

MÜKEMMEL SAYISAL YARIGRUPLAR

Seda ÖNER

MAYIS 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MÜKEMMEL SAYISAL YARIGRUPLAR

Seda ÖNER

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

MAYIS 2024
DİYARBAKIR

MÜKEMMEL SAYISAL YARIGRUPLAR

SEDA ÖNER tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Sedat İLHAN
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Sedat İLHAN (*,**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Ahmet ÖTELEŞ
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü,
Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ÇELİK
Bilgisayar Teknolojileri Bölümü,
Adıyaman Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 03 / 05 / 2024

(*) Jüri Başkanı.
(**) Tez Danışmanı.

Aileme...



Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyadı: Seda ÖNER

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Bana olan sevgi ve güvenleriyle her zaman yanımda olan ailem, eşim ve çocuklarım ile beni her konuda destekleyen hocalarım bu tez çalışmasının önemli parçalarıdır.

Yüksek lisans çalışmamın her basamağında benimle yakından ilgilenen, desteklerini esirgemeyen, bilgisinden ve tecrübesinden faydalanmış olduğum tez danışmanım, sayın Prof. Dr. Sedat İLHAN hocama şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmalarım boyunca destek ve katkılarını sunan, sayın Doç. Dr. Arife ATAY ve Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY ‘ e teşekkür eder, saygılarımı arz ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MALZEME VE YÖNTEM	5
3.1 Malzeme	5
3.2 Yöntem	5
3.3 Temel Tanımlar	5
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	15
4.1 Mükemmel Sayısal Yarıgruplar	15
4.2 P-semigruplar	21
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	28

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\#(Y)$	Y kümesinin eleman sayısı
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ile doğurulan küme
$ebob\{x, y\}$	x ile y sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü
$F(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait Frobenius sayısı
$H(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait boşlukları kümesi
$FH(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait temel boşlukların kümesi
$EH(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait özel boşlukların kümesi
$Ap(Y, u)$	Y sayısal yarıgrubun u ya göre Apery Kümesi
$G(Y)$	Y sayısal yarıgrubun cinsi(genusu)
$m(Y)$	Y sayısal yarıgrubunun katlılığı
$n(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait belirteç sayısı
$\tau(Y)$	Y sayısal yarıgrubun tipi
$T(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait kutup noktalarının kümesi
$K(Y)$	Y sayısal yarıgrubuna ait ileticisi (kondüktörü)

ÖZET

MÜKEMMEL SAYISAL YARIGRUPLAR

ÖNER, Seda

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Sedat İLHAN

Mayıs 2024, 38 sayfa

Bu tez çalışmasında, sayısal yarıgrupların bir alt kısmı olan mükemmel sayısal yarıgruplar konusu işlenmiştir. Bir sayısal yarıgrup ayrık boşluk içermiyorsa mükemmel sayısal yarıgrup olduğu, mükemmel sayısal yarıgrupların bütün alt monoidlerinin de mükemmel olduğu gibi çeşitli sonuçlar ortaya çıkmıştır. İlk bölümde sayısal yarıgrupların temelini oluşturan çeşitli tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Devamında ise sayısal yarıgrupların hangi koşullarda mükemmel sayısal yarıgrup olduğu özellikleriyle yer almıştır. Özellikle mükemmel sayısal yarıgrupların yapıları ve bu yarıgruplarda çeşitli teoremler işlenmiştir. Mükemmel sayısal yarıgruplardan faydalanılarak gömme boyutu 3 olan mükemmel sayısal yarıgruplarda oran verilmiş ve bunlar mükemmel sayısal yarıgruplarda çeşitli teorem ve sonuçları ortaya çıkarmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sayısal yarıgruplar, Mükemmel sayısal yarıgruplar, Frobenius sayısı, Ayrık boşluklar, Cins, Gömme boyutu.

ABSTRACT

PERFECT NUMERICAL SEMIGROUPS

ÖNER, Seda

Master's Degree, Department of Mathematics

Supervizor: Prof. Dr. Sedat İLHAN

May 2024, 38 pages

In this thesis, perfect numerical semigroups, which are a subclass of numerical semigroups, are discussed. Some results have been obtained, such as that a numerical semigroup is a perfect numerical semigroup if it does not contain an isolated gap, and that all submonoids of perfect numerical semigroups are perfect. In the first chapter, various definitions and theorems that form the basis of numerical semigroups are mentioned. Then, the conditions under which numerical semigroups become perfect numerical semigroups are explained. In particular, the structures of perfect numerical semigroups and various theorems on these semigroups are discussed. By using perfect numerical semigroups, ratios are given in perfect numerical semigroups with embedding dimension 3, and various theorems and results have emerged in these perfect numerical semigroups.

Keywords: Numerical semigroups, Perfect numerical semigroups, Frobenius number, Isolated gaps, Genus, Embedding dimension

1.GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarına doğru ortaya çıkan sayısal yarıgruplar, matematikte önemli bir yere sahip olan Cebir ve Sayılar Teorisi içinde yer alan önemli bir konudur. Sayısal yarıgruplar konusu cebirde ve uygulamalı matematikte çok önemli özelliklere sahiptir.

Sayısal yarıgruplar konusu “Frobenius Problemi” olarak bilinen problemin Sylvester tarafından ortaya atmasıyla çıkmıştır (Sylvester,1884). A.Brauer ve C.Arff bu alanda daha sonra çalışma yapan diğer bilim adamlarıdır.

Sayısal yarıgruplar doğal sayılarla elde edilebildiğinden bazı matematiksel yapıların oluşumunda önemli rol oynamaktadır. Bunlar cebirsel yapılar ve modellerle kullanılan temel araçlar olup geometride, kriptografi ve kodlama teorisinde kullanılırlar.

20. yy. ortalarında S.S.Abhyankar, E.Kunz, J.M.Howie ve Lipman gibi bilim insanları sayısal yarıgrupların gelişmesinde ve diğer alanlara uygulanmasında önemli çalışmalarda bulunmuşlardır. Sayısal yarıgruplar özellikle 21. yy. başlarından itibaren J.C.Rosales, V.Barucci ve P.A.Garcia Sanchez tarafından yapılan birçok çalışma ile zirvedeki yerini almıştır. Burada özellikle Arff sayısal yarıgruplar, Frobenius sayısı, simetriklik ve boşluklar kavramları önem arz etmektedir.

Sayısal yarıgrupların bir alt sınıfı olan mükemmel sayısal yarıgruplar ki bunlar ayrık boşluğu bulunmayan sayısal yarıgruplardır. Mükemmel sayısal yarıgruplar son yıllarda özellikle J.C. Rosales, J.S. Harold ve Fraiss gibi bilim insanları tarafından yapılan çalışmalarla da daha ilgi çekici hale gelmiştir.

Ortaya çıkan bu çalışmamız beş bölümden meydana gelmiştir. Giriş bölümünde Frobenius problemi, sayısal yarıgruplar ve bunların uygulamalarında bahsedilmiştir.

Önceki çalışmalar bölümünde tezi yazarken yararlandığımız çalışmalardan ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlardan söz edilmiştir.

Materyal ve metot bölümünde tez yazımı boyunca faydalandığımız tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Araştırma bulguları bölümünde mükemmel sayısal yarıgruplar hakkında bilinen tanım ve teoremler toparlanmıştır.

Son bölüm olan tartışma ve sonuç bölümünde ise çalışmamızla ilgili sonuçlar için öneriler yer almaktadır.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Sayısal yarıgruplar ifadesi ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında başta Frobenius ve Sylvester olmak üzere birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Sylvester, $a_1, a_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ ve $ebob\ y_1, y_2 = 1$ için, $a_1 y_1 + a_2 y_2 = k$ biçiminde ifade edilemeyen en büyük k sayısının nasıl bulunacağını ortaya koymuştur (Sylvester, 1884). Brauer ise çalışmalarında Frobenius problemini ele almıştır (Brauer, 1942).

