

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MULTIPLICATIVELY GEOMETRİK P-
FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halil KARACA

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahir KADAKAL

Haziran 2020

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MULTIPLICATIVELY GEOMETRİK P-
FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halil KARACA

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 08/06/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Mahir KADAKAL
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Üye**

**Doç. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Halil KARACA

08/06/2020

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak yol gösteren ve her aşamada yardımını gördüğüm kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir KADAKAL'a teşekkür ederim.

Yüksek Lisans çalışması süresince yakın ilgilerini gördüğüm başta Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Doç. Dr. İmdat İŞCAN olmak üzere Matematik Bölümü'nün tüm öğretim üye ve elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında yardımını esirgemeyen her konuda destek olan eşim Ferda KARACA'ya teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER LİSTESİ.....	III
ÖZET... ..	IV
SUMMARY.....	V
BÖLÜM 1.GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	2
2.1. Temel Kavramlar.....	2
2.2. Bazı Eşitsizlikler.....	3
2.3. Bazı Ortalamalar.....	11
BÖLÜM 3.MATERYAL VE METOT.....	13
BÖLÜM 4.ARAŞTIRMA BULGULARI.....	16
BÖLÜM 5.TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	37
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	40

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	: I aralığının içi
$\subset$	: Alt küme
$\subseteq$	: Alt küme veya eşit
β	: Beta Fonksiyonu
$A = A(a, b)$	: Aritmetik Ortalama
$G = G(a, b)$	: Geometrik Ortalama
$H = H(a, b)$	: Harmonik Ortalama
$L = L(a, b)$	: Logaritmik Ortalama
$I = I(a, b)$	: İdentrik Ortalama
$L_p = L_p(a, b)$	: p -Logaritmik Ortalama
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların sınıfı

ÖZET

MULTIPLICATIVELY GEOMETRİK P-FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

KARACA, Halil

Giresun Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mahir KADAKAL

NİSAN 2020, 38 Sayfa

Bu çalışmada, genişletilmiş çarpımsal P-fonksiyonunun yeni bir sınıfı tanımlandı. Bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler türetildi. Elde edilen sonuçlar ile önceki sonuçların iyileştirilmesini ve geliştirilmesini sağlandı. Literatürde ilk defa multiplicatively geometrik P-fonksiyon tanımı ilk olarak bu çalışmada verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard integral eşitsizliği, P-fonksiyon, GA-konveks fonksiyon, multiplicatively geometrik P-fonksiyon

SUMMARY

SOME NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR MULTIPLICATIVELY GEOMETRICALLY P-FUNCTIONS

KARACA, Halil

University of Giresun

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mahir KADAKAL

APRIL 2020, 38 Pages

In this paper, we introduce a new class of extended multiplicatively geometric P-function. Some new Hermite-Hadamard type inequalities are derived. Results represent significant refinement and improvement of the previous results. Ideas of this paper may stimulate further research. For the first time in the literature, the definition of multiplicatively geometric P-function is first given in this study.

Key Words: Convex function, Hermite-Hadamard integral inequality, P-function, GA-convex function, Multiplicatively geometric P-function

BÖLÜM 1.GİRİŞ

Konveksliğin temelini Arşimet'in π değerini hesaplamasıyla atıldığını söyleyebiliriz. Bu ise M.Ö. 3. yüzyıla kadar dayanmaktadır. Ancak 1881 yılında Hermite'in yaptığı çalışmaya kadar bu kavram pek gündeme gelmemiştir. 1905 yılından sonra Jensen 'in konvekslik alanda yaptığı çalışmalar ciddi kabul görmüştür.

Daha sonra devam eden süreçte Beckenbach ve Bellman (1961), Mitrinovic (1970) gibi araştırmacılar konveks fonksiyonlar ile ilgili eşitsizliklere yazmış oldukları kitaplarında yer vermişlerse de konveks fonksiyonlar için eşitsizlik içeren ilk kaynağı 1987 yılında Pecaric'in yazdığı bilinmektedir [21].

Matematikçiler tarafından yakın zamanda eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonlar yakından takip edilmekte ve bunlarla ilgili birçok çalışmalar yapılmaktadır. Bilinen durumlardan bazı özel ve genel sonuçlar çıkarılmaya devam edilmektedir.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda da bazı konvekslik türleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve yeni integral eşitsizlikleri inşa edilmiştir. Biz de bu çalışmamızda literatüre bizim tarafımızdan eklenecek olan multiplicatively geometrik P -fonksiyonlar için bazı yeni integral eşitsizlikler elde ettik. Elde ettiğimiz bu tanımdan yola çıkarak bir makale yayımladık [19].

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezimizde bize yardımcı olacağını düşündüğümüz bilinen bazı tanımları, teoremleri, eşitsizlikleri ve ortalamaları vereceğiz.

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay) $L \neq \emptyset$ bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: K \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye K cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir [1].

A) L kümesi $+$ işlemine göre bir gruptur.

G1. $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in L$ vardır.

G4. $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır.

G5. $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

L1. $a.x \in L$ dir.

L2. $a.(x + y) = a.x + a.y$ dir.

L3. $(a + b).x = a.x + b.x$ dir.

L4. $(ab).x = a.(b.x)$ dir.

L5. $1.x = x$ dir. ($1, K$ cisminin birim elemanıdır)

Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç

noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir [3].

Tanım 2.1.3. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvektir denir [26].

Yukarıdaki tanımı; “Eğer $B = \{(x, y): y \geq f(x), x \in I\}$ kümesi konveks ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir” şeklinde de ifade edebiliriz.

Eğer $\alpha \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki “ $\leq$ ” yerine “ $<$ ” gelir, yani;

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir

Tanım 2.1.4. (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard integral eşitsizliği denir. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği bir konveks fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar [25].

2.2.Bazı Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel sayıların ikili n -lisi olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir [22].

Teorem 2.2.2. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [22].

Tanım 2.2.1. (Power-Mean İntegral Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [22].

Aşağıdaki teoremden Hölder integral eşitsizliğinden daha iyi yaklaşım veren ve literatürdeki adı Hölder-İşcan integral eşitsizliği olan eşitsizlik ispatlamıştır [17].

Teorem 2.2.3. (Hölder-İşcan İntegral Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $|f|^p$, $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. O halde aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir [17].

i)

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x)g(x)|dx \\ & \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx \right)^{1/q} \right\} \quad (2.1) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b (b-x) |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b (x-a) |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \right\} \\ & \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (2.2)$$

İspat.

i) Birinci yöntem (Kısa Yöntem) İntegraller için Hölder eşitsizliğinden yararlanarak kolayca

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| |g(x)| dx &= \frac{1}{b-a} \left\{ \int_a^b \left| (b-x)^{1/p} f(x) (b-x)^{1/q} g(x) \right| dx \right. \\ & \quad \left. + \int_a^b \left| (x-a)^{1/p} f(x) (x-a)^{1/q} g(x) \right| dx \right\} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b (b-x) |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b (x-a) |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

İkinci yöntem (Uzun Yöntem): İntegraller için Hölder Eşitsizliğinde sırasıyla $[a, \lambda b + (1-\lambda)a]$ alt aralığı ve $[\lambda b + (1-\lambda)a, b]$ alt aralığını uygularsak,

$$\int_a^{\lambda b + (1-\lambda)a} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^{\lambda b + (1-\lambda)a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\lambda b + (1-\lambda)a} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\int_{\lambda b + (1-\lambda)a}^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\lambda b + (1-\lambda)a}^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\lambda b + (1-\lambda)a}^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)|dx &\leq \left(\int_a^{\lambda b + (1-\lambda)a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\lambda b + (1-\lambda)a} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_{\lambda b + (1-\lambda)a}^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\lambda b + (1-\lambda)a}^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir. (1.3) eşitsizliğinin sağ tarafına $x = ub + (1 - u)a$ değişken değişikliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)|dx &\leq (b-a) \left\{ \left(\int_0^\lambda |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{1/p} \left(\int_0^\lambda |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{1/q} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_\lambda^1 |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{1/p} \left(\int_\lambda^1 |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının λ değişkenine göre $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinden integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)|dx &\leq (b-a) \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^\lambda |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\lambda |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left(\int_\lambda^1 |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\lambda^1 |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} d\lambda \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi Hölder eşitsizliğinin sağ tarafını son eşitsizlikteki integrallere uygularsak

$$\begin{aligned} &\int_a^b |f(x)g(x)|dx \\ &\leq (b-a) \left\{ \left(\int_0^1 \int_0^\lambda |f(ub + (1-u)a)|^p du d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_0^\lambda |g(ub + (1-u)a)|^q du d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^1 \int_\lambda^1 |f(ub + (1-u)a)|^p du d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_\lambda^1 |g(ub + (1-u)a)|^q du d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

olur. Burada, Fubini Teoremi ve $u = \frac{x-a}{b-a}$ değişken değişikliğinden,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx$$

$$\begin{aligned} &\leq (b-a) \left\{ \left(\int_0^1 \int_u^1 |f(ub + (1-u)a)|^p d\lambda du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_u^1 |g(ub + (1-u)a)|^q d\lambda du \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 \int_0^u |f(ub + (1-u)a)|^p d\lambda du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_0^u |g(ub + (1-u)a)|^q d\lambda du \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &= (b-a) \left\{ \left(\int_0^1 (1-u) |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-u) |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 u |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 u |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &= (b-a) \left\{ \left(\int_0^1 (1-u) |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-u) |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 u |f(ub + (1-u)a)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 u |g(ub + (1-u)a)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ &= (b-a) \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a) |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz.

ii) İlk olarak

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

durumunu göz önüne alalım. Buradan, her $x \in [a, b]$ için $f(x) = 0$ veya her $x \in [a, b]$ için $g(x) = 0$ ise aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx = 0$$

Dolayısıyla, (2.2) eşitsizliğinden bu durum açıktır.

Son olarak;

$$I = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$$

durumunu ele alalım. Buradan,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)I} \left\{ \left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{1}{(b-a)} \left\{ \left(\frac{\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallere $x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y$ eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)I} \left\{ \left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{1}{(b-a)} \left\{ \left(\frac{\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx}{p \int_a^b |f(x)|^p dx} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx}{q \int_a^b |g(x)|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\int_a^b (x-a) |f(x)|^p dx}{p \int_a^b |f(x)|^p dx} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\int_a^b (x-a) |g(x)|^q dx}{q \int_a^b |g(x)|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Remark: Hölder-İşcan integral eşitsizliği, Hölder integral eşitsizliğinden daha iyi yaklaşım verir.

Theorem 2.2.4 (Improved Power-Mean İntegral Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $|f|^p, |g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. O halde aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir [20].

i)

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (2.4)$$

ii)

$$\frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (2.5)$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

İspat.

i) İlk olarak $q > 1$ olsun. Hölder İntegral eşitsizliğinden yararlanarak kolayca

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)|dx &= \frac{1}{b-a} \left\{ \int_a^b \left| (b-x)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{1}{p}}(x) (b-x)^{\frac{1}{q}} f^{1/q}(x) g(x) \right| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b \left| (x-a)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{1}{p}}(x) (x-a)^{\frac{1}{q}} f^{1/q}(x) g(x) \right| dx \right\} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. $q = 1$ için eşitsizlik (2.4) eşitsizliğine eşit olmaktadır.

ii) İlk olarak aşağıdaki eşitliğin var olduğunu düşünelim.

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

Buradan, her $x \in [a, b]$ için $f(x) = 0$ veya her $x \in [a, b]$ için $g(x) = 0$ ise böylece

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx = 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla (2.5) eşitsizliğinden bu durum açıktır. Son olarak aşağıdaki durumu ele alalım.

$$S = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-a)S} &\left\{ \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a) |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\frac{\int_a^b (b-x)|f(x)|dx}{\int_a^b |f(x)|dx} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{\int_a^b (b-x)|f(x)||g(x)|^q dx}{\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\frac{\int_a^b (x-a)|f(x)|dx}{\int_a^b |f(x)|dx} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{\int_a^b (x-a)|f(x)||g(x)|^q dx}{\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

elde edilir. $q > 1$ olsun. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallere $x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{(b-a)S} \left\{ \left(\int_a^b (b-x)|f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x)|f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a)|f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \frac{(q-1) \int_a^b (b-x)|f(x)|dx}{q \int_a^b |f(x)|dx} + \frac{\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx}{q \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx} \right. \\ \left. + \frac{(q-1) \int_a^b (x-a)|f(x)|dx}{q \int_a^b |f(x)|dx} + \frac{\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx}{q \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx} \right\} \\ = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$$

elde edilmiş olur.

iii) Eşitsizliğin $q = 1$ için sağlandığı kolayca görülür ve ispat tamamlanır.

Remark. Improved Power-Mean integral eşitsizliği, Power-Mean integral eşitsizliğinden daha iyi yaklaşım verir.

2.3. Bazı Ortalamalar

Tanım 2.3.1: Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir [2,4].

1. Aritmetik Ortalama:

$$A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$$

2. Geometrik Ortalama:

$$G = (a, b) = \sqrt{ab}$$

3.Harmonik Ortalama:

$$H = H(a, b) = \frac{2ab}{a + b}$$

4.Logaritmik Ortalama:

$$L = L(a, b) = \frac{a - b}{\ln b - \ln a}$$

5.Identrik Ortalama:

$$I = I(a, b) = \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} & , a \neq b \end{cases}$$

BÖLÜM 3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, çalışmamızın bulgular kısmında elde ettiğimiz sonuçları çıkarmamıza yardımcı olan P -fonksiyonlar, P -GA-fonksiyonlar, multiplicatively P -fonksiyonların tanımını ve bunlarla ilgili bazı teoremleri ve özellikleri vereceğiz.

Tanım 3.1: Negatif olmayan bir $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in (0,1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa f' 'ye p -fonksiyon denir [6].

$I \subseteq \mathbb{R}$ üzerindeki p -fonksiyonların kümesini $P(I)$ ile göstereceğiz.

[6]'da Dragomir ve diğerleri p -fonksiyonlar için aşağıdaki Hadamard tipli eşitsizliği ispatlamışlardır.

Teorem 3.1: $f \in P(I)$, $a, b \in I$ için $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. O halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq 2[f(a) + f(b)]$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 3.2: Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olsun. Eğer I üzerinde

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

ise $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu GA-konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Burada $x^t y^{(1-t)}$ ve $tf(x) + (1-t)f(y)$ ifadeleri sırasıyla iki pozitif x ve y sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $f(x)$ ve $f(y)$ fonksiyonlarının ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır [23,24].

[14]'de, $s = 1$ olması durumunda, geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilebilir.

$$f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin GA-konveks fonksiyonlar üzerindeki bazı araştırmaları, bazı yazarlar tarafından kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır (örneğin [5,7,11,13,14,15,16,18,27] ve yazarlar, GA-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir incelemesini elde etmiştir.

Tanım 3.3: $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(x) + f(y)$$

Eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna I aralığı üzerinde $P - GA$ -fonksiyon (p -Geometrik-Aritmetik Fonksiyon) denir [13].

$p - GA$ -fonksiyonlar için Hermite-Hadamard aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 3.2: $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon öyle ki $a, b \in I$ için $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. eğer f , $[a, b]$ üzerinde $PA - G$ -fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik vardır [13].

$$f(\sqrt{ab}) - \frac{2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \leq 2[f(a) + f(b)]$$

[12]'de, İşcan teoremleri ispatlamak için aşağıdaki lemmayı kullanmıştır.

Lemma 3.1: $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L(a, b)$ ise bu takdirde aşağıdaki eşitlikler vardır [12].

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \\ = \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \\ = \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^t f'(a^{1-t}b^t) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^t f'(b^{1-t}a^t) dt \right] \\ = a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 (2t - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^t f'(a^{1-t}b^t) dt \end{aligned}$$

Tanım 3.4: $I \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathbb{R}$ 'de bir aralık olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $f: I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye multiplicatively P -fonksiyon denir [8,9,10].

Bu çalışmanın asıl amacı, mutlak değerinin türevi olan geometrik p -fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni tahmin ve bulgularını oluşturmaktır. Bunun için yukarıdaki lemmayı kullanacağız.



BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Multiplicatively geometrik P -fonksiyonların tanımı, bazı özellikleri ve bu fonksiyonlar için Hermite Hadamard integral eşitsizliği ile bu türden bazı fonksiyonlar için yeni özellikler vereceğiz.

4.1. Multiplicatively Geometrik P -fonksiyonun Tanımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 4.1.1: $I \neq \emptyset$ olmak üzere $I, (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ de bir aralık olsun. Her $a, b \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için $f: I \subseteq (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq f(a)f(b)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye *multiplicatively geometrik P -fonksiyon* denir.

I aralığı üzerinde multiplicatively geometrik P -fonksiyonların kümesini $MGP(I)$ ile göstereceğiz.

Remark: Multiplicatively geometrik P -fonksiyonların görüntü kümesi 1 den büyük ya da 1'e eşittir.

İspat. $t = 1$ için

$$f(a) \leq f(a)f(b) \Rightarrow f(a)[1 - f(b)] \leq 0$$

dır. Burada $f(a) \geq 0$ yani $f(b) \geq 1$ elde ederiz.

Benzer şekilde $t \neq 0$ için,

$$f(b) \leq f(a)f(b) \Rightarrow f(b)[1 - f(a)] \leq 0$$

dır. $f(b) \geq 0$ olduğundan $f(a) \geq 1$ alıyoruz.

Örnek 4.1.1: Her $c \in [1, \infty)$ için, $f(x) = c$ sabit fonksiyonu bir multiplicatively geometrik P -fonksiyondur.

Teorem 4.1.1: $I \subset (0, \infty)$ olmak üzere $f: I \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu azalmayan ve multiplicatively P -fonksiyon ise o halde f fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyondur.

İspat. Kısaca, $f(a^t b^{1-t}) \leq f(ta + (1-t)b) \leq f(a)f(b)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2: $I \subset (0, \infty)$ olmak üzere $f: I \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu artmayan ve multiplicatively geometrik P -fonksiyon ise o halde f fonksiyonu multiplicatively P -fonksiyondur.

İspat. Kısaca, $f(ta + (1-t)b) \leq f(a^t b^{1-t}) \leq f(a)f(b)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3: $I \subset (0, \infty)$ olmak üzere $f, g: I \rightarrow [1, \infty)$ olsun. Eğer f ve g multiplicatively geometrik P -fonksiyon ise o halde fg fonksiyonu da multiplicatively geometrik P -fonksiyondur.

İspat. Her $a, b \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} (fg)(a^t b^{1-t}) &= f(a^t b^{1-t})g(a^t b^{1-t}) \\ &\leq [f(a)f(b)][g(a)g(b)] \\ &= [f(a)g(a)][f(b)g(b)] \\ &= [(fg)(a)][(fg)(b)] \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4: $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ olsun. O halde $f: [a, b] \subset [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyonudur ancak ve ancak $f \circ g: [\ln a, \ln b] \rightarrow \mathbb{R}$ multiplicatively geometrik P -fonksiyonudur.

İspat. $(\Rightarrow)$ Her $a, b \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t \ln a + (1-t) \ln b) &= f(e^{\ln(a^t b^{1-t})}) \\ &= f(a^t b^{1-t}) \\ &\leq f(a)f(b) \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$(\Leftarrow)$ Her $a, b \in [1, \infty)$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned} f(a^t b^{1-t}) &= (f \circ g)(t \ln a + (1-t) \ln b) \\ &\leq (f \circ g)(\ln a) (f \circ g)(\ln b) \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Multiplicatively Geometrik P -Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği

Bu çalışmanın amacı multiplicatively geometrik P -fonksiyonları açıklamak ve bu fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri oluşturmaktır.

Teorem 4.2.1: $f: I \rightarrow [1, \infty)$ multiplicatively geometrik P -fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right) dx \leq \frac{f(a)f(b)}{\ln b - \ln a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olduğundan aşağıdaki eşitsizliği yazarız.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &= f\left(\sqrt{(a^t b^{1-t})(a^{1-t} b^t)}\right) \\ &\leq f(a^t b^{1-t}) f(a^{1-t} b^t) \\ &\leq f(a) f(b) f(a^{1-t} b^t) \\ &\leq [f(a) f(b)]^2 \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin, $[0,1]$ kapalı aralığında integralini alırsak,

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right) dx \leq \frac{f(a)f(b)}{\ln b - \ln a} \int_a^b f(x) dx \leq [f(a)f(b)]^2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2: $I \subset (0, \infty)$, $\mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $|f'|$ fonksiyonu geometrik P -fonksiyon olacak şekilde I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a < b$ olmak üzere her $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ &\leq |f'(a)| |f'(b)| \left[\frac{b-a}{2} + \frac{2L(a,b)}{b-a} (G(a,b) - A(a,b)) \right] \end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.1 den,

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx = a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 (2t-1) \left(\frac{b}{a}\right)^t f'(a^{1-t} b^t) dt$$

olduğunu biliyoruz. $|f'|$ multiplicatively geometrik P -fonksiyon olduğundan, yukarıdaki eşitliğe göre,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 (2t-1) \left(\frac{b}{a}\right)^t f'(a^{1-t}b^t) dt \right| \\
&\leq a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 |2t-1| \left|\left(\frac{b}{a}\right)^t\right| |f'(a^{1-t}b^t)| dt \\
&\leq a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 |2t-1| \left|\left(\frac{b}{a}\right)^t\right| |f'(a)| |f'(b)| dt \\
&= a \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \int_0^1 |2t-1| \left(\frac{b}{a}\right)^t dt \\
&= a \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) \left(\frac{b}{a}\right)^t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) \left(\frac{b}{a}\right)^t dt \right] \\
&= |f'(a)| |f'(b)| \left[\frac{b-a}{2} - \frac{b+a}{\ln b - \ln a} + \frac{2\sqrt{ab}}{\ln b - \ln a} \right] \\
&= |f'(a)| |f'(b)| \left[\frac{b-a}{2} + \frac{2L(a,b)}{b-a} (G(a,b) - A(a,b)) \right]
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3: $I \subset (0, \infty)$, $\mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu geometrik P -fonksiyon olacak şekilde $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$ olduğunu varsayalım. $a < b$ olacak şekilde her $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^q, b^q)$$

İspat. $a, b \in I$ olsun. Hölder İntegral eşitsizliği ve Lemma 3.1'den yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
&\leq \left| a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 (2t-1) \left(\frac{b}{a}\right)^t f'(a^{1-t}b^t) dt \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq a \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\int_0^1 |2t - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| \left(\frac{b}{a} \right)^t \right|^q |f'(a^{1-t} b^t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq a \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\int_0^1 |2t - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^{tq} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= a \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(\int_0^1 |2t - 1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= a \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b^q - a^q}{\ln b^q - \ln a^q} \frac{1}{a^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}}(a^q, b^q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 |2t - 1|^p dt = \frac{1}{p+1}$$

dir.

Teorem 4.2.4: $I \subset (0, \infty)$, $\mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu geometrik P -fonksiyon olacak şekilde $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$ olduğunu varsayalım. $a < b$ olacak şekilde her $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
&\leq |f'(a)| |f'(b)| \left[\frac{b^q - a^q}{2^q} - 2 \frac{A(a^q, b^q) L(a^q, b^q)}{q} + 2 \frac{G(a^q, b^q) L(a^q, b^q)}{q(b^q - a^q)} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat. $a, b \in I^0$ olsun. f fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olduğundan Lemma 3.1 ve power-mean integral eşitsizliğinden,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| a \frac{\ln b - \ln a}{2} \int_0^1 (2t-1) \left(\frac{b}{a}\right)^t f'(a^{1-t}b^t) dt \right| \\
& \leq a \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\int_0^1 |2t-1|^p dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |2t-1| \left(\frac{b}{a}\right)^{tq} |f'(a^{1-t}b^t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq a \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(\int_0^1 |2t-1|^p dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |2t-1| \left(\frac{b}{a}\right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = a \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |2t-1| \left(\frac{b}{a}\right)^{tq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = |f'(a)| |f'(b)| \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{b^q - a^q}{2q} - 2 \frac{A(a^q, b^q) L(a^q, b^q)}{q} + 2 \frac{G(a^q, b^q) L(a^q, b^q)}{q(b^q - a^q)} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1: Teorem 3.2.4 nin şartları altında $q = 1$ alınırsa Teorem 3.2.2 deki eşitsizlik elde edilir.

Şimdi [12]'de verilen Lemmadaki birinci eşitliği kullanarak aşağıdaki teoremleri yazabiliriz.

Teorem 4.2.5: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $|f'|$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olacak şekilde I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $0 < a < b$ olacak şekilde $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. O halde $t \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq 2 \frac{|f'(a)| |f'(b)|}{\ln b - \ln a} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

İspat. Lemma 3.1 ve $|f'|$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olmasından dolayı

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left| a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right| + \left| b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right| \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 \left| t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} \right| |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt + b \int_0^1 \left| t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} \right| |f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}}b^{\frac{t}{2}})| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{\frac{t}{2}}b^{1-\frac{t}{2}})| dt \right] \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)f'(b)| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)f'(b)| dt \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)||f'(b)| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right] \tag{4.1}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$I_1 = \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt$$

$$I_2 = \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt$$

ile gösterelim. Şimdi bu integralleri ayrı ayrı hesaplayalım: Birinci integralde

$$\begin{cases} t = u \text{ ise } dt = du \\ \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt = dv \text{ ise } \frac{2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} = v \end{cases}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt = t \frac{2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{2t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde ikinci integrali hesaplamak için

$$\begin{cases} t = u \text{ ise } dt = du \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} dt = dv \text{ ise } \frac{2}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} = v \end{cases}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygularsak

$$I_2 = \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} \left| f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) \right| dt = \frac{2}{\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right)$$

bulmuş oluruz. Bulunan bu integraller (4.1) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)f'(b)| \left[a \frac{2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) \right. \\
&\quad \left. + b \frac{2}{\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)f'(b)| \frac{2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \left[a \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) \right. \\
&\quad \left. - b \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) \right] \\
&= \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} \left[a \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) + b \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right) \right] \\
&= \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} \left[\left(a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2a \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + 2a \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(b \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2b \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 2b \right) \right] \\
&= \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} \left[\left(\sqrt{ab} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2\sqrt{ab} + 2a \right) + \left(\sqrt{ab} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2\sqrt{ab} + 2b \right) \right] \\
&= \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} \left[\left(\sqrt{ab} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2\sqrt{ab} + 2a \right) + \left(\sqrt{ab} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2\sqrt{ab} + 2b \right) \right] \\
&= \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} [2a + 2b - 4\sqrt{ab}] \\
&= 2 \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2
\end{aligned}$$

elde edilir

Teorem 4.2.6: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $|f'|^q$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -function olacak şekilde I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a < b$ olmak üzere her $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ için olsun. O halde $t \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq \frac{2|f'(a)f'(b)|}{|\ln b - \ln a|} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

İspat. Lemma 3.1, Power-mean integral eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun multiplicatively geometrik P -function özelliğinin kullanılması ile

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] + \left[b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}}b^{\frac{t}{2}})| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-\frac{t}{2}}a^{\frac{t}{2}})| dt \right] \right| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}}b^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-\frac{t}{2}}a^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left[a \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + b \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left(a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)
\end{aligned}$$

$$= 2 \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1: Lemma 3.1'deki birinci eşitliğe multiplicatively P -fonksiyonunun tanımını ve power-mean eşitsizlikleri ayrı ayrı uygulandığında aynı yaklaşım elde edilir.

Teorem 4.2.7: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $|f'|^q$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olacak şekilde I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a < b$ olacak şekilde $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. O halde $t \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq |f'(a)f'(b)| \left(\frac{\ln b - \ln a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \right) \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left[(G(a^q, b^q) - a^q)^{\frac{1}{q}} + (b^q - G(a^q, b^q))^{\frac{1}{q}} \right]$$

İspat. Lemma 3.1, İntegraller için Hölder Eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun multiplicatively geometrik P -fonksiyon olmasından dolayı aşağıdaki yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\ &= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\ &= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \right| \left| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\ &\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left| a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right| + \left| b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right| \right] \\ &= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \left| \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-\frac{t}{2}} b^{\frac{t}{2}}) dt \right| + b \left| \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-\frac{t}{2}} a^{\frac{t}{2}}) dt \right| \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}} b^{\frac{t}{2}})| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-\frac{t}{2}} a^{\frac{t}{2}})| dt \right] \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}} b^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + b \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(b^{1-\frac{t}{2}} a^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + b \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left[a \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} + b \left(\int_0^1 t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)| |f'(b)| \left[a \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} + b \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= |f'(a)f'(b)| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left[a \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{q}{2}} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} + b \left(- \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{q}{2}} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= |f'(a)f'(b)| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left[a \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{q}{2}} - 1 \right)^{\frac{1}{q}} + b \left(- \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{q}{2}} + 1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= |f'(a)f'(b)| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(a^q \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{q}{2}} - a^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(-b^q \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{q}{2}} + b^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= |f'(a)f'(b)| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sqrt{(ab)^q} - a^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(-\sqrt{(ab)^q} + b^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f'(a)f'(b)| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sqrt{(ab)^q} - a^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(-\sqrt{(ab)^q} + b^q\right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left(\frac{\ln b - \ln a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\right) \left(\frac{2}{q \ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(G(a^q, b^q) - a^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(b^q - G(a^q, b^q)\right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Şimdi, Hölder ve power-mean integral eşitsizliklerinden daha iyi yaklaşım veren Hölder-İşcan ve improved power-mean integral eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki teoremleri ispatlayacağız.

Teorem 4.2.8: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $|f'|^q$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olacak şekilde I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a < b$ olmak üzere her $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. O halde $t \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)f'(b)| \\
&\left(\frac{2}{q^2 \ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(2\sqrt{ab} - 2a^q - a^q \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2a^q - 2\sqrt{ab} + \sqrt{ab} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(2b^q - 2\sqrt{ab} + \ln\left(\frac{a}{b}\right) b^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2\sqrt{ab} - 2b^q - \sqrt{ab} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right]
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.1, Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun multiplicatively geometrik P -fonksiyon olması özelliğinden dolayı;

$$\begin{aligned}
&\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
&= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left\| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f' \left(b^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) dt \right] \right\| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left\| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) dt \right] + \left[b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f' \left(b^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) dt \right] \right\| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(b^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| dt \right] \quad (4.3)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| dt \\
I_2 &= \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(b^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| dt
\end{aligned}$$

ile gösterelim. Şimdi de bu integrallere ayrı ayrı Hölder-İşcan integral eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{1-0} \left[\left(\int_0^1 (1-t) t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} \left| f' \left(a^{1-t} (ab)^{\frac{t}{2}} \right) \right| \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \left[\left(\int_0^1 (t^p - t^{p+1}) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t^{p+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f'(a)f'(b)| \left[\left(\int_0^1 (t^p - t^{p+1}) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t^{p+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{qt}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left[\left(\left(\frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{t^{p+2}}{p+2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left((1-t) \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} + \int \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} dt \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{t^{p+2}}{p+2} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(t \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} - \int \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} dt \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left[\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left((1-t) \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} + \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(t \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} - \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^2 \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left((1-t) \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left(t \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f'(a)f'(b)| \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{q/2} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} - 1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{q/2} + \left(\frac{b}{a} \right)^{q/2} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Aynı şekilde I_2 eşitliğine de Hölder-İşcan integral eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)f'(b)| dt \\
&\leq \frac{1}{1-0} \left[\left(\int_0^1 (1-t)t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t.t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t \left(\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \left[\left(\int_0^1 (t^p - t^{p+1}) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t^{p+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} |f'(a)|^q |f'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left[\left(\int_0^1 (t^p - t^{p+1}) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t^{p+1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{qt}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f'(a)f'(b)| \left[\left(\left(\frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{t^{p+2}}{p+2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left((1-t) \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} + \int \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} dt \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{t^{p+2}}{p+2} \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(t \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} - \int \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} dt \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left[\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left((1-t) \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} + \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \right)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(t \frac{2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2}}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} - \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \right)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left((1-t) \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left(t \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{qt/2} \right) \Big|_0^1 \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)f'(b)| \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{q/2} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} - 1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{q/2} + \left(\frac{a}{b} \right)^{q/2} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeleri (4.3) eşitsizliğinde yerlerine yazarsak

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)f'(b)| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a)f'(b)| dt \right] \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)f'(b)| \left[\left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[a \left(\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{q/2} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} - 1 \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{b}{a} \right)^{q/2} + \left(\frac{b}{a} \right)^{q/2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b \left(\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{q/2} + 1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(\frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{a}{b} \right)^{q/2} - \frac{2}{q \ln \left(\frac{a}{b} \right)} - \left(\frac{a}{b} \right)^{q/2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right] \right] \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} |f'(a)f'(b)| \left[\left(\frac{2}{q^2 \ln^2 \left(\frac{b}{a} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(2\sqrt{ab} - 2a^q \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - a^q \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{\frac{1}{q}} + \left(2a^q - 2\sqrt{ab} + \sqrt{ab} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(2b^q - 2\sqrt{ab} + \ln \left(\frac{a}{b} \right) b^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(2\sqrt{ab} - 2b^q - \sqrt{ab} \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.9: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $|f'|^q$ fonksiyonu multiplicatively geometrik P -fonksiyon olacak şekilde I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a < b$ olmak üzere her $a, b \in I$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. O halde $t \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq 2 \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

İspat. Lemma 3.1, Improved power-mean integral eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun multiplicatively geometrik P -fonksiyon olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
& \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
&= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \right| \left| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt - b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right] \right| \\
&\leq \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \right| \left| \left| a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right| + \left| b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}}) dt \right| \right| \\
&\leq \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \right| \left[a \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt + b \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt \right] \quad (3.4)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Kısalık olsun diye

$$I_1 = \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt \text{ ve } I_2 = \int_0^1 t \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt$$

ile gösterelim. Bu integrallere ayrı ayrı improved power-mean integral eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt \\
&\leq \frac{1}{1-0} \left[\left(\int_0^1 (1-t) t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t) t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t \cdot t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t t \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\int_0^1 (1-t)t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}}b^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} |f'(a^{1-\frac{t}{2}}b^{\frac{t}{2}})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)||f'(b)| \left[\left(\int_0^1 (t-t^2) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (t-t^2) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&= |f'(a)||f'(b)| \left[\int_0^1 (t-t^2) \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt + \int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right] \\
&= |f'(a)||f'(b)| \left[\int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt - \int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt + \int_0^1 t^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \right] \\
&= |f'(a)||f'(b)| \int_0^1 t \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{2}} dt \\
&= |f'(a)||f'(b)| \frac{2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + 2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde I_2 eşitliğine de improved power-mean integral eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 t \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{t}{2}} |f'(b^{1-t}(ab)^{\frac{t}{2}})| dt \\
&\leq |f'(a)||f'(b)| \frac{2}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + 2}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu integraller (3.4) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \\
& \leq \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \right| |f'(a)| |f'(b)| \left[a \frac{2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left(\frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{b}{a} \right) - 2 \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + 2}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \right) \right. \\
& \quad \left. + b \frac{2}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} \left(\frac{\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{a}{b} \right) - 2 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} + 2}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} \right) \right] \\
& = 2 \frac{|f'(a)f'(b)|}{\ln b - \ln a} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2: Teorem 4.2.5, Teorem 4.2.6 ve Teorem 4.2.9 da Lemma 3.1 deki eşitlik için aynı yaklaşımı elde ettik

BÖLÜM 5.TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar özgün olup multiplicatively geometrik P-fonksiyonların tanımı ve bazı özellikleri literatüre kazandırılmıştır. Bu tür fonksiyonlarla ilgili Hermite-Hadamard integral eşitsizliği elde edilmiş ve bazı sonuçlara varılmıştır. Bu çalışmadan yola çıkılarak farklı özdeşlikler kullanılarak multiplicatively geometrik P-fonksiyonlarla ilgili başka yeni eşitsizlikler de elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Anton, Elementary Linear Algebra, Wiley, 10th Ed. USA, 2010
- [2] Bagdasar, O. Inequalities and Applications. Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca, 2006
- [3] Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi, Ankara, 2000.
- [4] Bullen, P. S., Mitrinovic, D. S., Vasić, P. M., Means and Their Inequalities. Springer Science+Business Media, B. V., 1 st edition, 1988.
- [5] Çoban, H.A. İşcan, İ. and Kunt, M., New Ostrowski type inequalities for GA-convex functions, New Trends in Mathematical Sciences, 4(4), 1-11, 2016.
- [6] Dragomir, S.S. Pečarić, J. and Persson, L.E., Some inequalities of Hadamard Type, Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341, July, 1995.
- [7] Kadakal, H., Multiplicatively P-functions, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), Ordu University, Ordu, 27-29 June 2018.
- [8] Kadakal, H., Multiplicatively P-Functions and Some New Inequalities, New Trends in Mathematical Sciences, 2018.
- [9] Kadakal, H., On generalization of some integral inequalities for multiplicatively P-functions, Journal of Applied and Engineering Mathematics, (Yayın için kabul edildi), 2020.
- [10] Kadakal, H., Some integral inequalities for multiplicatively geometrically P-functions, An International Journal of Optimization and Control Theories & Applications, 9(2), pp.216-222, 2019.
- [11] Kadakal, H., Hermite-Hadamard type inequalities for subadditive functions, AIMS Mathematics, 5(2): 930, 2020.
- [12] İşcan, İ., Some new Hermite-Hadamard type inequalities for geometrically convex functions, Mathematics and Statistics 1(2), 86-91, 2013.
- [13] İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for diferentiable P-GA functions, International Journal of Analysis, 6 pages, 2014.
- [14] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions, Le Matematiche, Vol. LXIX, Fasc. II, pp. 129-146, 2014.
- [15] İşcan, İ. and Aydın, M., Some new generalized integral inequalities for GA-s-convex functions via Hadamard fractional integrals, Chinese Journal of Mathematics, Volume 2016, 8 pages, 2016.
- [16] İşcan, İ. and Turhan, S., Generalized Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions via Fractional integral, Moroccan J. Pure and Appl. Anal.(MJPA), 2(1), 34-46, 2016.
- [17] İşcan, İ., New re.nements for integral and sum forms of Hölder inequality, Researchgate, DOI:10.13140/RG.2.2.19356.54409, Preprint, January, 2019.
- [18] Kunt, M. and İşcan, İ., On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA-s-convex functions via fractional integrals, Konuralp journal of Mathematics, 4 (1), 130-139, 2016.
- [19] Kadakal, M., İmdat, İ. and Karaca, Poincare Journal of Analysis Applications, 2(I) ,77-85, 2018.

- [20] Kadakal, M., İşcan, İ., Kadakal, H. and Bekar, K., On improvements of some integral inequalities, Researchgate, DOI: 10.13140/RG.2.2.15052.46724, Preprint, January, 2019.
- [21] Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A.M., Classical and new inequalities in analysis (Vol. 61). Springer Science & Business Media.Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [22] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740, UK, 1993.
- [23] Niculescu, C.P., Convexity according to the geometric mean, Mathematical Inequalities Applications, 3 (2), 155-167, 2000.
- [24] Niculescu, C.P., Convexity according to means, Mathematical Inequalities Applications 6 (4), 571-579, 2003.
- [25] Pachpatte B. G., Mathematical inequalities. North-Holland Mathematical Library, 67, 2005.
- [26] Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc, 469 pp, Boston, 1992.
- [27] Pečarić, J.E., Proschan, F. and Tong, Y.L., Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press Inc., p. 137, 1992.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Çarşamba'da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Çarşamba'da tamamladı. 2012 yılında 19 Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. 2013 yılında Giresun Doğankent Anadolu İmam Hatip Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak atandı. 2019 yılında aynı ilçede bulunan Doğankent Çok Programlı Anadolu Lisesi'nde göreve başladı ve halen bu okulda görev yapmaktadır. 2017 yılında girdiği Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programında öğrenim görmeye devam etmektedir.

