısal kırılma olmadan birim kök olmadığını ifade etmektedir (Lee ve Strazicich, 2003).

Lee ve Strazicich (2003) çalışmalarında oluşturdukları temel hipotez ve alternatif hipotezin her ikisi de içsel olarak tahmin edilen iki kırılmayı dikkate almaktadır. Temel hipotez, yapısal kırılmalı birim kökün varlığını; alternatif hipotez ise yapısal kırılmalı durağanlığı ifade etmektedir (Lee ve Strazicich, 2003).

Lee ve Strazicich (2003) iki kırılmalı birim kök testinde veri üretim süreci aşağıdaki gibidir:

$$y_t = \delta' Z_t + \varepsilon_t \quad (1.93)$$

$$e_t = \beta e_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.94)$$

Burada Z_t dışsal değişkenlerin vektörüdür. ε_t , 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılan hata terimidir [$(\varepsilon_t \sim \text{idd}(0, \sigma^2))$]. Model A, düzeyde iki kırılmaya izin vermektedir ve $Z_t = [1, t, D1_t, D2_t]'$ olarak tanımlanmaktadır. Model C, hem düzeyde hem trendde kırılmaya izin vermektedir ve $Z_t = [1, t, D1_t, D2_t, DT1_t, DT2_t]'$ olarak ifade edilmektedir (Lee ve Strazicich, 2003).

$D1_t$, $D2_t$, $DT1_t$ ve $DT2_t$ terimleri kırılmaları gösteren gölge değişkenlerdir. $TB1$ birinci kırılma tarihi ve $TB2$ ikinci kırılma tarihi olmak üzere gölge değişkenler şu şekilde tanımlanmaktadır (Lee ve Strazicich, 2003):

$$D1_t = \begin{cases} 1, & t \geq TB1 + 1 \\ 0, & t < TB1 + 1 \end{cases}, \quad D2_t = \begin{cases} 1, & t \geq TB2 + 1 \\ 0, & t < TB2 + 1 \end{cases} \quad (1.95)$$

$$DT1_t = \begin{cases} t - TB1, & t \geq TB1 + 1 \\ 0, & t < TB1 + 1 \end{cases}, \quad DT2_t = \begin{cases} t - TB2, & t \geq TB2 + 1 \\ 0, & t < TB2 + 1 \end{cases} \quad (1.96)$$

β 'nın değerlerine bağlı olarak, iki kırılmalı model A için yapısal kırılmaları içeren temel hipotez ($\beta = 1$) ve alternatif hipotez ($\beta < 1$) aşağıdaki gibidir (Lee ve Strazicich, 2003):

$$\text{Temel hipotez} \quad : \quad y_t = \mu_0 + d_1 \beta_{1t} + d_2 \beta_{2t} + y_{t-1} + v_{1t} \quad (1.97)$$

$$\text{Alternatif hipotez} \quad : \quad y_t = \mu_0 + \gamma t + d_1 D1_t + d_2 D2_t + v_{1t} \quad (1.98)$$

Burada v_{1t} ve v_{2t} durağan hata terimleridir. Hem düzeyde hem de trendde iki kırılmalı model C için hipotezler aşağıdaki gibidir kurulmaktadır:

Temel hipotez:

$$y_t = \mu_0 + d_1\beta_{1t} + d_2\beta_{2t} + y_{t-1} + v_{1t} \quad (1.99)$$

Alternatif hipotez:

$$y_t = \mu_0 + \gamma t + d_1D1_t + d_2D2_t + d_3DT1_t + d_4DT2 + v_{1t} \quad (1.100)$$

İki kırılma olması durumunda LM test istatistiğinin hesaplanması için aşağıdaki regresyon tahmin edilmelidir (Lee ve Strazicich, 2003):

$$\Delta y_t = \delta' \Delta Z_t + \phi \tilde{S}_{t-1} + u_t \quad (1.101)$$

Burada $\tilde{S}_t = y_t - \tilde{\psi}_x - Z_t \tilde{\delta}$ ve $t = 2, \dots, T$ olarak tanımlanmaktadır. $\tilde{\delta}$ terimi Δy_t 'nin ΔZ_t üzerindeki regresyonundan elde edilen katsayıdır. $\Delta \tilde{S}_{t-j}$ terimi modeldeki otokorelasyonlu hataları düzeltmek için eklenmektedir (Lee ve Strazicich, 2003).

Birim kök temel hipotezini ($\phi = 0$) sınamak için kullanılacak test istatistiği aşağıdaki gibidir (Lee ve Strazicich, 2003):

$$\tilde{\rho} = T \tilde{\phi} \quad (1.102)$$

$\tilde{\tau}$: $\phi = 0$ temel hipotezini sınamak için kullanılan t – istatistiği

İçsel olarak belirlenen iki kırılma tarihi ($TB1$ ve $TB2$), LM test istatistiğinin minimum olduğu noktada belirlenmektedir (Lee ve Strazicich, 2003).

$$LM_\rho = \inf_{\lambda} \tilde{\rho}(\lambda), \quad (1.103)$$

$$LM_\tau = \inf_{\lambda} \tilde{\tau}(\lambda) \quad (1.104)$$

Hipotezlerin sınanması için hesaplanan test istatistiği, Lee ve Strazicich (2003) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

1.5.5. Kapetanios Birim Kök Testi (2005)

Kapetanios (2005) çalışmasında, m maksimum kırılma sayısı olmak üzere, seride olabilecek kırılma sayısının ikiden daha fazla veya m 'ye eşit olabileceğini belirtmektedir. Testin temel hipotezi ($\alpha = 1$) yapısal kırılmanın olmadığı sapmalı birim kökü; alternatif hipotezi ($\alpha < 1$) ise sabitte ve/veya trendde m sayıda kırılmanın bulunduğu trend durağan bir süreci ifade etmektedir (Kapetanios, 2005).

Kapetanios (2005) birim kök test süreci, Lumsdaine ve Papell (1997) birim kök testine göre daha az hesaplama gerektirmektedir. Lumsdaine ve Papell (1997) birim kök testinin alternatif hipotezi önsel olarak belirlenen iki kırılmayı içermektedir ve kırılma sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda kullanılamamaktadır. Kapetanios (2005) çalışmasında ise varsayılan belirli bir sayıdaki kırılmaya bağlı olmaktan kaçınmıştır.

Kapetanios (2005) test prosedürü, Banerjee vd. (1992) ve Zivot ve Andrews (1992) tarafından tek kırılmalı durumlar için önerilen ardışık Dickey ve Fuller (DF) t istatistikleri izlenerek oluşturulmaktadır. Çalışmanın temelini oluşturan model aşağıdaki gibidir (Kapetanios, 2005):

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^m \phi_i DU_{i,t} + \sum_{i=1}^m \phi_i DT_{i,t} \quad (1.105) \\ + \epsilon_t$$

Burada $1 - \gamma(L)$ tüm kökleri birim çemberin dışındadır ve $\gamma(L) = \gamma_1 L + \dots + \gamma_k L^k$ olarak ifade edilmektedir. $DU_{i,t}$ ve $DT_{i,t}$ terimleri sabitte ve trendde meydana gelen kırılmaları gösteren gölge değişkenlerdir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Kapetanios, 2005):

$$DU_{i,t} = \begin{cases} 1, & t > T_{b,i} \\ 0, & t \leq T_{b,i} \end{cases}, \quad DT_{i,t} = \begin{cases} t - T_{b,i}, & t > T_{b,i} \\ 0, & t \leq T_{b,i} \end{cases} \quad (1.106)$$

Burada $T_{b,i} + 1$ değeri i . kırılma tarihini göstermektedir (Kapetanios, 2005).

Kapetanios (2005) çalışmasında, Bai ve Perron (1998)'un ızgara tarama (grid search) şemasını dikkate alarak birim kök testini gerçekleştirmektedir. Test süreci aşağıdaki gibidir (Kapetanios, 2005):

Adım 1. Maksimum kırılma sayısı (m) için tek kırılma belirlenmeye çalışılır. Örneklem üzerindeki tüm olası kırılma noktaları için $\alpha = 1$ hipotezinin t istatistikleri elde edilir. T_1^α , olası tüm kırılmaları ve τ^1 ise t -test istatistiklerini gösterir.

Adım 2. Kalıntı kareler toplamının minimum olduğu nokta kırılma tarihi olarak belirlenir. Gecikme sayısı k 'nin bilindiği varsayılır.

$$SSR = \sum_{t=k+2}^T \left(y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t + \hat{\alpha} y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{\gamma}_i \Delta y_{t-i} + \hat{\phi}_1 D U_{1,t} + \hat{\psi}_1 D T_{1,t} \right)^2 \quad (1.107)$$

Adım 3. Tahmin edilen kırılma tarihi örnekleme eklenir. Sonraki kırılma tarihi aynı aşamalar izlenerek araştırılır. T_2^α , olası tüm kırılmaları ve τ^2 ise t -test istatistiklerini ifade etmektedir. τ^2 test istatistik değeri, τ^1 test istatistik değerine eklenir ve birleşimleri $\tau_1^2 = \tau^1 \cup \tau^2$ olarak gösterilir.

Adım 4. Bir sonraki kırılma tarihi, bir önceki adımlarda olduğu gibi kalıntı kareler toplamının minimum olduğu nokta kabul edilir.

Adım 5. Üçüncü ve dördüncü adımlar m kırılma sayısı elde edilene kadar tekrarlanır. Olası tüm sonuçlar $T_i^\alpha, i = 3, \dots, m$ olarak gösterilir.

Adım 6. Elde edilen test istatistikleri dizisi $\tau_1^m = \tau^1 \cup \tau^2 \cup \dots \cup \tau^m$ olarak gösterilmektedir. İçlerinden minimum olan değer (τ_{min}^m) uygun test istatistiği olarak belirlenir.

Hesaplanan test istatistiği, Kapetanios (2005) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanarak test hipotezleri sınanmaktadır.

1.5.6. Carrion-i Silvestre vd. Birim Kök Testi (2009)

Carrion-i Silvestre vd. (2009) çalışmalarında beş kırılmaya kadar izin veren bir birim kök testi geliştirmişlerdir. Kırılma noktaları içsel kabul edilmektedir. Kırılma noktaları, quasi – GLS yöntemi kullanılarak ve dinamik programlama süreciyle hata kareler toplamı minimize edilerek belirlenmektedir (Carrion-i Silvestre vd., 2009).

Testin stokastik veri üretme süreci şu şekildedir (Carrion-i Silvestre vd., 2009):

$$y_t = d_t + u_t \quad (1.108)$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + v_t, \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (1.109)$$

Denklemden u_t , gözlemlenemeyen sıfır ortalamalı bir süreçtir. Burada v_t ise hata terimidir ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Carrion-i Silvestre vd., 2009):

$$v_t = \sum_{i=1}^0 \gamma_i \eta_{t-i} \quad (1.110)$$

Carrion-i Silvestre vd. (2009) beş farklı test istatistiği geliştirmiştir. Bu test istatistikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$P_T(\lambda^0) = \frac{[S(\underline{\alpha}, \lambda^0) - \underline{\alpha}S(1, \lambda^0)]}{S^2(\lambda^0)} \quad (1.111)$$

$$MP_T(\lambda^0) = \frac{[c^{-2}T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 + (1 - \underline{c})T^{-1}\tilde{y}_T^2]}{s(\lambda^0)^2} \quad (1.112)$$

$$MZ_\alpha(\lambda^0) = (T^{-1}\tilde{y}_T^2 - s(\lambda^0)^2) \left(2T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 \right)^{-1} \quad (1.113)$$

$$MSB(\lambda^0) = \left(s(\lambda^0)^{-2}T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.114)$$

$$MZ_t(\lambda^0) = (T^{-1}\tilde{y}_T^2 - s(\lambda^0)^2) \left(4s(\lambda^0)^2 T^{-2} \sum_{t=1}^T \tilde{y}_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.115)$$

Testin temel hipotezi $\alpha = 1$ şeklinde ifade edilmek üzere yapısal kırılmalar ile birim kökün varlığını belirtmektedir. Alternatif hipotez ise $\alpha < 1$ şeklinde ifade edilmek üzere yapısal kırılmalar ile serinin durağan olduğunu göstermektedir. Hipotezlerin sınanmasında kullanılan asimptotik kritik değerler, bootstrap kullanılarak üretilmektedir (Carrion-i Silvestre vd., 2009).

1.5.7. Narayan ve Popp Birim Kök Testi (2010)

Narayan ve Popp (2010) çalışmalarında kırılma noktalarının bilinmediği varsayımına dayanan ADF tipi iki kırılmanın dikkate alındığı bir birim kök testi geliştirmişlerdir. Testin veri yaratma süreci aşağıdaki gibidir (Narayan ve Popp, 2010):

$$y_t = d_t + u_t \quad (1.116)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.117)$$

$$\varepsilon_t = \psi^*(L)e_t = A^*(L)^{-1}B(L) \quad (1.118)$$

Yukarıdaki $e_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$ olarak ifade edilmektedir. Sırasıyla q ve p mertebesinde olan $A^*(L)$ ve $B(L)$ gecikme polinomlarının köklerinin dışında olduğu varsayılır (Narayan ve Popp, 2010).

Narayan ve Popp (2010), kırılma noktalarının önceden bilinmediği varsayımına dayanarak kırılmaların aşamalı bir şekilde gerçekleştiğini belirtmişlerdir. Kademeli sapmalı (innovational outliers) modeller kullanmışlardır. Geliştirdikleri test için iki farklı model önermişlerdir. Birincisi, trendli serilerin düzeyinde iki kırılmanın gerçekleştiği durumda kullanılan modeldir. İkincisi ise trendli serilerin hem düzeyinde hem de eğiminde iki kırılmanın gerçekleştiği durumda kullanılan modeldir (Narayan ve Popp, 2010).

Narayan ve Popp (2010) testinde kullanılan modeller d_t teriminin nasıl tanımlandığına göre farklılık göstermektedir. Aşağıda d_t teriminin tanımları gösterilmiştir (Narayan ve Popp, 2010):

$$\text{Model 1: } d_t^{M1} = \alpha + \beta t + \psi * (L)e_t(\theta_1 DU'_{1,t} + \theta_2 DU'_{2,t}), \quad (1.119)$$

$$\text{Model 2: } d_t^{M2} = \alpha + \beta t + \psi * (L)e_t(\theta_1 DU'_{1,t} + \theta_2 DU'_{2,t} + \gamma_1 DT'_{1,t} + \gamma_2 DT'_{2,t}) \quad (1.120)$$

Burada $DU'_{i,t}$ ve $DT'_{i,t}$ gölge değişkenleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Narayan ve Popp, 2010):

$$DU'_{i,t} = 1(t > T'_{B,i}), \quad (1.121)$$

$$DT'_{i,t} = 1(t > T'_{B,i})(t - T'_{B,i}) \quad \text{ve} \quad i = 1, 2, .. \quad (1.122)$$

$T'_{B,i}$ (tüm i 'ler için) kırılma noktalarını göstermektedir. Kırılma noktaları, $(T_{B,1}, T_{B,2})$ bütün mümkün kombinasyonlar arasından F- istatistiğinin anlamlı ve maksimum olduğu değerler olarak belirlenir. θ_i düzeyde kırılma, γ_i ise eğimde kırılmanın büyüklüğünü ifade eden parametredir. ψ^* teriminin dahil edilmesi, zaman içinde kırılmaların oluşmasına olanak tanımaktadır (Narayan ve Popp, 2010).

Yukarıda ifade edilen yapısal biçimin indirgenmiş gösterimi şu şekilde yazılmaktadır (Narayan ve Popp, 2010):

Model 1:

$$y_t^{M1} = \rho y_{t-1} + \alpha_1 + \beta^* t + \theta_1 D(T'_B)_{1,t} + \theta_2 D(T'_B)_{2,t} + \delta_1 DU'_{1,t-1} + \delta_2 DU'_{2,t-1} + \sum_{j=1}^k \beta_j \Delta y_{t-j} + e_t \quad (1.123)$$

Model 2:

$$y_t^{M2} = \rho y_{t-1} + \alpha^* + \beta^* t + \kappa_1 D(T'_B)_{1,t} + \kappa_2 D(T'_B)_{2,t} + \delta_1^* DU'_{1,t-1} + \delta_2^* DU'_{2,t-1} + \gamma_1^* DT'_{1,t-1} + \gamma_2^* DT'_{2,t-1} + \sum_{j=1}^k \beta_j \Delta y_{t-j} + e_t \quad (1.124)$$

Testin temel hipotezi $H_0: \rho = 1$ şeklinde oluşturulmaktadır ve birim kökün varlığını ifade etmektedir. Birim kök hipotezi, $H_1: \rho < 1$ alternatif hipotezine karşı

sınanmaktadır. Hipotezlerin test edilmesinde kullanılan kritik değerler Monte Carlo simülasyonları kullanılarak üretilmektedir (Narayan ve Popp, 2010).



İKİNCİ BÖLÜM

DOĞRUSAL OLMAMA DURUMUNDA KULLANILAN BİRİM KÖK TESTLERİ

Bu bölümde öncelikle doğrusal olmama kavramı açıklanacaktır. Daha sonra birim kök testleri doğrusal olmama durumuna göre incelenecektir.

2.1. DOĞRUSAL OLMAMA DURUMU

Doğrusal olmama kavramı, parametrelerde doğrusal olmama ve değişkenlerde doğrusal olmama olmak üzere iki durumda incelenmektedir. Parametrelere göre doğrusal olmama modelin parametrelerinin matematiksel yapısıyla ilgilidir (Güriş, 2020:1).

Y 'nin koşullu beklenen değeri $E(Y|X_i)$, β katsayısının doğrusal bir fonksiyonu ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Gujarati, 1995):

$$E(Y|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i \quad (2.1)$$

Y 'nin beklenen değerinin, katsayılara göre doğrusal olabilmesi için β katsayılarının yalnızca birinci kuvvetinin olması ve başka bir parametre ile çarpım ya da bölüm halinde olmaması gerekir (Gujarati, 1995).

$$E(Y|X_i) = \beta_1 + \sqrt{\beta_2} X_i \quad (2.2)$$

Yukarıdaki denklem, X_i 'nin katsayısı olan $\sqrt{\beta_2}$ 'nin kuvvetinden kaynaklı olarak parametresine göre doğrusal bir model değildir.

Parametrelere göre doğrusal olmama durumuna benzer olarak, değişkenlere göre doğrusal olmama durumu yine değişkenlerin matematiksel yapısından kaynaklı olabilir. $Y = f(X)$ fonksiyonu, eğer X 'in yalnızca birinci kuvveti kullanılır ise doğrusal bir fonksiyondur. Fakat X değişkeni başka bir değişken ile çarpım veya bölüm halinde ise doğrusal değildir. Başka bir ifade ile Y 'deki değişimin X 'teki değişime oranı, yani eğimi ya da türevi(dY/dX), X değerinden bağımsız ise doğrusaldır (Gujarati, 1995).

$$E(Y|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \quad (2.3)$$

Yukarıdaki model doğrusal değildir. Çünkü X değişkeninin kuvveti 2'dir. Yani dY/dX oranı $2\beta_2 X$ 'e eşit olmaktadır ve bu değer X değerinden bağımsız değildir.

Değişkenlerde doğrusal olmama durumu söz konusu olduğunda, bazı dönüşümler yapılarak değişkenler doğrusal forma getirilebilmektedir. Eğer değişkenlerine göre görünürde doğrusal olmayan model, birtakım dönüşümler sonucunda doğrusal bir yapıya getirilebilir ise gerçekte doğrusal olan model olarak nitelendirilmektedir. Bu yapıya örnek olarak Cobb-Douglas üretim fonksiyonu gösterilebilir (Güriş, 2020:2).

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Cobb and Douglas, 1928):

$$Y = AL^\beta K^\alpha \cdot e^u \quad (2.4)$$

Burada Y toplam üretim, L işgücü ve K sermaye girdisidir. Bu denklem görünürde doğrusal gibi görünmemesine rağmen, logaritmik dönüşüm ile doğrusal yapıya getirilebilmektedir. Doğrusal yapıda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\ln Y = \alpha \ln K + \beta \ln L + u \quad (2.5)$$

Bu model artık doğrusal tahmin yöntemleri kullanılarak tahmin edilebilir. Kullanılacak olan testler doğrusal modellerde olduğu gibi uygulanabilir (Güriş, 2020:2).

Değişkenlerine göre görünürde doğrusal olmayan bir model, hiçbir dönüşüm ile doğrusal bir yapıya getirilemiyor ise gerçekte doğrusal olmayan modeldir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda hata terimi olan e , toplamsal yapıda olduğu varsayılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir (Güriş, 2020:2):

$$Y = AL^\beta K^\alpha + e^u \quad (2.6)$$

Yukarıdaki model, logaritmik dönüşümler ile doğrusal bir yapıya getirilememektedir. Yani gerçekte doğrusal olmayan modeldir.

2.2. DOĞRUSALLIK TESTLERİ

Ekonometrik bir çalışma yapılırken serilerin doğrusal olup olmadığının incelenmesi oldukça önemlidir. Çünkü özünde doğrusal olmayan seriler doğrusal

yöntemler kullanılarak modellenir ise hatalı sonuçlar elde edilebilir. Bu yüzden çalışmaya öncelikle serilerin doğrusal olup olmadığına karar vermek ile başlanmalıdır.

Literatürde doğrusallığın test edilmesi için kullanılan birçok test bulunmaktadır. Bu testlerin birbirlerine göre belirgin bir üstünlüğü yoktur. Çünkü doğrusal olmama durumu farklı sebeplerden kaynaklanabilir (Guhathakurta vd., 2011). Bu bölümde uygulamada sıklıkla kullanılan McLeod ve Li (1983), Keenan (1985), Tsay (1986), Brock, Dechert ve Scheinkman (1987) ve Hansen (1999) doğrusallık testleri incelenecektir.

2.2.1. McLeod ve Li Testi (1983)

McLeod ve Li (1983) tarafından geliştirilen bu teste temel amaç ARMA model tahmininin yeterliliğini analiz etmektedir. $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ ve $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ olmak üzere ARMA (p, q) modeli aşağıdaki gibi yazılabilmektedir (McLeod ve Li, 1983):

$$\phi(B)(z_t - \mu) = \theta(B)a_t \quad (2.7)$$

Burada μ serinin ortalaması, n gözlem sayısı ve B ise gecikme operatörüdür. $\phi(B)$ ve $\theta(B)$ polinomlarının hiçbir ortak faktöre sahip olmadığı ve bütün köklerinin birim çemberin dışında olduğu varsayılır.

Portmanteau istatistiği, $\hat{r}_{aa}^2$ terimi $\hat{a}_t^2$ 'nin otokorelasyon fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (McLeod ve Li, 1983):

$$Q_{aa}^* = n(n+2) \sum_{i=1}^M \frac{\hat{r}_{aa}^2(i)}{n-i} \quad (2.8)$$

Burada, $\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{a}_t^2 / n$ olmak üzere $\hat{r}_{aa}^2$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\hat{r}_{aa}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\hat{a}_t^2 - \hat{\sigma}^2) (\hat{a}_{t-k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^n (\hat{a}_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2} \quad (2.9)$$

Eğer a_t bağımsız ise hesaplanan Q_{aa}^* istatistiği M serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına uygunluk göstermektedir (McLeod ve Li, 1983).

2.2.2. Keenan (1985)

Keenan (1985) çalışması temel olarak Volterra açılımına dayanmaktadır. Volterra açılımı, doğrusal olmayan durağan zaman serisi modellerinin en genel biçimi olarak bilinmektedir ve aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Keenan, 1985):

$$Y_t = \mu + \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_u \varepsilon_{t-u} + \sum_{u,v=-\infty}^{\infty} a_{uv} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v} + \sum_{u,v,w=-\infty}^{\infty} a_{uvw} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v} \varepsilon_{t-w} + \dots \quad (2.10)$$

Burada $\{\varepsilon_t, -\infty < t < \infty\}$ sıfır ortalamalı, bağımsız ve özdeş dağılımlı bir süreçtir. Denklemden yer alan çarpımsal ifadeler, denklemin doğrusal olmadığını göstermektedir.

Test prosedürü aşağıdaki aşamalar takip edilerek gerçekleştirilmektedir (Keenan, 1985):

Adım 1. Y_s 'nin $\{1, Y_{s-1}, \dots, Y_M\}$ ile regresyonu oluşturulur ve $\{\hat{Y}_s\}$ değerleri hesaplanır. Regresyondan elde edilen kalıntılar $s = M + 1, \dots, n$ için $\{\hat{e}_s\}$ olarak ve kalıntı kareler toplamı ise $\langle \hat{e}, \hat{e} \rangle = \sum \hat{e}_s^2$ biçiminde ifade edilir.

Adım 2. $\hat{Y}_s^2$ 'nin $\{1, Y_{s-1}, \dots, Y_M\}$ ile regresyonu oluşturulur ve kalıntılar $\{\hat{\xi}_s\}$ hesaplanır.

Adım 3. $\hat{e} = (\hat{e}_{M+1}, \dots, \hat{e}_n)$ 'nin $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_{M+1}, \dots, \hat{\xi}_n)$ ile regresyonu oluşturulur. Buradan hareketle $\hat{\eta}$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}_0 \left(\sum_{t=M+1}^n \hat{\xi}_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

Burada $\hat{\eta}_0$ regresyon katsayısı olmak üzere $\hat{F}$ istatistik değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Keenan, 1985):

$$\hat{F} = \frac{\hat{\eta}^2 (n - 2M - 2)}{\langle \hat{e}, \hat{e} \rangle - \hat{\eta}^2} \quad (2.12)$$

Hesaplanan test istatistiği $\hat{F} \sim \hat{F}_{1,n-2M-2}$ dağılımına uygunluk göstermektedir.

2.2.3. Tsay Testi (1986)

Tsay (1986) çalışmasında geliştirdiği bu testte, Keenan (1985) tarafından önerilen testten farklı olarak değişkenlerin çapraz çarpımlarını kullanmıştır. Keenan (1985) testinin yalınlığını koruyarak daha güçlü bir test önermiştir.

Durağan bir zaman serisi Y_t genel bir biçimde şu şekilde yazılmaktadır (Tsay, 1986):

$$Y_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i e_{t-i} + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} b_{ij} e_{t-i} e_{t-j} + \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} b_{ijk} e_{t-i} e_{t-j} e_{t-k} + \dots \quad (2.13)$$

Burada μ terimi Y_t 'nin düzey ortalaması ve $\{e_t, -\infty < t < \infty\}$ bağımsız ve özdeş dağılıma sahip rastgele değişkenlerin güçlü durağan sürecidir. Eğer $\{b_{ij}\}, \{b_{ijk}\}$ gibi yüksek dereceli katsayılardan herhangi biri sıfırdan farklı ise Y_t doğrusal değildir (Tsay, 1986).

Test adımları aşağıdaki gibidir (Tsay, 1986):

Adım 1. Y_t serisine $\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}\}$ üzerinden en küçük kareler yöntemi uygulanır ve kalıntılar $\{\hat{e}_t\}$ elde edilir. Oluşturulan regresyon modeli $t = M + 1, \dots, n$ olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$Y_t = W_t \Phi + e_t \quad (2.14)$$

Burada $W_t = 1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}$ ve $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M)^T$ 'dir. M önceden belirlenmiş pozitif tamsayı, n örnek boyutu ve T matris transpozunu gösteren üst simgedir.

Adım 2. Z_t vektörünün $\{1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M}\}$ üzerinden regresyonu hesaplanır ve kalıntı vektörü $\{\hat{X}_t\}$ elde edilir. Çok değişkenli regresyon modeli $t = M + 1, \dots, n$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$Z_t = W_t H + X_t \quad (2.15)$$

Burada Z_t , $m = \frac{1}{2}M(M + 1)$ boyutunda $Z_t^T = vech(U_t^T U_t)$ ile açıklanan bir vektördür. $U_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M})$ olarak tanımlanmaktadır ve *vech* terimi yarım kümelenmiş (half stacking) vektörü ifade etmektedir.

Adım 3. $\hat{\varepsilon}_t$ serisinin $\hat{X}_t$ üzerinden regresyonu aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{X}_t \beta + \varepsilon_t \quad (t = M + 1, \dots, n) \quad (2.16)$$

$\hat{F}$ terimi, regresyonun ortalama karesinin, hataların ortalama karesine olan F oranıdır ve şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\hat{F} = \left\{ \left(\sum \hat{X}_t \hat{\varepsilon}_t \right) \left(\sum \hat{X}_t^T \hat{X}_t \right)^{-1} \left(\sum \hat{X}_t^T \hat{\varepsilon}_t / m \right) \right\} / \left\{ \sum \hat{\varepsilon}_t^2 / (n - M - m - 1) \right\} \quad (2.17)$$

Burada $t = M + 1, \dots, n$ ve $\hat{\varepsilon}_t$ ise (2.16) numaralı denklemden elde edilen en küçük kareler kalıntılarıdır.

Test istatistiği $\hat{F} \sim F_{m, n-m-p-1}$ dağılımına uygunluk göstermektedir. Serbestlik derecesinde yer alan $m = p(p - 1)/2$ 'dir (Güriş, 2020:99).

2.2.4. Brock, Dechert ve Scheinkman Testi (1987)

Brock, Dechert ve Scheinkman (1987) çalışmalarında geliştirdikleri bu testin kökeni kaos teoremine dayanmaktadır. Serilerin bağımsız ve eş dağılıma (*iid*) uyum gösterip göstermediğini sınamak için kullanılmaktadır. Test süreci tahmin edilen modelin hata terimlerine dayandığı için tanımlama hatası testi olarak kullanılmaktadır (Güriş, 2020: 93).

Testin sıfır hipotezi serinin bağımsız ve eş dağılıma (*iid*) uygunluk gösterdiğini ifade etmektedir. Alternatif hipotez altında ise belirsizlik bulunmaktadır (Brock vd., 1987).

Test istatistik değeri korelasyon integraline dayanmaktadır. X_t bir zaman serisi ve $T_m = T - (m - 1)$ olmak üzere korelasyon integrali aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Brock vd., 1987):

$$C_{m,T}(\epsilon) = \sum_{t < s} I_{\epsilon}(X_t^m - X_s^m) \left\{ \frac{2}{T_m(T_m - 1)} \right\} \quad (2.18)$$

Burada $X_t^m = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1})$ olarak gösterilen seri X_t serisinin m adet geçmiş değerlerini ifade etmektedir. I_{ϵ} gösterge fonksiyonu olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$I_{t,s;\epsilon} = \begin{cases} 1 & \|X_t^m - X_s^m\| \leq \epsilon \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.19)$$

Bu bilgilerden hareketle test istatistik değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Brock vd., 1987):

$$V_{m\epsilon} = \sqrt{T} \frac{C_{m,T}(\epsilon) - C_{1,T}(\epsilon)^m}{S_{m,T}} \quad (2.20)$$

Burada $S_{m,T}$ standart sapmadır. Hesaplanan test istatistik değeri $N(0,1)$ dağılımına uygunluk göstermektedir.

2.2.5. Hansen Testi (1999)

Hansen (1999) çalışmasında kendinden uyarımlı eşik değerli otoregresif model (SETAR) tipi doğrusal olmamayı tespit eden bir test önermiştir. Bu test ile doğrusal olmama sınanırken aynı zamanda modeldeki rejim sayısı tespit edilmektedir (Güriş, 2020: 102).

Y_t bir zaman serisi, $X_{t-1} = (1Y_{t-1}Y_{t-2} \dots Y_{t-p})'$ ve m rejim sayısı olmak üzere SETAR (m) model aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Tong, 1990):

$$Y_t = \alpha'_1 X_{t-1} I_{1t}(\gamma, d) + \dots + \alpha'_m X_{t-1} I_{mt}(\gamma, d) + e_t \quad (2.21)$$

Burada $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$ ve $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{m-1}$ olarak ifade edilmektedir. $I(.)$ gösterge fonksiyonudur ve $I_{jt}(\gamma, d) = I(\gamma_{j-1} < Y_{t-d} \leq \gamma_j)$ olarak tanımlanmaktadır.

Hansen (1999) testinde rejim sayısı belirlenirken SETAR (m) model dizisinin rejimleri birbirlerine karşı test edilmektedir. SETAR (m) modelleri içerisinde, en sınır rejim $m = 1$ olmak üzere SETAR (1) modeli şu şekildedir:

$$Y_t = \alpha'_1 X_{t-1} + e_t \quad (2.22)$$

Buna göre 1 rejimli SETAR (1) modeli, $m > 1$ olmak üzere m rejimli SETAR (m) modeline karşı test edilmektedir. Benzer şekilde SETAR (2) temel hipotezi de test edilebilmektedir (Hansen, 1999).

$$Y_t = \alpha'_1 X_{t-1} I_{1t}(\gamma, d) + \alpha'_2 X_{t-1} I_{2t}(\gamma, d) + e_t \quad (2.23)$$

Burada ise 2 rejimli SETAR (2) modeli, $m > 2$ olmak üzere m rejimli SETAR (m) modeline karşı test edilmektedir.

Modellerde yer alan parametreler $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma, d)$ olarak derlenebilir. Bu durumda parametre tahmini en küçük kareler yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi yapılabilir (Hansen, 1999):

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmin} \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha'_1 X_{t-1} I_{1t}(\gamma, d) - \dots - \alpha'_m X_{t-1} I_{mt}(\gamma, d))^2 \quad (2.24)$$

Test prosedürü farklı rejimler içeren iki modelin birbirlerine göre test edilmesi ile gerçekleştirilmektedir. Yani j rejimli SETAR (j) modeli, $k > j$ olmak üzere k rejimli SETAR (k) modeline karşı test edilmektedir. Kullanılacak olan F test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Hansen, 1999):

$$F_{jk} = n \left(\frac{S_j - S_k}{S_k} \right) \quad (2.25)$$

Burada n gözlem sayısıdır. S_j , j rejimli SETAR (j) modelin kalıntı kareler toplamını ve S_k , k rejimli SETAR (k) modelin kalıntı kareler toplamını ifade etmektedir. Modellerin karşılaştırılmasında kullanılan olasılık değerleri bootstrap yöntemi kullanılarak elde edilmektedir (Güriş, 2020:102).

2.3. DOĞRUSAL OLMAMANIN KAYNAĞI

Örnek boyutu T olan ve eşit aralıklı dönemlerde gözlemlenen ($t = 1, 2, \dots, T$) tek değişkenli stokastik bir zaman serisi x_t , aşağıdaki gibi ifade edilir ise lineer (doğrusal) olduğu söylenebilir (Tsay, 2005:154):

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i} \quad (2.26)$$

Modelde μ sabit terim, $\psi_0 = 1$ olan reel sayıları, a_t ise bağımsız ve eş dağılımlı(iid) tesadüfi değişkenleri ifade etmektedir. Burada a_t dağılımının sürekli olduğu, $E(a_t) = 0$ ve $Var(a_t) = \sigma_a^2$ olduğu varsayılmaktadır. Matematiksel olarak stokastik bir zaman serisi olan x_t , mevcut ve geçmiş şoklardan oluşan bir dizinin fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi gösterilir (Tsay, 2005:154):

$$x_t = f(a_t, a_{t-1}, \dots) \quad (2.27)$$

Yukarıdaki fonksiyonel formdan hareketle model, doğrusal veya doğrusal olmayan model olarak nitelendirilebilir (Güriş, 2020:3).

Doğrusal olmayan modellerin uygun bir şekilde tanımlanması için x_t 'nin koşullu momentleri kullanılmaktadır. F_{t-1} , $\{x_{t-1}, x_{t-2}, \dots\}$ ve $\{a_{t-1}, a_{t-2}, \dots\}$ öğelerinin doğrusal kombinasyonlarının toplamı olarak ifade edilmek üzere x_t 'nin koşullu ortalaması ve koşullu varyansı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Tsay, 2005:155):

$$\mu_t = E(x_t | F_{t-1}) \equiv g(F_{t-1}) \quad (2.28)$$

$$\sigma_t^2 = Var(x_t | F_{t-1}) \equiv h(F_{t-1}) \quad (2.29)$$

Burada $g(\cdot)$ ve $h(\cdot)$ iyi tanımlanmış (well-defined) fonksiyonlardır ve $h(\cdot) > 0$ 'dır. Bu bilgilerden yola çıkarak model aşağıdaki gibi gösterilebilir (Tsay, 2005:155):

$$x_t = g(F_{t-1}) + \sqrt{h(F_{t-1})} \epsilon_t \quad (2.30)$$

Burada $\epsilon_t = a_t / \sigma_t$ standartlaştırılmış bir şok veya yeniliktir. Eğer yukarıda yer alan ifadede $g(\cdot)$ fonksiyonu doğrusal yapıda değil ise x_t ortalamada doğrusal değildir. $h(\cdot)$ fonksiyonu doğrusal olmayan yapıda ise x_t varyansta doğrusal değildir (Tsay, 2005:155).

2.4. ORTALAMADA DOĞRUSAL OLMAYAN MODELLER

Doğrusal olmayan zaman serilerinin modellenmesi doğrusal zaman serilerine göre daha karmaşıktır. En uygun şekilde modellemenin yapılabilmesi için grafiklerin doğru bir şekilde oluşturulması ve kullanılacak yöntemlerin doğru seçilmesi oldukça önemlidir.

Bu bölümde ortalama doğrusal olmayan modeller incelenecektir. Doğrusal olmayan AR modeli (NLAR), bilinear model ve rejim değişim modelleri açıklanacaktır.

2.4.1. Doğrusal Olmayan AR Modeli (NLAR)

Bir zaman serisinin cari dönemdeki değerinin, kendi geçmiş dönem değerlerini içeren model ile açıklanmasına otoregresif model denir. Birinci dereceden doğrusal olmayan otoregresif model aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Güriş, 2020: 5):

$$y_t = f(y_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (2.31)$$

Bu modelin daha genel biçimi aşağıdaki gibidir (Güriş, 2020: 5):

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}) + \varepsilon_t \quad (2.32)$$

Bu modelin tahmin edilmesi zordur. Çünkü fonksiyonel biçimi bilinmemektedir. Modelin tahmini için önerilen yöntemlerden biri Taylor serisi açılımı yaklaşımıdır (Güriş, 2020:5). İkinci mertebeden otoregresif model, Taylor açılımı ile şu şekilde ifade edilebilir (Enders, 2004:390).

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_{12} y_{t-1} y_{t-2} + \alpha_{11} y_{t-1}^2 + \alpha_{22} y_{t-2}^2 + \alpha_{112} y_{t-1}^2 y_{t-2} + \alpha_{122} y_{t-1} y_{t-2}^2 + \alpha_{111} y_{t-1}^3 + \alpha_{222} y_{t-2}^3 + \varepsilon_t \quad (2.33)$$

Denklem genelleştirilmiş biçimiyle şu şekilde gösterilir (Enders, 2004:390):

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s \alpha_{ijkl} y_{t-i}^k y_{t-j}^l + \varepsilon_t \quad (2.34)$$

Burada p sürecin mertebesini, r ve s ise bir veya birden büyük olan tam sayıları ifade etmektedir. Modelde aşırı parametrelendirmenin olmaması için r ve s toplamının

en fazla 4 olması gerekir. Oluşturulan bu denkleme genelleştirilmiş otoregresif model denir (Enders, 2004:391).

2.4.2. Bilinear Model

Birinci mertebeden otoregresif model AR(1) ve birinci mertebeden hareketli ortalama süreci MA(1) aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$AR(1) : y_t = \phi_1 Y_{t-1} + e_t \quad (2.35)$$

$$MA(1) : y_t = \mu + e_t + \theta_1 e_{t-1} \quad (2.36)$$

Doğrusal olmayan zaman serilerinde MA terimlerini kullanma düşüncesi, bilinear modellerin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu modellerde, genelleştirilmiş otoregresif modeldeki kareli terimler yerine AR ve MA terimleri ve bu terimlerin çapraz çarpımları yer almaktadır (Kurtuluş, 2008).

Bilinear model, Granger ve Andersen (1978) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Model genel biçimiyle aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Güriş, 2020:7):

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij} y_{t-i} \varepsilon_{t-j} \quad (2.37)$$

Burada p otoregresif terimin derecesi, q hareketli ortalama teriminin derecesi, r ve s ise her iki terimin birlikte bulunduğu terimdir. BL(p, q, r, s) şeklinde gösterilir (Enders, 2004:391).

(2.37) numaralı modelde otoregresif (AR) ve hareketli ortalama (MA) terimlerinin modelde çarpım olarak bulunması ($y_{t-i}, \varepsilon_{t-i}$), doğrusal olmamanın kaynağını oluşturmaktadır. Bu nedenle denklemin tahmin edilmesinde klasik en küçük kareler yöntemi yerine en çok benzerlik yöntemi kullanılmaktadır (Güriş, 2020:7).

(2.37) numaralı modelin içinde ARMA modeli yuvalanmıştır (Kurtuluş, 2008). Bu modele ($y_{t-i}, \varepsilon_{t-i}$) terimi dahil edilmez ise model doğrusal ARMA modeli olacaktır (Cromwell vd., 1994: 57).

2.4.3. Rejim Değişimini Dikkate Alan Modeller

Rejim kavramı ekonomik yapıdaki değişmelerin ifade edilmesinde kullanılmaktadır. Örnek olarak; ekonominin resesyon ve canlanma dönemleri, borsanın ayı piyasasından boğa piyasasına geçişi verilebilir. Yapısal değişimlerden farklılık göstermektedir. Çünkü burada gözlemler itibari ile değişimler söz konusudur (Güriş, 2020:8). Yapısal kırılmaların olduğu seriler modellenirken belirli bir kırılma noktası belirlenmektedir ve kırılma öncesi ve kırılma sonrası olmak üzere bu noktadan bölünmektedir. Rejim değişim modellerinde ise seriler yüksek rejim veya düşük rejim olarak bölünmektedir ve veri setinin her bir parçası için regresyon tahmini yapılmaktadır (Özcan, 2019).

Rejim değişim modelleri, belirli sayıdaki her rejim için parametrelerin farklı değerler almasına izin veren zaman serisi modelleridir. Rejim değişimlerinin oluşturduğu varsayılan stokastik bir süreç modele dahil edilir ve böylece gelecekteki rejim değişimlerinin olasılığını içeren modele dayalı tahminlerin yapılmasına olanak tanınmış olur. Daha genel bir ifade ile rejim gözlemlenemez. Araştırmacı tarafından incelenen serinin geçmiş dönem değerlerine göre çıkarım yapılarak belirlenir (Piger, 2009).

Ekonometri literatüründe rejim değişim modelleri, genellikle makroekonomik ve finansal zaman serilerinin dinamik davranışlarındaki değişiklikleri tanımlamak için kullanılmaktadır (Piger, 2009). Bu modeller kapsamında; kendinden uyarımlı eşik değerli otoregresif model (SETAR), yumuşak geçişli eşik değerli otoregresif model (STAR), momentum eşik değerli otoregresif model (MTAR) ve Markov rejim değişim modelleri incelenmektedir.

Eşik değerli otoregresif model kavramı, Tong (1978) ve Lim ve Tong (1980) çalışmaları ile ortaya atılmıştır ve Tong (1990) çalışması ile geliştirilmiştir (Güriş, 2020: 9). Eşik değer ilkesi, karmaşık (complex) bir stokastik sistemin daha küçük alt sistemlere ayrıştırılarak analiz edilmesine olanak sağlamaktadır (Tong, 1990).

Eşik değerli otoregresif model yapısının oluşturulması için bir eşik değere ihtiyaç duyulmaktadır. Eşik değer belirli aşamalarla belirlendikten sonra ilgili

modeldeki değerlerin eşik değerden büyük veya küçük olma durumu dikkate alınarak modelin farklı rejimlerde hareket etmesi sağlanmaktadır (Güriş, 2020: 9).

Rejim değişim modellerinin eşik değer belirleme süreci birbirinden farklılık göstermektedir. SETAR modellerde eşik değer bağımlı değişkenin geçmiş dönem değerleri arasından seçilmektedir. STAR modellerde rejimler arası geçiş, bir fonksiyon aracılığı ile yumuşak olmaktadır. MTAR modellerde ' Δ ' fark işlemcisi olmak üzere gösterge fonksiyonu Δy_{t-1} değerlerine göre oluşturulmaktadır (Güriş, 2020: 9-23). Markov rejim değişim modelleri ise S_t gözlemlenemeyen bir değişken olmak üzere, bu değişkenin belirli bir stokastik süreci izlediğini varsayar. Yani rejim değişimleri bir Markov zincirine göre belirlenmektedir (Piger, 2009).

2.4.3.1. Kendinden Uyarımlı Eşik Değerli Otoregresif Model (SETAR)

Kendinden uyarımlı eşik değerli otoregresif modellerde eşik değer, modelin bağımlı değişkeninin gecikmeli değerleri dikkate alınarak belirlenmektedir (Güriş, 2020:9). Eşik değer ile karşılaştırılacak olan terim z_t , d gecikme uzunluğu olmak üzere $z_t = y_{t-d}$ olarak tanımlanmaktadır. SETAR model $d = 1$ olduğu durumda aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Franses ve Dijk, 2000:71):

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t & \text{eğer } y_{t-1} \leq c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t & \text{eğer } y_{t-1} > c \end{cases} \quad (2.38)$$

Burada c eşik değerdir. Kalıntı varyansını minimize eden değer uygun eşik değer olarak seçilmektedir. İki rejimli SETAR modeli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Franses ve Dijk, 2000: 71):

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - I[y_{t-1} > c]) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})(I[y_{t-1} > c]) + \varepsilon_t \quad (2.39)$$

Modelde yer alan $I[A]$ gösterge fonksiyonudur. Eğer A durumu meydana gelir ise $I[A] = 1$; diğer durumlarda ise $I[A] = 0$ olmaktadır (Franses ve Dijk, 2000:71).

Gecikme uzunluğu olan d değeri, her iki rejim için aynı olmak zorunda değildir ve değer her iki rejim için 1'den büyük değer olabilir. Rejim sayısı (j) ikiden fazla olan

ve her rejim için farklı gecikme uzunluklarına(d) sahip olan TAR modelin gösterimi aşağıdaki gibi yazılabilir (Brooks, 2002: 560):

$$y_t = \sum_{j=1}^J I_t^{(j)} \left(\phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{P_j} \phi_i^{(j)} y_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)} \right) r_{j-1} \leq z_{t-d} \leq r_j \quad (2.40)$$

Burada $I_t^{(j)}$ j. rejim için gösterge fonksiyonudur. $\varepsilon_t^{(j)}$, bağımsız ve özdeş dağılmış(idd) sıfır ortalamalı hata sürecidir. Ayrıca, z_{t-d} rejim değişim noktasını (switching point) belirleyen gözlenen bir değişkendir. Rejim değişikliği temel değişken olan y_t 'nin kendi gecikmeleri tarafından belirleniyor($z_{t-d} = y_{t-d}$) ise (2.40) numaralı denklemdeki TAR modeli kendinden uyarımlı (self-exciting) TAR modeli (SETAR) haline gelmektedir (Brooks, 2002: 474).

SETAR modelinde eşik değer kullanılarak rejim değişikliğine izin verilmesi, bu modelin yapısı itibarıyla doğrusal olmamasına neden olmaktadır. Bu yüzden model tahmininde doğrusal olmayan yaklaşımlar kullanılmaktadır. Uygulamada sıklıkla Tong, Tsay, Hansen ve Enders'in yaklaşımları tercih edilmektedir (Güriş, 2020: 9).

Tong yaklaşımına göre SETAR modelin tahmini aşağıdaki adımlar ile yapılmaktadır (Brooks, 2002: 560):

Adım 1. Eşik değer parametresinin aranacağı uzunluk d ve eşik değer τ olmak üzere başlangıç değerleri d_0 ve τ_0 belirlenir. Gecikme uzunluğu $L = n^\alpha$ ($\alpha < 0.5$) olmak üzere AR modeli tahmin edilir. Akaike bilgi kriterleri (AIC) aşağıdaki gibi hesaplanır ve elde edilen değerler arasından minimum olan değer gecikme uzunluğu olarak belirlenir.

$$AIC(d_0, \tau_0) = AIC(\hat{k}_1) + AIC(\hat{k}_2) \quad (2.41)$$

Adım 2. Başlangıç değeri(d_0) sabit kalmak üzere mümkün τ değerleri verilerek model tahmini yapılır. AIC değeri minimum olan model tahmininde kullanılan τ değeri uygun eşik değeri kabul edilir.

Adım 3. Birinci ve ikinci aşamada seçilen uygun gecikme uzunluğu(L) ve eşik değere(τ) göre eşik değer parametresinin aranacağı uzunluk(d) belirlenir. Bu aşama için kullanılacak olan normalleştirilmiş Akaike bilgi kriteri (NAIC) değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$NAIC(d) = \frac{AIC(d, \hat{\tau})}{N - N_d} \quad (2.42)$$

Hesaplanan değerler arasından uygun seçim şu şekilde yapılır:

$$NAIC(\hat{d}) = \min_{d \in (1, \dots, T)} \{NAIC(d)\} \quad (2.43)$$

Yani, NAIC değerleri arasından minimum olan değer uygun d değeri olarak belirlenir.

Tsay yaklaşımına göre SETAR modelin tahmini aşağıdaki adımlar ile yapılmaktadır (Cao ve Tsay, 1992):

Adım 1. Geçici bir AR uzunluğu seçilir ve p olarak ifade edilir. Olası eşik değerler belirlenir.

Adım 2. Eşik değeri doğrusal olmama testi her eşik değer parametresine uygulanır.

Adım 3. İkinci adım dikkate alınarak eşik değer parametresinin gecikmesi seçilir.

$$(d, Y_{t-d} \text{ için})$$

Adım 4. Eşik değer parametresi düzenlenir.

Adım 5. Koşullu en küçük kareler yöntemi kullanılarak SETAR modeli tahmin edilir.

Adım 6. Gerekli görülmesi durumunda tahmin edilen sonuçların kontrolü yapılır.

Hansen yaklaşımına göre SETAR modelin tahmini ise aşağıdaki adımlar ile yapılmaktadır (Hansen ve Caner, 2001):

Öncelikle aşağıda gösterildiği gibi en küçük kareler yöntemi kullanılarak model tahmin edilir.

$$\hat{\theta}(\gamma) = \left(\sum_{t=1}^n X_t(\gamma) X_t(\gamma)' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t(\gamma) Y_t \right) \quad (2.44)$$

Burada γ terimi eşik değeri göstermektedir. Model tahmininden hareketle hata terimleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{\varepsilon}(\gamma) = Y_t - X_t(\gamma)' \hat{\theta}(\gamma) \quad (2.45)$$

Elde edilen hata terimlerinin varyansını bulmak için aşağıdaki formül kullanılır:

$$\hat{\sigma}_n^2(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t(\gamma)^2 \quad (2.46)$$

Hesaplanan değerler arasından minimum olan varyans değeri belirlenir:

$$\hat{\gamma} = \text{argmin } \sigma_n^2(\gamma) \quad (2.47)$$

Minimum hata terimi varyansına sahip olan değer en uygun eşik değeri olarak seçilir (Hansen ve Caner, 2001).

Eşik değeri seçildikten sonra, $q_{t-1} = y_{t-d}$ eşitliğinde yer alan eşik değeri parametresinin gecikmesi (d) belirlenmelidir. Bu değeri bilinmediği için tahmin edilir. Yukarıdaki sistem $n \times d$ adet (mümkün tüm d 'ler için) denklem çözümü yapılarak geliştirilir. Elde edilen değerler arasından minimum hata terimi varyansına karşılık gelen parametreler tercih edilir (Hansen, 1997; akt. Gürış, 2020:11).

Chan (1993) prosedürünün TAR model tahmininde kullanılabileceği Enders (2004) çalışmasında belirtilmiştir (Gürış, 2020). Bu prosedürün adımları aşağıdaki gibidir (Enders, 2004: 413):

Adım 1. Eşik değeri aranacağı değişken y_{t-d} olarak ifade edilir. Bu değişken küçükten büyüğe doğru sıralanır.

Adım 2. SETAR modeli aşağıdaki gibi çözülür.

$$y_t = \begin{cases} \alpha_{10} + \alpha_{11}y_{t-1} + \dots + \alpha_{1p}y_{t-p} + \varepsilon_{1t} & y_{t-1} > \tau \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}y_{t-1} + \dots + \alpha_{2r}y_{t-r} + \varepsilon_{2t} & y_{t-1} \leq \tau \end{cases} \quad (2.48)$$

Bu denklem bir fonksiyon aracılığıyla aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$y_t = I_t \left[\alpha_{10} + \sum_{i=1}^p \alpha_{1i}y_{t-i} \right] + (1 - I_t) \left[\alpha_{20} + \sum_{i=1}^r \alpha_{2i}y_{t-i} \right] + \varepsilon_t \quad (2.49)$$

Burada I_t gösterge fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$I_t = \begin{cases} y_{t-1} \leq \tau & 0 \\ y_{t-1} > \tau & 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

Her eşik değeri için bu denklem çözülerek hata terimi kareler toplamı bulunur. Elde edilen değerlerin en başından ve en sonundan %15'lik (toplamda %30) kısım kırpılır. Ortada kalan %70'lik kısımdan seçim yapılır.

Adım 3. Elde edilen hata terimleri kareler toplamı değerlerinin grafiği oluşturulur. Bu grafikten hareketle hata terimleri kareler toplamını minimize eden değer uygun eşik değeri olarak seçilir. Seçilen eşik değeri kullanılarak model çözümlemesi gerçekleştirilir ve nihai model seçilir.

2.4.3.2. Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif Model (STAR)

Kendinden uyarımlı eşik değerli otoregresif modellerde (SETAR) rejimler arası geçişler ani olmaktadır. Yumuşak geçişli eşik değerli modellerde (STAR) rejimler arası geçişler bir fonksiyon aracılığı ile olmaktadır. Bu yumuşak geçiş fonksiyonu, sürekli olan ve farklı derecelerde düzgünlük (smoothness) sergileyebilen ara rejimlere izin vermektedir (González ve Rivera, 1998). Bu nedenle geçişlerin ani olduğu modellere göre STAR modeli, ekonomik yapıdaki değişimleri modellemede gerçekliğe daha uygundur (Güriş, 2020:14).

Yumuşak geçişli otoregresif model (STAR) aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Franses ve Dijk, 2000):

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - G(y_{t-1}, \gamma, c)) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})(G(y_{t-1}, \gamma, c)) + \varepsilon_t \quad (2.51)$$

Burada $G(y_{t-1}, \gamma, c)$ geçiş fonksiyonu ve c eşik değeridir. Bu fonksiyon 0 ile 1 arasında değerler almaktadır. Fonksiyon içerisindeki yer alan γ terimi, bir rejimden diğerine geçişi sağlayan düzgünleştirme parametresidir.

Yumuşak geçişli eşik değerli otoregresif modelde (STAR) yer alan geçiş fonksiyonu lojistik ve üstel dağılım fonksiyonları kullanılarak tanımlanabilmektedir. Lojistik dağılım fonksiyonu ile yumuşak geçişli otoregresif model (LSTAR) aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Terasvirta, 1990):

$$y_t = (\phi_{0,1}, \phi_{1,1}y_{t-1}) \left(1 - \left(\frac{1}{1 + e^{(-\gamma[y_{t-1}-c])}} \right) \right) + (\phi_{0,2}, \phi_{1,2}y_{t-1}) \left(\frac{1}{1 + e^{(-\gamma[y_{t-1}-c])}} \right) \quad (2.52)$$

Üstel dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Terasvirta, 1990):

$$G(y_{t-1}, \gamma, c) = 1 - e^{(-\gamma[y_{t-1}-c]^2)} \quad (2.53)$$

Bu tanıma göre üstel dağılım fonksiyonu ile yumuşak geçişli otoregresif model (ESTAR) ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Terasvirta, 1990):

$$y_t = (\phi_{0,1}, \phi_{1,1}y_{t-1}) \left(1 - (1 - e^{(-\gamma[y_{t-1}-c]^2)}) \right) + (\phi_{0,2}, \phi_{1,2}y_{t-1}) (1 - e^{(-\gamma[y_{t-1}-c]^2)}) \quad (2.54)$$

Geçiş fonksiyonunda yer alan düzgünleştirme parametresi(γ) sonsuza gittiğinde rejimler arası geçişler yumuşak olma özelliğini kaybederek ani hareketler sergilemektedir (Güriş, 2020:16). Bu sorunu gidermek için Dijk, Terasvirta ve Franses (2002) alışmalarında çok rejimli lojistik dağılımlı yumuşak geçişli otoregresif modeli önermişlerdir.

 rejim için lojistik dağılımlı LSTAR modeli aşağıdaki gibi gösterilebilir (Bec vd., 2010):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} G_1 + \phi_2 y_{t-1} G_2 + \phi_3 y_{t-1} G_3 + \varepsilon_t \quad (2.55)$$

$$G_1 = [1 + e^{\gamma(y_{t-1}+c)}]^{-1} \quad (2.56)$$

$$G_2 = 1 - G_1 - G_3 \quad (2.57)$$

$$G_1 = [1 + e^{\gamma(y_{t-1}-c)}]^{-1} \quad (2.58)$$

STAR model spesifikasyonu Terasvirta (1994) tarafından aşağıdaki aşamalarla açıklanmaktadır (Güriş, 2020: 16):

i) Doğrusal AR model spesifikasyonu belirlenir.

ii) Doğrusallık testi farklı gecikme parametreleri (d) için test edilir ve doğrusal değil ise tekrardan d belirlenir.

iii) ESTAR veya LSTAR arasından model tercihi yapılır.

Model spesifikasyonu belirlendikten sonra doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi kullanılarak çözümleme yapılır.

LSTAR ve ESTAR modelleri farklı ekonomik yapıları açıklamak için kullanılmaktadır. LSTAR modeli ekonominin daralma ve genişleme dönemlerinin farklı dinamiklere sahip olduğunu ve bu dönemler arası geçişin yumuşak olması gerektiğini ileri sürerken; ESTAR modeli ekonominin daralma ve genişleme dönemlerinin aynı dinamiklere sahip olduğunu fakat geçiş noktalarında farklı dinamiklerin var olduğunu savunmaktadır (Terasvirta ve Anderson, 1992).

2.4.3.3. Momentum Eşik Değerli Otoregresif Model (MTAR)

Momentum eşik değerli otoregresif model (MTAR) Enders ve Granger (1998) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Enders ve Siklos (2001) çalışması ile geliştirilmiştir (Güriş, 2020: 18).

MTAR modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Enders ve Granger, 1998):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.59)$$

Burada I_t gösterge fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Enders ve Granger, 1998):

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, fonksiyon içerisinde yer alan karşılaştırmaların y_t değerleri yerine Δy_t değerlerine göre yapılmasıdır (Güriş, 2020: 19). Böylece, Δy_t değerleri kullanılarak oluşturulan seri “momentum” özelliği gösterecektir. Eğer $|\rho_1| < |\rho_2|$ ise MTAR modeli Δy_{t-1} ’nin pozitif değerleri için küçük azalmalar; Δy_{t-1} ’in negatif değerleri için ise önemli azalmalar sergilemektedir. Buna göre MTAR modeli, Sichel (1993) çalışmasında değinilen “keskinlik(sharpness)” kavramını modellemede kullanılabilmektedir (Enders ve Granger, 1998).

MTAR modeli genel biçimiyle aşağıdaki gibi yazılabilmektedir (Enders ve Siklos, 2001):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.61)$$

ε_t , sıfır ortalama ve sabit varyanslı *iid* dağılımına sahiptir. I_t gösterge fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Enders ve Siklos, 2001):

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} \geq \tau \\ 0 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} < \tau \end{cases} \quad (2.62)$$

Burada τ terimi eşik değerdir. Bu değer bilinmeyip ρ_1 ve ρ_2 parametreleri gibi tahmin edilmektedir. Uygulamada genellikle $\tau = 0$ olarak kabul edilmektedir (Enders ve Siklos, 2001).

2.5. DOĞRUSAL OLMAYAN BİRİM KÖK TESTLERİ

Doğrusal yapıda olmayan bir serinin durağanlık analizinde doğrusal birim kök testleri kullanılır ise test sonucu birim kök hipotezini reddedememe yönünde olacaktır (Güriş, 2020: 110). Bu gerekçe dikkate alınarak; yapılan ekonometrik analizlerin güvenilir olması için modelin en doğru şekilde belirlenmesi gerekmektedir ve belirlenen modele uygun birim kök testinin kullanılması önemlidir. Bu bölümde doğrusal olmayan birim kök testleri incelenecektir.

2.5.1. Enders ve Granger Birim Kök Testi (1998)

Enders ve Granger (1998) çalışmalarında Momentum Eşik Değerli Otoregresif Model (MTAR) kullanarak doğrusal olmayan birim kök testi geliştirmişlerdir. Birim

kök testi için kullanılacak olan model oluşturulurken aşağıda gösterilen Dickey ve Fuller (1979) birim kök testinde kullanılan temel denklemden yola çıkılmaktadır.

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.63)$$

Bu model geliştirilerek aşağıdaki MTAR modeli oluşturulmaktadır (Enders ve Granger, 1998):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.64)$$

Burada I_t gösterge fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Test hipotezleri aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Enders ve Granger, 1998):

$$\begin{aligned} H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0 & \text{ (Seri durağan değildir, birim kök vardır.)} \\ H_1: \rho_1 \neq \rho_2 \neq 0 & \text{ (Seri durağandır.)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Enders ve Granger (1998) çalışmalarında üç aşamalı bir test süreci önermişlerdir. İlk aşamada y_t serisinin sabit terim ile regresyonu kurulur ve bu regresyon üzerinden hata terimleri elde edilir. Gösterge fonksiyonu $\Delta \hat{y}_t$ değerlerinin negatif ya da pozitif olma durumuna göre oluşturulur. Aşağıdaki denklem tahmin edilir (Enders, 2001):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 (y_{t-1} - \tau) + (1 - I_t) \rho_2 (y_{t-1} - \tau) + \varepsilon_t \quad (2.67)$$

Tahmin edilen yukarıdaki denklem kullanılarak $\rho_1 = \rho_2 = 0$ temel hipotezi F istatistiği ile test edilir.

İkinci aşamada, temel hipotez reddedilir ise simetrik düzeltmelere karşın asimetrik düzeltmeyi de test etmek mümkündür. Bu durumda $\rho_1 = \rho_2$ hipotezi klasik F istatistiği kullanılarak test edilebilmektedir.

Üçüncü aşamada ise ε_t 'nin beyaz gürültü süreci ile karakterize edilip edilemeyeceği yapılacak olan testlerle kontrol edilmelidir. Eğer hata terimleri ilişkili ise model aşağıdaki gibi tahmin edilerek söz konusu süreç tekrarlanmalıdır (Enders, 2001):

$$\Delta \hat{y}_t = I_t \rho_1 \hat{y}_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 \hat{y}_{t-1} + \gamma_1 \Delta \hat{y}_{t-1} + \dots + \Delta \hat{y}_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.68)$$

Burada $\hat{y}_t$ ilk aşamada elde edilen hata terimleridir. Gecikme uzunlukları Akaike (AIC) veya Bayesian (BIC) gibi model seçim kriterleri kullanılarak belirlenebilmektedir (Enders, 2001).

Hipotezlerin sınanması için hesaplanan test istatistik değeri Enders ve Granger (1998) çalışmasında yer alan kritik değerler ile karşılaştırılır. Test istatistik değerinin kritik değerden büyük olması durumunda temel hipotez reddedilerek serinin durağan olduğu sonucuna varılır. Enders (2001) çalışmasında, 45000 tekrara dayanan daha yüksek güce sahip yeni kritik değerler üretmiştir (Güriş, 2020).

2.5.2. Leybourne, Newbold ve Vouglas Birim kök Testi (1998)

Lojistik fonksiyonlu STAR tipi birim kök testleri ilk olarak Leybourne vd. (1998) tarafından ortaya atılmıştır (Güriş, 2020: 155). Leybourne vd. (1998) çalışmalarında rejim değişimlerinin anlık bir değişim olarak modellenmesi yerine yumuşak bir geçiş olarak modellenmesini önermişlerdir.

Test sürecinde kullanılan lojistik yumuşak geçişli regresyon modelleri aşağıdaki gibidir (Leybourne vd., 1998):

$$\text{Model A : } y_t = \alpha_1 + \alpha_2 S_t(\gamma, \tau) + v_t \quad (2.69)$$

$$\text{Model B : } y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 S_t(\gamma, \tau) + v_t \quad (2.70)$$

$$\text{Model C : } y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 S_t(\gamma, \tau) + \beta_2 S_t(\gamma, \tau) + v_t \quad (2.71)$$

Burada v_t sıfır ortalamalı $I(0)$ hata terimi ve $S_t(\gamma, \tau)$ lojistik yumuşak geçiş fonksiyonudur. T örnek büyüklüğü olmak üzere fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Leybourne vd., 1998):

$$S_t(\gamma, \tau) = [1 + \exp\{-\gamma(t - \tau T)\}]^{-1} \quad \gamma > 0 \quad (2.72)$$

Test sürecinde kullanılacak olan çeşitli birim kök hipotezleri aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Leybourne vd., 1998):

$$\text{Temel hipotez } H_0 : y_t = \mu_t, \quad \mu_t = \mu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \mu_0 = \psi \quad (2.73)$$

Alternatif hipotez H_1 : Model A, Model B ya da Model C

$$\text{Temel hipotez } H_0 : y_t = \mu_t, \quad \mu_t = k + \mu_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \mu_0 = \psi \quad (2.74)$$

Alternatif hipotez H_1 : Model B ya da Model C

Burada ε_t ve v_t sıfır ortalamalı durağan süreçler olarak kabul edilmektedir. Test istatistikleri iki aşamalı prosedür ile hesaplanmaktadır (Leybourne vd., 1998):

Adım 1. Doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi kullanılarak model A, model B ve model C için tahminler yapılır ve kalıntılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\text{Model A : } \hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \quad (2.75)$$

$$\text{Model B : } \hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \quad (2.76)$$

$$\text{Model C : } \hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) - \hat{\beta}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \quad (2.77)$$

Adım 2. ADF test istatistiğine benzer olarak aşağıdaki en küçük kareler regresyonunda yer alan $\hat{\rho}$ parametresinin t istatistiği hesaplanır:

$$\Delta \hat{v}_t = \hat{\rho} \hat{v}_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{\delta}_i \Delta \hat{v}_{t-i} + \hat{\eta}_t \quad (2.78)$$

Burada $H_0: \rho = 0$ hipotezi sınanmaktadır (Güriş, 2020: 156). Hesaplanan test istatistik değeri Leybourne vd. (1998) çalışmasında yer alan ve üç farklı model dikkate alınarak hesaplanan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

2.5.3. Caner ve Hansen Birim Kök Testi (2001)

Caner ve Hansen (2001) çalışmalarında ileri sürdükleri birim kök testi SETAR tipi modele dayanmaktadır. Bu testin diğer testlerden farkı, doğrusal olmama durumunun ve durağanlığın eş zamanlı olarak analiz edebilmesidir (Güriş, 2020: 111).