Sayısal yarıgruplar matematiğin birçok alanında kullanılmaktadır. Son zamanlarda sayısal yarıgruplar ifadesi; Cebir, Cebirsel Geometri, Topoloji ve Diferansiyel Geometri gibi alanlarda daha geniş uygulamalara yardımcı olmuştur. Local, Noetherian Local, Gorenstein ve Arf halkalarının bilhassa belli başlı koşullarda sayısal yarıgruplar açısından karakterize edilebildiğini görebiliriz (Abhyankar, 1967; Barucci vd., 1997; Bertin ve Carbonne, 1977; Brown ve Curtis, 1991; Kunz, 1970; Sally, 1979).

Arf sayısal yarıgruplar, Cahit Arf'ın cebirsel eğrilerde katlı noktalar üzerine yapmış olduğu bir çalışmadan sonra oluşmuştur (Arf, 1949). Lipman ise, Arf'ın yaptığı çalışmalardan yola çıkarak Arf halkalarını çalışmalarında yeniden ortaya koymuştur ve halkaların değerlerinden yola çıkarak oluşan sayısal yarıgruplar için de Arf özelliğinin olduğunu görmüştür (Lipman, 1971).

D'anna sayısal yarıgrupların Arf olması ile tip dizisi arasındaki bağıntıyı incelemiştir (D'anna, 1998). Öte yandan , Campillo ve arkadaşları, Arf sayısal yarıgrupları konusuyla cebirsel geometrik kodların parametreleri arasındaki ilişki konusunda çalışmalar yapmışlardır (Campillo vd., 2000). Ayrıca, Bras-Amoros, Arf sayısal yarıgruplarda yeni bir karakterizasyonu üzerine çeşitli araştırmalar gerçekleştirmiştir (Bras-Amoros, 2003).

Rosales ve arkadaşları 2009'da yapmış oldukları çalışmalarında ise “Bir sayısal yarıgruba hangi boşluklar ilave edilirse tekrar bir sayısal yarıgrup meydana gelir ?” sorusuna yanıt bulmaya çalışmışlardır. Rosales ve arkadaşları diğer çalışmalarında, bir sayısal yarı grubunun Arf kapanışlarını ortaya çıkarmışlardır. Arf sayısal yarı grubuna sonra aynı yarı grubun Frobenius sayısını ekleyerek daha farklı bir Arf sayısal yarı grubu ortaya çıkarmışlardır (Rosales vd., 2004).

Diğer taraftan, Rosales ve arkadaşlarını yine 2009'da yapmış olduğu başka bir çalışmada, Arf sayısal yarıgruplarını ve bu sayısal yarıgrupların üreteç sistemlerini ele almışlardır (Rosales vd., 2004). Bununla birlikte, İlhan ve arkadaşları ile Sanchez ve arkadaşları da Arf sayısal yarıgrupları ile ilgili çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir (Garcia-Sanchez vd., 2017, İlhan vd., 2017).

Sayısal yarıgruplarının boşlukları ve ayırık boşlukları da önem arz etmekte olup bu konuda bazı çalışmalar yapılmıştır (Gilvan 2004, İlhan vd., 2016, Rosales, 2005). Özellikle ayırık boşluklarından yola çıkarak elde edilen mükemmel sayısal yarıgruplar hakkında da birçok çalışmalar yapılmıştır. Örneğin Frais ve arkadaşları mükemmel sayısal yarıgrupların temel özellikleri üzerinde çalışmalar yapmış ve diğer kavramlarla aralarında olan ilişkileri araştırmışlardır (Frais vd., 2019). Mükemmel sayısal yarıgrupların bölümleri konusunda da çeşitli özellikler verilmiştir (Smith, 2021). Diğer yandan Frobenius ve Pseudo-Frobenius sayısı ile mükemmel sayısal yarıgruplar arasındaki ilişkiler de Moreno ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır (Moreno vd., 2020).

Katlılık ve mükemmel sayısal yarıgruplar arasındaki ilişkileri kullanarak elde edilen mükemmel sayısal yarıgrupların bir sınıfındaki sonuçları Rosales ve arkadaşları tarafından verilmiştir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamızın temelini meydana getiren ve tezin anlaşılır olmasını sağlayacak olan esas tanımlar ve teoremler bulunmaktadır.

3.1 Malzeme

Bu yüksek lisans tez çalışmasında mükemmel sayısal yarıgruplar, sayısal yarıgruplarda ayırık boşluklar, mükemmel sayısal yarıgruplarda oran ve bu sayısal yarıgruplarda gömme boyutlarının ispatında yararlanılmıştır. Bu yüzden bazı kaynaklardan ulaşabildiğimiz ve çalışmalarımıza fayda sağlayan, birçok makale ve kitaptan materyal olarak faydalanılmıştır.

3.2 Yöntem

Bu tez çalışmasında mükemmel sayısal yarıgrup ile sayısal yarıgruplarda düzenleme yapıldı. Bu düzenleme bize algoritma prosedürü elde etmemizi sağladı. Bir sayısal yarıgrupta ayırık boşlukların olup olmadığını bularak mükemmel sayısal yarıgrup olduğunu ispat edebiliriz. Mükemmel sayısal yarıgruplar ile mükemmel monoidleri beraber çalışarak Y nin bir alt kümesi olduğunu gösterdik. Sayısal yarıgrupların mükemmel kapanışı ile mükemmel sayısal yarıgruplarda maksimal gömme boyutlu mükemmel sayısal yarıgrupları ortaya çıkardık.

3.3 Temel Tanımlar

Bu kesimde, tezimizde yararlandığımız esas tanımlara ve ehemmiyetli olan çeşitli teoremler ispatı olmadan ele alınmıştır.

Tanım 3.3.1: Eğer $\langle Y, * \rangle$ cebirsel yapısında $\forall k, l, m \in Y$ için $(k * l) * m = k * (l * m)$ ise bu cebirsel yapıya *yarıgrup* adı verilir. Birimli bir yarıgruba da monoid denir.

Tanım 3.3.2: $V \subseteq Y$ için $\langle Y, * \rangle$ bir yarıgrup olsun. O zaman $\forall k, l \in V$ için $k * l \in V$ oluyorsa V ye Y nin *alt yarıgrubu* şeklinde ifade edilir (Howie, 1976).

Tanım 3.3.3: $C \subset Y$ olacak şekilde bir Y sayısal yarıgrubu verilsin. C yi altküme kabul eden Y nin alt yarıgruplarının en dar olanına C nin *doğurduğu yarıgrup* adı verilir. Bundan dolayı, C kümesi de Y nin *üreteçler kümesi* olarak tanımlanır ve $Y = \langle C \rangle$ biçiminde gösterilir. Diğer yandan $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ şeklinde $Y \supset C = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ alınırsa $Y = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rangle$ olarak ifade edilir ve Y *sonlu üretilmiştir* denir. Eğer $Y = A$ şekilde Y nin $A \subset C$ olacak şekilde bir $A \subset Y$ bulunmuyorsa $C = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ kümesi, Y nin *minimal üreteç sistemi* şeklinde tanımlanır (Rosales vd.,1999).

Tanım 3.3.4: $Y \subseteq \mathbb{N}$ için eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise Y ye *sayısal yarıgrup* denir.

- (1) $\forall \pi_1, \pi_2 \in Y$ için $\pi_1 + \pi_2 \in Y$
- (2) $0 \in Y$
- (3) $\mathbb{N} \setminus Y$ sonlu kümedir (Rosales vd. , 2009).

C ile üretilen yarıgrup

$$\langle C \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i : r \in \mathbb{N} \setminus 0, \lambda_i \in C, n_i \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Üstelik $\mathbb{N}$ nin her alt monoidi sonlu olarak meydana gelmiştir. Diğer taraftan Y sadece bir tek minimal üreteç kümesine sahip olur (Rosales, 2009). $C \subseteq \mathbb{N}, C \neq \emptyset$ için $\#(\mathbb{N} \setminus \langle C \rangle) < \infty \Leftrightarrow ebob(C) = 1$ şeklindedir (Rosales, 2009).

Tanım 3.3.5: Y sayısal yarıgrubunu $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ şeklinde kabul edelim. Burada y_1 'e Y nin *katlılığı*, n ye de Y nin *gömme boyutu* adı verilir ve bunlar sıra ile $m(Y)$ ve $e(Y)$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda $e(Y) \leq m(Y)$ dir. Özellikle $e(Y) = m(Y)$ ise Y sayısal yarıgrubu maksimal gömme boyutudur (yani MED tir) şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3.6: Y sayısal yarıgrubunda bulunmayan en büyük $F(Y) \in \mathbb{Z}$ sayısına Y nin *Frobenius sayısı* denir. Yani, $F(Y) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin Y\}$ şeklinde gösterilir (Fröberg vd., 1987).

Teorem 3.3.7: $Y = \langle l_1, l_2 \rangle$ sayısal yarıgrubunda $F(Y) = l_1 \cdot l_2 - l_1 - l_2$ şeklindedir (Rosales, 1996).

Teorem 3.3.8: $y > 2$ biçiminde olan bir çift tamsayı ve $Y = \langle y, y+2, 2y+1 \rangle$ sayısal yarıgrubu olarak gösterilsin. O zaman $F(Y) = \frac{y^2}{2} + y - 1$ biçimindedir (İlhan, 2006).

Örnek 3.3.9: $Y = \langle 6, 8, 13 \rangle$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı,

$$F(Y) = \frac{36}{2} + 6 - 1 = 23 \text{ olarak bulunur.}$$

Teorem 3.3.10: $Y = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ sayısal yarıgrubunda $2 < y_1 < y_2 < y_3$ olmak üzere,

$c \in \mathbb{N}$ için; $2 < c < \frac{y_1-1}{2} + 1$ ve $y_1 - c < \frac{y_3}{y_2} < y_1 - c + 1$ verilsin. O zaman

$y_2 \equiv 1 \pmod{y_1}$ ve $y_3 \equiv y_1 - c + 1 \pmod{y_1}$ olmak üzere,

$$F(Y) = (c-2)y_2 + y_3 - y_1$$

şeklindedir (Curtis, 1990).

Tanım 3.3.11: Y bir sayısal yarıgrupta

$$n(Y) = \#(\{0, 1, 2, \dots, F(Y)\} \cap Y)$$

sayısına Y nin *belirteç sayısı* adı verilir.

Not 3.3.12: Y nin Frobenius ve belirteç sayısı sırasıyla $F(Y)$ ve $n(Y)$ olsun, $Y = \{0 = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = F(Y) + 1, \rightarrow \dots\}$ biçiminde gösterilsin. Burada $y_i < y_{i+1}$ ve “ $\rightarrow$ ”, $\forall w \in \mathbb{Z}$ için $F(Y) + 1 < w$ ve $w \in Y$ sayısından daha büyük olan her bir tamsayının Y ye ait olduğu ortaya çıkar (D’anna, 1998).

Örnek 3.3.13: Teorem 3.3.10 da $y_1 = 7, y_2 = 8$ ve $y_3 = 33$ şeklinde seçersek $Y = \langle 7, 8, 33 \rangle = \{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu elde ederiz. Burada $F(Y) = 34$ dır. Üstelik $2 < 7 < 8 < 33$ için $2 < c < 4$ olup $c = 3$ bulunur. Diğer taraftan, $4 < \frac{33}{8} < 5$, $8 \equiv 1 \pmod{7}$ ve $33 \equiv 5 \pmod{7}$ bulunur. Bu durumda $F(Y) = (3 - 2) 8 + 33 - 7 = 34$ şeklinde elde edilir.

Tanım 3.3.14 : Y bir sayısal yarıgrup ve $F(Y)$ ise Y nin Frobenius sayısı olarak kabul edilsin. Eğer $\forall l \in \mathbb{Z} \setminus Y$ için $F(Y) - l \in Y$ oluyorsa Y *simetrik sayısal yarıgrup* olarak adlandırılır. Diğer taraftan $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$ simetriktir (Rosales vd., 2002).

Örnek 3.3.15: Örnek 3.3.9 te verilen $Y = \langle 6, 8, 13 \rangle = \{0, 6, 8, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 24, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda $F(Y) = 23$ tür. Öte yandan $\forall l \in \mathbb{Z} \setminus Y$ için $F(Y) - l = 23 - l \in Y$ olduğundan Y simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 3.3.16 : $Y = \langle 5, 6, 7 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 10, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda Frobenius sayısı ise $F(Y) = 9$ olur. Fakat $1 \in \mathbb{Z} \setminus Y$ için $9 - 1 = 8 \notin Y$ olduğundan Y sayısal yarıgrubu simetrik değildir.

Tanım 3.3.17: Y sayısal yarıgrubunda $F(Y)$ çift ise. $x \in \mathbb{N} \setminus Y$ ve $F(Y) - x \notin Y$ şeklinde bir tek $y = F(Y) / 2$ var ise Y sayısal yarıgrubu pseudo- *simetriktir* şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.3.18 : $Y = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow, \dots\}$ sayısal yarıgrubunda Frobenius sayısı, $F(Y) = 14$ çift sayıdır. Bununla birlikte. $x = 7 \in \mathbb{N} \setminus Y$ ve $F(Y) - x = 14 - 7 = 7 \notin Y$ olacak şekilde $x = 7 = \frac{F(Y)}{2}$ olduğundan Y *pseudo-simetrik* sayısal yarıgruptur.

Tanım 3.3.19: Y sayısal yarıgrubunda eğer $x \in \mathbb{N} \setminus Y$ için $F(Y) - x \notin Y$ ise x 'e Y nin *kutup noktası* adı verilir. Y nin kutup noktaları

$$T(Y) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus Y : F(Y) - x \notin Y\}$$

ile gösterilir.

Örnek 3.3.20: Örnek 3.3.16 da verilen $Y = \langle 5, 6, 7 \rangle = \{0, 5, 6, 7, 10, \rightarrow, \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. Burada $F(Y) = 9$ olup Y nin kutup noktalarının kümesi $T(Y) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus Y : 9 - x \notin Y\} = \{1, 8\}$ şeklinde olur.

Teorem 3.3.21 : Y bir sayısal yarıgrup olmak üzere, Y sayısal grubunun simetrik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $T(Y) = \emptyset$ dır (Madero vd., 2005).

Tanım 3.3.22: Y bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $\mathbb{N} \setminus Y$ kümesinin elemanlarına Y nin boşlukları (*gaps*) şeklinde ifade edilir. Y sayısal yarıgrubunun tüm boşluklarının kümeside $H(Y)$ ile gösterilir. Buradan,

$$H(Y) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin Y\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.23: Y bir sayısal yarıgrup , $H(Y)$ ise Y nin boşluklarının kümesi olarak ifade edilsin. Şayet $u \in H(Y)$ için $2u, 3u \in Y$ oluyor ise u elemanı için Y nin *temel boşluğu* şeklinde ifade edilir. Y nin temel boşluklarının kümesi $FH(Y)$ ile ifade edilir.

Bundan dolayı,

$$FH(Y) = \{u \in H(Y) : 2u, 3u \in Y\} \text{ şeklinde yazılır.}$$

Tanım 3.3.24: Y sayısal yarıgrubu içerisinde yer alan her $\delta \in Y \setminus \{0\}$ için $\mu + \delta \in Y$ biçiminde $\mu \in \mathbb{N} \setminus Y$ var ise μ , Y nin özel boşluğu şeklindedir ifade edilir. Y sayısal yarıgrubunun tüm özel boşluklarının kümesi ise $EH(Y)$ ile ifade edilir. Bu durumda,

$$EH(Y) = \left\{ \mu \in \mathbb{N} \setminus Y : 2\mu \in Y, \mu + \delta \in Y, \forall \delta \in Y \setminus \{0\} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 3.3.25: $Y = \langle 4, 5, 7 \rangle = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow, \dots\}$ sayısal yarıgrubunu göz önüne alalım.

Burada $F(Y) = 6$ olup Y nin boşluklarının kümesi $H(Y) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin Y\} = \{1, 2, 3, 6\}$ şeklinde çıkar. Ayrıca Y nin temel boşluklarının ve özel boşluklarının kümesi sıra ile aşağıdaki gibi olur:

$$FH(Y) = \{u \in H(Y) : 2u, 3u \in Y\} = \{6\} \text{ ve}$$

$$EH(Y) = \left\{ \mu \in \mathbb{N} \setminus Y : 2\mu \in Y, \mu + \delta \in Y, \forall \delta \in Y \setminus \{0\} \right\} = \{6\}.$$

Tanım 3.3.26: Y bir sayısal yarıgrup ve $u \in Y \setminus \{0\}$ olsun,

$$Ap(Y, u) = \{v \in Y : v - u \notin Y\}$$

kümesi de Y nin u ya göre *Apery kümesi* şeklinde ifade edilir.

Burada

$$\#(Ap(Y, u)) = u \text{ ve } F(Y) = \max(Ap(Y, u)) - u$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.27: $Y = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. O

zaman $Ap(Y, 3) = \{0, 5, 10\}$ olup $\#(Ap(Y, 3)) = 3$ ve

$F(Y) = \max(Ap(Y, 3)) - 3 = 10 - 3 = 7$ çıkar.

Not 3.3.28: $Y = \{0 = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = F(Y) + 1, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda Y_i ve $Y(i)$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım: $i = 0, 1, 2, \dots, n(Y) = n$ için

$$Y_i = \{\delta \in Y : \delta \geq y_i\}$$

ve

$$Y(i) = \{u \in \mathbb{N} : u + Y_i \subset Y\}.$$

Bu durumda

$$Y_n \subset Y_{n-1} \subset \dots \subset Y_1 \subset Y_0 = Y = Y(0) \subset Y(1) \subset \dots \subset Y(n-1) \subset Y(n) = \mathbb{N}$$

zinciri oluşur (D'anna, 1998).

Tanım 3.3.29: $Y = \{0 = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = F(Y) + 1, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda $\tau = \tau(Y) = \#(Y(1) \setminus Y)$ sayısına Y nin *tipi* denir.

Tanım 3.3.30: $Y = \{0 = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = F(Y) + 1, \rightarrow \dots\}$ nin Frobenius ve belirteç sayısı sırası ile $F(Y)$ ve $n(Y)$ olsun, $1 \leq i \leq n(Y)$ için $\tau_i = \tau_i(Y) = \#(Y(i) \setminus Y(i-1))$ sayılarından faydalanılarak $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n(Y)}\}$ yi buluruz ki buna Y nin *tip dizisi* denir.

Burada,

$$2 \leq a \leq n(Y) \text{ ile } \tau_1 \geq \tau_a \geq 1$$

şeklinde tanımlanır. Bunun yanında, simetrik ve pseudo simetrik sayısal yarıgrubunda tip dizileri sırası ile $\{1, 1, \dots, 1\}$ ve $\{2, 1, 1, \dots, 1\}$ olur (D'anna, 1998).

Bununla birlikte, “ Y simetrik sayısal yarıgruptur $\Leftrightarrow \tau(Y)=1$ dir ”şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3.31: Y sayısal yarıgrup olmak üzere, $G(Y) = \#(\mathbb{N} \setminus Y)$ ifadesine Y nin *cinsi (genus)* denir.

Tanım 3.3.32: Y sayısal yarıgrubunda $K = F(Y) + 1$ eşitliği sağlayan K sayısına da Y nin *ileticisi (kondüktörü)* denir.

Tanım 3.3.33: Y sayısal yarıgrubu verilsin. Burada,

$$N(Y) = \{ x \in Y : x < F(Y) \}$$

kümesi de Y nin *minimal temsilcilerinin kümesi* şeklinde ifade edilir. Bunun yanında

$$\#(H(Y)) + \#(N(Y)) = F(Y) + 1$$

eşitliği ortaya çıkar. Üstelik , $v \in N(Y)$ olmak üzere,

$$F(Y) - v \in H(Y)$$

olacağından dolayı

$$\#(H(Y)) \geq \#(N(Y))$$

şeklinde olur (Rosales,2008). Bunun yanında , $n(Y) = \#(N(Y))$ ifadesinin olduğu açıktır.

Örnek 3.3.34: $Y = \langle 5, 7, 8 \rangle = \{0, 5, 7, 8, 10, 12, \rightarrow \dots\}$ olsun. Bunun üzerine $F(Y) = 11$, $n(Y) = \#(\{0, 5, 7, 8, 10\}) = 5$, $m(Y) = 5$, $e(Y) = 3$ ve Y sayısal yarıgrubunun ileticisi $K(Y) = 12$ olur.

Diğer taraftan, Y sayısal yarıgrubunda boşluklar ve temel boşluklar kümesi ile cinsi sırası ile;

$$H(Y) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin Y\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 11\} ,$$

$$FH(Y) = \{u \in H(Y) : 2u, 3u \in Y\} = \{4, 6, 9, 11\}$$

ve

$$G(Y) = \#(H(Y)) = 7$$

olur. Öte yandan $e(Y) \neq m(Y)$ olduğundan Y sayısal yarıgrubu MED değildir.

Y sayısal yarıgrubunun kutup noktasının kümesi ise,

$$T(Y) = \{u \in \mathbb{Z} \setminus Y : 11 - u \notin Y\} = \{2, 9\}$$

biçiminde bulunur. Bunun yanında, $T(Y) \neq \emptyset$ olacağından Y sayısal yarıgrubunda simetrik olmadığı görülür. Ayrıca Y pseudo simetrik olmaz. Çünkü $F(Y) = 11$

$$\text{tektir. } Ap(Y, 7) = \{y \in Y : y - 7 \notin Y\} = \{0, 5, 8, 10, 13, 16, 18\}$$

ve $N(Y) = \{x \in Y : x < 11\} = \{0, 5, 7, 8, 10\}$ şeklindedir. Yani $n(Y) = \#(N(Y)) = 5$ olur.

Sonuç olarak Y sayısal yarıgrubunda tip dizisi de aşağıdaki gibi bulunur:

$$Y_1 = \{x \in Y : x \geq 5\} = \{5, 7, 8, 10, 12, \rightarrow \dots\}$$

ve

$$Y(1) = \{x \in \mathbb{N} : x + Y_1 \subset Y\} = \{0, 5, 6, 7, 8, \rightarrow \dots\}$$

olup,

Y nin tipi

$$\tau_1 = \tau(Y) = \#(Y(1) \setminus Y) = \#\{9, 11\} = 2$$

çıkar. Diğer taraftan; $\tau_2 = 1$, $\tau_3 = 2$, $\tau_4 = 1$ ve $\tau_5 = 1$ şeklinde bulunur. Böylelikle, Y nin tip dizisi $\{2, 1, 2, 1, 1\}$ biçimindedir.

Tanım 3.3.35: Y sayısal yarıgrubunda $\forall y \in Y \setminus \{0\}$ için $\mu + y \in Y$ oluyor ise $\mu \in \mathbb{Z} \setminus Y$ elemanına Y nin pseudo Frobenius sayısı adı verilir. Y nin bütün pseudo Frobenius sayılarının kümesi $PF(Y)$ ile ifade edilir. Bu durumda $PF(Y) = \{\mu \in \mathbb{Z} \setminus Y : \mu + y \in Y, \forall y \in Y \setminus \{0\}\}$ şeklinde yazılır.

Örnek 3.3.36: $Y = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle = \{0, 4, 7, \rightarrow \dots\}$, MED sayısal yarıgrubunun bütün pseudo Frobenius sayılarını bulalım.

$\mathbb{Z} \setminus Y = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5, 6\}$ olmak üzere,

$PF(Y) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus Y : x + y \in Y, \forall y \in Y \setminus \{0\}\} = \{3, 5, 6\}$ çıkar.

Teorem 3.3.37: Y sayısal yarıgrubunun simetrik sayısal yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul, $PF(Y) = \{F(Y)\}$ olmasıdır (Rosales vd., 2009).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde çalışmamız iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde mükemmel sayısal yarıgruplar hakkında temel bilgiler, mükemmel sayısal yarıgrupların ayırık boşluklarını ve bunların gömme boyutlarında elde edilen sonuçları vereceğiz. İkinci bölümde ise P-semigrupları inceleyeceğiz.

4.1 Mükemmel Sayısal Yarıgruplar

Bu kısımda mükemmel sayısal yarıgruplar üzerine temel tanım ve teoremler vereceğiz.

Tanım 4.1.1: Y sayısal yarıgrup ve $H(Y)$ ise Y nin boşlukları kümesi olsun.

Şayet $\delta \in H(Y)$ için $\delta - 1, \delta + 1 \in Y$ oluyorsa δ elemanına Y sayısal yarıgrupunun ayırık(izole) boşluğu denir. Y nin bütün ayırık noktalarının kümesi $\sigma(Y)$ ile gösterilir.

Yani $\sigma(Y) = \{ \delta \in H(Y) : \delta - 1, \delta + 1 \in Y \}$ ile ifade edilir.

Örnek 4.1.2: $Y = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrupunda

$H(Y) = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ olup Y nin ayırık boşluklarının kümesi $\sigma(Y) = \{5, 7, 11\}$ çıkar.

Örnek 4.1.3: $Y = \langle 3, 5, 7 \rangle = \{0, 3, 5, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrupunun ayırık boşluklarını kümesi $\sigma(Y) = \{4\}$ şeklindedir. Çünkü $H(Y) = \{1, 2, 4\}$ olup

$4 - 1 = 3 \in Y$ ve $4 + 1 = 5 \in Y$ dir.

Örnek 4.1.4: $Y = \langle 5, 8, 9 \rangle = \{0, 5, 8, 9, 10, 13, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrupunda

$H(Y) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12\}$ şeklinde olup burada $\delta - 1, \delta + 1 \in Y$ olacak şekilde hiçbir $\delta \in H(Y)$ olamayacağı için $\sigma(Y) = \emptyset$ çıkar.

Tanım 4.1.5: Y sayısal yarıgrup olsun. Eğer Y nin hiçbir ayırık boşluğu yok ise Yani $\sigma(Y) = \emptyset$ ise Y ye mükemmel sayısal yarıgrup denir.

Örnek 4.1.6: Örnek 4.1.4 te verilen $Y = \langle 5, 8, 9 \rangle$ sayısal yarıgrubu mükemmeldir. Çünkü $\sigma(Y) = \emptyset$ dir. Fakat örnek 4.1.2 de verilen $Y = \langle 4, 6, 9 \rangle$ sayısal yarıgrubu mükemmel değildir. Çünkü $\sigma(Y) = \{5, 7, 11\} \neq \emptyset$ olur.

Teorem 4.1.7: Şayet Y bir mükemmel sayısal yarıgrup ise bu durumda $F(Y) - 1 \notin Y$ olur (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

İspat: Y bir sayısal yarıgrup ve $F(Y)$ onun Frobenious sayısı olsun. Eğer $Y = \mathbb{N}$ ise

$F(Y) - 1 = -2 \notin Y$ olur. Eğer $Y \neq \mathbb{N}$ ise o zaman $F(Y) \in \mathbb{N} \setminus Y$ ve $F(Y) + 1 \in Y$ olur. Y mükemmel sayısal yarıgrup olduğundan $F(Y)$, Y nin bir ayırık boşluğu olmaz. Bu yüzden $F(Y) - 1 \notin Y$ olur.

Yardımcı Teorem 4.1.8: Y sayısal yarıgrubunda $x \in \mathbb{Z}$ için

$x \notin Y$ dir $\Leftrightarrow k - x \in Y$ olacak şekilde bir $k \in PF(Y)$ elemanının var olmasıdır (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Not 4.1.9: Y bir sayısal yarıgrup ve $\tau(Y) = 1$ olsun. O zaman Teorem 3.3.37 den $PF(Y) = \{F(Y)\}$ olur. Eğer $Y \neq \mathbb{N}$ ise o zaman $1 \notin Y$ olup Yardımcı Teorem 4.1.8 den $F(Y) - 1 \in Y$ çıkar. Böylece Teorem 4.1.7 den Y mükemmel sayısal yarıgrup olamaz. Bu yüzden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.1.10: Y sayısal yarıgrubu ve $Y \neq \mathbb{N}$, $\tau(Y) = 1$ olsun, buradan Y mükemmel bir sayısal yarıgrup değildir (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Sonuç 4.1.11: Y bir sayısal yarıgrup ve $e(Y) = 2$ verilsin. Bu durumda Y mükemmel sayısal yarıgrup olmaz (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Örnek 4.1.12: $Y = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow, \dots\}$ sayısal yarıgrubu simetrik olduğundan Y nin tipi $\tau(Y) = 1$ dir. Bu durumda Önerme 4.1.10 gereğince Y bir mükemmel sayısal yarıgrup olmaz. Gerçekten de $H(Y) = \{1, 2, 4, 7\}$ olup Y nin ayırık

boşluklarının kümesi $\sigma(Y) = \{4, 7\} \neq \emptyset$ şeklindedir. Ayrıca $e(Y) = 2$ olduğundan da Y nin mükemmel olmadığının söyleriz.

Yardımcı Teorem 4.1.13: $\tau(Y) = 2$ olacak şekilde bir Y sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman $PF(Y) = \{F(Y) - 1, F(Y)\}$ dir $\Leftrightarrow F(Y) - 1 \notin Y$ dir (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

İspat: $\tau(Y) = 2$ olacak şekilde bir Y sayısal yarıgrubu verilsin. Eğer $PF(Y) = \{F(Y) - 1, F(Y)\}$ ise o zaman $F(Y) - 1 \in \mathbb{Z} \setminus Y$ olup $F(Y) - 1 \notin Y$ çıkar.

Tersine $F(Y) - 1 \notin Y$ olsun. O zaman $F(Y) - 1 \in \mathbb{Z} \setminus Y$ ve $Y \neq \mathbb{N}$ olup $1 \notin Y$ çıkar. Sonuç olarak $y \in Y \setminus \{0\}$ ise $F(Y) - 1 + y \in Y$ olur.

Çünkü $F(Y) - 1 + y \geq F(Y)$ dir. Böylece $F(Y) - 1 \in PF(Y)$ çıkar. Öte yandan $F(Y) \in PF(Y)$ ve $\tau(Y) = 2$ olduğundan $PF(Y) = \{F(Y) - 1, F(Y)\}$ elde edilir.

Teorem 4.1.14: Y bir sayısal yarıgrup ve $\tau(Y) = 2$ olmak üzere Y nin mükemmel sayısal yarıgrup olması gerekli ve yeterli koşul $F(Y) - 1 \notin Y$ olmasıdır (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Yardımcı Teorem 4.1.15: Y sayısal yarıgrup ve $e(Y) = 3$ olmak üzere, bu durumda $\tau(Y) = 1$ ya da $\tau(Y) = 2$ şeklinde olur (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Önerme 4.1.16: $e(Y) = 3$ olsun. O zaman Y mükemmel bir sayısal yarıgruptur $\Leftrightarrow F(Y) - 1 \notin Y$ dir (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

İspat: Teorem 4.1.7 den Y mükemmel sayısal yarıgrup ise $F(Y) - 1 \notin Y$ olur.

Tersine $F(Y) - 1 \notin Y$ ise o zaman $F(Y) - 1 \in PF(Y)$ olur. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.1.15 ten $PF(Y) = \{F(Y) - 1, F(Y)\}$ olur ki bu durumda $\tau(Y) = 2$ çıkar. Böylece Teorem 4.1.14 ten de Y nin mükemmel sayısal yarıgrup olduğunu elde ederiz.

Not 4.1.17: Y bir sayısal yarıgrup ve $e(Y) = 4$ olsun. Önerme 4.1.16'nın tersi doğru olmayabilir. Örneğin $Y = \langle 5, 7, 11, 13 \rangle = \{0, 5, 7, 10, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda $e(Y) = 4$ ve $F(Y) = 9$ olur. $F(Y) - 1 = 9 - 1 = 8 \notin Y$ ama $6 - 1 = 5 \in Y$ ve $6 + 1 = 7 \in Y$ olup $6 \in \sigma(Y)$ çıkar. Yani Y mükemmel sayısal yarıgrup olamaz.

Önerme 4.1.18: Y bir sayısal yarıgrup ve $F(Y) - 1 \notin Y$ olsun. Eğer Y 'nin mükemmel üreteç sistemi $U = \{n_1, n_1, \dots, n_e\}$ ve $e(Y) \geq 3$ ise o zaman $ebob\{n_1, n_2, \dots, n_e\} = 1$ olur (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Sonuç 4.1.19: Y mükemmel sayısal yarıgrup ve Y 'nin minimal üreteç sistemi $U = \{n_1, n_2, n_3\}$ olsun. O zaman n_1, n_2 ve n_3 ikişer ikişer aralarında asal olan pozitif tam sayılardır (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Önerme 4.1.20: Eğer

$p_1 = b_{12}.b_{13} + b_{12}.b_{23} + b_{13}.b_{32}$, $p_2 = b_{13}.b_{21} + b_{21}.b_{23} + b_{23}.b_{31}$ ve $p_3 = b_{12}.b_{31} + b_{21}.b_{32} + b_{31}.b_{32}$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olacak şekilde $b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{23}, b_{31}$ ve b_{32} pozitif tam sayılar ise, o zaman $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ gömme boyutu üç olan bir sayısal yarıgruptur.

Tersine gömme boyutu üç olan ve aralarında ikişer ikişer asal olan minimal üreteç sistemli her sayısal yarıgrup bu formdadır. Ek olarak,

$$PF(\langle p_1, p_2, p_3 \rangle) = \left\{ \begin{array}{l} f_1 = -b_{12}.b_{13} - b_{12}.b_{23} - b_{12}.b_{31} - b_{13}.b_{21} - b_{13}.b_{32} - b_{21}.b_{23} - b_{21}.b_{32} \\ -b_{23}.b_{31} - b_{31}.b_{32} + b_{12}.b_{13}.b_{21} + b_{12}.b_{21}.b_{23} + b_{12}.b_{13}.b_{31} + \\ 2b_{12}.b_{23}.b_{31} + b_{13}.b_{21}.b_{32} + b_{21}.b_{23}.b_{32} + b_{13}.b_{31}.b_{32} + b_{23}.b_{31}.b_{32}, f_2 = f_1 + b_{13}.b_{21}.b_{32} - b_{12}.b_{23}.b_{31} \end{array} \right\}$$

şeklindedir (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Not 4.1.21: p_1, p_2, p_3 pozitif tam sayılar, Önerme 4.1.20 deki gibi olsun. O zaman

$$F(\langle p_1, p_2, p_3 \rangle) = \max\{f_1, f_2\} \text{ ve}$$

$$PF(\langle p_1, p_2, p_3 \rangle) = \{F(\langle p_1, p_2, p_3 \rangle), F(\langle p_1, p_2, p_3 \rangle) - |b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31}|\} \text{ olur.}$$

Teorem 4.1.22: $p_1 = b_{12} \cdot b_{13} + b_{12} \cdot b_{23} + b_{13} \cdot b_{32}$, $p_2 = b_{13} \cdot b_{21} + b_{21} \cdot b_{23} + b_{23} \cdot b_{31}$ ve $p_3 = b_{12} \cdot b_{31} + b_{21} \cdot b_{32} + b_{31} \cdot b_{32}$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal sayılar ve $|b_{23} \cdot b_{12} \cdot b_{31} - b_{32} \cdot b_{13} \cdot b_{21}| = 1$ olacak şekilde $b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{23}, b_{31}$ ve b_{32} pozitif tam sayılar verilsin. O zaman $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ gömme boyutu üç olan bir mükemmel sayısal yarıgruptur. Üstelik gömme boyutu üç olan her mükemmel sayısal yarıgrup bu formdadır (Moreno M.A and Rosales J.C, 2020).

Tanım 4.1.23: Y bir sayısal yarıgrup ve $\delta \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{Y}{\delta} = \{k \in \mathbb{N} : \delta \cdot k \in Y\} \text{ kümesine } Y \text{ nin } \delta \text{ ile bölüm kümesi denir ve bu bölüm kümesi}$$

Y yi kapsayan bir sayısal yarıgruptur.

Not 4.1.24: Y bir sayısal yarıgrup ve $\delta \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\delta \cdot Y = \{\delta \cdot v : v \in Y\}$ ve $\{q, \rightarrow\} = \{u \in \mathbb{N} : u \geq q\}$ kümelerini tanımlayalım. Bu durumda bu iki küme de toplama işlemine göre kapalıdır.

Önerme 4.1.25: Y bir sayısal yarıgrup olmak üzere, bu durumda $K = 2Y \cup \{2F(Y) + 1, \rightarrow\}$ bir sayısal yarıgruptur (Smith J.H, 2021).

Not 4.1.26: Önerme 4.1.25 te verilen Y ve K sayısal yarıgruplarını düşünelim. Eğer $Y, F(Y)$ den büyük ardışık iki tam sayıyı kapsadığında K mükemmel sayısal yarıgrup olmayacaktır. Özellikle, eğer $y, y+1 \in Y$ ve $y+1 < F(Y)$ ise o zaman $2y+1 \in \sigma(K)$ olur. Çünkü $2y, 2(y+1) \in K$ ve $2y+1 \notin K$ şeklindedir.

Önerme 4.1.27: Y bir sayısal yarıgrup ve $T = 2Y \cup \{2F(Y)+1, \rightarrow\}$ ise o zaman T nin ayrık boşluklarının hepsi tektir (Smith J.H,2021).

İspat: Y bir sayısal yarıgrup ve $H(Y)$ ise Y nin boşluklarının kümesi olmak üzere, bu durumda $v \in H(Y)$ ve v çift bir tam sayı ise o zaman $v-1$ tek sayıdır ve $v-1 < v < 2F(Y)+1$ ve $v-1 \in K$ olup v bir ayrık boşluk olamaz.

Önerme 4.1.28: Y bir sayısal yarıgrup ve $K = 2Y \cup \{2F(Y)+1, \rightarrow\}$ ise o zaman $K \cup \sigma(Y)$ mükemmel sayısal yarıgruptur (Smith J.H,2021).

İspat: Y bir sayısal yarıgrup olmak üzere önce $K = 2Y \cup \{2F(Y)+1, \rightarrow\}$ nin bir sayısal yarıgrup olduğunu göstermemiz gerekir.

Eğer $u \in K$ ve $v \in \sigma(K)$ ya da eğer $u, v \in \sigma(Y)$ ise o zaman $u+v \in K \cup \sigma(K)$ olur.

$u \in K$ ve $v \in \sigma(K)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $v-1, v+1 \in K$ olup eğer $u+v \notin K$ ise o zaman $u+v-1, u+v+1 \in K$ yani $u+v \in \sigma(K)$ olur.

Önerme 4.1.29: Y bir sayısal yarıgrup ve $K = 2Y \cup \{2F(Y)+1, \rightarrow\}$ ise o zaman $Y = \frac{1}{2}(K \cup \sigma(K))$ olur (Smith J.H,2021).

İspat: $Y \subseteq \frac{1}{2}(K \cup \sigma(K))$ olduğu açıktır. Çünkü $y \in Y$ ise o zaman

$2y \in 2Y \subseteq K \cup \sigma(K)$ olur. $a \in \frac{1}{2}(K \cup \sigma(K))$ ise $2a \in (K \cup \sigma(K))$ olur.

Öte yandan Önerme 4.1.25 dan $2a \in K = 2Y \cup \{2F(Y)+1, \rightarrow\}$ olur. Bu durumda $2a \in 2Y$ ise $a \in Y$ olup eğer $2a \in \{2F(Y)+1, \rightarrow\}$ ise o zaman $2a \geq 2F(Y)+2$ buradan da $a > F(Y)$ yani $a \in Y$ çıkar.

Önerme 4.1.30: Y bir sayısal yarıgrup ve $a > 2, a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, o zaman $Y = \frac{K}{a}$ olacak şekilde $aY \cup \{aF(Y)+1, \rightarrow\}$ bir mükemmel sayısal yarıgrup olur (Smith J.H, 2021).

4.2 P-semigruplar

Bu kesimde de P-semigruplar hakkında temel tanım ve teoremleri önermelerle beraber inceleyeceğiz.

Tanım 4.2.1: $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, katlılığı m olan bütün mükemmel sayısal yarıgruplarının kümesini P_m ile tanımlayalım. O zaman $P_m = \{Y : Y \text{ mükemmel sayısal yarıgrup ve } m(Y)=m\}$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda $m=1$ ve $m=2$ için P_m kümeleri sırasıyla $\{\mathbb{N}\}$ ve $\emptyset$ olur.

Önerme 4.2.2: Y bir sayısal yarıgrup olsun, O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

- 1) Y mükemmeldir.
- 2) $\{v, v+2\} \subseteq Y$ ise $v+1 \in Y$ dir (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

Yardımcı Önerme 4.2.3: $m \geq 3$ şeklinde bir $m \in \mathbb{Z}$ sayısı verilsin. Eğer $Y \in P_m$ ise o zaman $\{F(Y), F(Y)-1\} \subseteq H(Y)$ olur (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

İspat: $m \geq 3$ olduğundan $F(Y) \geq 2$ çıkar. Üstelik $F(Y) \in H(Y)$ ve $F(Y)+1 \in Y$ olur. Bu yüzden Önerme 4.2.2 den $F(Y)-1 \in H(Y)$ çıkar.

Yardımcı Önerme 4.2.4: Eğer $Y \in P_m$ ve $Y \neq \{0, m, \rightarrow\}$ ise o zaman ya $Y \cup \{F(Y)\} \in P_m$ ya da $Y \cup \{F(Y), F(Y)-1\} \in P_m$ olur (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

İspat: $Y \in P_m$ olsun. $Y \neq \{0, m, \rightarrow\}$ ise o zaman $F(Y) > m$ ve $Y \cup \{F(Y)\}$ ile $Y \cup \{F(Y), F(Y)-1\}$ kümeleri birer sayısal yarıgrup olur.

Eğer $F(Y) - 2 \notin Y$ ise o zaman $Y \cup \{F(Y)\} \in P_m$ çıkar.

Eğer $F(Y) - 2 \in Y$ ise o zaman $Y \cup \{F(Y), F(Y) - 1\} \in P_m$ olduğu açıktır.

Tanım 4.2.5: $Y \in P_m$ olmak üzere, $\theta(Y) = \begin{cases} \{F(Y)\} : F(Y) - 2 \notin Y \text{ ise} \\ \{F(Y), F(Y) - 1\} : \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

kümesini tanımlayalım.

O zaman P_m elemanlarını dizisi aşağıdaki gibi tanımlarız:

$Y_0 = Y$ ve

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n \cup \theta(Y_n) : Y_n \neq \{0, m, \rightarrow\} \text{ ise} \\ Y_n : \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda aşağıdaki zincir tanımlanabilir:

$Y = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n = \{0, m, \rightarrow\}$. Bu zincirinin uzunluğu $I(Y)$ ile tanımlanır.

Örnek 4.2.6: $Y = \{0, 9, 14, 18, 21, \rightarrow \dots\} \in P_9$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} Y = Y_0 \subset Y_1 = \{0, 9, 14, 18, \rightarrow \dots\} \subset Y_2 = \{0, 9, 14, 17, \rightarrow \dots\} \subset \\ Y_3 = \{0, 9, 14, \rightarrow \dots\} \subset Y_4 = \{0, 9, 13, \rightarrow \dots\} \subset Y_5 = \{0, 9, 12, \rightarrow \dots\} \\ \subset Y_6 = \{0, 9, \dots\} \end{aligned}$$

şeklinde katlılığı 9 olan mükemmel sayısal yarıgruplar zincirini elde ederiz. Bu zincirin uzunluğu $I(Y) = 6$ olur.

Teorem 4.2.7: $Y \in P_m$ ve $G(Y) = (\mathbb{N} \setminus Y)$ olsun. O zaman

$I(Y) = G(Y) - n(Y) - m(Y) + 2$ olur (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

Sonuç 4.2.8: $Y \neq \mathbb{N}$ olmak üzere, $Y \in P_m$ ve $G(Y) = (\mathbb{N} \setminus Y)$ olsun. O zaman

$n(Y) \leq G(Y) - m(Y) + 2$ şeklindedir (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

Not 4.2.9: Y sayısal yarıgrubunun bir ayırık boşluğu k olarak verilsin. Y mükemmel değilse Y nin ayırık boşluklarının maksimumunu k ile göstereceğiz. Eğer Y mükemmel ise o zaman $k = -1$ olur.

Önerme 4.2.10: Y mükemmel olmayan bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $Y \cup \{h(Y)\}$ bir sayısal yarıgruptur (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

Tanım 4.2.11: Y bir sayısal yarıgrup ve Y nin ayırık boşluklarının sayısı $b(Y)$ ile gösterilsin. O zaman aşağıdaki sayısal yarıgruplar zinciri tanımlanır.

$k \in \sigma(Y)$ için

- $Y_0 = Y$
- $Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n \cup \{k\}: k \neq -1 \text{ ise} \\ Y_n & : \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

Önerme 4.2.12: Y bir sayısal yarıgrup olmak üzere, o zaman $Y = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_{b(Y)}$ olur.

Üstelik $Y_{b(Y)}$ bir mükemmel sayısal yarıgrup ve her $i \in \{0, 1, 2, \dots, b(Y) - 1\}$ için $\neq(Y_{i+1} \setminus Y_i) = 1$ olur (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

Yardımcı Önerme 4.2.13: Y sayısal yarıgrubu MED tir $\Leftrightarrow$

$\{y - m(Y) : y \in Y \setminus \{0\}\}$ nin bir sayısal yarıgrup olmasıdır (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

Önerme 4.2.14: Y bir sayısal yarıgrup ve $\Delta(Y) = \{y - m(Y) : y \in Y \setminus \{0\}\}$ olsun. O zaman Y bir MED sayısal yarıgrup ve $m(Y) \geq 3$ olmak üzere,

Y mükemmeldir $\Leftrightarrow \Delta(Y)$ nin mükemmel bir sayısal yarıgruptur. (Morena M.A and Rosales J.C. , 2019) .

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, bir sayısal yarıgrubun ayırık boşluğunun olmaması durumunda bu sayısal yarıgrubun mükemmel sayısal yarıgrup olduğu üzerine çalışılmıştır.

Bu çalışmamızda, mükemmel sayısal yarıgrupların sonlu kesişimlerinin de yine mükemmel sayısal yarıgrup olduğu ortaya çıkmıştır. Fakat bu sonsuz kesişimler için her zaman doğru olmayabilir. $n_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}} \{0, k, \rightarrow\} = \{0\}$ ve $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ için $\{0, k, \rightarrow\}$ bir mükemmel sayı yarıgruptur. Aynı zamanda $n_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}} \{0, k, \rightarrow\} = \{0\}$ olduğu açıktır. Böylece mükemmel sayısal yarıgrupların sonsuz kesişimler genel olarak sayısal yarıgrup değildir. Sayısal yarıgrupların kesişimi (sonlu ya da sonsuz) her zaman $(\mathbb{N}, +)$ nın bir yarı monoid olduğundan da bahsedebiliriz.

Burada mükemmel monoidlerin kesişimi yine bir mükemmel monoidtir. Bu yüzden negatif olmayan tam sayıların X kümesini kapsayan en az bir mükemmel monoidten bahsedebiliriz.

Bu çalışmanın, mükemmel sayısal yarıgruplar alanındaki araştırmacılara bir kaynak olacağı kanaatiyle, mükemmel sayısal yarıgrupların oranı ve mükemmel sayısal yarıgrupların maksimal gömme boyutlarını bulma şeklindeki açık problemin araştırılmasını önermekteyiz.

KAYNAKLAR

- Abhyankar, S.S. 1967. Local rings of high embedding dimension, *Amer J. Math.* 89, 1073-1077.
- Arf, C. 1949. Une interpretation algebrique de la suite ordres de multiplicité d'une branche algebrique, *Proc. London Math. Soc.*, 20, 256-287.
- Barucci V., Dobbs, D.E. and Fontana, M. 1997. Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains, *Memoirs of The Amer. Math.*, 598, 13-25.
- Bertin, J. and Carbonne, P. 1977. Semi-groupes d'entiers et applications aux branches, *Journal of Algebra*, 49, 81-95.
- Bras-Amoros, M. 2003. Improvements to evaluation codes and new characterizations of Arf semigroups. Applied Algebra Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, 15th International Symposium, AAECC-15, Toulouse, France, May 12-16, 2003, Proceedings, 204-215.
- Brauer, A. 1942. On a problem of partitions, *Amer. J. Math.*, 64, 299-312.
- Brown. W. C. and Curtis, F. 1991. Numerical semigroups of maksimal and almost maksimal length, *Semigroup Forum*, 42, 219-235.
- Campillo, A. and Ruiz, J.M. 1990. Some remarks on Pythagorean real curve germs, *Journal of Algebra*, 128 (2), 271-275.
- Campillo, A., Farran, J. I. and Munuera, C. 2000. On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46 (7), 2634-2638.
- Curtis, F. 1990. On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup, *Math.Scand.*, , 67,190-192.
- D'Anna, M. 1998. Type Sequences of Numerical Semigroups, *Semigroup Forum*, 56, 1-31.
- Fröberg, R., Gottlieb, C. and Haggkvist, R. 1987. On numerical semigroups, *Semigroup Forum*, 35, 63-83.
- Gilvan, O. 2004. Numerical semigroups whose last gap is large, *Semigroup Forum*, 69, 423-430.
- Garcia-Sanchez, P.A., Heredia, B.A., Karakaş, H.İ. and Rosales, J.C. 2017. Parametrizing Arf numerical semigroups, *Journal of Algebra and Its Applications*, 16 (11), 31 pages.
- Howie, J.M. 1976. An introduction to semigroup theory, *Academic Press*, New York.
- Howie, J.M. and Ruskuc, N. 1997. Semigroups and Applications, *World Scientific Publishing*, London.
- İlhan, S. and Karakaş, H.İ. 2017. Arf numerical semigroups, *Turkish Journal of Mathematics*, 41,1448-1457.
- İlhan, S., Süer M. and Çelik, A. 2016. On the fundamental gaps of some saturated numerical semigroups with multiplicity 4, *International Journal of Algebra*,10(8),373-380.

- Kunz, E. 1970. The value semigroup of an one dimensional Gorenstein ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25, 748-751.
- Lipman, J. 1971. Stable ideals and Arf rings, *Amer. J. Math.*, 93, 649–685.
- Madero, M. and Herzinger, K. 2005. The Apéry sets of numerical semigroups, *Algebra Communications*, 33, 3831-3838.
- Moreno-Frais, M.A and Rosales, J.C. 2020. Perfect numerical semigroups, *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 1742-1754.
- Moreno-Frais, M.A and Rosales, J.C. 2020. Parity numerical semigroups, *Haceteppe Journal of Mathematics and statistics*, 49(3), 1067-1075.
- Moreno-Frais, M.A and Rosales, J.C. 2020. Perfect numerical semigroups with embedding dimension three, *Publ. Matemáticas Debrecen*, 97(1-2), 77-84.
- Robles-Perez, A. M., Rosales, J.C. and Vasko, P. 2009. The doubles of a numerical semigroup, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213, 387-396.
- Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez P.A. 1999. Finitely generated commutative monoids, Nova Science Publishers, 185, New York.
- Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez P.A. 2009. Numerical Semigroups, *Springer*, 181, New York.
- Rosales, J. C. and Garcia-Sanchez, P. A. 2005. Pseudo-symmetric numerical semigroups with three generators, *Journal of Algebra*, 291, 46-54.
- Rosales, J. C. 1996. On symmetric numerical semigroups, *Journal of Algebra*, 182, 422-434.
- Rosales, J.C. 2008. One half of a pseudo-symmetric numerical semigroup, *London Mathematical Society*, 40, 347-352.
- Rosales, J.C. 2005. Numerical semigroups with multiplicity three and four, *Semigroup Forum*, 71, 323-331.
- Rosales, J.C. 2000. Numerical semigroups with Apéry sets of unique expression, *Journal of Algebra*, 226, 479-487.
- Rosales, J.C. 2005. Fundamental gaps of numerical semigroups generated by two elements, *Linear Algebra and its Applications*, 405, 200-208.
- Rosales, J.C. and Branco, M. B. 2002. Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups, *Journal of Pure And Applied Algebra*, 171, 3003-314.
- Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., Garcia-Garcia, J.I. and Branco, M.B. 2004. Arf numerical semigroups, *Journal of Algebra*, 276, 3-12.
- Ruiz, J.M. 1985. Pythagorean real curve germs, *Journal of Algebra*, 94, 126-144.
- Sally, J.D. 1979. Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, *Journal of Algebra*, 56, 168-183.
- Smith, H.D.J. 2021. Quotients of perfect numerical semigroups, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 51(3), 1075-1077.

Smith, H.D.J. 2022. On isolated gaps in numerical semigroups, *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 123-129.

Sylvester, J.J. 1884. Mathematical questions with their solutions, *Educational Times*, 41, 1-21.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

ÖNER, Seda

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Dicle Üniversitesi	2012
Lise	Özel Dicle Lisesi	2005

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2012-Devam ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	SEDA ÖNER		
Öğrenci No	20804027		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☒	Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı,	Prof. Dr. Sedat İLHAN		
(Varsa) II. Tez Danışmanı	-----		
Tez Başlığı	Mükemmel Sayısal Yarışmalar		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	38		
Raporlama Tarihi	08/05/2024		
Benzerlik Oranı (%)	%13		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 38 sayfalık kısmına ilişkin, 08/05/2024 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %13 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☒ Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☐Diğer (Açıklayınız.)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Seda ÖNER

Tarih: 08/05/2024

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Sedat İLHAN

İmza:

Tarih:

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: