



MUTLAK DİK TOPLANAN ÖZELLİĞİNE

SAHİP MODÜLLERİN

DUAL MODÜLLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Merve KARA

Eskişehir 2019

**MUTLAK DİK TOPLANAN ÖZELLİĞİNE
SAHİP MODÜLLERİN
DUAL MODÜLLERİ**

Merve KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ağustos 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Merve KARA’nın “**Mutlak Dik Toplanan Özelliğine Sahip Modüllerin Dual Mod-
ülleri**” başlıklı tezi 19/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Es-
kişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili
maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiş-
tir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. FİGEN TAKIL MUTLU	
Üye	: Prof. Dr. NÜLİFER ÖZDEMİR	
Üye	: Doç. Dr. FATİH KARABACAK	

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MUTLAK DİK TOPLANAN ÖZELLİĞİNE SAHİP MODÜLLERİN DUAL MODÜLLERİ

Merve KARA

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos 2019

Danışman: Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Fuchs 1970 yılında modüller için mutlak dik toplanan özelliğini (kısaca, Ads) tanımlamış ve bu modül sınıfını incelemiştir. Fuchs'tan sonra da birçok matematikçi bu modül sınıfı üzerine araştırmalarda bulunmuştur. Özellikle son yıllarda bu modül sınıfı üzerine çalışmalarda artış görülmektedir. 2012 yılında Keskin Tütüncü Ads* olarak adlandırılan, Ads modüllerin dual modüllerini tanımlanmış ve bu modül sınıfı üzerine araştırmalarda bulunmuştur.

Bu tezde Ads* modül sınıfının bazı özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla çalışmamızda önce kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir. Keyfi bir modül ile Amply supplemented bir modülün Ads* modül olabilmesi için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir. Ayrıca Ads* modülün dik toplananlar altında kapalı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Supplement alt modül, Small alt modül, Ads*-modül, Mutually projektif.

ABSTRACT

DUAL MODULES OF MODULES WITH THE ABSOLUTE DIRECT SUMMAND PROPERTY

Merve KARA

Department of Mathematics

Programme in Algebra and Number Theory

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, August 2019

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Figen TAKIL MUTLU

Fuchs called the absolute direct summand property (in short, Ads) for modules in 1970 and examined this module class. After Fuchs, many mathematicians have researched on this module class. Especially in recent years there has been an increase in studies on this module class. In 2012, Keskin Tütüncü defined dual modules of Ads modules called Ads^* and studied on this module class.

In this thesis, some properties of Ads^* module were examined. For this purpose, firstly the basic definitions and theorems that will be used in our study were presented. Necessary and sufficient conditions for an arbitrary module and an Amply supplemented module to become an Ads^* module were given. It has also been shown that the Ads^* module is closed under direct summands.

Keywords: Supplement submodule, Small submodule, Ads^* module, Mutually projective

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında çok büyük katkı sağlayan, bilgi ve deneyimleriyle bana sabır ile yol gösterip destek olan çok değerli hocam Doç. Dr. Figen TAKIL MUTLU' ya bana her zaman güvenen ve desteklerini esirgemeyen canım anneme, babama ve aileme sonsuz teşekkürler...

Merve KARA

Ağustos 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Merve KARA

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
1 GİRİŞ	1
1.1 Small (Küçük) alt modüller	5
1.2 Cosmall ve Coclosed alt modüller	9
1.3 Supplement alt modüller	14
1.4 Projektif ve İnjektif Modüller	22
1.5 Quasi-Discrete (Yarı-Ayrık) Modüller	28
1.6 Lifting Modüller	30
2 ADS* MODÜLLER	35
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	43
KAYNAKÇA.....	44
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	: eleman
$\forall$	: her
$\exists$	: En az bir
$\cap$	: kesişim
$\subset$	: alt küme
$\cong$	: izomorf
$\leq$	: alt modül
$\leq_d$	: dik toplanan alt modül
$\ll$	: small alt modül
$\hookrightarrow^{cc}$	: coclosed alt modül
$\hookrightarrow^{cs}$	: cosmall alt modül
$\triangleleft$	: fully invariant alt modül
$\text{Ker } f$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im } f$	: f homomorfizmasının görüntüsü
$\text{Hom}_R(M, N)$	: M den N'ye R-homomorfizmaların kümesi
$\text{End}_R(M)$	: M'nin R-homomorfizmalar halkası
$\text{Aut}(M)$	: M'nin otomorfizmalar halkası
$\text{Rad}(M)$	: M'nin radikali
$\trianglelefteq$	: ideal
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar halkası

1 GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremler verilmiştir. Özellikle, sonraki bölümlerdeki sonuçların kanıtlarının bütünlüğü açısından, small alt modüller, cosmall alt modüller, coclosed alt modüller ve supplement alt modüllere ilişkin sonuçların kanıtları eksiksiz verilmiştir. Bu bölüm ve çalışmamızın temel aldığı modül sınıfları hakkında daha ayrıntılı bilgi için [3], [4], ve [8] önerilir.

Tanım 1.1 M , $+$ ile gösterdiğimiz toplama işlemine göre değişmeli bir grup ve R bir halka olmak üzere

$$\begin{aligned} \cdot : M \times R &\rightarrow M \\ (m, r) &\mapsto m.r \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $m, n \in M$ ve $r, s \in R$ olmak üzere;

- 1) $(m + n).r = m.r + n.r$
- 2) $m.(r + s) = m.r + m.s$
- 3) $m.(r.s) = (m.r).s$

koşulları sağlanıyor ise M 'ye bir **sağ R -modül** denir ve M_R ile gösterilir. Eğer R halkası birimi 1_R olan bir halka ve $\forall m \in M$ için $m.(1_R) = m$ koşulu da sağlanıyorsa M modülüne **birimsel sağ R -modül** denir. Benzer biçimde M sol R -modülü de tanımlanabilir ve ${}_R M$ ile gösterilir.

Bu çalışmada, tüm halkalar birimli ve R böyle bir halkayı göstermek üzere tüm modüller birimsel sağ R -modüllerdir.

Örnek 1.2 Her R halkası kendi üzerinde hem sağ R -modül hem de sol R -modüldür.

Örnek 1.3 Her değişmeli grup $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 1.4 R bir halka ve I da R 'nin toplamsal bir alt grubu olsun. Eğer her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ ise I ya R nin **sol ideali** $ar \in I$ ise I ya R nin **sağ ideali** denir. I hem sol hem de sağ ideal ise I ya R 'nin bir **ideali** denir. $I \trianglelefteq R$ ile gösterilir.

Tanım 1.5 R bir halka ve M bir R -modül olsun. Boş kümeden farklı bir $N \subseteq M$ için N kendi başına bir R -modül ise N 'ye M 'nin **alt modülü** denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

Örnek 1.6 R halkası R -modül olarak düşünüldüğünde alt modüller R 'nin idealleridir.

Tanım 1.7 M bir modül olsun. M modülünün kendisi dışındaki alt modüllerine **öz alt modül** denir.

Teorem 1.8 M bir R -modül ve $N \subseteq M$ olsun. N 'nin M modülünün alt modülü olması için gerek ve yeter koşul,

$$i) N \neq \emptyset,$$

$$ii) x, y \in N \text{ ve } r \in R \text{ için } x + y.r \in N \text{ olmasıdır.}$$

Tanım 1.9 R bir halka, M ve N iki R -modül olsunlar. $\phi : M \rightarrow N$ fonksiyonu $\forall m, n \in M$ ve $\forall r \in R$ için;

$$\begin{aligned} \phi(m + n) &= \phi(m) + \phi(n) \\ \phi(m.r) &= \phi(m).r \end{aligned} \tag{1}$$

koşullarını sağlıyor ise ϕ 'ye bir **modül homomorfizması** veya **R -homomorfizma** denir.

Tanım 1.10 Bir R -homomorfizmaya, bire-bir ise **monomorfizma**; örten ise **epimorfizma**; hem bire bir hem de örten ise **izomorfizma** denir. Modülden kendine giden bir homomorfizmaya modülün bir **endomorfizması**; izomorfizmaya ise modülün bir **otomorfizması** denir. Bir M modülünün tüm endomorfizmaları kümesi $End(M)$; tüm otomorfizmaları kümesi $Aut(M)$ ile gösterilir ve her iki küme de fonksiyon toplamı ve bileşkesi işlemleri ile birer halkadır.

Tanım 1.11 M ve N iki halka olsunlar. $\phi : M \rightarrow N$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda;

$$Ker\phi = \{m \in M : \phi(m) = 0_N\}$$

kümesine ϕ 'nin **çekirdeği**,

$$Im\phi = \{\phi(m) : m \in M\}$$

ise ϕ 'nin **görüntüsü** denir.

Tanım 1.12 M bir R -modül olsun. Eğer M modülünün 0 ve kendisinden başka alt modülü yok ise M 'ye **simple (basit) modül** denir.

Örnek 1.13 F bir cisim olmak üzere kendisi üzerinde bir basit modüldür.

Tanım 1.14 Bir M modülü için M modülündeki her alt modül dik toplanan ise M modülüne *semi-simple (yarı basit) modül* denir.

Örnek 1.15 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_6$ semi-simple modüldür.

Tanım 1.16 M bir modül olsun. M modülünün kendisinden ve sıfırdan başka dik toplananı yok ise M 'ye *indecomposable (ayrıştırılamaz) modül* denir.

Örnek 1.17 p asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_p$ cisim olduğundan ayrıştırılamaz modüldür.

Teorem 1.18 (1. İzomorfizma Teoremi) [2, 16.2.4] $\theta : M \rightarrow R$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda,

$$M/\text{Ker}\theta \cong \text{Im}\theta$$

dır.

Kanıt. $\beta : M/\text{Ker}\theta \rightarrow \text{Im}\theta$, $\beta(m + \text{Ker}\theta) = \theta(m)$ şeklinde tanımlanan bir homomorfizma olsun. $m_1 + \text{Ker}\theta, m_2 + \text{Ker}\theta \in M/\text{Ker}\theta$ için;

$$\begin{aligned} m_1 + \text{Ker}\theta = m_2 + \text{Ker}\theta &\Leftrightarrow m_1 - m_2 \in \text{Ker}\theta \\ &\Leftrightarrow \theta(m_1 - m_2) = O_R \\ &\Leftrightarrow \theta(m_1) - \theta(m_2) \\ &\Leftrightarrow \theta(m_1) = \theta(m_2) \\ &\Leftrightarrow \beta(m_1 + \text{Ker}\theta) = \beta(m_2 + \text{Ker}\theta) \end{aligned}$$

olduğundan β iyi tanımlı ve bire-birdir. Diğer yandan;

$$\begin{aligned} \text{Im}\beta &= \{\beta(m + \text{Ker}\theta) : m + \text{Ker}\theta \in M/\text{Ker}\theta\} \\ &= \{\theta(m) : m \in M\} \\ &= \text{Im}\theta \end{aligned}$$

olduğundan β örten bir homomorfizmadır. Ayrıca;

$$\begin{aligned} \beta((m_1 + \text{Ker}\theta) + (m_2 + \text{Ker}\theta)) &= \beta(m_1 + m_2 + \text{Ker}\theta) \\ &= \theta(m_1 + m_2) \\ &= \theta(m_1) + \theta(m_2) \\ &= \beta(m_1 + \text{Ker}\theta) + \beta(m_2 + \text{Ker}\theta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\beta((m_1 + Ker\theta)(m_2 + Ker\theta)) &= \beta(m_1m_2 + Ker\theta) \\ &= \theta(m_1m_2) \\ &= \theta(m_1)\theta(m_2) \\ &= \beta(m_1 + Ker\theta)\beta(m_2 + Ker\theta)\end{aligned}$$

sağlandığı için β bir halka homomorfizmasıdır. Böylece β bir izomorfizma olup $M/Ker\theta \cong Im\theta$ elde edilir.

Teorem 1.19 (Modüler Kuralı) M bir R -modül olsun. N, K ve P modülleri M modülünün alt modülleri ve $N \subseteq P$ olsun. Bu durumda;

$$N + (K \cap P) = (N + K) \cap P \quad (2)$$

dir.

Kanıt. $N + (K \cap P) \subseteq N + K$ ve $N \subseteq P$ olduğundan,

$$N + (K \cap P) \subseteq N + P \subseteq N$$

dir. Buradan;

$$N + (K \cap P) \subseteq (N + K) \cap P$$

olur. Tersine $m \in (N + K) \cap P$ alalım. $m \in P$ ve $m = n + s$ olacak şekilde $n \in N$ ve $s \in K$ vardır. $N \subseteq P$ olduğundan, $s = m - n \in K \cap P$ olup $m = n + s \in N + (K \cap P)$ bulunur. Böylece;

$$(N + K) \cap P \subseteq N + (K \cap P)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 1.20 K, L ve N modülleri M 'nin alt modülleri olsunlar. $K + L = M$ ve $(K \cap L) + N = M$ olsun. Böylece,

$$K + (L \cap N) = L + (K \cap N) = M \quad (3)$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} K + (L \cap N) &= K + (L \cap K) + (L \cap N) \\ &= K + (L \cap ((L \cap K) + N)) \\ &= K + (L \cap M) = K + L = M \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} L + (K \cap N) &= L + (K \cap L) + (K \cap N) \\ &= L + (K \cap ((K \cap L) + N)) \\ &= L + (K \cap M) = K + L = M \end{aligned}$$

olduğundan $L + (K \cap N) = M$ dir.

1.1 Small (Küçük) alt modüller

Tanım 1.1.1 M bir R -modül olsun. $N \leq M$ alalım. $M = N + N'$ koşulunu sağlayan $N' \leq M$ için $M = N'$ oluyorsa N' 'ye M 'nin **small (küçük) alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. Eğer M modülünün her öz alt modülü small ise M modülüne **hollow** modül denir.

Örnek 1.1.2 Bir $0 \neq M$ modülü için $0 \ll M$ modüldür.

Örnek 1.1.3 $\mathbb{Z}$ modül $\mathbb{Z}_4$ için alt modüller $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ ve $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dir. $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ olsun. $I + J = \mathbb{Z}_4$ için $J = \mathbb{Z}_4$ olduğundan $I \ll \mathbb{Z}_4$ dür.

Örnek 1.1.4 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_8$ hollow modüldür.

Tanım 1.1.5 $f : M \longrightarrow N$ bir örten homomorfizma olsun. Eğer $\text{Ker } f \ll M$ ise f 'ye bir **small epimorfizma** denir.

Teorem 1.1.6 M bir R -modül olsun.

- i) $K \leq L \leq M \leq N$ ve $L \ll M$ ise $K \ll N$ 'dir.
- ii) Sonlu sayıda small alt modülün toplamı da small alt modüldür.
- iii) Small alt modüllerin homomorfizma altındaki görüntüleri de small alt modüldür.
- iv) İki small epimorfizmasının bileşkesi de small epimorfizmadır.