Eşik değerli otoregresif TAR modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Caner ve Hansen, 2001):

$$\Delta y_t = \theta_1' x_{t-1} 1_{\{Z_{t-1} < \lambda\}} + \theta_2' x_{t-1} 1_{\{Z_{t-1} \geq \lambda\}} + e_t \quad (2.79)$$

Burada $t = 1, \dots, T$ olmak üzere $x_{t-1} = (y_{t-1} r_t' \Delta y_{t-1} \dots \Delta y_{t-k})'$ olarak tanımlanmaktadır. $1_{\{\cdot\}}$ gösterge fonksiyonudur. e_t bağımsız ve özdeş dağılımlı(iid) hata terimleri, $m \geq 1$ olmak üzere $Z_t = y_t - y_{t-m}$ ve r_t deterministik unsurlar ve λ ise bilinmeyen eşik değerdir. λ değeri $\lambda \in \Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ aralığındadır ve $P(Z_t \leq \lambda_1) = \pi_1 > 0$ ile $P(Z_t \leq \lambda_2) = \pi_2 < 1$ olasılıkları arasında değerler almaktadır.

Andrews (1993) çalışmasında π_1 ve π_2 için $\pi_1 = 0.15$ ve $\pi_2 = 0.85$ değerlerini önermiştir. θ_1 ve θ_2 parametreleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Caner ve Hansen, 2001).

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \beta_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \beta_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Burada μ_1 ve μ_2 skalerlerdir, β_1 ve β_2 parametreleri r_t ile aynı boyuta sahiptir ve p_1 ve p_2 vektördür. Böylece μ_1 ve μ_2 , y_{t-1} 'in eğim parametresi, β_1 ve β_2 , deterministik değişkenlerin eğim parametresi ve p_1 ve p_2 ise $(\Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-k})$ 'nin eğim parametreleridir.

SETAR model tahmini, $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere klasik en küçük kareler yöntemi ile yapılmaktadır (Caner ve Hansen, 2001).

$$\Delta y_t = \hat{\theta}_1(\lambda)' x_{t-1} 1_{\{Z_{t-1} < \lambda\}} + \hat{\theta}_2(\lambda)' x_{t-1} 1_{\{Z_{t-1} \geq \lambda\}} + \hat{e}_t(\lambda) \quad (2.81)$$

En küçük kareler yöntemi tahmin sonucuna göre sabit λ değeri için varyans değeri aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu denklem aynı zamanda en küçük kareler kalıntılarını da tanımlamaktadır (Caner ve Hansen, 2001):

$$\hat{\sigma}^2(\lambda) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{e}_t(\lambda)^2 \quad (2.82)$$

Burada $\sigma^2(\lambda)$ değerini minimize eden değer uygun eşik değer olarak seçilmektedir.

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda \in \Lambda}{\operatorname{argmin}} \hat{\sigma}^2(\lambda) \quad (2.83)$$

Model tahmini yukarıdaki aşamalar ile gerçekleştirildikten sonra doğrusal olmamanın tespiti yapılmaktadır. Temel hipotez modelin doğrusal olduğunu, alternatif hipotez ise modelin doğrusal olmadığını ifade etmektedir. Hipotezler aşağıdaki gibidir (Caner ve Hansen, 2001):

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases} \quad (2.84)$$

Hipotezlerin testi için kullanılacak olan *supWald* test istatistik değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Caner ve Hansen, 2001):

$$supW_t(\lambda) = supT \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2(\hat{\lambda})} - 1 \right) \quad (2.85)$$

Burada $\hat{\sigma}_0^2$ doğrusal modelin en küçük kareler tahmininin hata terimi varyansını ve σ^2 eşik değerli modelin varyansını ifade etmektedir.

Birim kökün tespitinde kullanılacak olan hipotezler aşağıdaki gibidir (Caner ve Hansen, 2001):

$$\begin{aligned} H_0 : p_1 = p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 < 0, p_2 < 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Burada temel hipotez birim kökün varlığını, alternatif hipotez ise durağanlığı ifade etmektedir. Bir diğer alternatif hipotez H_2 ise aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$H_2 : \begin{cases} p_1 < 0, p_2 = 0 \\ p_1 = 0, p_2 < 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

Bu hipotez durağan olmama durumunu ifade etmektedir. Klasik birim kök durumundan farklı olarak bir rejimde birim kök söz konusuken diğer rejimde durağanlık söz konusudur (Caner ve Hansen, 2001).

H_0 hipotezine karşın H_1 hipotezinin sınanması için kullanılacak olan *Wald* test istatistik değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Caner ve Hansen, 2001):

$$R_{1T} = t_1^2 1_{(\hat{p}_1 < 0)} = t_2^2 1_{(\hat{p}_2 < 0)} \quad (2.88)$$

H_0 hipotezine karşın H_2 hipotezinin sınanması için ise aşağıdaki *Wald* test istatistiği kullanılmaktadır (Caner ve Hansen, 2001):

$$R_{2T} = t_1^2 + t_2^2 \quad (2.89)$$

Burada t_1 ve t_2 değerleri en küçük kareler regresyonundan elde edilen $\hat{p}_1$ ve $\hat{p}_2$ parametrelerine ait t istatistik değerleridir. Caner ve Hansen (2001) çalışmalarında, hipotezlerin sınanmasında kullanılacak olan olasılık değerleri için bootstrap simülasyon yöntemini önermişlerdir.

2.5.4. Kapetanios, Shin ve Snell Birim Kök Testi (2003)

Kapetanios vd. (2003) çalışmalarında standart ADF tipi birim kök testlerini geliştirerek rejimler arası geçişin yumuşak olduğu STAR tipi birim kök testini ileri sürmüşlerdir. Testin temel hipotezi birim kökün varlığını, alternatif hipotezi ise doğrusal olmayan durağanlığı ifade etmektedir (Güriş, 2020:125).

Test sürecinde kullanılacak olan birinci dereceden tek değişkenli yumuşak geçişli otoregresif model (STAR(1)) aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Kapetanios vd., 2003):

$$y_t = \beta y_{t-1} + \gamma y_{t-1} F(\theta; y_{t-d}) + \varepsilon_t \quad (2.90)$$

Burada ε_t hata terimi sıfır ortalama ve sabit varyans ile *idd* dağılımına uygunluk göstermektedir ($\varepsilon_t \sim \text{idd}(0, \sigma^2)$). β ve γ parametreleri bilinmeyen parametrelerdir. F üstel geçiş fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F(\theta; y_{t-d}) = 1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2) \quad (2.91)$$

Burada $c = 0$ varsayımı altında denklemdeki ilgili yere F fonksiyonu eklenir ise şu şekilde yazılabilir:

$$y_t = \beta y_{t-1} + \gamma y_{t-1} \{1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2)\} + \varepsilon_t \quad (2.92)$$

Burada y_t serisi; ham veriyi, ortalamadan arındırılmış veya trendden arındırılmış seriyi ifade etmektedir. Denklem uygun şekilde yeniden parametrelendirilir ise aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \gamma y_{t-1} \{1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2)\} + \varepsilon_t \quad (2.93)$$

Burada $\phi = \beta - 1$ 'dir. $d = \{1, 2, \dots, d_{max}\}$ olmak üzere $d = 1$ ve $\phi = 0$ değerleri verildiğinde yumuşak geçişli üstel model (ESTAR) şu şekilde gösterilir:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} \{1 - \exp(-\theta y_{t-1}^2)\} + \varepsilon_t \quad (2.94)$$

Test hipotezleri θ parametresi üzerinden oluşturulmaktadır ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} H_0: \theta &= 0 \text{ (Birimkök)} \\ H_1: \theta &> 0 \text{ (Ortalamaya dönen, doğrusal olmayan durağanlık)} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Eğer θ pozitif ise ortalamaya dönme hızının belirleyicisi olacaktır. Fakat burada γ parametresi tanımlanmadığı için temel hipotezin doğrudan test edilmesi mümkün değildir. Eğer ESTAR modeli, 1. dereceden Taylor serisi yaklaşımı kullanarak dönüştürülür ise aşağıdaki yardımcı regresyon elde edilir (Kapetanios vd., 2003):

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \varepsilon_t \quad (2.96)$$

Bu denklemde hata terimleri otokorelasyonlu olabilir. Bu yüzden denklem şu şekilde genişletilebilir (Güriş, 2020: 125):

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \sum p_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.97)$$

Hipotezlerin testi için kullanılacak olan t istatistik değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Kapetanios vd., 2003):

$$t_{NL} = \frac{\hat{\delta}}{s.e.(\hat{\delta})} \quad (2.98)$$

Burada $\hat{\delta}$ terimi δ parametresinin en küçük kareler tahmini ve $s.e.(\hat{\delta})$ ise $\hat{\delta}$ 'nin standart hatasıdır. Hesaplanan t_{NL} istatistiği standart normal dağılıma sahip değildir. Hipotezlerin sınanması için Kapetanios vd. (2003) çalışmalarında simülasyon yöntemi kullanarak yeni kritik değerler üretmişlerdir.

2.5.5. Sollis Doğrusal Olmayan Birim Kök Testi (2004)

2.5.1. bölümde açıklanan Enders ve Granger (1998) birim kök testi eşik değerli otoregresif model (TAR) yaklaşımına dayanmaktadır. 2.5.2. bölümde açıklanan Leybourne, Newbold ve Vouglas (1998) birim kök test sürecinde yumuşak geçiş

metodolojisi kullanılmaktadır. Sollis (2004) çalışmasında bu iki yaklaşımı birleştirerek yeni bir birim kök testi geliştirmiştir.

Sollis (2004) birim kök testi iki aşamalıdır. Birinci aşamasında lojistik fonksiyonlu model doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilmektedir. Ardından tahmin edilen modelden hata terimleri elde edilmektedir. İkinci aşamasında ise hata terimleri SETAR model yapısı ile modelleneyecektir (Güriş, 2020:168).

y_t bir zaman serisi olmak üzere yumuşak geçiş modelleri aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Sollis, 2004):

$$y_t = \alpha_1 + \alpha_2 S_t(\gamma, \tau) + \varepsilon_t \quad (2.99)$$

$$y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 S_t(\gamma, \tau) + \varepsilon_t \quad (2.100)$$

$$y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 S_t(\gamma, \tau) + \beta_2 t S_t(\gamma, \tau) + \varepsilon_t \quad (2.101)$$

Burada (2.99) numaralı denklem trendin olmadığı modeli, (2.100) numaralı denklem trendin olduğu modeli ve (2.101) numaralı denklem ise otonom parametre, trend ve trend değişkeni ile geçiş fonksiyonunun çarpımından oluşan terimin olduğu modeli ifade etmektedir. $S_t(\gamma, \tau)$ geçiş fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Sollis, 2004): ,

$$S_t(\gamma, \tau) = (1 + \exp\{-\gamma[t - \tau T']\})^{-1} \quad (2.102)$$

Burada T örnek büyüklüğü ve τ geçişin orta noktasıdır. Yumuşak geçiş fonksiyonu kullanılarak doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemiyle tahmin edilen modellerden hata terimleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir (Sollis, 2004):

$$\hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \quad (2.103)$$

$$\hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \quad (2.104)$$

$$\hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) - \hat{\beta}_2 t S_t(\hat{\gamma}, \hat{\tau}) \quad (2.105)$$

y_t bir zaman serisi olmak üzere TAR(1) modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Enders ve Granger, 1998):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.106)$$

Bu denklem yapısı yukarıdaki aşamalardan elde edilen $\hat{v}_t$ hata terimleri kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$\Delta v_t = I_t \rho_1 v_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 v_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta v_{t-i} + \eta_t \quad (2.107)$$

Burada I_t gösterge fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Güriş, 2020):

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } v_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (2.108)$$

Test hipotezleri aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Sollis, 2004):

$$\begin{aligned} H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0 & \text{ (Seri durağan değildir, birim kök vardır.)} \\ H_1: \rho_1 < \rho_2 < 0 & \text{ (Seri durağandır.)} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Hipotez sınamasında F test istatistiği kullanılmakta ve bu test istatistiği Sollis (2004) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

2.5.6. Pascalau Birim Kök Testi (2007)

Pascalau (2007) çalışmasında lojistik dağılım fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif model (LSTAR) yapısına dayanan birim kök testi geliştirmiştir. Test sürecinde kullanılan bir gecikmeli LSTAR modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Pascalau, 2007):

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \beta y_{t-1} (1 + \exp\{-\theta(y_{t-1} - c)\})^{-1} + \varepsilon_t \quad (2.110)$$

Bu model dikkate alınır ise temel hipotez birim kökün varlığını ifade etmek üzere sınanacak olan hipotezler şu şekilde oluşturulur:

$$\begin{aligned} H_0: \delta = \theta = \beta = 0 \\ H_1: \delta + \beta < 0 \text{ ve } \theta > 0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

Eğer model (2.110) numaralı denklemdeki gibi oluşturulur ise β ve θ parametreleri tanımlanamayacak ve parametreler ayırt edilemeyecektir. Bu yüzden

$\delta = 0$ varsayımı kullanılmaktadır. $\delta = 0$ iken model aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Pascalau, 2007):

$$\Delta y_t = \beta y_{t-1} (1 + \exp\{-\theta(y_{t-1} - c)\})^{-1} + \varepsilon_t \quad (2.112)$$

Model yukarıdaki gibi oluşturulur ise temel hipotez birim kökün varlığını ifade etmek üzere hipotezler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} H_0 : \delta = \theta = \beta &= 0 \\ H_1 : \beta < 0 \text{ ve } \theta > 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Fakat burada da temel hipotez altında yine β ve θ parametreleri belirlenemeyecektir. Bu yüzden Taylor açılımı kullanılarak model aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Pascalau, 2007):

$$\Delta y_t = \gamma_1 y_{t-1}^2 + \gamma_2 y_{t-1}^3 + \gamma_3 y_{t-1}^4 + \sum_{j=1}^p \rho_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.114)$$

Bu model üzerinden hipotezler aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\begin{aligned} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 &= 0 \\ H_1 : \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &< 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Burada temel hipotez birim kökün varlığını ifade etmektedir. Hipotez sınavında F_{NL} test istatistiği kullanılmaktadır (Pascalau, 2007).

Literatürde ekonomik ve finansal uygulamalarda eşik değer parametresi(c) sıfır olarak sınırlandırılmaktadır. Buna dayanarak (2.114) numaralı model $c = 0$ varsayımı altında aşağıdaki gibi yazılabilir (Pascalau, 2007):

$$\Delta y_t = \gamma_1 y_{t-1}^2 + \gamma_3 y_{t-1}^4 + \sum_{j=1}^p \rho_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.116)$$

Bu modelden hareketle birim kök temel hipotezi $H_0: \gamma_1 = \gamma_3 = 0$ olarak ifade edilmekte ve $\bar{F}_{NL}$ test istatistiği kullanılarak sınanmaktadır. Hesaplanan F_{NL} ve $\bar{F}_{NL}$ test istatistik değerleri için kritik değerler Pascalau (2007) çalışmasında yer almaktadır.

2.5.7. Sollis Birim Kök Testi (2009)

Kapetanios, Shin ve Snell (2003) testi ortalamaya dönmenin her noktada simetrik olduğu varsayımına dayanmaktadır. Yani pozitif ve negatif sapmaların aynı etkiye sahiptir. Sollis (2009) çalışmasında ESTAR modelini genişleterek asimetrik düzeltmelere de izin veren yeni bir birim kök testi geliştirmiştir. Test sürecinde kullanılacak olan asimetrik üstel fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif model (AESTAR) aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Sollis, 2009):

$$\Delta y_t = G_t(\gamma_1; y_{t-1})\{S_t(\gamma_2; y_{t-1})\rho_1 + (1 - S_t(\gamma_2; y_{t-1}))\rho_2\}y_{t-1} + \sum_{i=1}^k k_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.117)$$

Burada $G_t(\gamma_1, y_{t-1})$ ve $S_t(\gamma_2, y_{t-1})$ şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$G_t(\gamma_1, y_{t-1}) = 1 - \exp(-\gamma_1 y_{t-1}^2) \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (2.118)$$

$$S_t(\gamma_2, y_{t-1}) = [1 + \exp(-\gamma_2 y_{t-1}^2)]^{-1} \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (2.119)$$

Denklem (2.117)'de birim kök temel hipotezi ($H_0: \gamma_1 = 0$), simetrik veya asimetrik ESTAR doğrusal olmama alternatif hipotezine karşı test edilmektedir. Fakat bu denklemde γ_2, ρ_1 ve ρ_2 gibi tanımlanamayan parametreler bulunmaktadır. Bu yüzden geleneksel yöntemler kullanılamaz. Benzer problem 2.5.4. bölümde açıklanan Kapetanios, Shin ve Snell (2003) birim kök testinde de mevcuttu. Çözüm olarak Taylor açılımı kullanılmıştı. AESTAR modeline $k = 0$ iken Taylor açılımı uygulanırsa (2.117) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılır (Sollis, 2009):

$$\Delta y_t = \alpha(\rho_2^* - \rho_1^*)\gamma_1\gamma_2 y_{t-1}^4 + \rho_2^* \gamma_1 y_{t-1}^3 + \eta_t \quad (2.120)$$

Burada $\eta_t = \varepsilon_t + R_t$ 'dir ve R_t Taylor açılımı kalıntılarını ifade etmektedir. Bu denklemde $\alpha = 1/4$ olacaktır ve denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1}^3 + \phi_2 y_{t-1}^4 + \eta_t \quad (2.121)$$

Burada $\phi_1 = \rho_2^* \gamma_1$ ve $\phi_2 = \alpha(\rho_2^* - \rho_1^*)\gamma_1\gamma_2$ 'dir. Modelin genişletilmiş biçimi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1}^3 + \phi_2 y_{t-1}^4 + \sum_{i=1}^k k_i \Delta y_{t-i} + \eta_t \quad (2.122)$$

Modelde kullanılan y_t serisi ham veriyi, ortalamadan arındırılmış veriyi ($y_t^* = y_t - \hat{\mu}$) ya da ortalamadan ve trendden arındırılmış veriyi ($y_t^* = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 t$) ifade etmektedir. (2.117) numaralı model üzerinden $H_0: \gamma_1 = 0$ olarak ifade edilen birim kök hipotezi (2.122) numaralı model için aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$H_0 : \phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (2.123)$$

Hipotez sınaması aşağıdaki F test istatistiği kullanılarak yapılmaktadır (Sollis, 2009):

$$F = (R\hat{\beta} - r)' \left[\hat{\sigma}^2 R \left\{ \sum_t x_t x_t' \right\}^{-1} R' \right]^{-1} (R\hat{\beta} - r)/m \quad (2.124)$$

Burada $x_t = [y_{t-1}^3, y_{t-1}^4]'$ ve $m = 2$ 'dir. R , 2×2 boyutunda matristir. $\hat{\phi}_1$ ve $\hat{\phi}_2$ terimleri ϕ_1 ve ϕ_2 'nin en küçük kareler tahminleri olmak üzere $\hat{\beta} = [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2]'$ olarak ifade edilmektedir. $\hat{\sigma}^2$ terimi σ^2 'nin en küçük kareler tahminidir ve $r = [0, 0]'$ olarak tanımlanmaktadır.

Hipotez sınamasında standart kritik değerler kullanılmamaktadır. Hesaplanan F test istatistik değeri Sollis (2009) çalışmasında yer alan F_{AE} , $F_{AE,\mu}$ ve $F_{AE,t}$ kritik değerleri ile karşılaştırılmaktadır. F_{AE} ham veriyi, $F_{AE,\mu}$ ortalamadan arındırılmış veriyi ve $F_{AE,t}$ ortalama ve trendden arındırılmış veriyi ifade etmektedir.

2.5.8. Kruse Birim Kök Testi (2011)

Kapetanios, Shin ve Snell (2003) doğrusal olmayan birim kök testi üstel fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif modele (ESTAR) dayanmaktadır. Bu test, modelde yer alan c parametresinin sıfıra eşit olduğunu varsaymaktadır. Ancak reel döviz kurları üzerine yapılan birçok amprik çalışma c 'nin tahminlerine dayanmaktadır (Kruse, 2011).

Kruse (2011) çalışmasında $c \neq 0$ varsayımına dayanan yeni bir birim kök testi önermiştir. Birinci dereceden üstel fonksiyonlu yumuşak geçişli otoregresif model(ESTAR) aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \phi y_{t-1}(1 - \exp\{-\gamma(y_{t-1} - c)^2\}) + \varepsilon_t \quad (2.125)$$

Burada $\varepsilon_t \sim \text{idd}(0, \sigma^2)$ 'dir. Eğer γ parametresi sıfıra yaklaşırsa ise ESTAR modeli doğrusal AR(1) modeli olacaktır. Kapetanios, Shin ve Snell (2003) çalışmasına göre $\alpha = 0$ kısıtlaması altında ESTAR modeli aşağıdaki gibi gösterilebilir (Kruse, 2011):

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1}(1 - \exp\{-\gamma(y_{t-1} - c)^2\}) + \varepsilon_t \quad (2.126)$$

Burada ϕ parametresi tanımlanmadığı için $H_0: \gamma = 0$ birim kök hipotezinin doğrudan test edilmesi mümkün değildir (Kruse, 2011). Bu denklem Taylor açılımı yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\Delta y_t = \beta_1 y_{t-1}^3 + \beta_2 y_{t-1}^2 + \beta_3 y_{t-1} + u_t \quad (2.127)$$

Kruse (2011) çalışmasında testin gücünü artırmak için $\beta_3 = 0$ varsayımını uygulamıştır. Bu varsayım altında model aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Delta y_t = \beta_1 y_{t-1}^3 + \beta_2 y_{t-1}^2 + u_t \quad (2.128)$$

Oluşabilecek otokorelasyon sorununu ortadan kaldırmak için bağımlı değişkenin gecikmeli değerleri modele dahil edilebilir. Bu durumda modelin genişletilmiş biçimi şu şekilde olacaktır (Güriş, 2020:134):

$$\Delta y_t = \beta_1 y_{t-1}^3 + \beta_2 y_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (2.129)$$

Temel hipotez birim kökün varlığını ifade etmek üzere, (2.128) numaralı denklem üzerinden test hipotezleri aşağıdaki gibi oluşturulur (Kruse, 2011):

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (2.130)$$

$$H_1 : \beta_1 < 0, \beta_2 \neq 0$$

Test hipotezlerinin sınanmasında kullanılacak olan Wald test istatistiği(τ) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Kruse,2011):

$$\tau = \left(\hat{v}_{22} - \frac{\hat{v}_{21}^2}{\hat{v}_{11}} \right)^{-1} \left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 \frac{\hat{v}_{21}}{\hat{v}_{11}} \right)^2 + 1(\hat{\beta}_1 < 0) \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{v}_{11}} \quad (2.131)$$

Bu test istatistiği daha basit olarak aşağıdaki gibi formülize edilebilir:

$$\tau = t_{\delta_1=0}^2 + 1(\hat{\delta}_1 < 0) t_{\delta_1=0}^2 \quad (2.132)$$

Hesaplanan test istatistiğinin kıyaslanmasında kullanılacak olan kritik değerler Kruse (2011) çalışmasında yer almaktadır. Çalışmada yer alan kritik değer tablosu ham veriler, ortalamadan arındırılmış veriler ve ortalamadan ve trendden arındırılmış veriler dikkate alınarak oluşturulmuştur.

2.5.9. Cuestas ve Ordenez Birim Kök Testi (2014)

Kapetanios, Shin ve Snell (2003) ESTAR tipi doğrusal olmayan birim kök testi deterministik bileşenlerdeki doğrusal olmamayı dikkate almamaktadır. Chong vd. (2008) çalışmalarında ise Kapetanios, Shin ve Snell (2003) birim kök testini modifiye ederek doğrusal veya ikinci dereceden deterministik trendi dikkate alan bir yaklaşım önermişlerdir. Daha sonra, üçüncü bölümde detaylı olarak açıklanacak olan Christopoulos ve León-Ledesma (2010) çalışmalarında asimetrik etkiyi ve Fourier fonksiyonu aracılığıyla yaklaşık olarak tahmin edilen yapısal değişiklikleri dikkate alan bir birim kök testi ileri sürmüşlerdir (Cuestas ve Ordenez, 2014).

Cuestas ve Ordenez (2014) çalışmalarında, Christopoulos ve León-Ledesma (2010) birim kök testinde önerilen yaklaşımı izleyerek doğrusal olmamanın kaynağını asimetri etkisi ve yapısal kırılma etkisi olmak üzere iki şekilde dikkate alan yeni bir birim kök testi ileri sürmüşlerdir. Bu test sürecinde, asimetri etkisi üstel yumuşak geçişli otoregresif model kullanılarak ve yapısal değişiklik etkisi ise deterministik bileşenlerde lojistik yumuşak geçiş fonksiyonu kullanılarak modellenmektedir (Cuestas ve Ordenez, 2014).

Test sürecinde ilk olarak aşağıdaki model yapısı oluşturulmaktadır (Cuestas ve Ordenez, 2014):

$$y_t = g(t) + \epsilon_t \quad (2.133)$$

Burada, $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ve $g(t)$ zamanlar itibariyle sabit olmayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, lojistik dağılımlı yumuşak geçişli regresyon kullanılarak şu şekilde ifade edilmektedir (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$g(t) = g_1 + g_2 t + g_3 L_t(\gamma) + 4t L_t(\gamma) \quad (2.134)$$

Burada $L_t(\gamma)$ lojistik yumuşak geçiş fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$L_t(\gamma) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma t}} \quad (2.135)$$

Burada γ parametresi geçiş hızını ifade etmektedir ve $\gamma > 0$ 'dır. Parametre ne kadar büyük ise geçiş de o kadar hızlı olacaktır. Eğer $\gamma = 0$ ise $L_t = 0.5$ olacaktır ve bu durum yapısal kırılmanın olmadığını göstermektedir (Cuestas ve Ordóñez, 2014).

Deterministik bileşenler altında birim kök hipotezi aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$H_0 : \epsilon_t = \mu_t, \mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.136)$$

Test süreci, Christopoulos ve León-Ledesma (2010) çalışmasında olduğu gibi (2.133) numaralı denklemin kalıntılarına Kapetanios, Shin ve Snell (2003) birim kök testinin uygulanmasıyla gerçekleştirilir. Test uygulaması iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada (2.133) numaralı denklem doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir ve hata terimleri elde edilir (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$\begin{aligned} y_t &= g(t) + \epsilon_t \\ \hat{\epsilon}_t &= y_t - g(t) \end{aligned} \quad (2.137)$$

İkinci aşamada elde edilen hata terimlerine Kapetanios, Shin ve Snell (2003) birim kök testi uygulanır. Birim kök temel hipotezinin durağan ESTAR sürece karşı sınanması aşağıdaki model üzerinden gerçekleştirilir (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$\Delta \hat{\epsilon}_t = \alpha \hat{\epsilon}_{t-1} + \vartheta \hat{\epsilon}_{t-1} (1 - e^{-\theta \hat{\epsilon}_{t-1}^2}) + \epsilon_t \quad (2.138)$$

Burada Kapetanios, Shin ve Snell (2003) birim kök testinde önerilen $\alpha = 0$ kısıtı geçerlidir. Bu denklem Taylor açılımı kullanılarak aşağıdaki forma dönüştürülür (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$\Delta \hat{\epsilon}_t = \delta \epsilon_{t-1}^3 + \eta_t \quad (2.139)$$

Burada η_t hata terimidir. Otokorelasyon problemine karşı bağımlı değişkenin gecikmeli değerleri denkleme ilave edilebilir. Temel hipotez birim kökün varlığını ifade etmek üzere test hipotezleri aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Cuestas ve Ordóñez, 2014):

$$\begin{aligned} H_0 : \delta &= 0 \\ H_1 : \delta &< 0 \end{aligned} \quad (2.140)$$

Hipotezlerin sınanmasında $\hat{t}_{SNL}$ olarak ifade edilen test istatistiği kullanılır (Cuestas ve Ordóñez, 2014). Test istatistik değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Güriş, 2020: 144):

$$\hat{t}_{SNL} = \frac{\hat{\delta}}{s.e.(\hat{\delta})} \quad (2.141)$$

Hesaplanan test istatistik değeri Cuestas ve Ordóñez (2014) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

2.5.10. Chen ve Xie Testi (2017)

Chen ve Xie (2017) çalışmalarında asimetri etkisi ve yapısal kırılma olmak üzere iki ayrı etkiyi aynı anda ele almışlardır. Enders ve Granger (1998) ile Enders ve Siklos (2001) tarafından önerilen MTAR model yapısını ve Harvey ve Mills (2002) tarafından önerilen iki yapısal kırılma yaklaşımını birleştirerek HM-MTAR olarak adlandırılan yeni bir birim kök testi önermişlerdir.

2.4.3.3. bölümde açıklandığı üzere MTAR modeli genel biçimde aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Enders ve Granger, 1998):

$$\Delta y_t = M_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - M_t) \rho_2 y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.142)$$

Burada M_t gösterge fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$M_t = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \Delta y_{t-1} \geq \tau, \\ 0, & \text{eğer } \Delta y_{t-1} < \tau \end{cases} \quad (2.143)$$

Fonksiyonda yer alan τ eşik değerdir. Uygun eşik değer, kalıntı kareler toplamının minimum olduğu değer olarak kabul edilmektedir.

İki yapısal kırılmaya izin veren çift lojistik yumuşak geçiş fonksiyonlu üç model yapısı aşağıdaki gibidir (Harvey ve Mills, 2002):

$$\text{Model A: } y_t = \alpha_1 + \alpha_2 S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) + \alpha_3 S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) + v_t \quad (2.144)$$

$$\text{Model B: } y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) + \alpha_3 S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) + v_t \quad (2.145)$$

$$\begin{aligned} \text{Model C: } y_t = & \alpha_1 + \beta_1 t + \alpha_2 S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) + \beta_2 t S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) \\ & + \alpha_3 S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) + \beta_3 t S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) + v_t \end{aligned} \quad (2.146)$$

Burada lojistik geçiş fonksiyonu $S_{it}(\gamma_i, \tau_i)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$S_{it}(\gamma_i, \tau_i) = [1 + \exp\{-\gamma_i(t - \tau_i T)\}]^{-1}, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.147)$$

Harvey ve Mills (2002) birim kök test süreci iki aşamada gerçekleştirilmektedir. Bu aşamalar şu şekilde uygulanmaktadır:

Adım 1. (2.144), (2.145) ve (2.146) numaralı modeller doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi kullanılarak tahmin edilir ve aşağıdaki gibi kalıntılar elde edilir.

$$\text{Model A: } \hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) - \hat{\alpha}_3 S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) \quad (2.148)$$

$$\text{Model B: } \hat{v}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) - \hat{\alpha}_3 S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} \text{Model C: } \hat{v}_t = & y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 t - \hat{\alpha}_2 S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) - \hat{\beta}_2 t S_{1t}(\gamma_1, \tau_1) \\ & - \hat{\alpha}_3 S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) - \hat{\beta}_3 t S_{2t}(\gamma_2, \tau_2) \end{aligned} \quad (2.150)$$

Adım 2. İlk aşamadan elde edilen kalıntılara deterministik bileşenlerin dahil edilmediği ADF birim kök testi uygulanır ve bu test HM – ADF testi olarak adlandırılır.

$$\Delta \hat{v}_t = \rho \hat{v}_{t-1} + \sum_{i=1}^k \delta_i \Delta \hat{v}_{t-i} + \hat{\eta}_t \quad (2.151)$$

Elde edilen test istatistik değeri Harvey ve Mills (2002) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

Chen ve Xie (2017) çalışmalarında (2.148), (2.149) ve (2.150) numaralı denklemlerden elde edilen kalıntılara MTAR modeli üzerinden birim kök testi uygulanmasını önermişlerdir. Bu durumda model aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Chen ve Xie, 2017):

$$\Delta \hat{v}_t = M_t \rho_1 \hat{v}_{t-1} + (1 - M_t) \rho_2 \hat{v}_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Delta \hat{v}_{t-i} + \hat{\eta}_t \quad (2.152)$$

Modelde yer alan M_t gösterge fonksiyonu, $\Delta \hat{v}_{t-1}$ değişkenine göre oluşturulmaktadır.

$$M_t = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \Delta \hat{v}_{t-1} \geq 0, \\ 0, & \text{eğer } \Delta \hat{v}_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (2.153)$$

$\hat{v}_t$, (2.148), (2.149) ve (2.150) numaralı denklemlerden elde edilen kalıntılardır. Bu denklemler ile (2.152) numaralı denklemin kombinasyonundan elde edilen bu yeni test HM – MTAR olarak adlandırılmaktadır.

Test sürecinde aşağıdaki hipotezler sınanmaktadır (Chen ve Xie, 2017):

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = 0 \quad (2.154)$$

$$H_1 : \rho_1 = \rho_2 < 0$$

Burada temel hipotez reddedilir ise $\hat{v}_t$ (y_t) simetrik düzeltme ile durağandır.

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = 0 \quad (2.155)$$

$$H_1 : \rho_1 < 0, \rho_2 < 0, \rho_1 \neq \rho_2$$

Burada ise temel hipotez reddedilir ise $\hat{v}_t(y_t)$ asimetrik düzeltme ile durağan sürece uygunluk göstermektedir. Eğer temel hipotez reddedilmez ise $\hat{v}_t$ değişkeni ve buna bağlı olarak y_t birim köklüdür (Chen ve Xie, 2017).

Hipotezlerin sınanmasında *model A*, *model B* ve *model C* için $F_{2\alpha}^*$, $F_{2\alpha(\beta)}^*$ ve $F_{2\alpha\beta}^*$ olmak üzere üç F test istatistiği hesaplanmaktadır. Fakat HM – MTAR testinde test istatistik değerlerinin kıyaslanması HM – ADF testindeki gibi Harvey ve Mills (2002) çalışmasında yer alan kritik değerler ile yapılamamaktadır. Bu yüzden Chen ve Xie (2017) tarafından farklı gözlem sayıları için Monte Carlo simülasyonu kullanılarak yeni kritik değerler üretilmiştir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

FOURIER BİRİM KÖK TESTLERİ VE TEST ÖNERİSİ

Bu bölümde ilk olarak fourier fonksiyonu açıklanacaktır ve ekonometride fourier fonksiyonunun kullanımına değinilecektir. Yapısal kırılmayı fourier yaklaşımı ile incelemeye olanak tanıyan birim kök testleri açıklanacaktır.

Daha sonra literatürde yer alan mevcut çalışmalardan yararlanılarak yeni bir birim kök test önerisinde bulunulacaktır. Önerilen yeni birim kök testi için kritik değerler belirlenecek ve testin boyut ve güç özellikleri incelenecektir.

3.1. FOURIER FONKSİYONU VE EKONOMETRİDE KULLANIMI

İktisadi zaman serilerinde meydana gelen değişimler yapısal kırılmalar ile analiz edilmektedir. Çalışmanın 1.5. bölümünde yapısal kırılmaların tespit edilmesinde kullanılan yapısal kırılmalı birim kök testlerinden bahsedilmiştir. Bu testlerin uygulama sürecinde yapısal kırılmalar modele gölge değişken olarak eklenmektedir. Kullanılan gölge değişkenler ani değişimleri dikkate alarak oluşturulmaktadır.

İktisadi zaman serilerinde meydana gelen ani değişimler sonsuza kadar sürmemektedir. Çünkü piyasa oyuncuları yeni oluşan şarta alışacak ve seriler yeniden sonlu bir yapıya ulaşacaktır (Hepkorucu, 2020). Ayrıca yapısal kırılmanın biçimi, konumu ve sayısı da eleştirilmektedir. Bu yüzden iktisadi değişimlerin ani olarak ortaya çıkmasına karşın kademeli olarak ele alınması gerçeğe daha uygundur. Fakat yapısal kırılmanın, Leybourne vd. (1998) tarafından önerilen kademeli olarak lojistik yumuşak geçiş fonksiyonu ile incelenmesi yine tüm eksiklikleri gidermemektedir. Çünkü yapısal kırılma sayısının belirlenmesi hala sorun olarak devam etmektedir.

Fourier fonksiyonları kullanılarak yapısal kırılmaların biçimi ve sayısı dikkate alınmadan zaman serisi analizleri gerçekleştirilebilmektedir. Fourier fonksiyonu trigonometrik terimler yardımı ile serilerin zaman boyutunun frekans yapısıyla tanımlanmasına olanak tanımaktadır (Enders ve Lee, 2004).

Dickey ve Fuller tipi bir teste Fourier dönüşümü, $\alpha(t)$ zamana bağlı bir fonksiyon olmak üzere şu şekilde modifiye edilebilir (Enders ve Lee, 2004):

$$y_t = \alpha(t) + \beta y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Burada ε_t 'nin varyansı σ^2 'dir ve $\alpha(t)$ deterministik bir fonksiyondur. $\alpha(t)$ 'nin fonksiyonel formu bilinmediği için denklemin doğrudan tahmin edilmesi mümkün değildir. Ancak, $\alpha(t)$ gerçek formu dikkate alınmaksızın, istenen doğruluk düzeyi için şu şekilde yazılabilir:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(2\pi kt/T) + \sum_{k=1}^n \beta_k \cos(2\pi kt/T); \quad n < T/2 \quad (3.2)$$

Burada n tahminde bulunulan frekans sayısı, k belirli noktadaki frekans sayısı ve T gözlem sayısıdır. Fakat bu denklemde birçok frekans bileşeninin kullanılması aşırı uyma (over-fitting) sorununa yol açabilir ve frekans sayısının belirlenmesinde geçerli testlerin elde edilmesi zor olabilir. Bu yüzden tek bir frekans bileşeninin kullanılması önerilebilir. Tek frekans bileşeni için Fourier yaklaşımı aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir (Enders ve Lee, 2004):

$$\alpha(t) \cong \alpha_0 + \alpha_1 \sin(2\pi kt/T) + \alpha_2 \cos(2\pi kt/T) \quad (3.3)$$

Gallant (1984), Davies (1987), Gallant ve Souza (1991) ve Becker, Enders ve Hum (2004) çalışmaları tek frekans bileşeni kullanılan Fourier yaklaşımının, bilinmeyen fonksiyonel form davranışının başarılı olduğunu göstermektedir (Enders ve Lee, 2004).

3.2. FOURIER BİRİM KÖK TESTLERİ

Bu bölümde fourier dönüşümünün Enders ve Lee (2004), Becker vd. (2006), Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010), Enders ve Lee (2012a), Enders ve Lee (2012b), Ranjbar vd. (2018) ve Güriş (2019) birim kök testlerinde kullanımı açıklanacaktır.

3.2.1. Enders ve Lee Fourier Birim Kök Testi (2004)

Enders ve Lee (2004) çalışmalarında önerdikleri yeni birim kök testinde tek bir frekans bileşeni ile Fourier yaklaşımını kullanmışlardır. Testin veri üretme süreci aşağıdaki gibidir:

$$y_t = \alpha_0 + \gamma t + \alpha_1 \sin(2\pi kt/T) + \alpha_2 \cos(2\pi kt/T) + e_t \quad (3.4)$$

$$e_t = \beta e_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

Burada temel hipotez birim kökün varlığını ifade etmektedir ve $\beta = 1$ olarak gösterilmektedir. Alternatif hipotez ise durağanlığı ifade etmektedir ve $\beta < 1$ olarak gösterilmektedir.

Testin birim kök temel hipotezinin sınanmasında kullanılmak üzere iki farklı test prosedürü önerilmektedir. Birincisi, Schmidt ve Phillips (1992) ile Amlers ve Lee (1995) çalışmalarını dikkate alan Lagrange multiplier (LM) test prosedürüdür. İkincisi, Dickey ve Fuller test prosedürüdür (Enders ve Lee, 2004).

LM test prosedüründe iki aşamalı tahmin metodolojisi kullanılmaktadır. İlk aşamada birinci farklar regresyonu aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir (Enders ve Lee, 2004):

$$\Delta y_t = \delta_0 + \delta_1 \Delta \sin(2\pi kt/T) + \delta_2 \Delta \cos(2\pi kt/T) + u_t \quad (3.6)$$

Denklemden yer alan katsayıların tahmini $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}_1$ ve $\hat{\delta}_2$ olarak gösterilmektedir. Bu katsayılar kullanılarak trendden arındırılmış seri şu şekilde elde edilmektedir (Enders ve Lee, 2004):

$$\tilde{S}_t = y_t - \tilde{\psi} - \tilde{\delta}_0 t - \tilde{\delta}_1 \sin(2\pi kt/T) - \tilde{\delta}_2 \cos(2\pi kt/T), \quad t = 2, \dots, T \quad (3.7)$$

Burada $\tilde{\psi} = y_1 - \tilde{\delta}_0 - \tilde{\delta}_1 \sin(2\pi kt/T) - \tilde{\delta}_2 \cos(2\pi kt/T)$ ve y_1 ise y_t 'nin ilk gözlemidir. Başlangıç değerinin etkisini kontrol etmek için $\tilde{\psi}$ değeri y_t 'den çıkartılmaktadır. Böylece $\tilde{S}_1 = 0$ olmaktadır.

İkinci aşamada tahmin edilen regresyon denklemi aşağıdaki gibidir (Enders ve Lee, 2004):

$$\Delta y_t = \phi \tilde{S}_{t-1} + d_0 + d_1 \Delta \sin(2\pi kt/T) + d_2 \Delta \cos(2\pi kt/T) + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

Eğer $\phi = 0$ temel hipotezi geçerli ise $\tilde{S}_{t-1}$ durağan değildir. Buradan hareketle LM test istatistiği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\tau_{LM}: \phi = 0 \text{ temel hipotezini sınavan } t \text{ istatistiği} \quad (3.9)$$

Hesaplanan LM test istatistik değeri, Enders ve Lee (2004) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

İkinci olarak önerilen Dickey ve Fuller test prosedüründe aşağıdaki regresyon kullanılmaktadır:

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + c_1 + c_2 t + c_3 \sin(2\pi kt/T) + c_4 \cos(2\pi kt/T) + e_t \quad (3.10)$$

LM test prosedüründe olduğu gibi regresyon denkleminde hem sinüs hem de kosinüs fonksiyonları dahil edilmiştir. Burada T örneklem büyüklüğü ve k frekanstır. Eğer $k = 1$ olarak belirtilir ise test doğrudan uygulanabilir. Eğer kırılma için k değeri tahmin edilir ise test, aşağıdaki adımlar izlenerek uygulanır (Enders ve Lee, 2004).

Adım 1. (3.10) numaralı denklem $1 \leq k \leq 5$ aralığındaki tüm k değerleri için tahmin edilir. Elde edilen regresyon tahminlerinde, kalıntı kareler toplamının (SSR) minimum olduğu regresyonun $\hat{k}$ değeri uygun frekans sayısı olarak belirlenir. Eğer kalıntılar otokorelasyonlu ise Δy_t 'nin gecikmeli değerleri denkleme eklenir.

Adım 2. F – testi kullanılarak $c_3 = c_4 = 0$ temel hipotezi sınanır. Test istatistik değeri Enders ve Lee (2004) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. F test istatistik değeri kritik değerden küçük ise doğrusal trendi ifade eden temel hipotez reddedilemeyecektir. Bu durumda Enders ve Lee (2004) tarafından klasik Dickey ve Fuller testinin uygulanması önerilmektedir.

Adım 3. (3.10) numaralı denklemde $\rho = 0$ temel hipotezi için t istatistiği τ_{DF} olarak ifade edilir. τ_{DF} değeri, Enders ve Lee (2004) çalışmasında yer alan k 'nin tüm değerleri için oluşturulmuş kritik değerler ile karşılaştırılmaktadır.

3.2.2. Becker, Enders ve Lee Fourier Birim Kök Testi (2006)

Perron (1989) çalışması birim kök testlerinde yapısal kırılmaların uygun şekilde modellenmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Fakat yapısal kırılmalar sayı ve biçim açısından farklılık gösterebildiği için uygulamada birtakım sorunlar meydana getirmektedir. Örneğin; Lee ve Strazicich (2003), Harvey ve Mills (2003) ve Buseti ve Taylor (2003) çalışmalarında düzeyde ve eğimde meydana gelebilecek kırılmaları ortaya koymak için kukla değişken kullanmışlardır. Fakat bu çalışmalara göre kırılmaların keskin olması gerekmektedir. Leybourne vd. (1998) ve Kapetanios vd. (2003) çalışmalarında ise deterministik bileşenlerdeki yapısal kırılmayı yumuşak bir geçiş fonksiyonu ile tanımlamışlardır. Tüm bu çalışmalar keskin bir kırılma ve doğrusal olmama durumunu varsaymaktadır. Fakat kırılmaların gerçek doğası bilinmediği için biçimine ve sayısına dair bir belirtme kullanmak sorun yaratabilmektedir (Becker vd., 2006).

Becker vd. (2006) çalışmalarında Fourier yaklaşımını kullanarak Kwiatkowski vd. (1992) çalışmasını dikkate alarak yeni bir birim kök testi geliştirmişlerdir. Böylece yapısal kırılmaların biçiminin ve sayısının belirlenmesinde önsel bilgiye gerek duyulmamaktadır. Önerilen Fourier KPSS (FKPSS) testi hem ani değişimleri hem de yavaş değişimleri tespit etmektedir.

Testin veri yaratım süreci aşağıdaki gibidir (Becker vd., 2006):

$$y_t = X_t' \beta + Z_t' \gamma + r_t + \varepsilon_t \quad (3.11)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t \quad (3.12)$$

Burada ε_t durağan hatalardır ve u_t , σ_u^2 varyans ile bağımsız ve özdeş dağılımlıdır(iid). y_t düzeyde durağan bir süreç ise $X_t = [1]$, trend durağan bir süreç ise $X_t = [1, t]'$ ifadesi kullanılmaktadır. T örneklem büyüklüğü ve k frekans sayısı olmak üzere kırılmalar $Z_t = [\sin(2\pi kt/T), \cos(2\pi kt/T)]'$ Fourier yapısı ile dikkate alınmaktadır.

Herhangi bir Fourier serisi, α_t bilinmeyen bir formda fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Becker vd., 2006):

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^n b_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right); \quad n < \frac{T}{2} \quad (3.13)$$

Burada n mümkün tüm frekansların sayısı ve k belirli bir frekanstır. $n = 1$ değerinden başlamak üzere yaklaşımı genişletmek mümkündür ve $n = T/2$ 'ye ulaşıldığında α_t 'nin uyumu mükemmel olacaktır.

Tek bir frekans yapısı ile Fourier yaklaşımı aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Becker vd., 2006):

$$\alpha(t) \cong Z'_t \gamma = \gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + e_t \quad (3.14)$$

Burada k frekans sayısı ve $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2]'$ terimi frekans bileşeninin genliğini ve yer değiştirmesini ölçmektedir.

Test sürecinde kullanılacak olan regresyonlar, Fourier yapısının dahil edilmesi ile aşağıdaki gibi yazılır (Becker vd., 2006):

$$y_t = \alpha + \gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + e_t \quad (3.15)$$

$$y_t = \alpha + \beta t + \gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + e_t \quad (3.16)$$

Burada e_t regresyon kalıntılarıdır. Test istatistik değeri, regresyon tahminlerinden elde edilen kalıntılara Kwiatkowski vd. (1992) testi uygulanarak elde edilmektedir. (3.15) numaralı denklem düzey durağanlık ve (3.16) numaralı denklem trend durağanlık hipotezinin sınanmasında kullanılmaktadır. Test istatistikleri sırasıyla $\tau_\mu(k)$ ve $\tau_\tau(k)$ olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Becker vd., 2006):

$$\tau_\mu(k) \text{ veya } \tau_\tau(k) = \frac{1}{T^2} \frac{\sum_{t=1}^T \tilde{S}_t(k)^2}{\tilde{\sigma}^2} \quad (3.17)$$

Burada $\tilde{e}_j$ terimi (3.15) numaralı ve (3.16) numaralı denklemlerin en küçük kareler kalıntılarını ifade etmek üzere $\tilde{S}_t(k)^2 = \sum_{j=1}^t \tilde{e}_j$ olarak tanımlanmaktadır. Kwiatkowski vd. (1992) testinde olduğu gibi parametrik olmayan uzun dönem varyansı aşağıdaki gibi tahmin edilmektedir:

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\gamma}_0 + 2 \sum w_j \tilde{\gamma}_j \quad (3.18)$$

Burada l gecikme parametresi olmak üzere $j = 1, \dots, l$ 'dir. $\tau_i(k)$ 'nin asimptotik dağılımı aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$\tau_i(k) \rightarrow \int_0^1 V_i(r)^2 dr, \quad i = \mu, \tau \quad (3.19)$$

Buradan hareketle test istatistiklerinin asimptotik dağılımlarının k frekansına bağlı olduğu ve en doğru şekilde belirlenmesi gerektiği sonucuna varılabilir. En uygun k değerinin belirlenmesi için (3.15) numaralı ve (3.16) numaralı regresyonlar tahmin edilmektedir. Daha sonra Davies (1987) çalışması dikkate alınarak, kalıntı kareler toplamının en küçük olduğu modele ait k değeri uygun frekans olarak belirlenmektedir. Spesifik olarak, k değeri $1 \leq k \leq k^{max}$ aralığında yer almaktadır. Pratikte ise $k^{max} = 5$ olarak belirlenmektedir (Becker vd., 2006).

Hesaplanan $\tau_\mu(k)$ ve $\tau_\tau(k)$ istatistik değerleri Becker vd. (2006) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Temel hipotez ($\sigma_u^2 = 0$) reddedilememekte ise seri durağandır sonucuna varılır. Eğer alternatif hipotez ($\sigma_u^2 \neq 0$) reddedilememekte ise seri birim köklüdür.

Durağanlık analizinin uygulandığı y_t serisi doğrusal olmayan trende sahip değil ise standart KPSS testi kullanılarak test gücü artırılabilir. Bu nedenle doğrusal olmayan trend, F test istatistiği kullanılarak test edilmelidir. Temel hipotez doğrusal olmayan trendin olmadığını ifade etmektir ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ olarak gösterilmektedir. Alternatif hipotez ise doğrusal olmayan trendin varlığını ifade etmektedir ve $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq 0$ olarak gösterilmektedir. F test istatistiği belirli bir k frekansı için şu şekilde hesaplanmaktadır (Becker vd., 2006):

$$F_i(k) = \frac{(SSR_0 - SSR_1(k))/2}{SSR_1(k)/(T - q)}, \quad i = \mu, \tau \quad (3.20)$$

Burada $SSR_1(k)$, (3.15) numaralı ve (3.16) numaralı denklemlerden elde edilen kalıntı kareler toplamı, q bağımsız değişken sayısı ve T toplam gözlem sayısıdır. SSR_0

ise trigonometrik terimlerin olmadığı denklemden elde edilen kalıntı kareler toplamıdır.

Hesaplanan test istatistik değeri Becker vd. (2006) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Fourier terimleri istatistiksel olarak anlamlı ise Becker vd. (2006) tarafından önerilen FKPSS testi kullanılması daha uygun olacaktır.

3.2.3. Christopoulos ve Lean – Ledesma Fourier Birim Kök Testi (2010)

Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010) çalışmalarında serinin ortalamasındaki büyük değişimleri saptamak için trigonometrik fonksiyon, deterministik bileşenlerdeki doğrusal olmayan düzeltmeleri yakalamak için üstel dağılımlı yumuşak geçiş fonksiyonu kullanmışlardır. Böylece yapısal kırılmaları ve doğrusal olmayan formu bir arada dikkate alarak yeni bir birim kök testi geliştirmişlerdir.

Stokastik değişken y_t için dikkate alınan model aşağıdaki gibidir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

$$y_t = \delta(t) + v_t \quad (3.21)$$

Burada $v_t \sim N(0, \sigma)$ ve $\delta(t)$ zamanla değişen deterministik bir bileşendir. Becker vd. (2003), Becker vd. (2006) ve Enders ve Lee (2004) çalışmalarından yararlanılarak Fourier açılımı şu şekilde tanımlanmaktadır (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

$$\delta(t) = \delta_0 + \sum_{k=1}^G \delta_1^k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^G \delta_2^k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (3.22)$$

Burada k frekans sayısı, t trend terimi, $\pi = 3.1416$ ve T örneklem büyüklüğüdür. G frekans değeri ne kadar büyük ise bilinmeyen formdaki $\delta(t)$ o kadar iyi tahmin edilmektedir. Temel hipotez $k = 1, 2, \dots, G$ olmak üzere $\delta_k \neq 0$ olarak gösterilmektedir. Temel hipotez en az bir frekans için reddedilir ise doğrusal formda olmayan fonksiyon, y_t 'nin deterministik bileşenini yeterince açıklayabilmektedir. Bu durumda, seride en az bir yapısal kırılma mevcuttur.

Uygun frekans değerinin belirlenmesinde Becker vd. (2006) alışmasında yer alan sürecin izlenmesi onerilmektedir. Ludlow ve Enders (2000) tarafından tek bir frekans yapısının Fourier yapısına yaklaşmak için yeterli olduğu ileri sürülmüştür ve buna dayanarak (3.22) numaralı model aşağıdaki gibi yazılabilir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \delta_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (3.23)$$

Seride meydana gelen bilinmeyen kırılmaların anlamlılığı için $H_0: \delta_1 = \delta_2 = 0$ temel hipotezi, $H_1: \delta_1 \neq \delta_2 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı F -test istatistiği $F_\mu(\hat{k})$ ile test edilmektedir. Kırılmaların geçici ve zıt yönlerde meydana gelme eğiliminde olduğu durumlar için bu test diğer testlere göre daha iyi bir performans göstermektedir. Veriler durağan değil ise F istatistiğinin gücü düşük olacaktır. Bu nedenle testin kullanımı, birim kök temel hipotezinin reddedildiği durumlarda onerilmektedir. Test sürecinde kullanılacak model aşağıda gösterilmektedir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \delta_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + v_t \quad (3.24)$$

Modelden hareketle birim kök temel hipotezi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$H_0: v_t = \mu_t, \quad \mu_t = \mu_{t-1} + h_t \quad (3.25)$$

Burada h_t sıfır ortalamalı durağan bir süreçtir. Test istatistiklerinin hesaplanmasında üç aşamalı prosedür izlenmektedir. Prosedür şu şekilde uygulanmaktadır (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

Adım 1. Optimal frekans k^* değeri bulunur. Öncelikle, k 'nin 1 ile 5 arasındaki tüm değerleri için doğrusal olmayan deterministik bileşenler içeren (3.24) numaralı model en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir. Tahmin edilen regresyonlarda kalıntı kareler toplamını minimum yapan k değeri uygun frekans değeri olarak belirlenir. Daha sonra, kalıntılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{v}_t = y_t - \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \hat{\delta}_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.26)$$

Adım 2. Birinci adımdan elde edilen kalıntılara birim kök testi uygulanır. Birim kök testi için doğrusal veya doğrusal olmama durumuna göre aşağıdaki üç model önerilmektedir:

$$\Delta v_t = \alpha_1 v_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta v_{t-j} + u_t \quad (3.27)$$

$$\Delta v_t = \rho v_{t-1} (1 - \exp(-\theta \Delta v_{t-i}^2)) + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta v_{t-j} + u_t, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (3.28)$$

$$\Delta v_t = \lambda_1 v_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta v_{t-j} + u_t \quad (3.29)$$

Burada $\theta > 0$ ve u_t beyaz gürültülü hata terimidir.

Adım 3. Eğer ikinci adımda birim kök temel hipotezi reddedilir ise bu adımda (3.26) numaralı denklem için yukarıda değinildiği gibi F -testi uygulanır. $H_0: \delta_1 = \delta_2 = 0$ temel hipotezi, $H_1: \delta_1 \neq \delta_2 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı $F_\mu(\hat{k})$ test istatistiği ile test edilir. Test istatistik değeri Becker vd. (2006) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Temel hipotez reddedilir ise değişkenin kırılmalı deterministik fonksiyon etrafında durağan olduğu sonucuna varılır.

İkinci adımda yer alan (3.27) numaralı model standart ADF regresyonudur ve dengeye dönmenin doğrusal olduğunu varsaymaktadır. Yeni önerilen bu test Fourier – ADF (FADF) testi olarak adlandırılmaktadır. $H_0: \alpha_1 = 0$ birim kök hipotezi, $H_1: \alpha_1 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı test edilmektedir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010).

(3.28) ve (3.29) numaralı modeller düzeltme hızının doğrusal olmadığını varsaymakta ve üstel dağılım fonksiyonu ile yumuşak geçişli otoregresif model (ESTAR) sürecini izlemektedir. (3.28) numaralı model Kılıç ve de Jong (2006) tarafından önerilen birim kök testini dikkate almaktadır. Yeni önerilen bu testin birim kök temel hipotezi aşağıdaki $F - \sup - t_{IN}$ test istatistiği ile test edilmektedir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

$$F - \sup - t_{IN} = \sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \frac{\tilde{\rho}(\theta)}{s.e.(\tilde{\rho}(\theta))} \right\}_{\rho=0} \quad (3.30)$$

Burada $\tilde{\rho}(\theta)/s.e.(\tilde{\rho}(\theta))$ ifadesi, $H_0: \rho = 0$ temel hipotezi için t istatistiğidir. Hesaplanan test istatistik değeri Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

(3.29) numaralı model Kapetanios vd. (2003) tarafından önerilen birim kök testini dikkate almaktadır. Önerilen bu testin $\lambda_1 = 0$ birim kök hipotezi, $\lambda_1 < 0$ alternatif hipotezine karşı aşağıdaki t test istatistiği ile test edilmektedir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010):

$$F - t_{NL} = \frac{\tilde{\lambda}_1}{s.e.(\tilde{\lambda})_1} \quad (3.31)$$

Hesaplanan test istatistik değeri Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Ele alınan tüm modeller, deterministik bileşenlerdeki kırılmalar giderildikten sonra orijinal seride birim kökün varlığının testine izin vermektedir (Christopoulos ve Lean – Ledesma, 2010).

3.2.4. Enders ve Lee LM Tipi Fourier Birim Kök Testi (2012a)

Enders ve Lee (2012a) tarafından ileri sürülen bu Fourier birim kök testinde Becker vd. (2006) çalışması dikkate alınmıştır. Önerilen bu test, Fourier yaklaşımı çok sayıda parametreyi tahmin etme ihtiyacını azaltabildiği için iyi boyut ve güç özelliğine sahiptir. Ayrıca LSTAR ve ESTAR kırılmaların yanı sıra keskin kırılmaların varlığında yine iyi boyut ve güç özelliği taşımaktadır (Enders ve Lee, 2012a).

Dickey ve Fuller tipi model, $d(t)$ zamana(t) bağlı bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gibi yazılmaktadır (Enders ve Lee, 2012a):

$$y_t = d(t) + \rho y_{t-1} + \gamma \cdot t + \varepsilon_t \quad (3.32)$$

Burada ε_t , σ_ε^2 varyansa sahip durağan hata terimidir. Eğer $d(t)$ biliniyor ise bu denklem doğrudan tahmin edilebilir ve birim kök temel hipotezi ($\rho = 1$) test edilebilir. Fakat $d(t)$ bilinmeyen formda ise birim kök temel hipotezinin test edilmesi problemlidir.

olacaktır. Bu nedenle, bilinmeyen formdaki $d(t)$ Fourier yaklaşımı ile aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$d(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^n \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right); \quad n < \frac{T}{2} \quad (3.33)$$

Burada n kümülatif frekans sayısı, k belirli bir frekans sayısı ve T gözlem sayısıdır. Eğer $\alpha_k = \beta_k = 0$ ise trigonometrik terimler denklemde yer almayacaktır. Bu durumda süreç doğrusal olacağı için standart Dickey ve Fuller testleri kullanılabilir.

Tek bir frekans bileşeni kullanılarak $d(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Enders ve Lee, 2012a):

$$d(t) \cong \alpha_0 + \alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (3.34)$$

Testin veri yaratım süreci tek bir frekans yapısı ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Enders ve Lee, 2012a):

$$y_t = \alpha_0 + \gamma \cdot t + \alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + e_t; \quad k \leq \frac{T}{2} \quad (3.35)$$

$$e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.36)$$

Bu modele göre $\rho = 1$ birim kök temel hipotezi, $\rho < 1$ alternatif hipotezine karşı test edilmektedir. Test prosedürü, Schmidt ve Phillips (1992) ile Amsler ve Lee (1995) çalışmaları dikkate alınarak Langrange çarpanı (LM) metodolojisine dayanmaktadır. Böylece LM metodolojisi kullanılarak $\rho = 1$ kısıtı altında aşağıdaki birinci farklar regresyonu elde edilmektedir (Enders ve Lee, 2012a):

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 \Delta \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \delta_2 \Delta \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + u_t \quad (3.37)$$

Burada tahmin edilen parametreler $\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ olarak gösterilmektedir. Bu katsayılar kullanılarak trendden arındırılmış seri şu şekilde oluşturulmaktadır:

$$\tilde{S}_t = y_t - \tilde{\psi} - \tilde{\delta}_0 t - \tilde{\delta}_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - \tilde{\delta}_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \quad t = 2, \dots, T \quad (3.38)$$

Burada $\tilde{\psi} = y_t - \tilde{\delta}_0 - \tilde{\delta}_1 \sin(2\pi kt/T) - \tilde{\delta}_2 \cos(2\pi kt/T)$ olarak ifade edilmektedir ve y_1, y_t serisinin ilk gözlemidir. y_t 'den $\tilde{\psi}$ çıkarılır ise $\tilde{S}_1 = 0$ olacaktır. Trendden arındırılmış seri kullanılarak aşağıdaki test regresyonu elde edilmektedir:

$$\Delta y_t = \phi \tilde{S}_{t-1} + d_0 + d_1 \Delta \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + d_2 \Delta \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \varepsilon_t \quad (3.39)$$

Eğer temel hipotez $\phi = 0$ reddedilemez ise y_t serisi durağan değil, birim köklü olacaktır. Birim kök temel hipotezinin sınanmasında LM test istatistiği (τ_{LM}) kullanılmaktadır. Elde edilen test istatistik değeri Enders ve Lee (2012a) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır.

Önerilen bu teste göre ilgili zaman serisinin durağan olduğu sonucuna varılır ise Fourier terimlerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı incelenmelidir. Doğrusallık temel hipotezi ($\alpha_k = \beta_k = 0$), doğrusal olmama alternatif hipotezine karşı aşağıdaki F test istatistiği ile sınanmaktadır (Enders ve Lee, 2012a):

$$F(k) = \frac{(SSR_0 - SSR_1(k))/2}{SSR_1(k)/(T - q)}, \quad i = \mu, \tau \quad (3.40)$$

Burada q bağımsız değişken sayısı ve T toplam gözlem sayısıdır. SSR_0 , trigonometrik terimler içermeyen modelden elde edilen kalıntı kareler toplamıdır. SSR_1 ise trigonometrik terimleri içeren modelden elde edilen kalıntı kareler toplamını ifade etmektedir. Hesaplanan F test istatistik değerinin kritik değerler ile kıyaslanması sonucunda Fourier terimleri anlamlı ise Enders ve Lee (2012a) tarafından önerilen bu test kullanılabilmektedir.

3.2.5. Enders ve Lee Dickey Fuller Tipi Fourier Birim Kök Testi (2012b)

Enders ve Lee (2012b) çalışmalarında Enders ve Lee (2012a) birim kök testini genişleterek Dickey ve Fuller tipi yeni bir Fourier birim kök testi önermektedirler. Enders ve Lee (2012a) birim kök testinde Lagrange çarpanı (LM) yöntemi kullanılmakta ve bu yöntem başlangıç değerinin büyük olması durumunda önemli güç kaybına sebep olmaktadır. Standart Dickey ve Fuller metodolojisi ise kolay

uygulanabilmekte ve başlangıç değerinden kaynaklanan problemi içermemektedir (Enders ve Lee, 2012b).

Deterministik terimin zamana(t) bağlı fonksiyonu $\alpha(t)$ olarak gösterilmek üzere Dickey ve Fuller tipi model aşağıdaki gibi yazılmaktadır (Enders ve Lee, 2012b):

$$y_t = \alpha(t) + \rho y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t \quad (3.41)$$

Burada ε_t , σ_ε^2 varyansa sahip durağan hata terimidir. Testin birim kök temel hipotezi $\rho = 1$ olarak ifade edilmektedir. Denklemden $\alpha(t)$ 'nin formu bilinmediği için birim kök hipotezinin sınanmasında kullanılacak olan test problemlili olacaktır. Bu nedenle $\alpha(t)$ Fourier yaklaşımı ile aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Enders ve Lee, 2012b):

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^n \beta_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right); \quad n < \frac{T}{2} \quad (3.42)$$

Burada n frekans sayısı, k belirli bir frekans sayısı ve T gözlem sayısıdır. Eğer $\alpha_1 = \beta_1 = \dots = \alpha_n = \beta_n = 0$ ise süreç doğrusaldır. Bu durumda geleneksel birim kök testlerin kullanılması uygundur. Ancak bir kırılma veya doğrusal olmama durumu söz konusu ise veri yaratım sürecinde en az bir Fourier frekansı bulunmalıdır (Enders ve Lee, 2012b).

Uygulamada frekans sayısı (n) olarak çok büyük değer kullanılması mümkün değildir. Çünkü çok sayıda frekans bileşeninin kullanımı serbestlik derecesini etkileyebilir ve uyum sorununa yol açabilir. Bu nedenle uygun frekans sayısının belirlenmesi önemlidir. Yalnızca tek bir k frekansı kullanılması durumunda test regresyonu aşağıdaki gibidir (Enders ve Lee, 2012b):

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + c_1 + c_2 t + c_3 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + c_4 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + e_t \quad (3.43)$$

Bu denkleme göre temel hipotez $\rho = 0$ olarak gösterilmektedir ve τ_{DF_t} test istatistiği ile test edilmektedir. Testin asimptotik özellikleri Enders ve Lee (2012a) birim kök testi ile benzerdir.

Temel hipotezin sınanmasında kullanılan kritik değerler k frekansa ve T örneklem büyüklüğüne bağlıdır. Fakat Fourier terimlerinin katsayılarına ve diğer deterministik terimlere bağlı değildir. Üretilen kritik değerler Enders ve Lee (2012b) çalışmasında yer almaktadır. Eğer araştırmacı k değerini belirtmek ister ise bu kritik değerler kullanılabilir. Fakat k değeri tahmin edilir ise aşağıdaki adımlar izlenmelidir (Enders ve Lee, 2012b):

Adım 1. $1 \leq k \leq 5$ olacak şekilde k 'nin tüm değerleri için (3.43) numaralı denklem tahmin edilir. Tahmin edilen regresyonlardan kalıntı kareler toplamı(SSR) en küçük olan regresyona ait $\hat{k}$ değeri uygun frekans değeri olarak belirlenir. Eğer kalıntılar otokorelasyon problemi içeriyor ise Δy_t 'nin gecikmeli değerleri ile denklem genişletilebilir.

Adım 2. Doğrusal olmama durumunun sınanması için ön test yapılır. Yani $c_3 = c_4 = 0$ temel hipotezi F test istatistiği kullanılarak sınanır. F test istatistiğinin kıyaslanmasında kullanılan kritik değerler Enders ve Lee (2012b) çalışmasında yer almaktadır. Eğer hesaplanan F istatistik değeri ilgili kritik değerden küçük ise temel hipotez reddedilemez. Bu durumda Fourier terimleri anlamsızdır. Dolayısıyla standart Dickey ve Fuller testlerinin kullanılması önerilmektedir.

3.2.6. Ranjbar, Chang, Elmi ve Lee Birim Kök Testi (2018)

Ranjbar vd. (2018) çalışmalarında birim kök temel hipotezine karşı, asimetrik üstel yumuşak geçişli otoregresif (AESTAR) doğrusal olmama durumu altında durağanlık alternatif hipotezin test edildiği yeni bir Fourier birim kök testi önermişlerdir. Sollis (2009) birim kök testini Fourier terimleri kullanarak genişletmişlerdir. Geliştirdikleri bu test ile Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010) birim kök testini karşılaştırmışlardır. Yeni önerilen testin daha güçlü olduğunu ve frekans sayısının artıkça test gücünün arttığını göstermişlerdir.

Zaman serisi $\{y_t\}_{t=1}^T$ 'nin veri yaratım süreci aşağıdaki gibidir (Ranjbar vd., 2018):

$$y_t = \alpha(t) + \varepsilon_t \quad (3.44)$$

Burada $\alpha(t)$ zamana (t) bağılı deterministik bir fonksiyondur. Bu fonksiyon aracılığıyla denkleme Fourier terimleri eklenerek bilinmeyen formdaki kırılmalar tahmin edilebilmektedir. $\alpha(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\alpha(t) = Z_t\lambda + \sum_{k=1}^n \gamma_{1,k} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^n \gamma_{2,k} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (3.45)$$

Burada T örnek büyüklüğü, t trend terimi, $\pi = 3.1416$ ve k belirli bir frekans sayısıdır. Tüm frekansların sayısı n olmak üzere $n \leq \frac{T}{2}$ 'dir.

Becker vd. (2004) çalışmasında, γ parametrelerinin birleşik hipotezi ($\gamma_{1,k} = \gamma_{2,k} = 0$) sınanırken $n = 1$ kısıtı kullanılmış ve tek frekans yapısı dikkate alınmıştır. Enders ve Lee (2012) çalışmasında serbestlik derecelerini etkilememesi ve uyum problemi yaratmaması açısından yine $n = 1$ kısıtı kullanılmıştır. Bu bilgilere dayanarak tek frekans yapısı ile denklem aşağıdaki gibi yazılabilir (Ranjbar vd., 2018):

$$y_t = Z_t\lambda + \gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \varepsilon_t \quad (3.46)$$

Burada $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2]'$ terimi frekans bileşeninin genliğini ve yer değiştirmesini ölçmektedir. Eğer $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ geçerli ise Fourier terimleri anlamsız olduğu için denklem doğrusaldır. Eğer kırılma meydana gelir ise en az bir parametre anlamlıdır. Bu durumda Fourier yaklaşımı kullanmak testin gücünü artırılabilir.

Optimal frekans değeri bir önceki başlıklarda açıklandığı gibi belirlenmektedir. Frekans değeri k en çok 5 olmak üzere, k 'nin tüm değerleri için (3.46) numaralı denklem en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir ve kalıntı kareler toplamı hesaplanır. Kalıntı kareler toplamının minimum olduğu frekans değeri, uygun frekans olarak belirlenmektedir. Bu bilgilere dayanarak testin temel hipotezi aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Ranjbar vd., 2018):

$$H_0: \varepsilon_t = v_t, \quad v_t = v_{t-1} + u_t \quad (3.47)$$

Burada u_t sıfır ortalamalı $I(0)$ süreçlidir. Temel hipotezin test edilmesinde Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010) çalışması dikkate alınarak üç adımlı bir prosedür izlenmektedir (Ranjbar vd., 2018).

Adım 1. Yukarıda açıklandığı gibi optimal k^* değeri belirlenir. En küçük kareler kalıntıları aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\alpha}(t) \quad (3.48)$$

$$\hat{\alpha}(t) = Z_t \hat{\lambda} + \hat{\gamma}_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \hat{\gamma}_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) \quad (3.49)$$

Adım 2. Elde edilen kalıntılar üzerinden asimetrik üstel yumuşak geçişli otoregresif model (AESTAR) kullanılarak birim kök testi gerçekleştirilir. AESTAR modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\varepsilon}_t &= \Omega_t(\eta_1, \hat{\varepsilon}_{t-1}) \{S_t(\eta_2, \hat{\varepsilon}_{t-1}) \rho_1 + (1 - S_t(\eta_2, \hat{\varepsilon}_{t-1})) \rho_2\} \hat{\varepsilon}_{t-1} + \omega_t; \\ \omega_t &\sim \text{idd}(0, \sigma^2) \\ \Omega_t(\eta_1, \hat{\varepsilon}_{t-1}) &= 1 - \exp(-\eta_1(\varepsilon_{t-1}^2)) \quad \eta_1 \geq 0 \\ S_t(\eta_2, \hat{\varepsilon}_{t-1}) &= [1 + \exp(-\eta_2(\varepsilon_{t-1}^2))]^{-1} \quad \eta_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Bu test ile $H_0: \eta_1 = 0$ birim kök temel hipotezi, durağan simetrik veya asimetrik ESTAR doğrusal olmama alternatif hipotezine karşı test edilmektedir. Sollis (2009) çalışması dikkate alınarak üstel ve lojistik fonksiyonlar için Taylor açılımı aşağıdaki gibi kullanılır:

$$\Delta \hat{\varepsilon}_t = \psi_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^3 + \psi_2 \hat{\varepsilon}_{t-1}^4 + \sum_{i=1}^l l_i \hat{\varepsilon}_{t-i} + \vartheta_t \quad (3.51)$$

Burada $\sum_{i=1}^l l_i \hat{\varepsilon}_{t-i}$ terimi ile olası bir otokorelasyon problemi giderilebilir. (3.50) numaralı eşitlik için $H_0: \eta_1 = 0$ olarak gösterilen temel hipotez (3.51) numaralı denklem dikkate alınarak $H_0: \psi_1 = \psi_2 = 0$ şeklinde test edilecektir. Test sürecinde kullanılacak olan kritik değerler Ranjbar vd. (2018) çalışmasında yer almaktadır. Eğer birim kök temel hipotezi, simetrik veya asimetrik ESTAR doğrusal olmama durumu altında durağanlık alternatif hipotezine karşı reddedilir ise $H_0: \psi_2 = 0$ temel hipotezi, $H_1: \psi_2 \neq 0$ alternatif hipoteze karşı standart F-testi (t-testi ya da LM testi) ile test edilebilir.

Adım 3. İkinci adımda birim kök temel hipotezi reddedilir ise doğrusal olmayan Fourier terimlerinin modele dahil edilip edilmemesi incelenmelidir. Bu test için Becker vd. (2006) çalışması dikkate alınarak aşağıdaki F testi kullanılır:

$$F(k^*) = \frac{(SSR_{kısıtlı\ model} - SSR_{kısıtsız\ model}(k))/2}{SSR_{kısıtsız\ model}(k^*)/(T - q)} \quad (3.52)$$

Burada $SSR_{kısıtlı\ model}$ Fourier terimleri içermeyen modelin kalıntı kareler toplamıdır. $SSR_{kısıtsız\ model}$ Fourier terimlerinin olduğu modele ait kalıntı kareler toplamını ifade etmektedir. Hesaplanan F test istatistik değeri Becker vd. (2006) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Eğer Fourier terimlerinin γ parametreleri anlamlı ise önerilen bu testin kullanılması uygundur.

3.2.7. Giriş Fourier Birim Kök Testi (2019)

Güriş (2019) çalışmasında, Christopoulos ve Lean – Ledesma (2010) tarafından önerilen birim kök testinden yola çıkarak doğrusal olmama durumu ve bilinmeyen formdaki yapısal kırılmaları birlikte ele alan yeni bir birim kök testi önermiştir. Üstel yumuşak geçişli otoregresif (ESTAR) fonksiyonları kullanarak doğrusal olmama durumunu ve Fourier fonksiyonu ile yapısal kırılmaları modellemiştir. Hipotezlerin test edilmesinde, Kruse (2011) çalışmasında önerilen ESTAR model yapısını kullanmıştır.

ESTAR modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Güriş, 2019):

$$y_t = \beta y_{t-1} + \gamma y_{t-1} [1 - \exp\{-\theta(y_{t-1} - c)^2\}] + \varepsilon_t \quad (3.53)$$

Burada c konum parametresidir. Kapetanios vd. (2003) çalışmasında $c = 0$ kısıtı geçerlidir. Fakat Kruse (2011) çalışmasında c 'nin sıfırdan farklı bir değer alabileceğinin mümkün olduğunu ve bu parametrenin tahmin edilmesinin önemli olduğunu ileri sürmüştür (Anoruo ve Murthy, 2014). Kruse (2011) çalışması dikkate alındığında ESTAR modeli Taylor açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir (Güriş, 2019):

$$\Delta y_t = \delta_1 y_{t-1}^3 + \delta_2 y_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (3.54)$$

ESTAR modelinden hareketle $H_0: \delta_1 = \delta_2 = 0$ birim kök temel hipotezi, $H_1: \delta_1 < 0, \delta_2 \neq 0$ durağanlık alternatif hipotezine karşı Kruse (2011) tarafından önerilen τ test istatistiği ile test edilmektedir. τ test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Kruse, 2011):

$$\tau = t_{\delta_2=0}^2 + 1(\hat{\delta}_1 < 0)t_{\delta_1=0}^2 \quad (3.55)$$

Güriş (2019) çalışmasında önerilen yeni birim kök testi için üç aşamalı test prosedürü izlenmektedir. Bu aşamalar aşağıdaki gibidir (Güriş, 2019):

Adım 1. Doğrusal olmayan deterministik bileşen belirtilir.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.56)$$

Burada t trend terimi, $\pi = 3.1416$, T örnek boyutu ve k^* optimal frekanstır. $1 \leq k \leq 5$ arasındaki her k değeri için en küçük kareler yöntemi kullanılarak modeller tahmin edilir. Tahmin edilen modeller arasından kalıntı kareler toplamını minimum yapan k değeri uygun frekans değeri olarak belirlenir. Tahmin edilen modelin hata terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v_t = y_t - \alpha_0 - \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) - \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) \quad (3.57)$$

Adım 2. İlk adımdan elde edilen hata terimleri kullanılarak aşağıdaki model tahmin edilir ve test istatistiği hesaplanır.

$$\Delta v_t = \delta_1 v_{t-1}^3 + \delta_2 v_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \varphi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (3.58)$$

Hesaplanan test istatistik değeri Güriş (2019) çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Eğer temel hipotez reddedilemez ise serinin birim köklü olduğu sonucuna varılır.

Adım 3. Eğer ikinci adımda birim kök temel hipotezi reddedilir ise $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ temel hipotezi, $H_1: \alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı F testi kullanılarak test edilmektedir. Hesaplanan test istatistik değeri Becker vd. (2006)

çalışmasında yer alan kritik değerler ile kıyaslanmaktadır. Eğer temel hipotez reddedilir ise değişken, kırılmalı bir deterministik fonksiyon etrafında durağandır.

3.3. MTAR MODELİNİN FOURIER FONKSİYONLARI İLE YORUMLANMASINA DAYANAN YENİ BİR DOĞRUSAL OLMAYAN BİRİM KÖK TEST ÖNERİSİ

Çalışmanın önceki bölümlerinde geleneksel birim kök testleri, yapısal kırılmalı birim kök testleri, doğrusal olmayan birim kök testleri ve Fourier fonksiyonlarına dayanan birim kök testleri açıklanmış olup bu testlerin birbirlerine göre güçleri ve farklılıkları belirtilmiştir. Bu bölümde ise doğrusal olmayan zaman serilerinde birim kökün tespit edilmesi amacıyla Fourier fonksiyonlarına dayalı alternatif bir test metodolojisi geliştirilmiştir. Test metodolojisi Enders ve Granger (1998) tarafından önerilen momentum eşik değerli otoregresif modelin (MTAR) Fourier fonksiyonu ile yorumlanmasına dayanmaktadır.

MTAR modeli aşağıdaki gibi gösterilmektedir (Enders ve Granger, 1998):

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 y_{t-1} + (1 - I_t) \rho_2 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.59)$$

Burada gösterge fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } \Delta y_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Enders ve Granger (1998) çalışmasında F test istatistiği kullanarak $H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0$ birim kök temel hipotezini, $H_1: \rho_1 \neq \rho_2 \neq 0$ durağanlık alternatif hipotezine karşı test etmiştir.

Enders ve Granger (1998) çalışmasında önerilen MTAR modelinin Fourier fonksiyonu altında incelenmesine dayanan test prosedürü aşağıdaki adımların uygulanmasıyla gerçekleştirilmektedir.

Adım 1. Doğrusal olmayan deterministik bileşen belirtilir.

$$\text{Model A: } y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.61)$$

$$\text{Model B: } y_t = \alpha_0 + \beta t + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.62)$$

Burada T örnek büyüklüğü, k frekans değeri ve t trend terimidir. Model A sabitli denklem, model B sabitli ve trendli denklemdir. Frekans değeri $1 \leq k \leq 5$ aralığındadır. Uygun k^* değeri Enders ve Lee (2004) çalışmasında önerilen yöntem ile belirlenir. Denklem her k değeri için en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir. Elde edilen modellerden kalıntı kareler toplamı en küçük olan modele ait k değeri uygun frekans değeri olarak belirlenir. Bu model üzerinden kalıntılar elde edilir.

$$v_t = y_t - \alpha_0 - \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) - \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) \quad (3.63)$$

Adım 2. İlk adımdaki Fourier terimlerinin bulunduğu modelden elde edilen kalıntılar kullanılarak MTAR modeli üzerinden test istatistiği hesaplanır.

$$\Delta v_t = I_t p_1 v_{t-1} + (1 - I_t) p_2 v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.64)$$

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta v_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } \Delta v_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Adım 3. Eğer ikinci adımda $H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0$ birim kök temel hipotezi reddedilir ise Fourier terimlerinin anlamlı olup olmadığı incelenir. Eğer $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ temel hipotezi, $H_1: \alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı reddedilir ise serinin deterministik fonksiyon ile ifade edilen kırılma yapısı altında durağan olduğu sonucuna varılır.

3.3.1. Monte Carlo Simülasyonları İle Test Özelliklerinin İncelenmesi

Bu bölümde, önerilen Fourier fonksiyona dayalı doğrusal olmayan birim kök testinin kritik değerleri, boyut ve güç özellikleri açıklanmaktadır. Testin kritik

değerleri üretilirken ve boyut ile güç özellikleri incelenirken Monte Carlo simülasyonları kullanılmıştır.

3.3.1.1. Kritik Değerlerin Elde Edilmesi

Önerilen test istatistiği için kritik değerler sabitli ve trendli yapı olmak üzere iki model üzerinden hesaplanmıştır. Hesaplanan kritik değerler Tablo 1’de gösterilmektedir. Burada T gözlem sayısı ve k frekans değeridir. Fourier fonksiyonunun frekans değerleri $k = 1, 2, 3, 4, 5$ olarak belirlenmiştir. Kritik değerler $T = 25, 50, 100, 250, 500$ gözlem sayısı için 50,000 tekrarlar yapılarak %1, %5 ve %10 istatistiksel anlamlılık düzeyleri için üretilmiştir.

Tablo 1. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için kritik değerler

Düzy					Trend				
T	k	1%	5%	10%	T	k	1%	5%	10%
25	1	15.6635	10.8207	8.9140	1	20.2610	14.5905	12.2933	
	2	11.1014	6.8931	5.1903	2	17.0319	11.4839	9.3202	
	3	8.5931	5.3330	4.1712	25	3	13.6934	8.6656	6.8376
	4	7.8835	5.1012	4.0262	4	11.0072	7.3505	5.9714	
	5	7.8107	5.1825	4.1403	5	10.2653	7.0833	5.8305	
50	1	12.1544	8.9539	7.5735	1	15.2898	11.8142	10.1772	
	2	9.5353	6.4667	5.1226	2	13.7039	9.9608	8.3383	
	3	8.3000	5.5108	4.3547	50	3	11.8406	8.4056	6.8438
	4	7.6860	5.1416	4.1074	4	10.6388	7.4800	6.1376	
	5	7.2523	5.0013	4.0173	5	10.0132	7.1215	5.8725	
100	1	11.1788	8.3262	7.0465	1	13.6606	10.7349	9.3157	
	2	8.9468	6.3048	5.0788	2	12.3855	9.2297	7.8475	
	3	8.0769	5.5067	4.4109	100	3	11.0441	8.0970	6.7326
	4	7.5234	5.2271	4.2148	4	10.2013	7.4589	6.2171	
	5	7.2128	5.0360	4.1005	5	9.7103	7.1028	5.9353	
250	1	10.5115	7.9394	6.8027	250	1	12.7687	10.1223	8.8977

2	8.6120	6.1193	4.9634	2	11.6101	8.8194	7.5373
3	7.7625	5.4562	4.4155	3	10.5349	7.8868	6.6389
4	7.3052	5.1735	4.1961	4	9.9650	7.3547	6.1638
5	7.2761	5.1267	4.1541	5	9.6295	7.1239	5.9792
1	10.3070	7.8307	6.6333	1	12.4974	9.9381	8.7148
2	8.6273	6.0938	4.9379	2	11.2347	8.7629	7.4656
500	3	7.7683	5.4624	500	3	10.4705	7.7977
4	7.3469	5.2271	4.2765	4	9.8246	7.2975	6.1548
5	7.2245	5.0893	4.1645	5	9.5018	7.0922	5.9535

3.3.1.2. Sonlu Örnekler İçin Boyut Özellikleri

Geliştirilen test istatistiklerinin boyut özellikleri sonlu örnekler için incelenmiştir. Veri yaratım süreci aşağıdaki gibidir:

$$Model A: \quad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.66)$$

$$Model B: \quad y_t = \alpha_0 + \beta t + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.67)$$

$$v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.68)$$

Burada $\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$ ve k^* uygun frekans değeridir. Boyut özellikleri belirlenirken $T = 25, 50, 100, 250, 500$ gözlem sayısı ve $k = 1, 2, 3, 4, 5$ frekans değerleri kullanılmıştır. Simülasyonlar %5 anlamlılık düzeyinde 50,000 tekrarlar yapılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen değerler Tablo 2’de gösterilmektedir.

Tablo 2. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için boyut özellikleri

T	k	Düzey	Trend
25	1	0.05066	0.05140
	2	0.05004	0.05172
	3	0.05048	0.04958
	4	0.04996	0.05112
	5	0.05102	0.05070
50	1	0.05152	0.04916
	2	0.05012	0.05066
	3	0.04996	0.04984
	4	0.04944	0.05094
	5	0.05114	0.05072
100	1	0.04980	0.04922
	2	0.04960	0.04924
	3	0.05032	0.05046
	4	0.04862	0.05078
	5	0.05142	0.05054
250	1	0.04976	0.05090
	2	0.04936	0.05042
	3	0.05024	0.05032
	4	0.05238	0.05058
	5	0.04930	0.05000
500	1	0.04952	0.04928
	2	0.04906	0.04914
	3	0.05120	0.05028
	4	0.04922	0.05082
	5	0.05056	0.05038

Farklı gözlem sayıları ve frekans değerleri için boyut özellikleri incelendiğinde hesaplanan değerlerin 0.05'e yakın olduğu gözlemlenmiştir. Böylece önerilen test için boyut çarpıklığının (size distortion) bulunmadığı sonucuna varılabilmektedir.

3.3.1.3. Sonlu Örnekler İçin Güç Özellikleri

Önerilen testte boyut problemi olmadığı için bu başlık altında güç analizleri gerçekleştirilmiştir. Temel hipotezin reddedilme olasılığı, yani durağanlığı ifade eden alternatif hipoteze karşı testin gücü incelenmiştir. Güç analizi aşağıda gösterildiği gibi Fourier yapısı için MTAR modeli altında simüle edilmiştir. Elde edilen değerler Tablo 3 ve Tablo 4'te gösterilmiştir.

$$\text{Model A: } y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.69)$$

$$\text{Model B: } y_t = \alpha_0 + \beta t + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi k^* t}{T}\right) + v_t \quad (3.70)$$

$$\Delta v_t = I_t p_1 v_{t-1} + (1 - I_t) p_2 v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.71)$$

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \Delta v_{t-1} \geq 0 \\ 0 & \text{eğer } \Delta v_{t-1} < 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Güç analizleri $T = \{25, 50, 100, 250\}$ örnek sayıları için $k = \{1, 2, 3\}$ frekans değerleri kullanılarak 10,000 tekrarlama ile gerçekleştirilmiştir. Enders ve Granger (1998) çalışması dikkate alınarak $p_1 = \{-0.05, -0.10\}$ ve $p_2 = \{-0.05, -0.10, -0.20, -0.50, -0.75, -1.50\}$ değerleri kullanılmıştır.

Tablo 3. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için sabitli denklem
üzerinden güç özelliklerinin belirlenmesi

T	Enders ve Granger (1998)			Fourier Enders ve Granger		
	ρ_1	ρ_2		k = 1	k = 2	k = 3
25	-0.05	-0.05	0.0466	0.0003	0.0097	0.1093
	-0.10	-0.10	0.0692	0.0009	0.0124	0.1460
	-0.10	-0.20	0.0898	0.0005	0.0173	0.1818
	-0.10	-0.50	0.1765	0.0021	0.0291	0.2829
	-0.10	-0.75	0.2382	0.0030	0.0377	0.3278
	-0.10	-1.50	0.4465	0.0097	0.0728	0.4272
50	-0.05	-0.05	0.0486	0.0002	0.0042	0.0157
	-0.10	-0.10	0.1004	0.0018	0.0076	0.0313
	-0.10	-0.20	0.1751	0.0025	0.0122	0.0437
	-0.10	-0.50	0.3397	0.0056	0.0269	0.0977
	-0.10	-0.75	0.4304	0.0092	0.0476	0.1574
	-0.10	-1.50	0.6715	0.0381	0.1677	0.3799
100	-0.05	-0.05	0.1010	0.0021	0.0089	0.0184
	-0.10	-0.10	0.3142	0.0057	0.0256	0.0506
	-0.10	-0.20	0.5181	0.0103	0.0502	0.0944
	-0.10	-0.50	0.6660	0.0368	0.1374	0.2635
	-0.10	-0.75	0.7419	0.0671	0.2383	0.4037
	-0.10	-1.50	0.9191	0.3253	0.6337	0.7887
250	-0.05	-0.05	0.4866	0.0188	0.0667	0.1015
	-0.10	-0.10	0.9664	0.0968	0.2974	0.4190
	-0.10	-0.20	0.9906	0.3040	0.6346	0.8030
	-0.10	-0.50	0.9946	0.6918	0.9142	0.9699
	-0.10	-0.75	0.9980	0.8272	0.9627	0.9839
	-0.10	-1.50	0.9999	0.9871	0.9984	0.9992

Sabitli denklem üzerinden elde edilen güç özellikleri yukarıda gösterilmektedir. Elde edilen bulgulara göre, test süreci sabitli denklem üzerinden

gerçekleştirilir ise Enders ve Granger (1998) birim kök testi, önerilen Fourier Enders ve Granger birim testine göre daha güçlü olabilmektedir.

Tablo 4. Fourier Enders ve Granger birim kök testi için trendli denklem üzerinden güç özelliklerinin belirlenmesi

T	Enders ve Granger (1998)			Fourier Enders ve Granger		
	ρ_1	ρ_2		k = 1	k = 2	k = 3
25	-0.05	-0.05	0.1282	0.0002	0.0021	0.0020
	-0.10	-0.10	0.1325	0.0003	0.0009	0.0007
	-0.10	-0.20	0.1374	0.0002	0.0029	0.0105
	-0.10	-0.50	0.1862	0.0008	0.0023	0.0034
	-0.10	-0.75	0.2235	0.0005	0.0008	0.0017
	-0.10	-1.50	0.4008	0.0039	0.0039	0.0074
50	-0.05	-0.05	0.0922	0.1613	0.1886	0.2135
	-0.10	-0.10	0.1205	0.1665	0.1914	0.2329
	-0.10	-0.20	0.1501	0.1785	0.1996	0.2338
	-0.10	-0.50	0.2679	0.2241	0.2432	0.2760
	-0.10	-0.75	0.3635	0.2730	0.3021	0.3339
	-0.10	-1.50	0.6615	0.3309	0.3979	0.4195
100	-0.05	-0.05	0.1147	0.9264	0.9694	0.9870
	-0.10	-0.10	0.2130	0.9469	0.9836	0.9933
	-0.10	-0.20	0.3517	0.9683	0.9911	0.9965
	-0.10	-0.50	0.6054	0.9878	0.9982	0.9995
	-0.10	-0.75	0.7404	0.9960	0.9992	0.9997
	-0.10	-1.50	0.9195	1.0000	1.0000	1.0000
250	-0.05	-0.05	0.3142	1.0000	1.0000	1.0000
	-0.10	-0.10	0.8111	1.0000	1.0000	1.0000
	-0.10	-0.20	0.9645	1.0000	1.0000	1.0000
	-0.10	-0.50	0.9954	1.0000	1.0000	1.0000
	-0.10	-0.75	0.9967	1.0000	1.0000	1.0000
	-0.10	-1.50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Trendli denklem üzerinden elde edilen güç özellikleri yukarıda gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlara göre ρ_1 ve ρ_2 değeri sıfırdan uzaklaştıkça her iki testin de gücü artmaktadır. Fourier Enders ve Granger birim kök testinde k frekans değeri artıkça testin gücü artmaktadır. T gözlem değeri incelendiğinde 100 ve daha büyük gözlem değerlerinde testin daha güçlü sonuçlar verebileceği görülmektedir. Eğer test süreci trendli denklem üzerinden gerçekleştirilir ise önerilen Fourier Enders ve Granger birim testi, Enders ve Granger (1998) testine göre daha güçlü olabilmektedir.



SONUÇ

Zaman serisi analizlerinde durağanlığın araştırılmasında kullanılan birçok birim kök testi mevcuttur. Bu testler, modellerin doğrusal veya doğrusal olmama durumlarına ve yapısal kırılmaların tespit edilmesine göre birbirinden farklılık göstermektedir. Durağanlık analizleri gerçekleştirilirken serinin yapısına uygun modele karar verilmesi ve yapısal değişikliğin dikkate alınması oldukça önemlidir. Çünkü bu durumlar dikkate alınmaz ise analiz sonuçları yanıltıcı sonuçlar verebilmektedir.

Bu çalışmada literatürde yer alan birim kök testleri doğrusal olma ve doğrusal olmama durumu olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir. Doğrusal birim kök testlerinde yapısal kırılmalı birim kök testlerine değinilmiştir. Çalışmanın temelini oluşturan üçüncü bölümde doğrusal olmayan modellerde yapısal kırılmanın incelenmesi için Fourier yapısının kullanıldığı birim kök testleri açıklanmış olup incelenen tüm bu testler ışığında Fourier fonksiyonun kullanıldığı yeni bir doğrusal olmayan birim kök testi önerilmiştir.

Önerilen Fourier Enders ve Granger birim kök testi için Monte Carlo simülasyonu kullanılarak kritik değerler üretilmiş, boyut (size) ve güç (power) özellikleri incelenmiştir. Elde edilen ampirik sonuçlara göre, boyut çarpıklığının (size distortion) olmadığı söylenebilmektedir. Güç özellikleri incelendiğinde, test prosedürünün trendsiz denklem üzerinden gerçekleştirilmesi durumunda istenilen yönde sonuçlar elde edilememiştir. Bunun kaynağı, serinin geçmiş dönem değerleri ile farkı alındığı için momentum özellik göstermesi ve buna bağlı olarak serinin yapısı değiştiği için yapısal kırılmanın tespit edilememesi olabilir.

Bununla birlikte, test prosedürünün trendli denklem üzerinden gerçekleştirilmesi durumunda testin güçlü özellik gösterdiği sonucuna varılabilmektedir. Bunun sebebi, trendin modele dahil edilmesi ile Fourier fonksiyonunda yer alan trend yapısı desteklenmiş olabilir. Bu testin kullanılabilmesi için serinin doğrusal olmayan yapıya uygunluk göstermesi gerekmektedir. Ek olarak, Fourier fonksiyonunda yer alan sinüs ve kosinüs terimlerinin anlamlı olması gerekmektedir.

KAYNAKÇA

- AKDİ, Y.: 2003 **Zaman Serileri Analizi: Birim Kökler ve Kointegrasyon**, 1. Baskı, Ankara, Bıçakçılar Kitabevi.
- AKGÜL, I.: 2003 **Zaman Serilerinin Analizi ve Arima Modelleri**, İstanbul, Der Yayınevi.
- ALP, E. A.: 2007 “Türkiye’de Reel Ücretlerin TAR Modeli ile Analizi ve Birim Kök Sınaması”, **Discussion Paper**, No. 2008/10.
- AMSLER, C. ve LEE, J.: 1995 “An LM Test for a Unit Root in The Presence of a Structural Change”, **Econometric Theory**, 11(2), 359-368.
- ANDREWS, D. W.: 1993 “Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point”, **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, 821-856.
- ANORUO, E. ve MURTHY, V. N.: 2014 “Testing Nonlinear Inflation Convergence for The Central African Economic and Monetary Community”, **International Journal of Economics and Financial Issues**, 4(1), 1-7.
- BAI, J. ve PERRON, P.: 1998 “Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes”, **Econometrica**, 47-78.
- BANERJEE, A., LUMSDAİNE, R. L. ve STOCK, J. H.: 1992 “Recursive and Sequential Tests of The Unit-Root and Trend-Break Hypotheses: Theory and International Evidence”, **Journal of Business & Economic Statistics**, 10(3), 271-287.
- BEC, F., BEN SALEM, M. ve CARRASCO, M.: 2010 “Detecting Mean Reversion in Real Exchange Rates from a Multiple Regime STAR Model”, **Annals of Economics and Statistics/Annales d’Économie et de Statistique**, 395-427.

- BECKER, R., ENDERS, W. ve HURN, S.: 2003
 “A General Test for Time Dependence in Parameters”, **Journal of Applied Econometrics**, 18, 1-9.
- BECKER, R., ENDERS, W. ve LEE, J.: 2006
 “A Stationarity Test in the Presence of an Unknown Number of Smooth Breaks”, **Journal of Time Series Analysis**, 27(3), 381-409.
- BOZKURT, H.: 2007
Zaman Serileri Analizi, Ekin Kitabevi, Bursa.
- BROCK, W. A., DECHERT, W. D. ve SCHEINKMAN, J. A.: 1987
 “A Test for Independence Based on the Correlation Dimension”, **Social Systems Research Institute, University of Wisconsin-Madison**, Working Paper 8702.
- BROOKS, C.: 2002
Introductory Econometrics for Finance. Cambridge University Press, Cambridge.
- BUSETTI, F. ve TAYLOR, A. R.: 2003
 “Testing Against Stochastic Trend and Seasonality in The Presence of Unattended Breaks and Unit Roots”, **Journal of Econometrics**, 117(1), 21-53.
- CANER, M. ve HANSEN, B. E.: 2001
 “Threshold Autoregression with a Unit Root”, **Econometrica**, 69(6), 1555-1596.
- CAO, C. Q. ve TSAY, R. S.: 1992
 “Nonlinear Time-Series Analysis of Stock Volatilities”, **Journal of Applied Econometrics**, 7(S1), S165-S185.
- CARRION-Í-SILVESTRE, J. L., KIM, D. ve PERRON, P.: 2009
 “GLS-Based Unit Root Tests with Multiple Structural Breaks Under Both The Null and The Alternative Hypotheses”, **Econometric Theory**, 25(6), 1754-1792.
- CHAN, K. S.: 1993
 “Consistency and Limiting Distribution of The Least Squares Estimator of a Threshold Autoregressive Model”, **The Annals of Statistics**, 520-533.

- CHEN, S. W. ve
XİE, Z.: 2017
“Asymmetric Adjustment and Smooth Breaks in Dividend Yields: Evidence from International Stock Markets”, **International Review of Economics & Finance**, 48, 339-354.
- CHRİSTOPOULOS, D. K. ve
LEÓN-LEDESMA, M. A.: 2010
“Smooth Breaks and Non-Linear Mean Reversion: Post-Bretton Woods Real Exchange Rates”, **Journal of International Money and Finance**, 29(6), 1076-1093.
- COBB, C. W. ve
DOUGLAS, P. H.: 1928
“A Theory of Production”, **The American Economic Review**, 18(1), 139-165.
- CROMWELL, J. B.
VD.: 1994
Multivariate Tests for Time Series Models, No. 100, Sage, London.
- CUESTAS, J. C. ve
ORDÓÑEZ, J.: 2014
“Smooth Transitions, Asymmetric Adjustment and Unit Roots”, **Applied Economics Letters**, 21(14), 969-972.
- ÇİL YAVUZ, N.: 2004
“Durağanlığın Belirlenmesinde KPSS ve ADF Testleri: İMKM Ulusal – 100 Endeksi ile Bir Uygulama”, **İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Mecmuası**, C:54, S:1.
- DAVİES, R. B.: 1987
“Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter Is Present Only Under The Alternative”, **Biometrika**, 74(1), 33-43.
- DİCKEY, D. A. ve
FULLER, W. A.: 1979
“Distribution of The Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, **Journal of the American statistical association**, 74(366a), 427-431.
- DİCKEY, D. A. ve
FULLER, W. A.: 1981
“Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, 1057-1072.

- DİJK, D. V.,
TERÄSVİRТА, T.
ve FRANSES, P.
H.: 2002 “Smooth Transition Autoregressive Models - A Survey of Recent Developments”, **Econometric Reviews**, 21(1), 1-47.
- ENDERS, W. ve
GRANGER, C. W.
J.: 1998 “Unit-Root Tests and Asymmetric Adjustment with an Example Using The Term Structure of Interest Rates”, **Journal of Business & Economic Statistics**, 16(3), 304-311.
- ENDERS, W. ve
LEE, J. (2004, AP-
RİL). “Testing for A Unit Root with A Nonlinear Fourier Function”, **In Econometric Society 2004 Far Eastern Meetings**, Vol. 457, 1-47.
- ENDERS, W. ve
LEE, J.: 2012a “A Unit Root Test Using A Fourier Series to Approximate Smooth Break”, **Oxford bulletin of Economics and Statistics**, 74(4), 574-599.
- ENDERS, W. ve
LEE, J.: 2012b “The Flexible Fourier form and Dickey–Fuller Type Unit Root Tests”, **Economics Letters**, 117(1), 196-199.
- ENDERS, W. ve
SİKLOS, P. L.:
2001 “Cointegration and Threshold Adjustment”, **Journal of Business & Economic Statistics**, 19(2), 166-176.
- ENDERS, W.: 1995 **Applied Econometrics Time Series**, 2. bs., New York, John Wiley Sons.
- ENDERS, W.: 2001 “Improved Critical Values for The Enders-Granger Unit-Root Test”, **Applied Economics Letters**, 8(4), 257-261.
- ENDERS, W.: 2004 **Applied Econometrics Time Series**, New York, John Wiley.
- FRANSES, P. H. ve
VAN DİJK, D.:
2000 **Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance**, Cambridge University Press.

- GALLANT, A. R. & SOUZA, G.: 1991 “On The Asymptotic Normality of Fourier Flexible Form Estimates”, **Journal of Econometrics**, 50(3), 329-353.
- GALLANT, A. R.: 1984 “The Fourier Flexible Form”, **American Journal of Agricultural Economics**, 66(2), 204-208.
- GLYNN, J., PERERA, N. ve VERMA, R.: 2007 “Unit Root Tests and Structural Breaks: A Survey with Applications”, **Revista De Metodos Cuantitativos Para La Economia Y La Empresa**, Vol. 3, 63–79.
- GONZÁLEZ-RIVERA, G.: 1998 “Smooth-Transition GARCH Models”, **Studies in Non-linear Dynamics & Econometrics**, 3(2).
- GÖKTAŞ, Ö.: 2005 **Teorik ve Uygulamalı Zaman Serileri Analizi**, İstanbul, Beşir Kitabevi.
- GRANGER, C. W. J. ve ANDERSON, A. P.: 1978 **An Introduction to Bilinear Time Series Models**, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- GUHATHAKURTA, K., BHATTACHARYA, B. ve CHOWDHURY, A. R.: 2011 “Nonlinearity in Indian Stock & Commodity Markets: A Pre-diagnostic Investigation”, **Nonlinearity in Indian Stock & Commodity Markets: A Pre-Diagnostic Investigation**.
- GUJARATI, D. N.: 1995 **Basic Econometrics**, Third Edition; McGraw Hill, New York.
- GÜRIŞ S. ve ÇAĞLAYAN E.: 2000 **Ekonometri Temel Kavramlar**, 4. Basım, Der Yayınları, İstanbul.
- GÜRIŞ, B.: 2008 “Çok Rejimli Eşik Değerli Hata Düzeltme Modelleri İle Türkiye Ekonomisinde Bütçe Açıklarının Analizi”, Yayınlanmamış Doktora Tezi, **İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü**, İstanbul.

- GÜRİŞ, B.: 2019 “A New Nonlinear Unit Root Test with Fourier Function”, **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, 48(10), 3056-3062
- GÜRİŞ, B.: 2020 **R Uygulamalı Doğrusal Olmayan Zaman Serileri Analizi**, İstanbul, Der Yayınları.
- HANSEN, B.: 1999 “Testing for Linearity”, **Journal of Economic Surveys**, 13(5), 551-576.
- HARRİS, R. ve SOLLİS, R.: 2003 **Applied Time Series Modelling and Forecasting**, New York, John Wiley.
- HARVEY, D. I. ve MİLLS, T. C.: 2002 “Unit Roots and Double Smooth Transitions”, **Journal of Applied Statistics**, 29(5), 675-683.
- HARVEY, D. I. ve MİLLS, T. C.: 2002 “Unit Roots and Double Smooth Transitions”, **Journal of Applied Statistics**, 29(5), 675-683.
- HARVEY, D. I. ve MİLLS, T. C.: 2003 “A Note On Buseti–Harvey Tests for Stationarity in Series with Structural Breaks”, **Journal of Time Series Analysis**, 24(2), 159-164.
- HEPKORUCU, A.: 2020 “Doğrusal Olmayan Birim Kök Sınamalarının Gelişimi ve Bir Test Önerisi”, Doctoral Dissertation, **Bursa Uludağ University**.
- KAPETANİOS, G., SHİN, Y. ve SNELL, A.: 2003 “Testing for A Unit Root in The Nonlinear STAR Framework”, **Journal of econometrics**, 112(2), 359-379.
- KAPETANİOS, G.: 2005 “Unit-Root Testing Against The Alternative Hypothesis of Up to M Structural Breaks”, **Journal of Time Series Analysis**, 26(1), 123-133.
- KEENAN, D. M.: 1985 “A Tukey Nonadditivity-Type Test for Time Series Nonlinearity”, **Biometrika**, 72(1), 39-44.

- KILIÇ, R. ve DE JONG, R.: 2006 “Testing a Linear Unit Root Against a Stationar ESTAR Process. Working Paper”, **School of Economics, Georgia Institute of Technology**.
- KRUSE, R.: 2011 “A New Unit Root Test Against ESTAR Based on A Class of Modified Statistics”, **Statistical Papers**, 52(1), 71-85.
- KURTULUŞ, B.: 2008 “Zaman Serisi Analizlerinde Doğrusal Olmayan Modeller ve Türkiye Ekonomisine Uygulaması”, Yayınlanmamış Doktora Tezi, **İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü**, İstanbul.
- KWIATKOWSKI, D., PHILLIPS, P.C., SCHMIDT, P. ve SHIN Y.: 1992 “Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of A Unit Root: How Sure are we that 68 Economic Time Series Have A Unit Root”, **Journal of Econometrics**, 54(1-3), ss. 159-178.
- LEE, J. ve STRAZIČICH, M. C.: 2003 “Minimum Lagrange Multiplier Unit Root Test with Two Structural Breaks”, **Review of Economics and Statistics**, 85(4), 1082-1089.
- LEYBOURNE, S., NEWBOLD, P. ve VOUGAS, D.: 1998 “Unit Roots and Smooth Transitions”, **Journal of Time Series Analysis**, 19(1), 83-97.
- LİM, K. S. ve TONG, H.: 1980 “Threshold Autoregressions, Limit Cycles, and Data”, **Journal of the Royal Statistical Society**, B. 42, 245-92.
- LUDLOW, J. ve ENDERS, W.: 2000 “Estimating Non-Linear ARMA Models Using Fourier Coefficients”, **International Journal of Forecasting**, 16(3), 333-347.
- LUMSDAİNE, R. L ve PAPELL, D. H.: 1997 “Multiple Trend Breaks and The Unit Root Hypothesis”, **Review of Economics and Statistics**, 79 (2), 212-218.
- MCLEOD, A. I. ve Lİ, W. K.: 1983 “Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations”, **Journal of Time Series analysis**, 4(4), 269-273.

- NARAYAN, P. K. ve POPP S.: 2010 “A New Unit Root Test with Two Structural Breaks in Level and Slope at Unknown Time”, **Journal of Applied Statistics**, 37(9), ss.1425-1438.
- NEMLİOĞLU, A. K.: 2005 **Birim Kök Analizinin Temelleri**, İstanbul, Beşir Kitabevi.
- NG, S. ve PERRON P.: 1996 “Unit Root Tests in ARMA Models with Data-Dependent Methods for The Selection of The Truncation Lag”, **Journal of the American Statistical Association**, 90(429), 268-281.
- NG, S. ve PERRON, P.: 2001 “Lag Length Selection and The Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power”, **Econometrica**, C:69, No:6, 1519-1554.
- ÖZCAN, M.: 2019 “Yapısal Kırılma Altında Eşik Birim Kök Testlerinin İncelenmesi”, Doktora Tezi, **Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Üniversitesi**.
- PASCALAU, R.: 2007 “Testing for A unit Root in The Asymmetric Nonlinear Smooth Transition Framework”, **Department of Economics, Finance and Legal Studies University of Alabama Unpublished manuscript**.
- PERRON, P.: 1989 “The Great Crash, The Oil Price Shock, and The Unit Root Hypothesis”, **Econometrica**, Vol.57, No.6, pp.1364.
- PHILLIPS, P.C. ve PERRON, P.: 1988 “Testing for A Unit Root in Time Series Regression”, **Biometrika**, 75.2, ss. 335-346.
- PİGER, J.: 2009 “Econometrics: Models of Regime Changes”, **In Complex Systems in Finance and Econometrics**, Springer, 190-202.
- RANJBAR, O., CHANG, T., ELMİ, Z. M. ve LEE, C. C.: 2018 “A New Unit Root Test Against Asymmetric ESTAR Nonlinearity with Smooth Breaks”, **Iranian Economic Review**, 22(1), 51-62.

- SCHMİDT, P. ve PHİLLİPS, P. C.: 1992 “LM Tests for A Unit Root in The Presence of Deterministic Trends”, **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, 54(3), 257-287.
- SEVÜLTEKİN M. ve ÇINAR M.: 2017 **Zaman Serileri Analizi: EvIEWS Uygulamalı**, 5.Baskı, Dora Yayınları.
- SEVÜLTEKİN M. ve NARGELEÇE-KENLER M.: 2007 **Ekonometrik Zaman Serileri Analizi – EvIEWS Uygulamalı**, 2. Baskı, Ankara, Nobel Yayın Dağıtım.
- SICHEL, D. E.: 1993 “Business Cycle Asymmetry: A Deeper Look”, **Economic Inquiry**, 31(2), 224-236.
- SOLLIS, R.: 2004 “Asymmetric Adjustment and Smooth Transitions: A Combination of Some Unit Root Tests”, **Journal of time series analysis**, 25(3), 409-417.
- SOLLIS, R.: 2009 “A Simple Unit Root Test Against Asymmetric STAR Nonlinearity with An Application to Real Exchange Rates in Nordic Countries”, **Economic Modelling**, 26(1), 118-125.
- TARI, R.: 2011 **Ekonometri**, 7.Baskı, İstanbul, Umuttepe Yayınları.
- TERASVIRTA, T., ve ANDERSON, H. M.: 1992 “Characterizing Nonlinearities in Business Cycles Using Smooth Transition Autoregressive Models”, **Journal of applied econometrics**, 7(S1), 119-136.
- TERASVIRTA, T.: 1990 “Generalizing Threshold Autoregressive Models”, **Department of Economics**, UC San Diego.
- TONG, H.: 1978 “On A Threshold Model in Pattern Recognition and Signal Processing, **C. Chen, Sijhoff and Noordhoff**, Amsterdam.
- TONG, H.: 1990 **Non-Linear Time Series: A Dynamical System Approach**, Oxford University Press.

- TSAY, R. S.: 1986 “Nonlinearity Tests for Time Series”, **Biometrika**, 73(2), 461-466.
- TSAY, R. S.: 2005 **Analysis of Financial Time Series**, Vol. 543, John Wiley & Sons.
- ZIVOT, E. ve
ANDREWS, D. W.
K.: 1992 “Further Evidence on The Great Crash, The Oil-Price Shock, and The Unit-Root Hypothesis”, **Journal of Business and Economic Statistics**, Vol.20, No.3, 252.