Kanıt. *i)* $K \leq L \leq M \leq N$ ile $L \ll M$ ve $N = K+T$ olsun. $N = K+T \leq L+T \leq N$ olduğundan $N = L + T$ dir. Şimdi $N = T$ olduğunu gösterelim.

$$M = N \cap M = (L + T) \cap M = L + (T \cap M) = T \cap M$$

dir. $M \subset T \subset N$ ve $N = L + T \leq M + T = T$ olduğundan $N = T$ dir.

ii) $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $K_i \leq M$ olsun. n üzerine tümevarım yöntemini uygulayalım.

$$\sum_{i=1}^n K_i \ll M$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için $K_1 \ll M$ dir. $n = 2$ için yapalım. $\sum_{i=1}^2 K_i \ll M$ ise $K_1 + K_2 \ll M$ ve $K_1 \ll M$ olduğu için $K_2 = M$ dir. $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\sum_{i=1}^n K_i \ll M$ olduğundan $K_{i+1} + U = M$ olur. $K_{i+1} \ll M$ olduğu için $U = M$ dir.

iii) $\theta : M \rightarrow N$ bir homomorfizma ve $K \ll M$ olsun. $\theta(K) \ll N$ olduğunu gösterelim. $N = \theta(K) + U$ olsun. $m \in M$ alalım. $\theta(m) \in N$ dir. $\theta(m) = \theta(k) + u$ olacak şekilde $k \in K$ ve $u \in U$ vardır. $\theta(m) - \theta(k) = u$ ve θ homomorfizma olduğu için $\theta(m - k) = u$ olup $(m - k) \in \theta^{-1}(U)$ ve $m \in k + \theta^{-1}(U)$ olur. $M \leq K + \theta^{-1}(U) \leq M$ ve böylece $M = K + \theta^{-1}(U)$ dir. $K \ll M$ olduğundan $M = \theta^{-1}(U)$ elde edilir. Ayrıca $\theta(K) \leq \theta(M) \leq U$ ve $N = \theta(K) + U \leq U$ sağlandığından $U = N$ dir.

iv) $\psi : M \rightarrow N$ ve $\beta : N \rightarrow K$ small epimorfizmalar olsun. $\beta \circ \psi : M \rightarrow K$ 'nin de bir small epimorfizma olduğunu gösterelim. $\beta \circ \psi : M \rightarrow K$ bir epimorfizmadır. $Ker(\beta \circ \psi) + U = M$ olacak biçimde bir $U \leq M$ alalım. $U = M$ olduğunu görelim. ψ epimorfizma olduğu için;

$$\begin{aligned} N = \psi(M) &= \psi(Ker(\beta \circ \psi) + U) \\ &= \psi(Ker(\beta \circ \psi)) + \psi(U) \\ &= Ker\beta + \psi(U) \end{aligned}$$

dur. Bu eşitlikte kullandığımız $\psi(Ker(\beta \circ \psi)) = Ker\beta$ eşitliğini görelim. $\psi(k) \in \psi(Ker(\beta \circ \psi))$ alalım.

$$\begin{aligned} k \in Ker(\beta \circ \psi) &= (\beta \circ \psi)(k) = 0 \\ &= \beta(\psi(k)) = 0 \\ &= \beta(k) \in Ker\beta \end{aligned}$$

$\psi(Ker((\beta \circ \psi))) \subset Ker\beta$ dır. $n \in Ker\beta$ alalım. $\beta(n) = 0$. ψ epimorfizma olduğundan $n = \psi(m)$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Ayrıca $(\beta \circ \psi)(m) = \beta(\psi(m)) = \beta(n) = 0$ olduğundan $m \in Ker(\beta \circ \psi)$ olup

$$n = \psi(m) \in \psi(Ker(\beta \circ \psi))$$

elde edilir. Böylece istenen eşitlik görülmüş olur.

$N = Ker\beta + \psi(U)$ ve $Ker\beta \ll N$ olduğu için $\psi(U) = N$ 'dir. Ayrıca $\psi^{-1}(\psi(U)) = U + Ker\psi$ dir. Gerçekten;

$m \in U + Ker\psi \Rightarrow m = u + m'$ olacak şekilde bir $u \in U$ ve $m' \in Ker\psi$ vardır.

$$\Rightarrow \psi(m) = \psi(u) + \psi(m')$$

$$\Rightarrow \psi(m) = \psi(u) + 0$$

$$\Rightarrow m = \psi^{-1}(\psi(u))$$

$$\Rightarrow U + Ker\psi \subset \psi^{-1}(\psi(U))$$

$m \in \psi^{-1}(\psi(u)) \Rightarrow \psi(m) \in \psi(U)$

$\Rightarrow \psi(m) = \psi(u)$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır.

$$\Rightarrow \psi(m) - \psi(u) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(m - u) = 0$$

$$\Rightarrow m - u \in Ker\psi$$

$$\Rightarrow m \in U + Ker\psi$$

olup $\psi^{-1}(\psi(U)) = U + Ker\psi$ dir. Böylece

$$M = \psi^{-1}(N) = \psi^{-1}(\psi(U)) = U + Ker\psi$$

olduğundan $U = M$ elde edilir.

Teorem 1.1.7 [3, 2.2] K, L, N ve M R -modül olsun.

1) Eğer $K \leq N \leq M$ ve K modülü N içinde small alt modül ise K modülü M modülünde de small alt modüldür.

2) Eğer $N \ll M$ ise N modülündeki herhangi bir alt modül de M içinde small alt modül olur.

3) Eğer $K \subset L \subset M$ ise $L \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ ve $L/K \ll M/K$ olmasıdır.

4) Eğer $K \subset L \subset M$, $L \leq_d M$ ise $K \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll L$

olmasıdır.

5) $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $K_i \ll M$ ($1 \leq i \leq n$) olmasıdır.

Kamıt. 1) M bir R -modül ve $K \ll N$ olmak üzere $K + P = M$ için $P \leq M$ olsun. $K \ll M$ olması için $M = P$ olduğunu görelim. Bu nedenle modüler kuralından,

$$N \cap M = N = N \cap (K + P) = K + (N \cap P)$$

elde edilir. $K \ll N$ olduğundan $N = N \cap P$ ve $N \leq P$ olup $K \leq N = N \cap P \leq P$ den dolayı $K \leq P$ dir. Dolayısıyla $M = P$ olduğundan $K \ll M$ elde edilir.

2) $N \ll M$ olsun. $M = K + P$ için $K \leq N$ ve $P \leq M$ olsun. K modülünün N de small alt modül olması için $M = P$ olduğunu görelim. $M = K + P \leq K + N$ olduğundan dolayı $M = K + N$ yazılabilir. $N \ll M$ olduğundan $P = M$ elde edilir ki $K \ll M$ olur.

3) $\Rightarrow$) 2)'den dolayı $L \ll M$ olduğunda $K \ll M$ elde edilir. $L/K \ll M/K$ olduğunu görelim. Bir $K \subset P$ alt modülü için $M/K = L/K + P/K$ olsun. Buradan $M = L + P$ yazılabilir. $L \ll M$ olduğundan $M = P$ elde edilir. Dolayısıyla $L/K \ll M/K$ olur.

$\Leftarrow$) $\forall P \leq M$ alt modülü için $M = P + L$ olsun. $L \ll M$ olması için $P = M$ olduğunu görelim. $K \leq L$ olduğundan dolayı $L = L + K$ yazılabilir. Buradan

$$M = L + K + P = L + (K + P)$$

ve $K \leq K + P$ den $M/K = L/K + (K + P)/K$ yazılabilir. $L/K \ll M/K$ olduğundan $M/K = (K + P)/K$ olur. Böylece $M = K + P$ yazılabilir. $K \ll M$ olduğundan $M = P$ elde edilir.

4) $K \leq L \leq M$ ve $L \leq_d M$ ve $K \ll M$ olsun.

$\Rightarrow$) $P \leq M$ için $M = L \oplus P$ yazılabilir. $S \leq L$ modülü için $L = K + S$ olsun. $K \ll L$ olması için $L = S$ olduğunu görelim. Buradan $M = L + P = K + S + P$ yazılabilir. $K \ll M$ olduğundan $M = S + P$ elde edilir. $M = L \oplus P$ olduğundan $(L \cap P) = 0$ dır. Modüler kuralından,

$$L \cap M = L = L \cap (S + P) = S + (L \cap P)$$

dir. $(L \cap P) = 0$ olduğundan $L = S$ dir. Dolayısıyla $K \ll L$ elde edilir.

$\Leftarrow$) $M = K + S$ için $S \leq M$ olsun. $K \ll M$ için $M = S$ olduğunu görelim. Modüler kuralından,

$$L \cap M = L = L \cap (K + S) = K + (L \cap S)$$

elde edilir. $K \ll L$ olduğundan $L = (L \cap S)$ ve $L \leq S$ dir. $K \leq L = (L \cap S) \leq S$ olduğundan $K \leq S$ olup $M = S$ dir. Dolayısıyla $K \ll M$ dir.

5) $\Rightarrow$) $K_i + L = M$ olacak şekilde bir $L \leq M$ olsun. $i \neq j$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $K_1 + K_2 + \dots + K_j + \dots + L = M$ dir. Kabulümüzden dolayı, $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll M$ için $M = L$ olup $K_i \ll M$ elde edilir.

$\Leftarrow$) $K_i \ll M$ ve $K_1 + K_2 + \dots + K_n + L = M$ olsun. $K_1 \ll M$ olduğundan $K_2 + K_3 + \dots + K_n + L = M$ yazılabilir. $K_2 \ll M$ olduğundan $K_3 + K_4 + \dots + K_n + L = M$ olur. Benzer şekilde devam edildiğinde $K = M$ olup istenen elde edilir.

Teorem 1.1.8 $K, L, N \leq M$ olsun. Eğer $M = K + L$, $L \subseteq N$ ve $N/L \ll M/L$ ise $(K \cap N)/(K \cap L) \ll M/(K \cap L)$ dir.

Kanıt. $(K \cap L) \subseteq X \subseteq M$ olacak şekilde bir X alt modülü alalım öyle ki $M/(K \cap L) = (K \cap N)/(K \cap L) + X/(K \cap L)$ olsun. Buradan $M = (K \cap N) + X$ yazılabilir. $M = X$ olduğunu gösterelim. $L \subseteq N$ olduğundan $M = K + L = K + N$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} N + (K \cap X) &= N + ((K \cap N) + (K \cap X)) \\ &= N + (K \cap ((K \cap N) + X)) \\ &= N + (K \cap M) = N + K = M \end{aligned}$$

elde edilir. $N/L \ll M/L$ olduğundan $M = L + (K \cap X)$ dir.

$$\begin{aligned} X + (K \cap L) &= X + (K \cap X) + (K \cap L) \\ &= X + (K \cap ((K \cap X) + L)) \\ &= X + (K \cap M) = M \end{aligned}$$

olduğundan $M = X$ elde edilir. Dolayısıyla $(K \cap N)/(K \cap L) \ll M/(K \cap L)$ dir.

1.2 Cosmall ve Coclosed alt modüller

Tanım 1.2.1 ([3]) M bir modül ve $K \subset L \subset M$ olsun. Eğer $\frac{L}{K} \ll \frac{M}{K}$ ise $K \subset L$, M 'de **cosmall (eş küçük) alt modül** denir ve $K \hookrightarrow^{cs} L$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.2 $U \subset K \subset L \subset M$ ve $G \subset H \subset M$ herhangi modüller olsun.

1) Aşağıdakiler denktir:

a) $K \subset L$, M de cosmall alt modüldür.

b) Herhangi bir $X \subset M$ için $L + X = M$ iken $K + X = M$ 'dir.

2) $U \hookrightarrow^{cs} L$ olması için gerek ve yeter şart $U \hookrightarrow^{cs} K$ ve $K \hookrightarrow^{cs} L$ olmasıdır.

3) $X \subset M$ olmak üzere $K + X = M$ ve $K \hookrightarrow^{cs} L$ ise $K \cap X \hookrightarrow^{cs} L \cap X$ 'tir.

4) $G \hookrightarrow^{cs} H$, $K \hookrightarrow^{cs} L$ ve $G + K = M$ ise $K \cap G \hookrightarrow^{cs} L \cap H$ 'dir.

5) $K \subset L \subset M$ olmak üzere $L = K + S$ ve $S \ll M$ ise $K \hookrightarrow^{cs} L$ 'dir.

6) $K \subseteq C \subset M$ olmak üzere $M = K + L$ ve $C \cap L \ll M$ ise $K \hookrightarrow^{cs} C$ 'dir.

7) $\beta : M \rightarrow N$ bir epimorfizma olsun. Buna göre,

a) $K \subset L \subset M$ ve $K \hookrightarrow^{cs} L$ ise $\beta(K) \hookrightarrow^{cs} \beta(L)$ dir.

b) $C \subseteq D \subseteq N$ olmak üzere $C \hookrightarrow^{cs} D$ olması için gerek ve yeter koşul $\beta^{-1}(C) \hookrightarrow^{cs} \beta^{-1}(D)$ olmasıdır.

Kanıt. 1) a) $\Rightarrow$ b) : $K \subset L$, M de cosmall ve $L + X = M$ olsun. $K + X = M$ olduğunu gösterelim. $L/K \ll M/K$ olduğundan

$$M/K = L/K + (X + K)/K = (X + K)/K$$

dir. Dolayısıyla $M = X + K$ olur.

b) $\Rightarrow$ a) : $K \subset X \subset M$ ve $L/K + X/K = M/K$ olsun. Buradan $L + X = M$ olup kabulümüzden $K + X = M$ dir. Böylece $X/K = M/K$ olur ki $L/K \ll M/K$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$) $U \hookrightarrow^{cs} L$ olsun. $U \hookrightarrow^{cs} K$ ve $K \hookrightarrow^{cs} L$ olduğunu gösterelim. $U \subset X$ olmak üzere $K/U + X/U = M/U$ olsun. Böylece $K + X = M$ dir. Ayrıca $K/U \subset L/U$ olduğundan $M/U = L/U + K/U + X/U = L/U + X/U$ dur. Kabulümüzden $L/U \ll M/U$ olup $X/U = M/U$ bulunur. Böylece $K/U \ll M/U$, yani $U \hookrightarrow^{cs} K$ elde edilir. Şimdi $K \hookrightarrow^{cs} L$ olduğunu gösterelim. $K \subset Y$ olmak üzere $M/K = L/K + Y/K$ olsun. Buradan $L + Y = M$ dir. $U \subset K \subset Y$ olduğundan $L + (Y + U) = M$ dir. $U \hookrightarrow^{cs} L$ olduğundan (1)'den $U + (Y + U) = Y = M$ elde edilir. Böylece $L/K \ll M/K$, yani $K \hookrightarrow^{cs} L$ elde edilir.

$\Leftarrow$) $U \hookrightarrow^{cs} K$ ve $K \hookrightarrow^{cs} L$ olsun. $U \hookrightarrow^{cs} L$ olduğunu gösterelim. $U \subset X$ olmak üzere $M/U = L/U + X/U$ olsun. Buradan $M = L + X$ dir. Böylece $M/K = L/K + (X + K)/K$ yazılabilir. Kabulümüz olan $L/K \ll M/K$ 'dan $(X + K)/K = M/K$ elde edilir. Böylece $X + K = M$ dir. O halde $X/U + K/U = M/U$ yazılabilir. Yine

kabulümüz olan $K/U \ll M/U$ 'dan $X/U = M/U$, yani $L/U \ll M/U$ bulunur. Sonuç olarak $U \hookrightarrow^{cs} L$ elde edilir.

3) $U \subset M$ olmak üzere $K \cap X \subset U \subset M$ ve

$$M/(K \cap X) = L \cap X/(K \cap X) + U/(K \cap X)$$

olsun. $M = U$ olduğunu gösterelim. Yardımcı Teorem 1.20'den $M = U + (L \cap X)$ olur. $M = K + X \subset L + X \subseteq M$ olduğundan dolayı $M = L + X$ elde edilir. Yardımcı Teorem 1.20'den, $M = X + (L \cap U) = L + (X \cap U)$ dir.

$$M = L + (X \cap U) = K + (X \cap U) = (K \cap U) + U = U$$

olup $M = U$ elde edilir. Böylece $L \cap X \hookrightarrow^{cs} M$ dir. $K \cap X \subset L \cap X$ ve (1)'den $K \cap X \hookrightarrow^{cs} L \cap X$ elde edilir.

4) (1) ve (3) iki kere uygulandığında,

$$M = L + H = K + H = K + G$$

dir ve $K \cap H \subset L \cap H$ ve $K \cap G \subset K \cap H \hookrightarrow^{cs} M$ dir. (2)'den dolayı $K \cap G \subset L \cap H$, M içinde cosmall alt modüllerdir. Böylece $K \cap G \subset L \cap H$, M içinde cosmall alt modüldür.

5) $K \subset L \subset M$ ve $S \ll M$ olmak üzere $L = K + S$ olsun. $K \hookrightarrow^{cs} L$ olduğunu gösterelim. $M = L + X$ olsun. $S \ll M$ olduğundan $M = K + S + X = K + X$ dir ve (1) den dolayı $K \hookrightarrow^{cs} L$ elde edilir.

6) $M = K + L$, $K \subseteq C \subset M$ ve $C \cap L \ll M$ olsun. $K \hookrightarrow^{cs} C$ olduğunu gösterelim. Modüler kuralından, $C = C \cap M = C \cap (K + L) = K + (C \cap L)$ olup $C \cap L \ll M$ olduğundan $C = K$ dir. Böylece $M = C + L$ olur. (1)'den dolayı $K \hookrightarrow^{cs} C$ modüldür.

(7) $\beta : M \rightarrow N$ bir epimorfizma olsun.

a) $N/\beta(K) = \beta(L)/\beta(K) + U/\beta(K)$ olsun. $n \in N$ için $N + \beta(K) = (\beta(L) + \beta(K)) + (U + \beta(K))$ olacak şekilde $l \in L, u \in U$ vardır. β örten ve $U \leq N$ olduğundan bir $T \leq M$ vardır öyle ki $\beta(T) = U$ dur. Ayrıca bir $m \in M$ için $\beta(m) = n$ dir. O halde

$$\beta(m) + \beta(K) = \beta(l) + \beta(t) + \beta(K)$$

olcak şekilde bir $t \in T$ vardır. Buradan,

$$m - (l + t) \in \beta^{-1}(\beta(K))$$

dir. Yani $m + \beta^{-1}(\beta(K)) = (l+t) + \beta^{-1}(\beta(K))$ dir. β örten olduğundan $K \subseteq \beta^{-1}(\beta(K))$ olup $m + K = (l+t) + K$ elde edilir. $K \hookrightarrow^{cs} L$ olduğundan $\beta(T) = U = \beta(M) = N$ elde edilir.

(b) $\Rightarrow$ $C \hookrightarrow^{cs} D$ olsun. $\beta^{-1}(C) \hookrightarrow^{cs} \beta^{-1}(D)$ olduğunu gösterelim. Bir $\beta^{-1}(C) \leq U \leq M$ için $M/\beta^{-1}(C) = \beta^{-1}(D)/\beta^{-1}(C) + U/\beta^{-1}(C)$ olsun. $n \in N$ için $\beta^{-1}(n) \in M$ olduğundan

$$\beta^{-1}(n) + \beta^{-1}(C) = (\beta^{-1}(d) + u) + \beta^{-1}(C)$$

olacak biçimde $d \in D$ ve $u \in U$ vardır. Ayrıca β örten olduğundan $\beta^{-1}(T) = U$ olacak biçimde $T \leq N$ vardır. Böylece

$$\beta^{-1}(n) + \beta^{-1}(C) = \beta^{-1}(d) + \beta^{-1}(t) + \beta^{-1}(C)$$

olacak biçimde $t \in T$ vardır. Buradan $n - (d+t) \in \beta(\beta^{-1}(C))$ dir. Yani $n + \beta(\beta^{-1}(C)) = (d+t) + \beta(\beta^{-1}(C))$ dir. β örten olduğundan $\beta(\beta^{-1}(C)) = C$ olup $n + C = (d+t) + C$ olur. $C \hookrightarrow^{cs} D$ olduğundan $\beta^{-1}(T) = U = \beta^{-1}(N) = M$ elde edilir.

$\Leftarrow$ $(C)\beta^{-1} \hookrightarrow^{cs} (D)\beta^{-1}$ olsun. $C \hookrightarrow^{cs} D$ olduğunu gösterelim. Bir $C \leq U \leq N$ için $N/C = D/C + U/C$ olsun. Keyfi bir $n \in N$ için

$$n + C = (d + C) + (u + C)$$

olacak şekilde $d \in D$ ve $u \in U$ vardır. β örten olduğundan $\beta(m) = n$, $\beta^{-1}(d') = d$ ve $\beta^{-1}(u') = u$ olacak biçimde $m, d', u' \in M$ vardır. Böylece

$$\beta(m) + C = (\beta(d') + \beta(u')) + C$$

olup β homomorfizma olduğundan $\beta(m - d' - u') \in C$ dir. Buradan $m - d' - u' = \beta^{-1}(n) - \beta^{-1}(d) - \beta^{-1}(u) \in \beta^{-1}(C)$ dir. Böylece $\beta^{-1}(n) + \beta^{-1}(C) = (\beta^{-1}(d) + \beta^{-1}(C)) + (\beta^{-1}(u) + \beta^{-1}(C))$ elde edilir. $\beta^{-1}(n) \in M$ ve $\beta^{-1}(C) \hookrightarrow^{cs} \beta^{-1}(D)$ olduğundan dolayı $\beta^{-1}(U) = M$, yani $U = \beta(M) = N$ olur. Dolayısıyla $C \hookrightarrow^{cs} D$ dir.

Tanım 1.2.3 ([3]) M bir modül ve $L \leq M$ olsun. Eğer L 'nin $K \hookrightarrow^{cs} L$ olacak biçimde bir K öz alt modülü yoksa, yani $K \hookrightarrow^{cs} L$ iken $K = L$ oluyorsa, L modülüne M içinde coclosed (eş kapalı) alt modül denir ve $L \hookrightarrow^{cc} M$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.4 $K \subset L \subset M$ alt modüller olsun.

1) Eğer $L \hookrightarrow^{cc} M$ ise $\frac{L}{K} \hookrightarrow^{cc} \frac{M}{K}$ dir.

- 2) Eğer $K \ll L$ ve $\frac{L}{K} \hookrightarrow^{cc} \frac{M}{K}$ ise $L \hookrightarrow^{cc} M$ dir.
- 3) $L \subset M$ coclosed ve $K \ll M$ ise $K \ll L$ dir ve dolayısıyla $Rad(L) = L \cap Rad(M)$ dir.
- 4) L hollow modül ise $L \subset M$ coclosed ya da $L \ll M$ dir.
- 5) $\beta : M \rightarrow N$ bir small epimorfizma ve $L \hookrightarrow^{cc} M$ ise $\beta(L) \hookrightarrow^{cc} N$ dir.
- 6) Eğer $K \hookrightarrow^{cc} M$ ise $K \hookrightarrow^{cc} L$ dir. Eğer $K \hookrightarrow^{cc} L$ ve $L \hookrightarrow^{cc} M$ ise $K \hookrightarrow^{cc} M$ dir.

Kanıt. 1) Varsayalım ki $N/K \subset L/K$ olacak şekilde bir $N \subset L$ alt modülü var öyle ki M/K da cosmall olsun. $(L/K)/(N/K) \ll (M/K)/(N/K)$ olduğu için $L/N \ll M/N$ olup böylece $N \hookrightarrow^{cs} L$ dir. Bu ise L modülünün M modülünde coclosed olması ile çelişir.

2) Eğer $N \hookrightarrow^{cs} L$ ise Teorem 1.2.2 (7(a))'dan $(N+K)/K \subseteq L/K$, M/K içinde cosmall modüldür. Dolayısıyla $N+K=L$ ve $K \ll L$ olduğu için $N=L$ olup $L \hookrightarrow^{cc} M$ dir.

3) $K \ll M$ olmak üzere $K \subset L$ 'yi göz önüne alalım. Bazı $K' \subset L$ alt modülleri için $K+K' = L$ olduğunu varsayalım. $M/K' = L/K' + L'/K'$ olacak şekilde $K' \subset L' \subset M$ alt modüllerini seçelim.

$$M = L + L' = K + K' + L' = L'$$

olup $L/K' \ll M/K'$ dır. L modülü M modülünde coclosed olduğu için $L = K'$ olup $K \ll L$ dir.

4) Varsayalım ki L modülü M içinde coclosed olmasın. Bu durumda $K \subset L$ olacak şekilde bir K modülü vardır öyle ki $L/K \ll M/K$ dır. L hollow modül olduğu için Teorem 1.1.7'den dolayı $L \ll M$ modüldür.

5) Varsayalım ki $X \hookrightarrow^{cs} \beta(L)$ olsun. $K = \beta^{-1}(X)$ alalım. Teorem 1.2.2 (7)'den $K \hookrightarrow^{cs} L + Ker \beta$ dir. $Ker \beta \subseteq K$ olduğu için $K = Ker \beta + (L \cap K)$ dır. $Ker \beta \ll M$ olduğundan Teorem 1.2.2 (5)'den dolayı, $(L \cap K) \hookrightarrow^{cs} Ker \beta + (L \cap K)$ dır. Dolayısıyla Teorem 1.2.2 (2)'den $(L \cap K) \hookrightarrow^{cs} L + Ker \beta$ dir. Böylece $(L \cap K) \hookrightarrow^{cs} L$ olup $L \hookrightarrow^{cc} M$, $L \cap K = L$ ve burada $X = \beta(L)$ dir.

6) $K/X \ll L/X$ olacak biçimde bir $X \subseteq K$ var olsun. O halde $K/X \ll M/X$ dir. Fakat K modülü M de coclosed olduğu için $K = X$ olup K, L içinde coclosed modüldür. Tersine, $K \hookrightarrow^{cc} L$ ve $L \hookrightarrow^{cc} M$ olduğunu varsayalım. $X \subset K$ öyle ki $K/X \ll M/X$ olsun. (1)'den dolayı $L/X \hookrightarrow^{cc} M/X$ ve (3) M/X 'e uygulandığında $K/X \ll L/X$ olur. $K \hookrightarrow^{cc} L$ olduğundan $X = K$ dir.

1.3 Supplement alt modüller

Teorem 1.3.1 $N, L \subset M$ alt modülleri için aşağıdakiler denktir:

i) $N, \{K \subset M | L + K = M\}$ kümesinde minimaldir.

ii) $L + N = M$ ve $L \cap N \ll N$ 'dir.

Yukarıdaki özellikler sağlanıyorsa N modülüne L 'nin M modülündeki supplementi (tümleyen) denir. $S \leq M$ için en az bir $K \leq M$ var öyle ki S, K 'nın M içindeki supplementi ise S 'ye **supplement (tümleyen) alt modül** denir.

Kanıt. $i) \Rightarrow ii)$ N modülü $\{K \leq L | L + K = M\}$ kümesinde minimal olsun. $L + N = M$ iken $L \cap N \ll N$ olduğunu göstermek için $(L \cap N) + K = N$ olduğunda $K = N$ olduğunu görelim.

$$M = L + N = L + ((L \cap N) + K) = L + K$$

$L \leq M, K \leq N$ ve N modülünün minimalliğinden $N = K$ olup $L \cap N \ll N$ dir.

$ii) \Rightarrow i)$ $L + N = M$ ve $L \cap N \ll N$ olsun. N modülünün minimal olduğunu gösterelim. $K \subseteq N$ ve $L + K = M$ olsun. Modüler kuralından,

$$N = N \cap M = (L \cap N) + K$$

olduğundan $K = N$ olup N modülü minimaldir.

Örnek 1.3.2 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_{10}$ 'u düşünelim. $\mathbb{Z}_{10} = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{5} \rangle$

ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{5} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{5} \rangle$ 'in $\langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{2} \rangle$ 'nin supplementidir.

Tanım 1.3.3 ([3]) M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $M = N + L$ ve $N \cap L \ll M$ olacak biçimde bir $L \leq M$ varsa N 'ye **weak supplement (zayıf tümleyen) alt modül** denir. Eğer M 'nin her alt modülü weak supplemente sahip ise M modülüne **weakly supplemented (zayıfça tümlenmiş) modül** denir.

Örnek 1.3.4 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_6$ için $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ alt modüller $\mathbb{Z}_6$ modülünün weak supplement alt modülleridir.

Örnek 1.3.5 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_4$ weakly supplemented modüldür.

Örnek 1.3.6 Supplement olan her alt modül weak supplement alt modüldür.

Teorem 1.3.7 Herhangi bir $N \subset M$ alt modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

- i) N , M 'nin supplement alt modülüdür.
- ii) N , M 'nin weak supplement ve coclosed alt modülüdür.
- iii) N , M 'nin weak supplement alt modülü, $K \subset N$ ve $K \ll M$ ise $K \ll N$ dir.

Kanıt. $i) \Rightarrow ii)$ N alt modülü, $L \subset M$ 'nin supplementi olsun. N 'nin M içinde coclosed alt modül olduğunda weak supplement olduğunu göstereyim. $K \subset M$ için tüm alt modüller M modülünde cosmall alt modül olduğundan $L + N = M$ iken $K + L = M$ dir. N modülünün minimalliğinden dolayı $K = N$ dir. Dolayısıyla N coclosed modülüdür. Tanımdan dolayı N modülü weak supplement alt modülüdür.

$ii) \Rightarrow iii)$ $K \subseteq N$ ile $X \subseteq N$ modülü için $N = K + X$ olsun. $K \ll N$ olduğunu göstereyim. $\forall Y \subseteq M$ ve $N + Y = M$ modülü için Teorem 1.2.2 (1(b))'den dolayı $M = X + Y$ dir. $M = N + Y$ iken $M = (K + X) + Y$ olup $M = X + Y$ olduğu için $K \ll M$ alt modülüdür. Teorem 1.2.2 (1)'den dolayı $X \subset N$ modülü M içinde cosmall olur. N coclosed modül olduğu için

$$N \cap M = N \cap (X + Y) = X + (N \cap Y)$$

olup $X = N$ dir. Böylece $K \ll N$ modülüdür.

$iii) \Rightarrow i)$ N alt modülü, $L \subseteq M$ alt modüllü için weak supplement olsun. N 'nin M içinde L 'nin supplementi olduğunu göstereyim. N weak supplement olduğu için $N \cap L \ll M$ olup $N \cap L \ll N$ modülüdür. Supplement alt modül tanımından dolayı N , M içinde L 'nin supplementidir.

Teorem 1.3.8 $K \subset V \subset M$ alt modüller olsun.

- 1) K , M içinde supplement alt modül iken V içinde de supplement alt modülüdür.
- 2) Eğer $V \subset M$ supplement alt modül ise aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) K modülü V içinde supplement alt modülüdür;
- ii) K modülü M içinde supplement alt modülüdür.

Kanıt. 1) K modülü M içinde supplement olduğu için $M = K + P$ ile $M \neq K' + P$ olacak şekilde $P \subset M$ ve $K' \subset K$ vardır. Modüler kuralından dolayı $K + (P \cap V) = V$

yazabiliriz. K modülünün V içinde supplement olduğunu gösterelim. Herhangi bir $L \subseteq K$ için $L + (P \cap V) = V$ olsun. Eşitlikten dolayı $M = K + P = V + P$ olup,

$$M = L + (P \cap V) + P = L + P$$

dir. K modülünün minimalliğinden dolayı $K = L$ olur. Böylece K modülü V içinde $(P \cap V)$ 'nin supplementidir.

2) Varsayımdan dolayı $M = V + N$ ve $M \neq V' + M$ olacak şekilde $N \subset M$ ile $V' \subset V$ alt modülleri vardır.

$i) \Rightarrow ii)$ K modülü V içinde supplement olsun. K modülünün M içinde supplement olduğunu gösterelim. K modülü supplement olduğu için $V = K + L$ ve $V \neq K' + L$ olacak şekilde $K' \subset K$ ile $L \subset V$ alt modülleri vardır. Böylece;

$$M = V + N = K + L + N$$

dir. Varsayalım ki $M = K' + L + N$ olsun. Buradan $K' + L \subset V$ ve eşitlikten dolayı $K' + L = V$ olur. $i)$ 'den dolayı K supplement olduğu için minimal olup $K = K'$ olur. Dolayısıyla K, M içinde $(L + N)$ modülünün supplementidir.

$ii) \Rightarrow i)$ K modülü M içinde supplement modül olsun. K supplement modül olduğu için $M = K + P$ ve $M \neq K' + P$ olacak şekilde $K' \subset K$ ve

$P \subset M$ alt modülleri vardır. Modüler kuralından dolayı, $M = K + P = V + N$ yazabiliriz. K modülünün V modülünde supplement olduğunu gösterelim. Herhangi bir $T \subset K$ modülü için $T + (P \cap V) = V$ olsun. Eşitlikten dolayı $M = K + P = V + P$ olup,

$$M = T + (P \cap V) + P = T + P$$

dir. K modülünün minimal olmasından dolayı $T = K$ dir. Dolayısıyla K modülü $(P \cap V)$ 'nin supplementi olur ki K modülü M içinde de supplementtir.

Teorem 1.3.9 M weakly supplemented bir modül olsun. $N \subset M$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

$i)$ N supplement alt modüldür.

$ii)$ N coclosed alt modüldür.

Kanıt. $i) \Rightarrow ii)$ N supplement alt modül olsun. Bu durumda bir $L \leq M$ vardır öyle ki $N + L = M$ ve $N \cap L \ll N$ dir. Teorem 1.2.2 (1)'den M içinde $K \hookrightarrow^{cc} N$ olan her $K \leq N$ için $N + L = M$ ise $K + L = M$ dir. N nin minimalliğinden $K = N$ elde edilir. Dolayısıyla N coclosed alt modüldür.

$ii) \Rightarrow i)$ N coclosed alt modül olsun. N 'nin supplement alt modül olduğunu gösterelim. M weakly supplemented modül olduğundan, N 'nin M içinde bir L weak supplementi vardır. Böylece $N \cap L \ll M$ dir. Teorem 1.2.4 (3)'den

$$N \cap L \ll N$$

elde edilir. Supplement modül tanımından N, M içinde L modülünün supplementidir. Böylece N supplement alt modüldür.

Tanım 1.3.10 M bir R -modül olsun. Eğer M modülü bir maksimal alt modüle sahip ise bu modüle **local (yerel) modül** denir.

Örnek 1.3.11 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_4$ yerel modüldür.

Tanım 1.3.12 ([5]) M bir R -modül olsun.

$$Rad(M) = \cap \{K \subset M \mid K, M \text{ de maksimal alt modül}\}$$

kümesi M 'nin alt modülü olup buna **M modülünün radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir.

Örnek 1.3.13 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ için $Rad(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$ dır.

Teorem 1.3.14 M bir R -modül, $K, L \leq M$ ve L, M içinde K 'nın bir supplementi olsun. Bu durumda;

- 1) Eğer $N \subset K$ için $N + L = M$ ise L, N 'nin bir supplementidir.
- 2) Eğer M sonlu üretilmiş bir modül ise L modülü de sonlu üretilmiştir.
- 3) Eğer K, M de maksimal alt modül ise L devirlidir ve $K \cap L = Rad(L)$, L 'nin maksimal alt modülüdür.
- 4) Eğer $P \ll M$ ise L modülü de $K + P$ 'nin supplementidir.
- 5) $P \ll M$ için $(P \cap L) \ll L$ ve $Rad(L) = L \cap Rad(M)$ dir.
- 6) $N \subset L$ olsun. N modülünün L de coclosed olması için gerek ve yeter koşul N 'nin M içinde coclosed olmasıdır.

Kanıt. 1) M bir R -modül ve $K, L \leq M$ olsun. L modülü M içinde K 'nın supplementi olduğu için $M = K + L$ ve $(L \cap K) \ll L$ dir. Bazı $N \subset K$ ve $M = N + L$ için L modülünün N 'nin supplementi olduğunu gösterelim. $M = L + K$ ve $M = N + L$ için iki eşitlikten $M = L + K = N + L$ dir. Modüler kuralından dolayı,

$$N \cap M = N \cap (L + K) = N \cap (N + L) = K + (N \cap L)$$

olup $N = K$ dır. Böylece $(N \cap L) \ll L$ elde edilir. Dolayısıyla L, M içinde N 'nin supplementidir.

2) M sonlu üretilmiş bir modül olsun. L modülünün sonlu üretilmiş olduğunu gösterelim. $M = K + L$ için sonlu üretilmiş bir $L' \subset L$ vardır öyle ki $K + L' = M$ dir. L modülünün minimalliginden dolayı $L = L'$ olup L modülü sonlu üretilmiştir.

3) (2)'den dolayı L modülü devirlidir. $L/(K \cap L) \cong M/K$ olduğundan $K \cap L$ maksimal alt modül ve $(K \cap L) \supset Rad(L)$ dir. (1)'den dolayı $(K \cap L) \ll L$ olduğundan $(K \cap L) \subset Rad(L)$ dir. Dolayısıyla $(K \cap L) = Rad(L)$ olup maksimal alt modüldür.

4) L modülü K 'nın supplementi olduğundan $M = K + L$ ve L minimal alt modüldür. Buradan $M = K + L + P$ dir. Bir $X \subseteq L$ için $M = K + P + X$ olsun. Böylece $P \ll M$ olduğundan dolayı $M = K + X$ olur. Ayrıca L modülü minimal olduğundan $L = X$ elde edilir. Dolayısıyla L modülü M içinde $K + P$ 'nin supplementi olur.

5) $P \ll M$ ve $X \subset L$ için $(P \cap L) + X = L$ olsun. $M = K + L$ olduğundan $M = K + L = K + (P \cap L) + X = K + X$ yazabiliriz. Böylece $X = L$ olup $(P \cap L) \ll L$ dir. $L \cap Rad(M) \subset Rad(L)$ dir. Ayrıca $Rad(L) \subset L \cap Rad(M)$ her zaman sağlandığı için istenen eşitlik elde edilir.

6) Kabul edelim ki N modülü M içinde coclosed alt modül olsun. Eğer $T \subset N$ olacak şekilde bir T alt modülü var ve L de cosmall ise $T \subset N \subset L$ için $N/T \ll L/T$ yazabiliriz. Buradan $T \hookrightarrow^{cs} N$ olur. Dolayısıyla N modülü M de coclosed olduğu için $T = N$ elde edilir.

Tersine N modülünün L de coclosed ve $T \hookrightarrow^{cs} N$ olduğunu kabul edelim. N modülü L de coclosed olduğundan bazı $T \subset X \subset L$ alt modülleri için $L/T = N/T + U/T$ olsun. $L = N + U$ yazabiliriz. Buradan $T \subset U \subset L$ olup $N/T, L/T$ de small değildir. Böylece $L = N + X$ yazabiliriz. $M = K + L = K + X + N$ ve $T \subset N, M$ de cosmall olduğu için $M = K + X + T = K + X$ dir. L, M içinde K 'nın supplementi olduğundan $X = L$ dir. Dolayısıyla N modülü M de coclosed alt modüldür.

Teorem 1.3.15 M bir R -modül ve $K \subset L \subset M$ olsun.

- 1) Eğer L modülü M de supplement ise L/K da M/K içinde supplement alt modüldür.
- 2) Eğer K modülü M içinde ve L/K da M/K da supplement ise L modülü de M içinde supplementtir.
- 3) M weakly supplemented modül ve varsayalım ki L/K modülü M/K içinde coclosed olsun. Böylece L de M içinde coclosed alt modüldür.

Kanıt. 1) L modülü M içinde supplement alt modül ve $N \subset M$ için öyle ki $M = N + L$ ve $L \cap N \ll L$ olsun. L/K 'nın M/K da supplement olduğunu gösterelim. Böylece $L/K + (N + K)/K = M/K$ olsun.

$$(L \cap L)/K + (L \cap (N + K))/K = (M \cap L)/K$$

dir. $L/K + (L \cap (N + K))/K = L/K$ olduğundan $(L \cap (K + N))/K \ll L/K$ dir. Böylece L/K , M/K içinde supplement alt modüldür.

2) K modülü M içinde ve L/K da M/K içinde supplement alt modül olduğundan $M/K = L/K + L'/K$ ile $(L \cap L')/K \ll L/K$ ve $M = K + K'$ ile $(K \cap K') \ll K$ olacak şekilde $L', K' \subset M$ alt modülleri vardır. L modülünün M içinde supplement olduğunu gösterelim. Buradan $M = K + K'$ ve $(K \cap K') \ll K \subseteq L$ dir. Dolayısıyla modüler kuralından,

$$K' \cap M = K' \cap (L + L') = K' + (L \cap L')$$

olup ve Yardımcı Teorem 1.20'den $M = L + (K' \cap L')$ dir. Ayrıca $L = L \cap (K + K') = K + (L \cap K')$ ve $(L \cap L')/K \ll L/K$ olduğundan Teorem 1.1.8'den

$$(L \cap L' \cap K')/(K \cap K') \ll L/(K \cap K')$$

ve $(L \cap L' \cap K') \ll L$ olur. Böylece L modülü M içinde $(K' \cap L')$ 'nin supplementidir.

3) (2) ve Teorem 1.2.4 (2)'den L modülü M içinde coclosed alt modüldür.

Tanım 1.3.16 M bir R -modül olsun. $M = A + B$ koşulunu sağlayan herhangi bir $A, B \leq M$ için B, A 'nın bir supplementini içeriyorsa M modülüne **amply supplemented (yeterli tümlenmiş) modül** denir. Eğer M modülündeki her alt modülün M içinde supplementi varsa M 'ye **supplemented (tümlenmiş) modül** denir.

Örnek 1.3.17 Artinian modüller supplemented modüldür.

Örnek 1.3.18 $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}$ de ise her alt modül supplemente sahip olmadığından supplemented modül değildir. Örneğin; $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ için $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ dir. $6\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ olduğundan $6\mathbb{Z} \ll 2\mathbb{Z}$ değildir.

Örnek 1.3.19 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Z}_6$ amply supplemented modüldür.

Önerme 1.3.20 Bir M_R modülü hollow ise supplemented modüldür.

Kanıt. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Buradan $M = N + M$ yazılabilir. Hipotezden dolayı $N \cap M = N \ll M$ olup M supplemented modüldür.

Teorem 1.3.21 [3, 20.13] 1) $K, L \leq M$ ile N modülü supplemented olsun. Eğer M modülünde $N + K$ supplementi var ise K modülü M de supplementlara sahiptir.
2) Varsayalım ki $M = N + K$ olsun. Eğer K modülü supplemented modül ise K, M içinde N modülünün supplementini içerir.

Teorem 1.3.22 [7, 41.6] 1) Sonlu üretilmiş bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

- i) M supplemented modüldür;
- ii) M deki her maksimal alt modül supplementlara sahiptir,
- iii) M modülü hollow modüllerin toplamıdır,
- iv) M yerel alt modüllerin irredundant toplamıdır.

2) Eğer M supplemented modül ve $\text{Rad}(M) \ll M$ ise M modülü yerel modüllerin irredundant toplamıdır.

Teorem 1.3.23 [7, 41.7] M amply supplemented R -modül olsun.

- 1) M modülündeki her supplement alt modül amply supplemented modüldür.
- 2) M modülündeki dik toplananlar ve faktör modüller amply supplemented modüldür.
- 3) $M = \sum_{\lambda} L_{\lambda} + K$ için buradaki $\sum_{\lambda} L_{\lambda}$, L_{λ} ve $K = \text{Rad}(K)$ lokal(yerel) modüllerin irredundant toplamıdır.

Eğer $M/\text{Rad}(M)$ sonlu üretilmiş ise toplam sonludur.

Kanıt. 1) V modülü $U \subset M$ için U modülünün supplementi olduğundan $M = U + V$ ile $U \cap V \ll V$ dir. $X, Y \subset V$ için $V = X + Y$ olsun. Buradan $M = U + X + Y$ dir. $Y' \subset Y$ alt modülü için $M = X + Y' + U$ yazılabilir. Y' modülünün $U + X$ 'in supplementi olduğunu gösterelim. $Y' = (Y' \cap (U + X)) + T$ için modüler kuralından,

$$Y' \cap M = Y' \cap (U + X + Y)$$

için Y' modülü M içinde $U + X$ 'in supplementidir. $(X \cap Y') \subset (U + X) \cap Y'$ alalım. $M = U + X + Y'$ ifadesinden $X + Y' = V$ olup yani Y' , V modülünde X 'in supplementi olur.

2) M modülü amply supplemented modül olduğundan (1)'den M deki her dik toplanan alt modül amply supplemented modül olur. Teorem 1.3.14'den ise M içindeki faktör modüller amply supplemented alt modüldür.

3) M' , M modülünde $Rad(M)$ 'nin supplementi olsun. Teorem 1.3.14 (5)'den

$$Rad(M') = M' \cap Rad(M) \ll M'$$

yazılabilir. (1)'den M' amply supplemented modül olur. M amply supplemented modül olup supplemented olduğundan Teorem 1.3.22'den $M' = \Sigma_{\lambda} L_{\lambda}$, L_{λ} yerel modüllerinin toplamıdır. M modülünde M' 'nin supplementi K için $K \subset Rad(M)$ olup $Rad(K) = K \cap Rad(M) = K$ dir. Böylece $M = \Sigma_{\lambda} L_{\lambda} + Rad(M)$ elde edilir.

Teorem 1.3.24 M_R modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

- 1) M amply supplemented modüldür.
- 2) Her $U \subset M$ alt modülü, X bir supplemented alt modül ve $Y \ll M$ olmak üzere $U = X + Y$ olacak şekilde X ve Y modülleri vardır.
- 3) Her $U \subset M$ alt modülü için $\frac{U}{X} \ll \frac{M}{X}$ olacak biçimde bir $X \subset U$ supplemented alt modülü vardır.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2) $U \subset M$ olsun. M içinde V modülü U 'nun ve X modülü de $U \subset X$ olmak üzere V 'nin bir supplementi olsun. Buradan $M = U + V$ ile $U \cap V \ll V$ ve $M = X + V$ ile $X \cap V \ll X$ yazılabilir. Böylece $U \cap V \ll M$ ve modüler kuralından;

$$U = U \cap M = U \cap (X + V) = X + (U \cap V)$$

elde edilir. Teorem 1.3.23'den X supplemented modül olur.

2) $\Rightarrow$ 3) $U \subset M$ alt modülü için $U = X + Y$ ile X supplemented modül ve $Y \ll M$ olsun. $U/X \ll M/X$ olduğunu gösterelim. Bunun için $U/X + K/X = M/X$ olacak biçimde $K \subset M$ alt modülü alalım. Buradan $M = U + K$ yazılabilir. $U = X + Y$ olduğundan $M = K + X + Y$ dir. Ayrıca $Y \ll M$ olduğundan $M = X + K$ olur. $M = U + X$ ifadesinden de $M = K$ olup $U/X \ll M/X$ elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 1) Eğer $M = U + V$ ise (3) ten dolayı $X \leq V$ ve $V/X \ll M/X$ olacak biçimde bir X supplemented alt modülü vardır öyle ki $M = U + X$ yazılabilir. X modülü içinde $V', U \cap X$ 'in bir supplementi olsun. Böylece $X = V' + (U \cap X)$ den,

$$M = U + X = U + (U \cap X) + V' = U + V'$$

ve $U \cap V' = (U \cap X) \cap V' \ll M$ elde edilir. Dolayısıyla V', M modülünde U 'nun V tarafından içerilen bir supplementi olur.

Tanım 1.3.25 Bir M R -modülü için $N \leq M$ olsun. $K \cap N = 0$ olacak şekilde bir K maksimal alt modülüne N 'nin M içindeki **komplementi** denir.

Tanım 1.3.26 $0 \neq U \leq M$ için $U \cap N = 0$ iken $N = 0$ ise U 'ya M 'nin **essential (geniş) alt modülü** denir.

Tanım 1.3.27 M bir R -modül olsun. M 'nin 0 'dan farklı her alt modülü essential ise M 'ye **uniform (düzgün) modül** denir.

Tanım 1.3.28 M bir R -modül olsun. Herhangi bir $M = K \oplus L$ ayrışımı için N, K 'nın bir komplementi iken $M = N \oplus K$ yazılabiliyorsa M 'ye **Ads modül** denir.

Örnek 1.3.29 $\mathbb{Z}$ modül olarak $\mathbb{Z}$ uniform modüldür.

Örnek 1.3.30 Indecomposable (ayrıştırılmaz) modüller ve uniform (düzgün) modüller Ads modüldür.

1.4 Projektif ve İnjektif Modüller

Tanım 1.4.1 M bir R -modül olsun. Her $\varphi : A \longrightarrow N$ epimorfizması ve $\theta : M \longrightarrow N$ homomorfizması için $\varphi \circ \psi = \theta$ olacak şekilde bir $\psi : M \longrightarrow A$ homomorfizması varsa

M 'ye **projektif modül** denir. Diğer bir deyişle;

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \psi \swarrow & \downarrow \theta & \\ A & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir θ homomorfizması varsa M 'ye **projektif modül** denir.

Tanım 1.4.2 ([7]) M ve A , R -modüller olsunlar. $\forall X \leq A$ için $\phi : M \rightarrow \frac{A}{X}$ homomorfizması bir $\psi : M \rightarrow A$ homomorfizmasını yükseltilebiliyor ise M modülüne **A-projektif modül** denir. Diğer bir deyişle;

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \psi \swarrow & \downarrow \phi & \\ A & \xrightarrow{\quad} & \frac{A}{X} \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir ψ homomorfizması varsa M modülüne **A-projektif** denir.

Tanım 1.4.3 $M = A + B$ olsun. Eğer A , B -projektif ve B de A -projektif ise A ve B modüllerine **mutually projective (karşılıklı projektif)** denir.

Tanım 1.4.4 M bir modül olsun. Eğer M modülü M -projektif ise M 'ye **quasi-projective (yarı-projektif)** denir.

Tanım 1.4.5 ([6]) M bir modül olsun. $M = N + P$ iken $\phi : M \rightarrow M$ homomorfizması vardır öyle ki $\phi(M) \subseteq N$ ve $(1 - \phi)(M) \subseteq P$ ise M 'ye **π -projektif modül** denir.

Teorem 1.4.6 [8, 41.11] $U \subset M$ bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) $M = X \oplus X'$ ayrışımı ile $X \subset U$ ve $X' \cap U \ll X'$ dir;
- 2) $e \in \text{End}(M)$ ile $Me \subset U$ ve $U(1 - e) \ll M(1 - e)$ idempotenti vardır;
- 3) $X \leq_d M$ ile $X \subset U$, $U = X + Y$ ve $Y \ll M$ alt modülü vardır;
- 4) $X \leq_d M$ ile $X \subset U$ ve $U/X \ll M/X$ dir;
- 5) U modülü M de V 'nin supplementine sahiptir öyle ki $U \cap V \leq_d U$ dur.

Bu durumda U modülü M deki dik toplananlar üzerindedir, denir.

Teorem 1.4.7 [8, 41.12] M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) M amply supplemented ve M modülündeki her supplement alt modül dik toplanandır.
- 2) M modülündeki her alt modül dik toplananlar üzerindedir.
- 3) i) M modülündeki her small olmayan alt modülü 0 'dan farklı bir dik toplanan içerir;
ii) M modülündeki her alt modül M 'nin maksimal dik toplananlarını içerir.

Teorem 1.4.8 M modülü π -projektif R -modül olsun.

- 1) M modülündeki her dik toplanan π -projektiftir.
- 2) N ve V alt modülleri M modülünde karşılıklı supplement ise $N \cap V = 0$ ve $M = N \oplus V$ dir.
- 3) Eğer $M = N + V$ ve $N \leq_d M$ ise $M = N \oplus V'$ olacak şekilde $V' \subset V$ modülü vardır.
- 4) Eğer $M = N \oplus V$ ise V modülü N -projektiftir. (N de V -projektiftir.)
- 5) Eğer $M = N \oplus V$ ile $N \cong V$ ise M modülü quasi projektiftir.
- 6) Eğer $M = N + V$ ve N, V alt modülleri M modülünde dik toplanan ise $N \cap V$ modülü de M içinde dik toplanandır.

Her M R -modülü için (3) ve (4) denktir ve (4) $\Rightarrow$ (5) ile (4) $\Rightarrow$ (6) dır.

Kanıt. 1) M π -projektif modül olmak üzere $e = e^2 \in \text{End}(M)$ idempotenti ile $M = Me \oplus M(1 - e)$ olsun. $Me = X + Y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $M = X + (Y + M(1 - e))$ dir ve M π -projektif modül olduğundan $\text{Im } f \subset X$ ve $\text{Im}(1 - f) \subset Y + M(1 - e)$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ vardır. Bu nedenle fe ve $1 - fe$ 'yi Me 'nin endomorfizmaları olarak sayabiliriz ve $\text{Im}(fe) \subset X$, $\text{Im}(1 - fe) = \text{Im}(1 - f)e \subset Y$ dir.

2) Eğer N ve V modülleri karşılıklı supplement ise $N \cap V \ll N$ ve $N \cap V \ll V$ olduğundan dolayı

$$\{(n, -n) \mid n \in N \cap V\} \subset (N \cap V, 0) + (0, N \cap V) \ll N \oplus V$$

dir. Bu alt modül;

$$\begin{aligned} N \oplus V &\longrightarrow M \\ (n, v) &\mapsto n + v \end{aligned}$$

homomorfizmasının çekirdeğidir. Böylece $N \cap V = 0$ dir.

3) Uygun bir $X \subset M$ için $M = N + V$ ve $M = N \oplus X$ olsun. $\text{Im}(f) \subset V$ ve $\text{Im}(1 - f) \subset N$ olacak biçimde bir $f \in \text{End}(M)$ seçelim. $f(N) \subset N$ ve $M =$

$f(N + X) + (1 - f)M = N + f(X)$ dir. Şimdi $N \cap f(X) = 0$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki, $n \in N$ ve $x \in X$ olmak üzere $n = f(x)$ olsun. $x - n = (1 - f)x \in N$ ve $x \in N \cap X = 0$ olur ki buradan $N \cap f(X) = 0$ dır.

3) $\Rightarrow$ 4) $M = N \oplus V$ ve $p : N \rightarrow W$ olacak şekilde ϕ epimorfizması ve $f : V \rightarrow W$ homomorfizması olsun.

$$P = \{n - v \in M \mid n \in N, v \in V \text{ ve } p(n) = f(v)\}$$

tanımlayalım. $\pi_2 : M \rightarrow V$, $\pi_2(m) = \pi_2(u + v) = v$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $f(\pi_2(m)) = f(\pi_2(u + v)) = f(v)$ dir. π örten olduğu için $f(v) = p(u_1)$ olacak biçimde bir $u_1 \in U$ vardır. Böylece $u_1 - \pi_2(m) \in P$ dir.

$$m = u + v = u + \pi_2(m) = u + \pi_2(m) + (u_1 - u_1) = (u + u_1) - (u_1 - \pi_2(m))$$

olduğundan $M = N + P$ elde edilir. Kabulümüzden bir $P' \subset P$ vardır öyle ki $M = P' \oplus N$ dir. Bu ayrışım için $e : M \rightarrow N$ projeksiyon olsun. Bu homomorfizmadan $V \rightarrow M \rightarrow N$ homomorfizması elde edilir. $(1 - e)V \subset P' \subset P$ olduğundan $\forall v \in V$ için $v - e(v) \in P$ dir ve böylece $f(v) = (pe)(v)$, yani $f = pe$ dir. Dolayısıyla V , N -projektiftir.

4) $\Rightarrow$ 3) $M = N + V$, $M = N \oplus X$ ve X , N -projektif modül olsun. Kanonik dönüşümler ile

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & M \longrightarrow \frac{M}{V} \end{array}$$

diyagramı, $f : X \rightarrow N$ homomorfizması ile değişmeli olarak genişletilebilir. Yani, $\forall x \in X$ için $x + V = f(x) + V$ ve dolayısıyla $(1 - f)X \subset V$ dir. O halde $M = N + X \subset N + (1 - f)X$ dir. Şimdi $N \cap (1 - f)X = 0$ olduğunu gösterelim. $n \in N$ ve $x \in X$ için $n = (1 - f)(x)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $x = n + f(x) \in X \cap N = 0$ dır. Böylece $n = 0$ olup $N \cap (1 - f)X = 0$ elde edilir.

4) $\Rightarrow$ 5) İspat açıktır.

3) $\Rightarrow$ 6) $N, V \leq_d M$ ve $N + V = M$ olsun. (3)'den dolayı $V' \subset V$ ve $N' \subset N$ alt modülleri vardır öyle ki $M = N \oplus V'$ ve $M = N' \oplus V$ dir. Modüler kuralından dolayı

$$\begin{aligned} M &= (N \oplus V') \cap (N' \oplus V) = [N \cap (N' \oplus V)] + V' \\ &= [N' + (N \cap V)] + V' \end{aligned}$$

ve

$$(N \cap V) \cap (N' + V') \subset (N' \cap V) + (N \cap V') = 0$$

dır.

Teorem 1.4.9 Bir M R -modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) M supplemented ve π -projektiftir.
- 2) i) M amply supplemented ve
ii) Karşılıklı supplementların kesişimi 0'dır.
- 3) i) M deki her alt modül dik toplananlar üzerinde bulunur.
ii) Eğer $U, V \leq_d M$ ile $M = U + V$ ise $U \cap V \leq_d M$ dir.
- 4) U, V iki alt modülü, $M = U + V$ için $e \in \text{End}(M)$ idempotenti ile $Me \in U$, $M(1 - e) \subset V$ ve $U(1 - e) \ll M(1 - e)$ dir.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2)(i) $M = U + V$ ve X alt modülü M içinde U 'nun supplementi olsun. $\text{Im}(f) \subset V$ ve $\text{Im}(1 - f) \subset U$ olacak biçimde bir $f \in \text{End}(M)$ seçelim. $Uf \in U$, $M = U + (X)f$ ve $(U \cap X)f = U \cap (X)f$ dir. $U \cap X \ll X$ olduğundan $U \cap (X)f \ll (X)f$ dir. Böylece $(X)f, (X)f \subset U$ içinde U 'nun supplementi olur. Dolayısıyla M amply supplemented modüldür.

ii) Eğer U ve V modülleri karşılıklı supplement ise $U \cap V \ll U$ ve $U \cap V \ll V$ olur.

$$\begin{aligned} \varphi : U \oplus V &\rightarrow M \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

olacak şekilde bir φ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(u, -u) | u \in U \cap V\} \subseteq (U \cap V, 0) \oplus (0, U \cap V) \ll U \oplus V,$$

dir. Böylece $\text{Ker}\varphi = 0$ ve $(U \cap V) = 0$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$ 3) M amply supplemented, M içindeki S ve T alt modülleri karşılıklı supplement ve kesişimleri 0 olsun. Buradan $S \cap T = 0$ için $M = S \oplus T$ ile $S, T \leq_d M$ yazılabilir. $U \subset M$ için S de supplement T , S 'nin supplementi ve $T \subset U$ olsun. $M = T \oplus T'$ olacak şekilde $T' \subset M$ vardır. $U \cap S \ll M$ olduğundan Teorem 1.4.7'den $T', T + (U \cap S) = S$ 'nin supplementi olur. Dolayısıyla $U \cap T' \ll T'$ elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 2) $M = U + V$ ve $U \leq_d M$ olsun. M modülünde V' , U 'nun ve U' , V' 'nin supplementi olacak şekilde $V' \subset V$ ile $U' \subset U$ modüllerini seçelim. Buradan $U \cap V' \ll V'$ ve (2) ve (ii)'den $M = U' \oplus V'$ yazılabilir. Fakat $M = U + V = U' \oplus V'$ olduğundan modüler kuralından,

$$U \cap M = U \cap (U + V) = U \cap (U' + V') = U' \oplus (U \cap V')$$

elde edilir. Dolayısıyla $(U \cap V') \leq_d M$ olup $(U \cap V') = 0$ dır. Sonuç olarak $V' \subset V$ ile $M = U \oplus V'$ ve Teorem 1.4.7'den $M = U' \oplus V$ elde edilir. Modüler kuralından, $M = (U \cap V) + (U' + V')$ ve

$$(U \cap V) \cap (U' + V') \subset (U' \cap V) + (U \cap V') = 0$$

olup istenen elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 4) Kabulümüzden ve Teorem 1.4.7'den M amply supplemented modül ve her supplement alt modül M modülünde dik toplanandır. (2) ve (3) şıklarındaki ifadelere benzer şekilde bir $M = U' \oplus V'$ ayrışımı ile $U \cap V' \ll V'$ ve $e : M \rightarrow U'$ bir projeksiyon dönüşümü olsun. $Me \subset U$, $M(1 - e) \subset V' \subset U$ olduğundan $U(1 - e) = U \cap V' \ll M(1 - e)$ elde edilir.

4) $\Rightarrow$ 1) Kabulümüzden ve Teorem 1.4.6'dan $M = X \oplus X'$ ayrışımı için $e \in \text{End}(M)$ ile $Me = X$ ve $M(1 - e) = X'$ olacak şekilde bir e idempotenti vardır. Çünkü $X \subset U$ olduğundan

$$U \cap M = U \cap (X \oplus X') = U = X \oplus (U \cap X') = Me \oplus (U \cap M(1 - e))$$

olup $U \cap M(1 - e) = U(1 - e)$ dir. $U(1 - e) \ll M(1 - e)$ olduğundan

$M(1 - e) \cap U \ll M(1 - e)$ elde edilir. Buradan $M(1 - e)$, U 'nun supplementidir ve M , π -projektiftir.

Teorem 1.4.10 M bir R -modül olsun. Eğer M modülü supplemented ve π -projektif ise M amply supplemented modüldür.

Kanıt. $U \leq M$ ve $M = U + V$ için $V \leq M$ olsun. M modülü supplemented modül olduğu için M modülünde U 'nun bir X supplementi vardır. Buradan $M = U + X$ ve $U \cap X \ll X$ yazılabilir. M , π -projektif olduğundan $f : M \rightarrow M$ olan bir homomorfizması vardır öyle ki $\text{Im}(f) \leq V$ ve $\text{Im}(1 - f) \leq U$ olup $f(U) \leq U$ ile $(1 - f)(V) \leq V$ dir.

$$M = f(M) + (1 - f)(M) = U + f(U + X) = U + f(U) + f(X) = U + f(X)$$

$u \in U \cap f(X)$ alalım. Bir $x \in X$ vardır ve $u = f(x)$ dir. Buradan $x - u = x - f(x) = (1 - f)(x) \in U$ ve $x \in U$ dur. Dolayısıyla $x \in U \cap X$ ve $U \cap f(X) \leq f(U \cap X)$ dir. $U \cap X \ll X$ olduğundan small alt modüllerin homomorfizma altındaki görüntüleri de small olduğundan $f(U \cap X) \ll f(M)$ olur. Buradan $U \cap f(X) \leq f(U \cap X) \ll M$ dir. Dolayısıyla $f(X)$, M modülünde U 'nun supplementi olur. $f(X) \leq V$ ve U, M içinde supplementlara sahiptir. Böylece M amply supplemented modüldür.

Tanım 1.4.11 M bir R -modül olsun. Her $\varphi : A \rightarrow N$ monomorfizması ve $\psi : A \rightarrow M$ homomorfizması için $\beta \circ \varphi = \psi$ olacak şekilde bir $\beta : N \rightarrow M$ homomorfizması varsa M 'ye **injektif modül** denir. Diğer bir deyişle;

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \psi \downarrow & \swarrow \beta & \\ M & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir β homomorfizması varsa M 'ye **injektif modül** denir.

Tanım 1.4.12 ([7]) M ve A , R -modüller ve $X \leq M$ olsun. Her $\phi : X \rightarrow A$ homomorfizması için $\varphi|_X = \phi$ olacak biçimde bir $\varphi : M \rightarrow A$ homomorfizması var ise A modülüne **M -injektif modül** denir.

1.5 Quasi-Discrete (Yarı-Ayrık) Modüller

Bir M R -modülü için aşağıdaki koşulları göz önüne alalım;

- $D_1)$ $\forall N \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır öyle ki $M_1 \leq N$ ve $N \cap M_2 \ll M$ modüldür.
- $D_2)$ $N \leq M$ alt modülü için M/N bir dik toplanana izomorf ise N, M 'nin dik toplananıdır.
- $D_3)$ $M_1, M_2 \leq M$ alt modülleri $M = M_1 + M_2$ koşulunu sağlayan iki dik toplanan ise $M_1 \cap M_2$ alt modülü de M de bir dik toplananıdır.

Tanım 1.5.1 [7, 4.10] M bir modül olsun. M modülü supplemented ve π -projektif ya da M modülü (D_1) ile (D_3) özelliklerini sağlıyor ise M 'ye **quasi-discrete (yarı-ayrık) modül** denir.

Örnek 1.5.2 *Hollow modüller ve semisimple modüller quasi-discrete modüldür.*

Önerme 1.5.3 *Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:*

- 1) M modülü (D_1) özelliğine sahiptir.
- 2) $\forall A \leq M$ alt modülü $N \leq_d M$ ve $S \ll M$ olmak üzere $A = N \oplus S$ olarak yazılabilir.
- 3) M supplemented ve M modülündeki her supplement alt modül M de dik toplanandır.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2) M modülü (D_1) özelliğini sağlasın. $\forall A \leq M$ alt modülünün $N \leq_d M$ ve $S \ll M$ ile $A = N \oplus S$ olarak yazılabildiğini gösterelim. M modülü (D_1) özelliğine sahip olduğu için $M_1 \leq_d A$ ve $A \cap M_2 \ll M$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ yazılabilir. Modüler kuralından, $A = M_1 \oplus (A \cap M_2)$ olup, $N = M_1$ ve $S = A \cap M_2$ alınabilir.

2) $\Rightarrow$ 3) $M = X + Y$ olsun. Y 'nin X 'in bir supplementini içerdiğini gösterelim. Varsayımımızdan dolayı $Y \leq_d M$ alabiliriz. $X \cap Y \leq M$ olup, kabulümüzden $Y_1 \leq_d M$ ve $S \ll M$ olmak üzere $X \cap Y = Y_1 \oplus S$ dir. Y, M de dik toplanan olduğu için $S \ll Y$ dir. $Y = Y_1 \oplus Y_2$ yazalım ve $\pi : Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow Y_2$ projeksiyon dönüşümü olsun. Bu durumda $X \cap Y = Y_1 \oplus (X \cap Y \cap Y_2)$ ve

$$X \cap Y_2 = X \cap Y \cap Y_2 = \pi(X \cap Y) = \pi(Y_1 + S) = \pi(S)$$

olup böylece $X \cap Y_2 \ll Y_2$ dir.

$$M = X + Y = X + Y_1 + Y_2 = X + Y_2$$

olduğu için Y_2 modülü X 'in supplementidir.

Şimdi M 'nin bir supplement P alt modülünü alalım. Bu durumda bir $K \leq M$ vardır öyle ki $M = K + P$ özelliğini sağlayan P alt modülü minimaldir. Kabulümüzden, $L \leq_d M$ ve $T \ll M$ olmak üzere $P = L \oplus T$ dir. Böylece $M = K + P = K + L + T$ olup $T \ll M$ olduğundan $M = K + L$ dir. Ancak P 'nin minimalliğinden $P = L$ yani $P \leq_d M$ elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 1) $A \leq M$ olsun. M modülünün (D_1) özelliğini sağladığını gösterelim. A modülü B supplementine ve B modülü de A tarafından kapsanan ve bir dik toplanan olan M_1 supplementine sahiptir. O halde $M = M_1 \oplus M_2$ yazabiliriz. Modüler kuralından $A = M_1 \oplus (A \cap M_2)$ dir. Ayrıca $M = M_1 + B$ olduğundan $A = M_1 + (A \cap B)$ olur. $v : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2$ projeksiyon dönüşümü olsun. Böylece

$$A \cap M_2 = v(A) = v(A \cap B)$$

dir. B , A 'nın supplementi olduğundan $A \cap B \ll M$ olup $A \cap M_2 \ll M$ dir. Böylece M modülü (D_1) özelliğini sağlar.

Sonuç 1.5.4 [7, 4.9] *Herhangi bir ayrıştırılamaz M modülünün (D_1) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul M 'nin hollow modül olmasıdır.*

Önerme 1.5.5 *Bir M modülünün quasi-discrete olması için gerek ve yeter koşul M 'nin supplemented ve X ile Y birbirlerinin supplementları olmak üzere $M = X \oplus Y$ olmasıdır.*

Kanıt. M modülü quasi-discrete olsun. X ve Y birbirlerinin supplementleri olsunlar. Önerme 1.5.3'den, M supplemented ve $X, Y \leq_d M$ dir. (D_3) koşulundan $X \cap Y \leq_d M$ olur. $X \cap Y \ll X$ ve böylece $X \cap Y \ll M$ olduğundan dolayı $X \cap Y = 0$ dır. Böylece $M = X \oplus Y$ elde edilir.

Şimdi M nin supplemented ve X ile Y birbirlerinin supplementları olmak üzere $M = X \oplus Y$ olduğunu kabul edelim. Önerme 1.5.3'den M (D_1) özelliğine sahiptir. Şimdi M 'nin (D_3) özelliğine sahip olduğunu görelim. Bunun için $A, B \leq_d M$ öyle ki $M = A + B$ olsun. B , A 'nın M 'nin bir dik toplananı olan bir B' supplementini içerir. Böylece $A \cap B' \ll B' \leq M$, sonuç olarak $A \cap B' \ll A$ dır. Böylece A modülü B' 'nin supplementidir. Dolayısıyla hipotezden $M = A \oplus B'$ olur. Buradan $B = B' \oplus A \cap B$ olur ki $A \cap B \leq_d B$ elde edilir.

1.6 Lifting Modüller

Teorem 1.6.1 $N \subseteq M$ alt modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) $X \subseteq N$ ve $N/X \ll M/X$ olacak biçimde bir $X \leq_d M$ vardır.
- 2) $N = X + Y$ ve $Y \ll M$ olacak biçimde bir $X \leq_d M$ ve $Y \leq M$ vardır.
- 3) M 'nin, $X \subseteq N$ ve $X' \cap N \ll X'$ olacak biçimde bir $M = X \oplus X'$ ayrışımı vardır.
- 4) N 'nin M içinde bir V 'nin supplementi vardır öyle ki $N \cap V \leq_d N$ dir.
- 5) $eM \subseteq N$ ve $(1 - e)N \ll (1 - e)M$ olacak biçimde bir $e \in \text{End}(M)$ idempotenti vardır.

Eğer bu koşullar sağlanırsa " N modülü M 'nin bir dik toplananının üzerindedir." deriz.

Kanıt. 1) $\Rightarrow$ 2) $M = X \oplus X'$ ve $N/X \ll M/X$ olsun. $N = X + Y$ ve $Y \ll M$ olduğunu göstereyim. $M = X \oplus X'$ ve $X \subseteq N$ olduğundan modüler kuralından;

$$N = N \cap M = N \cap (X \oplus X') = X + (N \cap X')$$

dir. $\phi : M \rightarrow X'$, $\phi(x + x') = x'$ olacak şekilde bir homomorfizma olsun. $\phi(N/X) \ll \phi(M/X)$ olduğunu gösterelim. ϕ örten bir homomorfizma olduğu için $\phi(M) = X'$ ve izomorfizma teoreminden $M/\text{Ker}\phi = X'$ olduğundan $M/X \cong X'$ dir. $N/X \ll M/X$ olduğundan $\phi(N/X) = N \cap X' \ll X'$ olur. Dolayısıyla $N \cap X' \ll M$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$ 3) Kabulden $N = X + Y$ ve $Y \ll M$ olacak biçimde bir $X \leq_d M$ ve $Y \leq M$ vardır. $M = X \oplus X'$ olsun. Teorem 1.6.1 (4)'den X' , M de X 'in supplementidir ve böylece $N = X + X'$ 'ün de bir supplementidir. Buradan $N \cap X' \ll X'$ elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 4) (3)'den dolayı $N = X \oplus (N \cap X')$ ve X' modülü M içinde N 'nin supplementidir.

4) $\Rightarrow$ 5) (4)'den dolayı $M = N + V$, $N \cap V \ll V$ ve bazı $X \subseteq N$ için $N = (N \cap V) \oplus X$ dir. Buradan

$$M = N + V = X + (N \cap V) + V = X + V$$

ve $X \cap V = X \cap (N \cap V) = 0$ olduğundan $M = X \oplus V$ olur. $e : M \rightarrow X$, $e(x + v) = x$ olan projeksiyon dönüşümü olsun. Böylece $eM \subseteq N$ dir. $X \subseteq N$ için $(1 - e)N = N \cap V \ll V = (1 - e)M$ dir.

5) $\Rightarrow$ 1) $X = eM$ olsun. Böylece $M = X \oplus (1 - e)M$ ve $X \subseteq N$ dir. $\phi : M/X \rightarrow M(1 - e)$ izomorfizmasından $\phi(N/X) = (1 - e)N \ll (1 - e)M$ elde edilir. ϕ bir izomorfizması olduğundan $N/X \ll M/X$ olduğu görülür.

Tanım 1.6.2 M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $\forall N \leq M$ için $X \leq_d M$ olacak şekilde $X \subseteq N$ var ve $N/X \ll M/X$ ise M modülüne **lifting (yükselen) modül** denir.

Örnek 1.6.3 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Q}$ lifting modül değildir. Bu modülün small olmayan bir N alt modülünü alalım. Kabul edelim ki $\mathbb{Q}$ lifting modül olsun. Böylece $K \leq N$, $L \cap N \ll \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q} = K \oplus L$ olacak şekilde K , L alt modülleri vardır. Rasyonel sayılar uniform modül olduğundan ayrıştırılmaz olup $K = 0$ dir. Buradan $N \ll \mathbb{Q}$ olur. Bu ise N modülünün small olmaması ile çeliştiğinden $\mathbb{Q}$ lifting modül değildir.

Tanım 1.6.4 M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $\phi(N) \in \text{End}(M)$ için $\phi(N) \subseteq N$ oluyorsa N 'ye M 'nin **fully invariant alt modülü** denir ve $N \triangleleft M$ ile gösterilir.

Teorem 1.6.5 M lifting bir modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;

- 1) M modülündeki herhangi coclosed alt modül bir dik toplanandır.
- 2) M amply supplemented modüldür.

- 3) M modülünün hollow modül olması için gerek ve yeter koşul ayrıştırılamaz olmasıdır.
 4) Eğer $N \subseteq M$ fully invariant alt modül ise M/N lifting modüldür.

Kanıt. 1) Tanımdan coclosed alt modülde cosmall olacak şekilde bir öz alt modül olmadığı için Teorem 1.6.1 (1) 'den dik toplanan özelliği sağlanır.

2) $K, L \leq M$ olmak üzere $M = K + L$ olsun. K modülünün M içinde L 'nin bir supplementini içerdiğini gösterelim. Kabulümüzden ve Teorem 1.6.1 (2)'den dolayı $K = N \oplus H$ olacak biçimde $H \ll M$ ve $N \leq_d M$ vardır. Dolayısıyla $M = N + H + L$ olup $H \ll M$ olduğundan $M = N + L$ dir. Yine kabulümüzden, $L \cap N = N_1 \oplus S$ olacak biçimde $S \ll M$ ve $N_1 \leq_d M$ vardır. Böylece N_1 modülü N de dik toplanandır ve $S \ll N$ dir. $N_2 \leq N$ olmak üzere $N = N_1 \oplus N_2$ olsun. N_2 alt modülü N içinde N_1 'in supplementidir. Teorem 1.6.1 (4)'den N_2, N içinde $N_1 + S$ 'nin supplementidir. Böylece ;

$$M = L + N = L + (N_1 + S) + N_2 = L + (L \cap N) + N_2 = L + N_2$$

ve $L \cap N_2 = (L \cap N) \cap N_2 = (N_1 + S) \cap N_2 \ll N_2$ dir. Böylece N_2 'nin M içinde L 'nin supplementi olduğu görülür.

3) $\Rightarrow$) $M = A \oplus B$ olsun. Kabulümüzden $A \ll M$ ve $B \ll M$ dir. Böylece $A = M$ ya da $B = M$ olup M ayrıştırılamaz modüldür.

$\Leftarrow$) M ayrıştırılamaz modül olsun. Dolayısıyla M modülünün $\{0_M\}$ ve kendisinden başka alt modülü yoktur. $\{0_M\}$ modülü M 'nin tek öz alt modülüdür ve $\{0_M\} \ll M$ dir. Böylece M hollow modül olur.

4) N, M de fully invariant alt modül ve $N/X \subseteq M/X$ olsun. Teorem 1.6.1 (5)'den dolayı bir $e^2 = e \in \text{End}(M)$ vardır öyle ki $eM \subseteq N$ ve $(1 - e)N \ll (1 - e)M$ dir. N modülü M de fully invariant olduğu için e idempotent homomorfizması bir $\bar{e} \in \text{End}(M/N)$ homomorfizmasını doğurur. Kolayca görülür ki $\bar{e}M \subseteq M/N$ ve $(1 - \bar{e})(N/X) \ll M/N$ dir.

Teorem 1.6.6 [3, 22.3] Bir M modülü için aşağıdakiler denktir;

- 1) M lifting modüldür.
 2) Her $N \leq M$ için bir $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır öyle ki $M_1 \subseteq N$ ve $N \cap M_2 \ll M$ dir.
 3) Her N alt modülü, $N_1 \leq_d M$ ve $N_2 \ll M$ olmak üzere $N = N_1 \oplus N_2$ biçimde yazılabilir.

- 4) M amply supplemented ve M modülündeki her coclosed alt modül bir dik toplanandır.
- 5) M amply supplemented modül ve M modülündeki supplementlar dik toplanandır.

Kanıt. 1) $\Leftrightarrow$ 2) M lifting modül olsun. $M_1, M_2 \leq_d M$ ile $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı için $N \cap M_2 \ll M$ olduunu görelim. Teorem 1.6.1 (3)'den dolayı her $N \leq M$ için $M_1 \leq N$ ve $N \cap M_2 \ll M_2$ olacak şekilde bir $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır ve $N \cap M_2 \ll M_2 \leq M$ den $N \cap M_2 \ll M$ olur.

1) $\Leftrightarrow$ 3) M bir lifting modül olsun. Her $N \leq M$ için N modülünün $N = N_1 \oplus N_2$ olarak yazılabildiğini gösterelim. Teorem 1.6.1 (2)'den her $N \leq M$ için $M = N_1 + K$ ile $N_2 \ll M$ için $N = N_1 \oplus N_2$ olur.

1) $\Rightarrow$ 4) M lifting modül olsun. M modülünün amply supplemented ve M modülündeki her coclosed alt modülün dik toplanan olduğunu görelim. M lifting modül olduğundan amply supplemented modüldür. Teorem 1.6.5 (1)'den M modülünün her coclosed alt modülü M içinde dik toplanan olur.

1) $\Rightarrow$ 5) M lifting modül olsun. $N = X \oplus Y$, $X \leq_d M$ ve $Y \ll M$ olacak biçimde $X, Y \leq M$ vardır. M supplemented modül olduğundan X modülü de supplemented modül olur. Teorem 1.3.24'den M amply supplemented modül olur. K, M modülünde supplement alt modül olsun. Böylece $M = K + P$ ve K supplement olduğundan minimalliğinden bir P alt modülü vardır. M modülü lifting olduğundan $K = T \oplus S$ için $T \leq_d$ ile $S \ll M$ alt modülleri vardır. Dolayısıyla $M = P + N$ yazılabilir. K modülü supplement olduğundan minimallikten $K = N$ olup K, M içinde dik toplanandır.

4) $\Rightarrow$ 5) M amply supplemented ve M deki her coclosed alt modül dik toplanan olsun. M deki her supplement alt modülün dik toplanan olduğunu görelim. M amply supplemented modül ve her coclosed alt modül dik toplanan olduğundan her coclosed alt modül supplementtir öyle ki her supplement alt modül de M modülünde dik toplanan olur.

5) $\Rightarrow$ 1) M amply supplemented modül ve M modülündeki her supplement alt modül dik toplanan olsun. M 'nin lifting modül olduğunu görelim. K, M de bir supplement alt modül $L \ll M$ ve $N \subset M$ olsun. Buradan $N = K + L$ yazabiliriz. Teorem 1.6.5 (2)'den M 'nin lifting modül olduğu görülür.

Sonuç 1.6.7 [3, 22.4] Her hollow modül lifting modüldür.

Sonuç 1.6.8 M bir modül olsun. M modülünün (D_1) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul M 'nin lifting olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$) Kabulümüzden $M = X \oplus M_2$ ayrışımı için $N \cap M_2 \ll M$ ve $X \subseteq K \subseteq M$ için $N/X + K/X = M/X$ olsun. M 'nin lifting modül olduğunu gösterelim. Buradan $(N + K)/X = M/X$ ile $M = K + X$ yazılabilir. $M = N + K = X \oplus M_2$ olduğundan modüler kuralından,

$$N \cap (N + K) = N \cap M = N \cap (X \oplus M_2)$$

eşitliğinden $N = X + (N \cap M_2)$ olup

$$M = N + K = X + K + (N \cap M_2) = K + (N \cap M_2)$$

elde edilir. $(N \cap M_2) \ll M$ olduğundan $M = K$ dir. Dolayısıyla M lifting modüldür.

$\Leftarrow$) $M = X \oplus Y$ ve $N/X \ll M/X$ olsun. $N = X + K$ ve $K \ll M$ olduğunu gösterelim. $M = X \oplus Y$ ve $X \subset N$ olduğundan;

$$N = M \cap N = N \cap (X \oplus Y) = X + (N \cap Y)$$

dir. $\theta : M \rightarrow M$, $\theta(x + y) = y$ olacak şekilde bir θ homomorfizmasından $\theta(M) = Y$ ve izomorfizma teoreminden $M/\text{Ker}\theta = Y$ olduğundan $M/X \cong Y$ dir. Kabulümüzden dolayı $\theta(N/X) = N \cap Y \ll Y$ olur. Böylece $N \cap Y \ll M$ olup D_1 özelliği sağlanır.

2 ADS* MODÜLLER

Bu bölümde Ads^* modül tanımlanmış ve bu modül sınıfının bazı özellikleri incelenmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için [6] önerilir.

Tanım 2.1 M bir R -modül olmak üzere eğer M nin her $M = A \oplus B$ ayrışımı ve A 'nın M 'deki her C supplementi için $M = A \oplus C$ oluyorsa, M modülüne Ads^* özelliğine sahiptir ya da M **Ads*** modüldür denir.

Örnek 2.2 *Indecomposable (ayrıştırılamaz) modüller Ads^* dır.*

Teorem 2.3 M amply supplemented bir modül olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

- i) M Ads^* dır.
- ii) $M = S_1 + S_2$ koşulunu sağlayan her $S_1, S_2 \leq_d M$ için, $\text{Ker}(\alpha_i) = S_j$ olan $\alpha_i : M \rightarrow \frac{S_i}{S_1 \cap S_2}$ ($i \neq j = 1, 2$) homomorfizması, M 'nin $\beta_i(M) \subseteq S_i$ olacak biçimdeki bir β_i idempotent endomorfizmasına yükseltilebilir.
- iii) $M = A \oplus B$ olduğunda A ve B karşılıklı projektiftir.

Kanıt. $i) \Rightarrow ii)$ $S_1 \leq_d M$ ve $S_2 \leq M$ ile $M = S_1 + S_2$ olsun. M amply supplemented modül olduğundan S_1 'in bir T supplementi vardır öyle ki $T \subseteq S_2$ dir. Bu durumda, kabulümüzden $M = S_1 \oplus T$ yazılabilir. $\alpha_1, \text{Ker}(\alpha_1)=S_2$ olan bir epimorfizma,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\beta_1} & S_1 \\ \alpha_1 \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ \frac{S_1}{S_1 \cap S_2} & & \end{array}$$

$\pi_1 : S_1 \rightarrow S_1 / (S_1 \cap S_2)$ doğal epimorfizma iken $\beta_1 : M \rightarrow S_1$ projeksiyon dönüşümü olsun. Bu durumda $\text{Ker}(\alpha_1) = S_2$ ve $\text{Ker}(\pi_1) = S_1 \cap S_2$ 'dir.

İddia: $\pi_1\beta_1 = \alpha_1$ 'dir.

$m \in M$ alalım. Bu durumda $m = s_1 + t$ olacak biçimde bir $s_1 \in S_1$ ve $t \in T$ vardır. $\pi_1\beta_1(m) = \alpha_1(m)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\pi_1\beta_1(m) &= \pi(\beta_1(s_1 + t)) \\ &= \pi_1(s_1) \\ &= s_1 + S_1 \cap S_2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_1(m) &= \alpha(s_1 + t) \\ &= \alpha_1(t) + \alpha_1(s_1) \\ &= s_1 + S_1 \cap S_2\end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitlik elde edilir. Böylece β_1 homomorfizması α_1 homomorfizmasını yükseltir. Benzer şekilde;

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\beta_2} & T & \xrightarrow{i} & S_2 \\ \alpha \downarrow & & & \nearrow \pi_2 & \\ \frac{T}{S_2 \cap S_2} & & & & \\ i \downarrow & & & & \\ \frac{S_2}{S_1 \cap S_2} & & & & \end{array}$$

$\alpha : M \rightarrow T/(S_1 \cap S_2)$ doğal epimorfizma, $i : T \rightarrow S_2/(S_1 \cap S_2)$ ile $i : T \rightarrow S_2$ gömme homomorfizmaları ve $i \circ \alpha = \alpha_2 : M \rightarrow S_2/(S_1 \cap S_2)$ doğal epimorfizması iken $\beta_2 : M \rightarrow T$ projeksiyon dönüşümü olsun. Bu durumda $Ker(\alpha_2) = S_1$ ve $Ker(\pi_2) = S_1 \cap S_2$ dir.

İddia: $\pi_2\beta_2 = \alpha_2$ dir.

$m \in M$ alalım. $M = S_1 \oplus T$ için $m = s_1 + t$ olacak şekilde $s_1 \in S_1$ ve $t \in T$ vardır. $\pi_2\beta_2(m) = \alpha_2(m)$ için $(\pi_2 \circ i)(\beta_2) = (i \circ \alpha)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(\pi_2 \circ i)(\beta_2(m)) &= (\pi_2 \circ i)(\beta_2(s_1 + t)) \\ &= (\pi_2 \circ i)(t) \\ &= \pi_2(t) \\ &= t + S_1 \cap S_2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(i \circ \alpha)(m) &= i(\alpha(m)) \\ &= \alpha(m) = \alpha(s_1 + t) \\ &= t + S_1 \cap S_2\end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitlik elde edilir. Böylece $\beta_2 : M \rightarrow T$ homomorfizması α_2 homomorfizmasını yükseltir.

ii) $\Rightarrow$ i) $M = A \oplus B = A + C$ ve $A \cap C \ll C$ olsun.

İddia: M Ads* modüldür.

C, A 'nın supplementi olmak üzere $M=A \oplus C$ olduğunu gösterelim.

$\pi_2 : C \rightarrow \frac{C}{A \cap C}$ doğal epimorfizma ve $\theta_2 : M \rightarrow \frac{C}{A \cap C}$, $\text{Ker}(\theta_2) = A$ olan epimorfizma olsun. Kabulümüzden dolayı $f : M \rightarrow C$ idempotent endomorfizması vardır öyle ki $\pi_2 f = \theta_2$ 'dir.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & C \\ \theta_2 \downarrow & \swarrow \pi_2 & \\ \frac{C}{A \cap C} & & \end{array}$$

$m \in M$ alalım. $M = A + C$ olduğu için $m = a + c$ olacak biçimde bir $a \in A$ ve $c \in C$ vardır.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker} f &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \theta_2(x) = (\pi_2 f)(x) = \pi_2(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \text{Ker} \theta_2 = A \cap C \leq A \text{ olduğundan } \text{Ker} f \subseteq A. \end{aligned}$$

Ayrıca $M = f(M) \oplus \text{Ker} f = C + \text{Ker} f$ dir. $A \cap C \ll C$ olduğu için Teorem 1.6.1'den

$$\frac{(A \cap C) + \text{Ker} f}{\text{Ker} f} \ll \frac{C + \text{Ker} f}{\text{Ker} f} \ll \frac{M}{\text{Ker} f} \quad (*)$$

olur. $\text{Ker} f + (A \cap C) = A \cap (\text{Ker} f + C) = A$ olduğundan $\frac{A}{\text{Ker} f} \ll \frac{M}{\text{Ker} f}$ 'dir. Gerçekten;
 $\frac{M}{\text{Ker} f} = \frac{A}{\text{Ker} f} + \frac{T}{\text{Ker} f}$ ise

$$\frac{M}{\text{Ker} f} = \frac{A+T}{\text{Ker} f} = \frac{\text{Ker} f + (A \cap C) + T}{\text{Ker} f} = \frac{\text{Ker} f + A \cap C}{\text{Ker} f} + \frac{T}{\text{Ker} f}$$

olup (*)'dan $\frac{M}{\text{Ker} f} = \frac{T}{\text{Ker} f}$ elde edilir. Böylelikle $\frac{A}{\text{Ker} f} \ll \frac{M}{\text{Ker} f}$ dir. Fakat A, M 'de coclosed olduğu için $A = \text{Ker} f$ dir. Bundan dolayı,

$$M = f(M) \oplus \text{Ker} f = f(M) \oplus A$$

dir. C, A 'nın supplementi ve $f(M) \leq C$ olduğundan, $C = f(M)$ 'dir. Böylece $M = A \oplus C$ olup M Ads* modül olur.

i) $\Rightarrow$ iii) $M = A \oplus B$ Ads* modül olsun. A modülünün B -projektif olduğunu gösterelim.

Bu durumda Teorem 1.4.8'den $M = B + C$ olan bir $B \leq_d M$ için bir $D \subseteq C$ vardır öyle ki $M = B + D$ 'dir. $C \leq M$ ve $M = C + B$ olsun. M amply supplemented modül olduğu için bir $C' \leq M$ vardır öyle ki $M = C' + B$ ve $C' \cap B \leq C' \leq C$ 'dir. Teorem 1.4.8 ($3 \Leftrightarrow 4$)'den A, B -projektiftir.

iii) $\Rightarrow$ i): $M = A \oplus B = B + C$ ve $B \cap C \ll C$ olsun. A, B -projektif olduğundan Teorem 1.4.8'den bir $C' \subseteq C$ vardır öyle ki $M = B \oplus C'$ dır. Modüler kuralından

$$C = C \cap M = C \cap (B + C') = C' + (B \cap C)$$

olup $B \cap C \ll C$ olduğundan $C = C'$ dır. Böylece M 'nin Ads^* modül olduğu görülür.

Önerme 2.4 M amply supplemented Ads^* modül $A \leq M, B \leq M$ öyle ki $A \leq_d M$ ve $B \hookrightarrow^{cc} M$ için $M = A + B$ olsun. Bu durumda $A \cap B \hookrightarrow^{cc} M$ dir.

Kanıt. C, A modülünün supplementi ve $C \subseteq B$ olsun. Kabulümüzden dolayı $M = C \oplus A$ yazılabilir. $M = A + B = C \oplus A$ için modüler kuralından ;

$$B \cap M = B \cap (A + B) = B \cap (C \oplus A)$$

den $B = C \oplus (A \cap B)$ elde edilir. $(A \cap B)$ 'nin M içinde coclosed olduğunu gösterelim. $X \subseteq (A \cap B) \subset B, X \hookrightarrow^{cc} B$ ve $(A \cap B)/X \ll B/X$ olsun. Ayrıca $(A \cap B)/X \ll M/X$ dir. Fakat $X \hookrightarrow^{cc} B$ olduğundan $X = A \cap B$ olur. Böylece $A \cap B \hookrightarrow^{cc} B$ dir. $(A \cap B) \hookrightarrow^{cc} B$ ve $B \hookrightarrow^{cc} M$ olduğundan Teorem 1.2.4(6)'dan $(A \cap B) \hookrightarrow^{cc} M$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.5 ([1]) $M = B \oplus C$ ayrışımı ile $\beta : M \rightarrow B$ ve $\gamma : M \rightarrow C$ projeksiyon olsun. $C_1 = (\gamma - \beta\theta\gamma)(M)$ olmak üzere $M = B \oplus C_1$ olması için gerek ve yeter şart bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizmasının bulunmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$) $M = B \oplus C_1$ ayrışımı ile $\beta_1 : M \rightarrow B$ ve $\gamma_1 : M \rightarrow C_1$ projeksiyonlar olsun.

$\beta_1 = \beta_1 + \beta\theta\gamma, \gamma_1 = \gamma - \beta\theta\gamma$ ve $\theta = \gamma - \gamma_1$ olduğunu gösterelim.

$\text{Ker}\theta = \{m \in M | (\gamma - \gamma_1)(m) = 0\}$ ve $\gamma(m) = \gamma_1(m) \in C_1$ olduğundan

$B \leq C \cap C_1$ 'dir. $b \in B$ alalım.

$$\theta(b) = (\gamma - \gamma_1)(b) = \gamma(b) - \gamma_1(b) = 0 - 0$$

olup $B \leq \text{Ker}\theta$ ve $\theta(B) = 0$ dir.

$$(\theta\beta + \theta\gamma)(M) = \theta(\beta(M)) + \theta(\gamma(M)) = \theta(B) + \theta(\gamma(M)) = \theta(\gamma(M))$$

olup $\theta\beta + \theta\gamma = \theta\gamma$ dir.

$m \in M$ alalım. $M = B \oplus C$ olduğundan $m = b + c = b_1 + c_1$ olacak şekilde $b, b_1 \in B$ ve $c, c_1 \in C$ vardır ve $m \in M$ ve $m = b + c = b_1 + c_1$ olduğundan $b_1 - b = c - c_1$ 'dir. $\beta\theta = \theta$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
(\beta + \beta\theta\gamma)(m) &= \beta(m) + \beta\theta(\gamma(m)) \\
&= \beta(b + c) + \beta\theta(\gamma(b + c)) \\
&= b + \theta(c) \\
&= b + (\gamma - \gamma_1)(c) \\
&= b + \gamma(c) - \gamma_1(c) \\
&= b + c - \gamma_1(c) \\
&= m - \gamma_1(b_1 - b + c_1) \\
&= m - c_1 \\
&= b_1 + c_1 - c_1 \\
&= b_1 \in \beta_1 \\
(\gamma_1 - \gamma_1)(m) &= \gamma(b + c) - \gamma_1(b_1 + c_1) \\
&= c - c_1 \\
&= b + \theta(c) \\
&= b_1 - b
\end{aligned}$$

olup $(\gamma - \gamma_1)(m) = \theta(m)$ dir. Böylece $\beta\theta = \theta$ dir. $\gamma_1 = \gamma - \theta = \gamma - \beta\theta\gamma$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
(\gamma - \theta)(m) &= \gamma - \theta(\gamma(m)) \\
&= \gamma(m) - \theta(\gamma(m)) \\
&= \gamma(m) - \theta(\gamma(b + c)) \\
&= \gamma(b + c) - \theta(c) \\
&= c - \theta(c) \\
&= \gamma_1(c_1) \\
\gamma - \beta(\theta - \gamma_1)\gamma &= \gamma - \beta\gamma\gamma + \beta\gamma_1\gamma \\
&= \gamma - \beta\gamma + \beta\gamma_1\gamma
\end{aligned}$$

Böylece $\gamma_1 = \gamma - \theta = \gamma - \beta\theta\gamma$ dir. $m \in M$ alalım. $\beta_1 = 1_M - \gamma_1 = \beta + \gamma - \gamma_1 = \beta + \beta\theta\gamma$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
(1_M - \gamma_1)(m) &= 1_M(b_1 + c_1) - \gamma_1(b_1 + c_1) \\
&= b_1 + c_1 - c_1 \\
&= b_1 \in \beta_1(m) \\
(\beta + \gamma - \gamma_1)(m) &= \beta(m) + \gamma(m) - \gamma_1(m) \\
&= \beta(b_1 + c_1) + \gamma(b_1 + c_1) - \gamma_1(b_1 + c_1) \\
&= b_1 + b_1 - b_1 \\
&= b_1 \in \beta_1 \\
(\beta + \beta\theta\gamma)(m) &= \beta(m) + \beta\theta\gamma(m) \\
&= \beta(b_1 + c_1) + \beta\theta\gamma(b_1 + c_1) \\
&= b_1 + \beta\theta(b_1) \\
&= b_1 + (\gamma - \gamma_1)(b) \\
&= b_1 + \gamma(b) - \gamma_1(b) \\
&= b_1 + b_1 - b_1 \\
&= b_1 \in \beta_1(m)
\end{aligned}$$

olup $\beta_1 = 1_M - \gamma_1 = \beta + \gamma - \gamma_1 = \beta + \beta\theta\gamma$ dır. $\theta\beta + \theta\gamma = \theta$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
(\theta\beta + \theta\gamma)(M) &= \theta(\beta(M)) + \theta(\gamma(M)) \\
&= \theta(B) + \theta(\gamma(M)) \\
&= \theta(\gamma(M)) \\
&= (\gamma - \gamma_1)\gamma(M) \\
&= \gamma^2(M) - \gamma_1(\gamma(M)) \\
&= \theta(M)
\end{aligned}$$

olup $\theta\beta + \theta\gamma = \theta$ dır.

($\Leftarrow$) Herhangi $\theta \in \text{End}(M)$ ile $\beta_1 = \beta + \beta\theta\gamma$ ve $\gamma_1 = \gamma - \beta\theta\gamma$ için β_1, γ_1 tanımlansın.

$m \in M$ alalım. $M = B \oplus C$ olduğundan $b, b_1 \in B$ ve $c, c_1 \in C$ vardır.

$$\begin{aligned}
(\beta_1 + \gamma_1) &= \beta_1(m) + \gamma_1(m) \\
&= \beta_1(b_1 + c_1) + \gamma_1(b_1 + c_1) \\
&= b_1 + c_1 \\
&= m \in 1_M
\end{aligned}$$

$$\beta_1^2(m) = \beta_1(\beta_1(m)) = \beta_1(\beta_1(b_1 + c_1)) = \beta_1(b_1) = b_1$$

$$\gamma_1^2(m) = \gamma_1(\gamma_1(m)) = \gamma_1(\gamma_1(b_1 + c_1)) = \gamma_1(c_1) = c_1$$

$$\beta_1\gamma_1(m) = \beta_1(\gamma_1(b_1 + c_1)) = \beta_1(c_1) = 0$$

$$\gamma_1\beta_1(m) = \gamma_1(\beta_1(m)) = \gamma_1(\beta_1(b_1 + c_1)) = \gamma_1(b_1) = 0$$

olduğundan $\beta_1\gamma_1 = \gamma_1\beta_1$ dir. Böylece $M = \beta_1 M \oplus \gamma_1 M$ 'dir. $b \in B$ için, $\beta_1(M) \subset B$ ve $\beta_1(b_1) = \beta(b)$ olduğundan $M = B \oplus (\gamma - \beta\theta\gamma)(M)$ elde edilir.

Teorem 2.6 Yardımcı Teorem 2.5'deki notasyonları göz önüne alarak, bir M modülünün Ads^* modül olması için gerek ve yeter koşul her $M = B \oplus C$ ayrışımı için, B 'nin tüm supplementlerinin, $\theta : M \rightarrow M$ bir homomorfizma olmak üzere $(\gamma - \beta\theta\gamma)(M)$ biçiminde olmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M Ads^* modül ve $M = B \oplus C$ ayrışımı için K , M içinde B 'nin supplementi olsun. M Ads^* olduğundan $M = K \oplus B$ yazılabilir. Lemma 2.5'den $\exists$ bir $\theta : M \rightarrow M$ homomorfizması vardır öyle ki $K = (\gamma - \beta\theta\gamma)$ dir.

$(\Leftarrow)$ $M = B \oplus C$ için B 'nin tüm supplementleri $C_1 = (\gamma - \beta\theta\gamma)$ olsun. Lemma 2.5'den $M = B \oplus C_1$ olup M Ads^* modüldür.

Yardımcı Teorem 2.7 M modülü Ads^* modül olsun. M modülündeki herhangi bir dik toplanan da Ads^* modüldür.

Kanıt. M Ads^* modül ve $A \leq_d M$ olsun. A 'nın Ads^* olduğunu görelim. $A \leq_d M$ olduğundan $M = A \oplus B$ olacak biçimde bir $B \leq M$ vardır. $A = A_1 \oplus A_2$ ve C, A_1 'in bir supplementi olsun. Buradan $A = A_1 + C$ ve $(A_1 \cap C) \ll C$ yazılabilir. $A = A_1 \oplus C$ olduğunu gösterelim.

$$M = A \oplus B = (A_1 + C) \oplus B = A_1 + (C \oplus B)$$

olur. Şimdi $C \oplus B$ 'nin A_1 'in supplementi olduğunu görelim.

$$A_1 \cap (C \oplus B) \subseteq C \cap (A_1 + C) = C \cap A_1 \ll C \ll C + B$$

olduğundan $M = A_1 \oplus (C + B)$ dir.

$$\begin{aligned} A \cap M &= A = A \cap [A_1 \oplus (C \oplus B)] \\ &= A_1 \oplus [A \cap (C \oplus B)] \\ &= A_1 \oplus [C + (A \cap B)] \end{aligned}$$

$(A \cap B) = 0$ olduğundan $A = A_1 \oplus C$ elde edilir. Dolayısıyla A Ads^* modül olur.

Teorem 2.8 *Eğer M modülü Ads^* ve lifting modül ise quasi-discretedir.*

Kanıt. M lifting modül olduğu için D_1 özelliği sağlanır ve M supplemented modül olur. $A \leq M$ olsun. M supplemented modül olduğundan A 'nın bir B supplementi vardır öyle ki $M = A + B$, $A \cap B \ll B$ ve B supplemented modüldür. Teorem 1.3.21'den $\exists C \leq M$ vardır öyle ki C , A 'nın supplementi ve $C \subseteq B$ dir. Böylece M amply supplemented modül olur. Teorem 1.4.9'dan A ve B karşılıklı supplement olup $A \cap B = 0$ olur. Böylece $M = A \oplus B$ şeklinde yazılabilir. Önerme 1.5.5'den M quasi-discrete modül olur.

Teorem 2.9 *Bir M modülü quasi-discrete ise π -projektiftir. Böylece M Ads^* modüldür.*

Kanıt. M modülü quasi-discrete olsun. Böylece supplemented ve π -projektif özellikleri sağlanır. M , π -projektif modül olduğundan 1.4.9'dan $M = U + V$ için M amply supplemented ve karşılıklı supplementların kesişimi 0 olduğundan $U \cap V = 0$ olup $M = U \oplus V$ yazılabilir. Böylece M Ads^* modüldür.

TARTIşMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Ads modüllerin literatürdeki dualleri olan Ads* modül sınıfı incelenmiş, amply supplemented bir modül ile keyfi bir modülün Ads* modül olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Bunun yanı sıra Ads* modüllerin dik toplananlar altında kapalı olup olmadığı sorusuna cevap verilmemiştir. Bu soruya yanıt bulunursa Ads* modüllerin temel özellikleri tam anlamıyla belirlenmiş olacaktır.



KAYNAKÇA

- [1] Alahmadi, A., Jain, S.K. ve Leory, A. (2012). ADS modules, *J. Algebra*, **352**, 215-222.
- [2] Arıkan, A. ve Halıcıoğlu, S. (2015). *Cebire Giriş*, Ankara, Palme Yayıncılık.
- [3] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. ve Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules*, Birkhauser, Berlin.
- [4] Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, London.
- [5] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*, Academic Press, London.
- [6] Keskin Tütüncü, D. (2012). A note on Ads* Modules. *Bull. Math. Sci.*, **2**, 359-363.
- [7] Mohamed, S.H. ve Muller, B.J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **147**, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [8] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Merve KARA
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı : Eskişehir, 1994
E-Posta : mervekara623@anadolu.edu.tr

Eğitim Geçmişi:

- 2017-2019, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Tezli Yüksek Lisans.
- 2013-2017, Sakarya Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği.