

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

129131

MUTLAK OLMAYAN TIPTEN M İNCİ MERTEBEDEN OLAN
BAZI EULER FARK DİZİ UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

Mat. Bil. Uzm. Harun POLAT

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Metin BAŞARIR

129131
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

MAYIS 2002

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MUTLAK OLMAYAN TIPTEN M İNCİ MERTEBEDEN
OLAN BAZI EULER FARK DİZİ UZAYLARI**

DOKTORA TEZİ

Mat. Bil. Uzm. Harun POLAT

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez ^{20/05}2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Hamdi ARIKAN
Jüri Başkanı

Prof. Dr. Fethi ÇALLI ALP
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Abdullah YILDIZ
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Ali Ekber KULİYEYEV
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Metin BAŞARIR
Jüri Üyesi

Yard. Doç. Dr. İrfan ŞİAP
Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam Doç. Dr. Metin BAŞARIR' a, İnönü Üniversitesinden Sayın Hocam Prof. Dr. Feyzi BAŞAR' a ve Arş. Gör. Bilal ALTAY' a teşekkür eder, saygılar sunarım.

Harun POLAT



İÇİNDEKİLER

SİMGELER.....	iv
ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ	
1.1 Temel Tanım Ve Teoremler.....	1
1.2 M inci Mertebeden Olan Mutlak Olmayan Tipten Bazı Euler Fark Dizi Uzayları	9
BÖLÜM 2. SCHAUDER TABANI	
2.1 $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ Dizi Uzaylarının Schauder Tabanları.....	24
BÖLÜM 3. α -, β - ve γ - DUALLERİ	
3.1 $e_\infty^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ Dizi Uzayların α -, β - ve γ - Dualleri.....	29
BÖLÜM 4. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ	
4.1 ($e_c^r(\Delta^m):l_p$), ($e_c^r(\Delta^m):c$) ve ($e_c^r(\Delta^m):l_\infty$) Matris Dönüşümleri	37
BÖLÜM 5. SONUÇLAR	45
BÖLÜM 6. TARTIŞMA ve ÖNERİLER	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGELER

c_0	Sıfıra Yakınsak Dizilerin Kümesi
c	Yakınsak Dizilerin Kümesi
l_∞	Sınırlı Dizilerin Kümesi
l_1	Mutlak Yakınsak Seri Teşkil Eden Dizilerin Kümesi
l_p	p - Yakınsak Seri Teşkil Eden Dizilerin Kümesi
bs	Sınırlı Seri Teşkil Eden Dizilerin Kümesi
cs	Yakınsak Seri Teşkil Eden Dizilerin Kümesi
C	Kompleks Sayılar Kümesi
N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Gerçek Sayılar Kümesi
E_r	r . Mertebeden Euler Ortalaması
X^α	X Dizi Uzayının α - Duali
X^β	X Dizi Uzayının β - Duali
X^γ	X Dizi Uzayının γ - Duali
Δ^m	m . Mertebeden Fark
$\cong$	İzomorf
$\ \cdot \ $	Norm
$\ \cdot \ _\infty$	Sınırlı Diziler Uzayında Alınan Norm
$\ \cdot \ _\Delta$	Fark Dizileri Uzayında Alınan Norm

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Mutlak Olmayan Tipten Euler Dizi Uzayları, Fark Dizileri, Schauder Tabanları, $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ Dualleri, Matris Dönüşümleri.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk önce daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra Mutlak olmayan tipten bazı Euler dizilerinin m . mertebeden farkları olan $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ kümeleri tanımlandı. Tanımlanan bu uzayların birer BK-uzayı oldukları gösterildi. Ayrıca bu uzayların bazı kapsama bağıntıları gösterildi.

İkinci bölümde $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının Schauder tabanları hesaplandı.

Üçüncü bölümde $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzayların $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ dualleri hesaplandı.

Dördüncü bölümde $(e_c^r(\Delta^m):l_p)$, $(e_c^r(\Delta^m):c)$ ve $(e_c^r(\Delta^m):l_{\infty})$ matris dönüşümleri karakterize edildi.

Son olarak, beşinci ve altıncı bölümde ise, bu çalışmada çıkan sonuçlar verilerek, bazı öneriler yapıldı.

EULER DIFFERENCE SEQUENCE SPACES OF NON-ABSOLUTE TYPE OF ORDER M

SUMMARY

Keywords: Sequence Spaces Of Non-Absolute Type, Difference Sequence Spaces, Schauder Bases, α - , β - and γ - Duals, Matrix Transformations.

This thesis consist of six chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters are given. The sets $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$, and $e_0^r(\Delta^m)$ which are the non-absolute type Euler sequences of order m are defined. These sequences spaces are shown to be BK-spaces. Further, inclusion relations among these spaces are also studied.

In the second chapter, the Schauder basis of the sequences spaces $e_c^r(\Delta^m)$ and $e_0^r(\Delta^m)$ are computed.

In the third chapter, α -, β -, and γ - duals of the sequence spaces $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$, and $e_0^r(\Delta^m)$ are computed.

In the fourth chapter, the matrix transformation of $(e_c^r(\Delta^m):l_p)$, $(e_c^r(\Delta^m):c)$, and $(e_c^r(\Delta^m):l_{\infty})$ are characterized.

Finally, in the fifth and sixth chapters, the results obtained are given and some suggestions for further research are made.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 Tanım kümesi N doğal sayılar kümesinden ibaret olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümesine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi R reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, Q rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi, C kompleks sayılar kümesi ise diziye kompleks terimli dizi adı verilir[12].

Tanım 1.1.2 Bir (x_n) dizisi verilsin. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $m, n > n$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n=n(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir[12].

Tanım 1.1.3 Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisinin limiti x dir denir. Limiti var olan diziye yakınsak dizi denir. Aksi halde diziye ıraksak dizi denir[12].

Tanım 1.1.4 (x_n) bir dizi olsun. Genel terimi $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ($n \in N$) olarak tanımlanan (s_n) dizisini gözönüne alalım. $((x_n), (s_n))$ ikilisine seri denir. x_n terimine serinin genel terimi, (s_n) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak ise, $((x_n), (s_n))$ serisi yakınsak ve serinin toplamı s dir denir. Yakınsak olmayan seriye ıraksak seri denir[11].

Tanım 1.1.5 X boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e F üzerinde vektör uzayı denir.

A) X , $+$ işlemine göre bir değişmeli gruptur. Her $x, y, z \in X$ için,

A1) $x + y \in X$ olmalı,

A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ olmalı,

A3) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ olmalı,

A4) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in X$ olmalı,

A5) $x + y = y + x$ olmalıdır.

B) Her $\alpha, \beta \in F$ için,

L1) $\alpha x \in X$ olmalı,

L2) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ olmalı,

L3) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ olmalı,

L4) $(\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$ olmalı,

L5) $1.x = x$ olacak şekilde $1 \in X$ olmalıdır.

Tanım 1.1.6 X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) çiftine de metrik uzay denir.

Her $x, y, z \in X$ için,

M1) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ dır.

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ dır.

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dır [12].

Tanım 1.1.7 L bir vektör uzayı ve $X \subset L$ olsun. Her $x, y \in X$ ve α skaleri için,

$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset X$

oluyorsa X' e konveks küme denir. Başka bir deyimle sezgisel olarak, boş olmayan ve herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasını içeren küme konveks bir kümedir.

Tanım 1.1.8 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $g : X \rightarrow F$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, g ye X üzerinde bir paranorm ve (X, g) ye de paranormlu uzay denir. Her $x, y \in X$ için,

- i. $g(0) = 0$,
- ii. $g(x) = g(-x)$,
- iii. $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$,
- iv. $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ve $x \rightarrow x_0$ iken $\lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$ olmalıdır.

Burada, $\lambda, \lambda_0 \in F$ ve $x, x_0 \in X$ dır. Bir başka ifadeyle $|\lambda - \lambda_0| \rightarrow 0$, $g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$ olmalıdır [12].

Tanım 1.1.9 X bir vektör uzayı olsun. $\| \cdot \| : X \rightarrow R$ fonksiyonunun x noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. $\| \cdot \|$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in R$ için;

- N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$
- N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \|x\|$,
- N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ olmalıdır[12].

Tanım 1.1.10 X normlu vektör uzayı olsun. X uzayı norm metriğine göre tam ise X e bir Banach uzayı denir[12].

Tanım 1.1.11 Bir uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir.

Tanım 1.1.12 X boş olmayan bir küme ve τ , X ' in elemanlarından oluşan alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ' ya X üzerinde bir topoloji ve (X,τ) ya da bir topolojik uzay denir.

T1) $\emptyset, X \in \tau$

T2) τ ' nun keyfi elemanlarının birleşimi τ ' nun bir elemanıdır.

T3) τ ' ya ait sonlu sayıdaki elemanların kesişimi τ ' ya aittir [15].

Tanım 1.1.13. X hem vektör uzayı hem de topolojik uzay olsun. Eğer X deki skalerle çarpma ve toplama işlemleri X deki topolojiye göre sürekli iseler X ' e topolojik vektör uzayı denir [5].

Tanım 1.1.14 X bir vektör uzayı ve $\rho : X \rightarrow F$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in F$ için,

$$1. \rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$$

$$2. \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

şartlarını sağlayan ρ ya bir yarınorm (X, ρ) ikilisine de yarınormlu uzay denir [15].

Tanım 1.1.15 ρ , X vektör uzayı üzerinde tanımlı bir yarı norm olsun.

$$X_\rho = \{x \in X : \rho(x) < \infty\}$$

ile tanımlı X_ρ vektör uzayına ρ yarı normuyla mutlak olmayan tipten normlu Köthe dizi uzayı denir [4].

Tanım 1.1.16 X_ρ yarı normlu uzayı eğer, ρ yarı normuna göre tam ise X_ρ ya mutlak olmayan tipten Banach uzayı denir. Yani; $\rho(x) \neq \rho(|x|)$ olup burada $|x| = (\|x_n\|)$ ve $n \in N$ dir [4].

Tanım 1.1.17 (X, g) bir paranormlu uzay olsun. X ' in elemanlarından oluşan bir (b_k) dizisi eğer, her $x \in X$ için,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b_k$$

olacak şekilde bir tek (λ_k) skaler dizisi mevcut ise, (b_k) dizisine X için bir Schauder tabanı denir [12].

Tanım 1.1.18 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ topolojisi tarafından oluşturulan bir d metriği bulunabilirse (X, τ) topolojik uzayına metriklenebilir topolojik uzay denir. Eğer bu metriklenebilir τ topolojisi normlanabilirse normlu topolojik uzay denir [15].

Tanım 1.1.19 X ve Y , C kompleks sayıların boş olmayan iki alt vektör uzayı ve $A = (a_{nk})_{n,k \in N}$ kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Eğer her $n \in N$ için,

$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ise, $Ax = (A_n(x))$ yazılır. Eğer $x = (x_k) \in X$ için $Ax = (A_n(x)) \in Y$ ise, A matrisi X den Y ' ye bir dönüşüm tanımlar. $A : X \rightarrow Y$ ile gösterilir. Ax dizisine x ' in A dönüşümü denir. $A : X \rightarrow Y$ ye olan matris sınıfları (X,Y) ile gösterilir [14].

Tanım 1.1.20 X bir tam lineer topolojik uzay olsun. Eğer, her $i \in N$ için, $p_i(x) = x_i$ ile tanımlı $p_i : X \rightarrow C$ dizisi sürekli ise, X ' e K- uzayı denir. X bir K- uzayı olsun. Eğer, X bir tam lineer metrik uzay ise, X ' e FK- uzayı denir. X bir FK- uzayı olsun. Eğer, X topolojik olarak normlanabilirse X ' e BK- uzayı denir [4].

Tanım 1.1.21 X, Y iki vektör uzayı ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer T dönüşümü birebir ve üzerine ise, X ve Y cebirsel olarak izomorftur denir. Eğer X ve Y uzayları normlu uzaylar ise, X ve Y' ye izomorf uzaylar denir. Eğer T' nin T^{-1} tersi mevcut ise, X ve Y arasında bir izomorfizma vardır denir. Eğer T ve T^{-1} dönüşümleri sürekli ise, X ve Y uzayları arasında bir homeomorfizma vardır denir [15].

Tanım 1.1.22 A sonsuz matrisi, yakınsak dizileri limiti koruyarak yakınsak dizilere dönüştürüyorsa, A matrisine regüler matris denir ve $A \in (c,c;p)$ olarak gösterilir[12].

Tanım 1.1.23 X ve Y birer vektör uzayı olsun. X den Y ' ye bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilir. Y ' nin R ya da C alınması durumunda $L(X,R)$ ya da $L(X,C)$, X üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerin kümeleri olur. Bu kümelere X ' in cebirsel duali denir. X ve Y ' nin normlu vektör uzayları olmaları durumunda X den Y ' ye bütün sınırlı (sürekli) lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. Eğer Y bir Banach uzayı ise, $B(X,R)$ ve $B(X,C)$ kümelerine X'in sürekli duali denir. X^* ile gösterilir [12].

Tanım 1.1.24 X ve Y birer dizi uzayı olsun. X den Y ye A dönüşümü,

$$A(X, Y) = \{x = (x_k) \in w : xy = (x_k y_k) \in Y \text{ her } y \in X \text{ için} \}$$

olarak tanımlanır. Bir X dizi uzayının sırasıyla α -, β - ve γ - dualleri,

$$X^\alpha = A(X, l_1), \quad X^\beta = A(X, cs) \text{ ve } X^\gamma = A(X, bs)$$

olarak tanımlanır [9].

Stieglitz ve Tietz [17] ve Nanda [14] de bulunan ve $e'_0(\Delta^m)$, $e'_c(\Delta^m)$ ve $e'_\infty(\Delta^m)$ dizi uzaylarının α -, β -, ve γ - duallerini hesaplamak için kullanılacak olan bazı lemmaları verelim.

Lemma 1.1.1 $A \in (c_0 : l_1) = (c : l_1) = (l_\infty : l_1)$ olması için gerekli ve yeterli şart;

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} a_{nk} \right| < \infty$$

olmasıdır. Burada F doğal sayılar kümesinin bir alt aile sınıfıdır.

Lemma 1.1.2 $A \in (c_0 : c)$ olması için gerekli ve yeterli şart;

$$\text{i. } \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$\text{ii. } \lim_n a_{nk} \text{ mevcut (her } k \in N),$$

olmasıdır.

Lemma 1.1.3 $A \in (c : c)$ olması için gerekli ve yeterli şart,

$$\text{i. } \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$\text{ii. } \lim_n a_{nk} \text{ mevcut (her } k \in N)$$

$$\text{iii. } \lim_n \sum_k a_{nk} \text{ mevcut}$$

olmasıdır.

Lemma 1.1.4 $A \in (l_\infty : c)$ olması için gerekli ve yeterli şart;

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır.

Lemma 1.1.5 $A \in (c_0 : l_\infty) = (c : l_\infty) = (l_\infty : l_\infty)$ olması için gerekli ve yeterli şart;

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

olmasıdır.

Lemma 1.1.6 $A \in (c : l_p)$ olması için gerekli ve yeterli şart;

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} a_{nk} \right|^p < \infty, \quad (1 \leq p < +\infty)$$

olmasıdır.

1.2 m inci Mertebeden Olan Mutlak Olmayan Tipten Bazı Euler Fark Dizi Uzayları

Bütün kompleks ya da reel değerli dizilerin uzayı w ile gösterilecektir. w vektör uzayının herhangi bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir. Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı c_0 , yakınsak dizilerin uzayı c ve sınırlı dizilerin uzayı l_∞ ile gösterilir. Bu dizi uzayları her $k \in N = \{0,1,2,\dots\}$ için,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

alışılmış normu ile birer Banach uzaylarıdır. Ayrıca bütün sınırlı seri teşkil eden dizilerin kümesi bs , yakınsak seri teşkil eden dizilerin kümesi cs , mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin kümesi l_1 ve p inci kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin kümesi l_p ile gösterilir. Bu uzaylar,

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty \right\},$$

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\},$$

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \sum_{k=0}^n x_k \right| < \infty \right\},$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Kızmaz [10],

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \Delta x \in c_0\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \Delta x \in c\}$$

ve

$$l_{\infty}(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \Delta x \in l_{\infty}\}$$

fark dizi uzaylarını tanımlayarak, bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını göstererek bazı, matris dönüşümlerini karakterize etti.

Et ve Çolak [7], bu dizi uzaylarının m inci mertebeden farklarını tanımladılar. Bu uzayların birer Banach uzayı olduklarını gösterdiler. α -, β - ve γ - duallerini hesapladılar ve bazı matris dönüşümlerini karakterize ettiler.

Malkowsky [13]' te bu dizi uzaylarının Schauder tabanlarını, α -, β - ve γ - duallerini hesaplayarak bazı matris dönüşümlerini karakterize etti.

Başarır ve Et [3], bu dizi uzaylarını m inci mertebeden fark dizi uzaylarına genelleştirdiler ve bunların paranormlu birer topolojik vektör uzayı olduklarını gösterdiler.

Tanım 1.2.1 $r \in (0,1)$ olmak üzere, r inci mertebeden E_r - Euler ortalaması,

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

matrisi ile ve E_r Euler dönüşümünün ters dönüşümü olan $E_{1/r}$,

$$e_{nk}^{1/r} = \begin{cases} \binom{n}{k} r^{-n} (r-1)^{n-k} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

matrisi ile tanımlanır [16] .

Altay ve Başar [1] sıfıra yakınsak dizilerin c_0 , yakınsak dizilerin c ve sınırlı dizilerin l_∞ uzaylarını mutlak olmayan tipten Euler dizi uzaylarına aşağıdaki şekilde genişlettiler.

Tanım 1.2.2 Mutlak olmayan tipten Euler dizi uzayları

$$\begin{aligned} e_0^r &= \{x = (x_k) \in w : E_r x \in c_0\} \\ &= \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} x_k = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$e'_c = \{x = (x_k) \in w : E_r x \in c\}$$

$$= \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} x_k \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$e'_\infty = \{x = (x_k) \in w : E_r x \in l_\infty\}$$

$$= \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} x_k \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır.

Bu dizi uzayları sırasıyla c_0 , c ve l_∞ dizi uzaylarını kapsayan birer BK- uzayları olduğu gösterildi, Schauder tabanları ile α -, β - ve γ - dualleri hesaplanarak, bazı matris dönüşümleri karakterize edildi [1].

Et [6] Cesaro fark dizi uzaylarını,

$$C_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

ve

$$C_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|^p < \infty, \quad n \geq 1 \right\}$$

olarak tanımladı. Bu uzayların birer BK- uzayı oldukları göstererek, $C_\infty(\Delta^m)$ uzayının α - dualini hesaplayarak bazı matris dönüşümlerini karakterize etti.

Şimdi, bu tezde çalışacak olan dizi uzaylarının tanımı verilsin.

Tanım 1.2.3 m inci mertebeden ve mutlak olmayan tipten bazı Euler fark dizi uzayları

$$e_0^r(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in w : \Delta^m x \in e_0^r\}$$

$$e_c^r(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in w : \Delta^m x \in e_c^r\}$$

ve

$$e_\infty^r(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in w : \Delta^m x \in e_\infty^r\}$$

olarak tanımlanır. Burada m herhangi bir pozitif tam sayı ve her $k \in N$ için,

$$\begin{aligned} \Delta^m x = (\Delta^m x)_k &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \\ &= \sum_{i=\max\{0, k-m\}}^m (-1)^{k-i} \binom{m}{k-i} x_i \end{aligned}$$

ve $\Delta^m x = (\Delta^m x)_k$ nın tersi olan $[\Delta^m x]^{-1}$ ise,

$$[\Delta^m x]^{-1} = \sum_{j=0}^k \binom{m+k-j-1}{k-j} x_j$$

şeklindedir [8].

Teorem 1.2.1 $e_\infty^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ kümeleri

$$\|x\|_\Delta = \|Er\Delta^m x\|_\infty = \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \right| \quad (1.1)$$

normu ile birer Banach uzaylarıdır.

İspat: Bu kümelerin vektör uzayı, normlu uzay ve tam uzay olduklarını göstermeliyiz. Önce $e_{\infty}^r(\Delta^m)$ kümesinin vektör uzayı, normlu uzay ve tam uzay olduğu gösterilecektir.

i. $e_{\infty}^r(\Delta^m)$ kümesi bir vektör uzaydır:

a) $x, y \in e_{\infty}^r(\Delta^m)$ olsun. Bu durumda;

$$\sup_n |Er(\Delta^m x)_k| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} (\Delta^m x)_k \right| < \infty$$

ve

$$\sup_n |Er(\Delta^m y)_k| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} (\Delta^m y)_k \right| < \infty$$

olur. $x + y \in e_{\infty}^r(\Delta^m)$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için,

$$z = [Er(\Delta^m(x+y))_k] \in l_{\infty}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Er ve Δ^m nın lineerliğinden [13], [16];

$$\begin{aligned} \sup_n |z_n| &= \sup_n \left| (Er\Delta^m(x+y))_k \right| \\ &= \sup_n |Er\Delta^m x + Er\Delta^m y| \end{aligned}$$

$$\leq \sup_n \left| Er\Delta^m x \right| + \sup_n \left| Er\Delta^m y \right| < \infty$$

olduğundan $z \in l_\infty$ olur. Böylece $x + y \in e_\infty^r(\Delta^m)$ olduğu görülür.

b) $\lambda \in C$ ve $x \in e_\infty^r(\Delta^m)$ için $\lambda x \in e_\infty^r(\Delta^m)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için,

$$y = (y_n) = \lambda (Er(\Delta^m x)_k) \in l_\infty$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\sup_n |y_n| = \sup_n \left| \lambda (Er\Delta^m x)_k \right| = |\lambda| \sup_n \left| (Er\Delta^m x)_k \right| < \infty$$

olduğundan $y \in l_\infty$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\lambda x \in e_\infty^r(\Delta^m)$ olur.

Diğer uzaylar da benzer biçimde birer vektör uzayı oldukları gösterilebilir.

ii. $e_\infty^r(\Delta^m)$ uzayı (1.1) ile normlu uzaydır:

$$N1) \|x\|_\Delta = \|Er\Delta^m x\|_\infty$$

$$= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \right|$$

dır. $\|x\|_\Delta = 0$ ise, her $n \in N$ için $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} = 0$ olmalıdır.

Buradan, $x = \theta$ bulunur.

Tersine, $x = \theta$ ise $\|x\|_{\Delta} = 0$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{N2) } \|\lambda x\|_{\Delta} &= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \Delta^m \lambda x \right| = \sup_n \left| \lambda \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \Delta^m x \right| \\ &= |\lambda| \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \Delta^m x \right| = |\lambda| \|x\|_{\Delta}. \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \text{N3) } \|x + y\|_{\Delta} &= \sup_n |Er\Delta^m x + Er\Delta^m y| \leq \sup_n |Er\Delta^m x| + \sup_n |Er\Delta^m y| \\ &= \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta}. \end{aligned}$$

olur.

iii. $e_{\infty}^r(\Delta^m)$ uzayı (1.1) normuna göre tam uzaydır:

Her $s \in N$ için $(x^s) = (x_i^s) = (x_0^s, x_1^s, \dots)$ dizisi $e_{\infty}^r(\Delta^m)$ de bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $x^s \rightarrow x \in e_{\infty}^r(\Delta^m)$ olduğu gösterilmelidir. $s, t > N$ için,

$$\begin{aligned} \|x^s - x^t\|_{\Delta} &= \sup_n |Er\Delta^m (x^s - x^t)| \\ &= \sup_n |Er\Delta^m x^s - Er\Delta^m x^t| \end{aligned}$$

olur. Burada $(y_n^s) = (Er\Delta^m x^s)_n$ ve $(y_n^t) = (Er\Delta^m x^t)_n$ dersek (x^s) bir Cauchy dizisi olduğundan $s, t \rightarrow \infty$ için, $\|x^s - x^t\|_{\Delta} \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla,

$$|y_n^s - y_n^t| \rightarrow 0$$

bulunur. Her k sabiti için $(y_k^s) = (y_k^1, y_k^2, \dots)$ dizisi $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi ve $\mathbb{R}$ tam olduğundan her $k \in N$ için,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y_k^s = y_k \text{ ise } \lim_{s \rightarrow \infty} (y_k^s - y_k) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her $s > N$ için,

$$\|Er\Delta^m(x_k^s - x_k)\| < \varepsilon$$

olduğu görülür. Buradan da $s > N$ için $\|x^s - x\|_{\Delta} < \varepsilon$ elde edilir. Yani $s \rightarrow \infty$ için, $x^s \rightarrow x$ olur.

Şimdi $x \in e_{\infty}^r(\Delta^m)$ olduğu gösterilsin.

$$\|x\|_{\Delta} = \|Er\Delta^m x\|$$

$$\begin{aligned} &= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \right| \\ &= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] x_k \right| \\ &= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] (x_k - x_k^s + x_k^s) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_n |Er\Delta^m(x_k^s - x_k)| + \sup_n |Er\Delta^m x_k^s| \\
&\leq \|x^s - x\|_\Delta + |Er\Delta^m x_k^s| < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $x \in e_\infty^r(\Delta^m)$ olur. Böylece $e_\infty^r(\Delta^m)$ uzayı (1.1) normu ile bir Banach uzayıdır.

$e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ uzayları da benzer biçimde birer Banach uzayı oldukları gösterilebilir.

Teorem 1.2.2 $e_\infty^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ uzayları sırasıyla l_∞ , c ve c_0 dizi uzaylarına izomorftur.

İspat: $y = (y_n) = (Er\Delta^m x)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \Delta^m x_k$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \left[x_k - mx_{k-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x_{k-2} + \dots + (-1)^m x_{k-m} \right] \\
&= (1-r)^n x_0 + nr(1-r)^{n-1} [x_1 - mx_0] + \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2!} r^2 (1-r)^{n-2} \left[x_2 - mx_1 + \frac{m(m-1)}{2!} x_0 \right] + \dots + \\
&\quad + r^n \left[x_n - mx_{n-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x_{n-2} + \dots + (-1)^m x_{n-m} \right] \\
&= \left[(1-r)^n - nmr(1-r)^{n-1} + \frac{n(n-1)m(m-1)}{2!} r^2 (1-r)^{n-2} + \dots + (-1)^m r^n \right] x_0 + \\
&\quad + \left[nr(1-r)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} mr^2 (1-r)^{n-2} + \dots + (-1)^m r^n \right] x_1 + \dots + r^n x_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^i \binom{m}{i} x_0 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-1} \binom{m}{i-1} x_1 + \\
&\quad + \dots + \sum_{i=n}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-n} \binom{m}{i-n} x_n \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] x_k
\end{aligned} \tag{1.2}$$

ile (y_n) dizisini ve T dönüşümünü de,

$$T : e_0^r(\Delta^m) \rightarrow c_0$$

$$x \rightarrow y = Tx$$

olarak tanımlansın. (1.2) den dolayı;

$$x_n = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} \right] y_k \tag{1.3}$$

olur. Şimdi T dönüşümünün lineer, birebir, üzerine ve normu koruduğu gösterilsin.

i. T dönüşümü lineer bir dönüşümdür: $\alpha, \beta \in R$ ve $(p_k), (t_k) \in e_0^r(\Delta^m)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
T(\alpha p_k + \beta t_k) &= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} (\alpha p_k + \beta t_k) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \alpha p_k \right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \beta t_k \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] p_k \\
&+ \beta \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] t_k \\
&= \alpha T p + \beta T t
\end{aligned}$$

ii. T dönüşümü örten bir dönüşümdür: $y \in c_0$ olsun. Bu takdirde (1.2) ve (1.3) ten dolayı;

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} Er \Delta^m x_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] x_k \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] \sum_{i=0}^k \left[\sum_{j=i}^k \binom{m+k-j-1}{k-j} \binom{i}{k} r^{-k} (r-1)^{k-j} \right] y_i \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $x \in e_0'(\Delta^m)$ olur.

iii. T dönüşümü birebir bir dönüşümdür: T dönüşümünün birebir olduğunu göstermek için, $Tx = 0$ ise $x = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
Tx = y &= (y_n) = (Er \Delta^m x)_n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \Delta^m x_k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \left[x_k - m x_{k-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x_{k-2} + \dots + (-1)^m x_{k-m} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-r)^n x_0 + nr(1-r)^{n-1} [x_1 - mx_0] + \\
&+ \frac{n(n-1)}{2!} r^2 (1-r)^{n-2} \left[x_2 - mx_1 + \frac{m(m-1)}{2!} x_0 \right] + \\
&+ \dots + r^n \left[x_n - mx_{n-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x_{n-2} + \dots + (-1)^m x_{n-m} \right] = 0
\end{aligned}$$

olması için $x = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla T dönüşümü birebirdir.

iv. T dönüşümü normu korur:

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Delta} &= \|Er\Delta^m x\|_{\infty} \\
&= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \right| \\
&= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] x_k \right| \\
&= \sup_n \left| \sum_{k=0}^n \left\{ \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{j=0}^k \left[\sum_{i=j}^k \binom{m+k-j-1}{k-j} \binom{i}{k} r^{-k} (r-1)^{k-j} \right] y_i \right\} \right| \\
&= \sup_n |y_n| = \|y\|_{c_0} = \|Tx\|
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $e_0^r(\Delta^m) \cong c_0$ tır. $e_{\infty}^r(\Delta^m)$ ve $e_c^r(\Delta^m)$ uzayları sırasıyla l_{∞} , c dizi uzaylarına izomorf oldukları benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 1.2.3 Eğer $0 < t \leq r < 1$ ise $e_0^r(\Delta^m) \subset e_0^t(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m) \subset e_c^t(\Delta^m)$ ve $e_{\infty}^r(\Delta^m) \subset e_{\infty}^t(\Delta^m)$ olur.

İspat: $x \in e_0^r(\Delta^m)$ olsun. Bu takdirde (1.3) ten dolayı;

$$\begin{aligned}
 z_n &= \sum_{k=0}^n e_{ni}^t x_k = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] x_k \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] \sum_{i=0}^k \left[\sum_{j=i}^k \binom{m+k-j-1}{k-j} \binom{j}{i} r^{-j} (r-1)^{j-i} \right] y_i \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^n e_{nk}^t \left(\sum_{i=0}^k e_{ki}^{1/r} y_i \right) = \sum_{i=0}^n e_{ni}^{t/r} y_i
 \end{aligned}$$

olur. Çünkü $0 < t/r < 1$ ve $E_{t/r}$ metodu regülerdir [16]. Dolayısıyla $y \in c_0$ ise $z \in c_0$ olur. Böylece $x \in e_0^t(\Delta^m)$ dır. Bundan dolayı $e_0^r(\Delta^m) \subset e_0^t(\Delta^m)$ olur. $e_c^r(\Delta^m) \subset e_c^t(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m) \subset e_\infty^t(\Delta^m)$ oldukları benzer biçimde gösterilebilir.

Teorem 1.2.4 $e_0^r(\Delta^m) \subset e_0^r(\Delta^{m+1})$, $e_c^r(\Delta^m) \subset e_c^r(\Delta^{m+1})$ ve $e_\infty^r(\Delta^m) \subset e_\infty^r(\Delta^{m+1})$ olur.

İspat: $y \in e_0^r(\Delta^m)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 |Er\Delta^{m+1}x_k| &= |Er\Delta^m(\Delta x_k)| = |Er\Delta^m(x_k - x_{k-1})| \\
 &= |Er\Delta^m x_k - Er\Delta^m x_{k-1}| \\
 &= |Er\Delta^m x_k| + |Er\Delta^m x_{k-1}|
 \end{aligned}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ için son ifade sıfıra gider. Dolayısıyla $y \in e_0^r(\Delta^m)$ elde edilir.

$e_c^r(\Delta^m) \subset e_c^r(\Delta^{m+1})$ ve $e_\infty^r(\Delta^m) \subset e_\infty^r(\Delta^{m+1})$ oldukları benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 1.2.5 $e_0^r(\Delta^m) \subset e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_c^r(\Delta^m) \subset e_\infty^r(\Delta^m)$ dir.

İspat: $y \in e_0^r(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde;

$$\begin{aligned}
 |Er\Delta^m x_k| &= |Er\Delta^{m-1}(\Delta x_k)| \\
 &= |Er\Delta^{m-1}(x_k - x_{k-1})| \\
 &= |Er\Delta^{m-1}x_k - Er\Delta^{m-1}x_{k-1}| \\
 &= |Er\Delta^{m-1}x_k| + |Er\Delta^{m-1}x_{k-1}|
 \end{aligned}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ için $|Er\Delta^{m-1}x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|Er\Delta^{m-1}x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacağından son ifade ε dan küçük kalır. Dolayısıyla $y \in e_c^r(\Delta^m)$ olur. $e_c^r(\Delta^m) \subset e_\infty^r(\Delta^m)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

BÖLÜM 2. SCHAUDER TABANI

2.1 $e_0^r(\Delta^m)$ ve $e_c^r(\Delta^m)$ Dizi Uzaylarının Schauder Tabanları

Bu bölümde $e_0^r(\Delta^m)$ ve $e_c^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının Schauder tabanları hesaplanacaktır.

Teorem 2.1.1 m herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $b(m, r) = (b_n^{(k)}(m, r))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini,

$$b_n^{(k)}(m, r) = \begin{cases} 0 & , \quad n < k \\ \sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

ile tanımlanırsa $e_0^r(\Delta^m)$ uzayının tabanı,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(m, r) b^{(k)}(m, r)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} \lambda_k(m, r) &= (Er\Delta^m x)_k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \left[\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] x_k \end{aligned}$$

dır.

İspat: $(b_n^{(k)}(m, r)) \subset e_0^r(\Delta^m)$ dır. Çünkü,

$$\begin{aligned} Er\Delta^m b^{(k)}(m, r) &= \sum_{k=0}^n \left\{ \left[\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i} (-1)^{i-k} \binom{m}{i-k} \right] \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} \right\} \\ &= e^{(k)} \in c_0, \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.1)$$

olur. Burada $e^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ olup 1, k. yerdedir. Böylece, $(b^{(k)}(m, r))_{n \in N} \in e_0^r(\Delta^m)$ olur. Ayrıca $x \in e_0^r(\Delta^m)$ ve p negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere; $x^{[p]} = \sum_{k=0}^p \lambda_k(m, r) b^{(k)}(m, r)$ olsun. O zaman Er, Δ^m 'nin lineerliğinden ve (2.1) den dolayı;

$$Er\Delta^m x^{[p]} = \sum_{k=0}^p \lambda_k(m, r) Er\Delta^m b^{(k)}(m, r) = \sum_{k=0}^p (Er\Delta^m x)_k e^{(k)}$$

ve

$$\left(Er\Delta^m (x - x^{[p]}) \right)_i = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq i \leq p \\ (Er\Delta^m x)_i & , \quad i > p \end{cases}, \quad (i, p \in N)$$

elde edilir. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde $p \geq p_0$ için;

$$|(Er\Delta^m x)_p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde p_0 pozitif tamsayısı vardır. O zaman her $p \geq p_0$ için;

$$\|x - x^{[p]}\|_{e_0^r(\Delta^m)} = \sup_{n \geq p} |(Er\Delta^m x)_n| \leq \sup_{n \geq p_0} |(Er\Delta^m x)_n| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olduğundan $x = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p \lambda_k(m, r) b_n^{(k)}(m, r)$ olduğu görülür.

Şimdi bu gösterimin tek olduğu gösterilecektir. Bu gösterim tek olmasın. x ' in $\lambda_k(m, r) \neq \mu_k(m, r)$ olmak üzere;

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(m, r) b^{(k)}(m, r)$$

şeklinde de bir gösterimi olsun. Er , Δ^m ' in lineerliğinden ve (2.1) den dolayı;

$$\begin{aligned} \lambda_n(m, r) &= (Er\Delta^m x)_n = \sum_{k=0}^n \mu_k(m, r) (Er\Delta^m b^{(k)}(m, r))_n \\ &= \sum_{k=0}^n \mu_k e_n^{(k)} = \mu_n(m, r) \end{aligned}$$

olur. Bu da bir çelişkidir. Bu çelişki x ' in gösteriminin tek olmasıyla ortadan kalkar.

Teorem 2.1.2 m pozitif bir tam sayı olmak üzere $b^{(k)}(m, r)$ dizisini,

$$b^{(-1)}(m, r) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{-n} (r-1)^{n-k} \binom{m+n}{n}, \quad (n \in N)$$

ve

$$b_n^{(k)}(m, r) = \begin{cases} \sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k}, & n > k \\ 0, & n \leq k \end{cases}, \quad k \in N$$

ile tanımlansın. O zaman $x = (x_k) \in e_c^r(\Delta^m)$ olmak üzere, $e_c^r(\Delta^m)$ uzayının tabanı,

$$x = lb^{(-1)}(m, r) + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k(m, r) - l) b^{(k)}(m, r)$$

olacak şekilde $b^{(k)}(m, r)_{k \in N}$ dizisidir. Burada,

$$\lambda_k(m, r) = (Er\Delta^m x)_k \text{ ve } l = \lim_{n \rightarrow \infty} (Er\Delta^m x)_k \quad (2.2)$$

dır.

İspat:

$$Er\Delta^m b^{(-1)}(m, r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1-r) - mr & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ (1-r)^n + \dots + (-1)^m \binom{m}{n} & \dots & \dots & r^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (m+1)[r^{-1}(r-1) + r^{-1}] \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{(m+1)\dots(m+n)}{n!} [r^{-n}(r-1)^n + \dots + r^{-n}] \end{bmatrix}$$

$$= (1, 1, \dots, 1) = e \in c$$

olur. Yani $b^{(-1)}(m, r) \in e_c^r(\Delta^m)$ olduğu görülür. $b^{(k)}(m, r) \in e_0^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m) \subset e_c^r(\Delta^m)$ olduğundan $b^{(k)}(m, r) \in e_c^r(\Delta^m)$ olur. Şimdi her $k = -1, 0, 1, \dots$ için $x = (x_k) \in e_c^r(\Delta^m)$ olsun. O zaman (2.2) sağlanacak şekilde bir tek l sayısı vardır. $y = x - lb^{(-1)}(m, r)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Er\Delta^m y &= Er\Delta^m (x - lb^{(-1)}(m, r)) \\ &= Er\Delta^m x - le \end{aligned}$$

olur. Yani $y \in e_0^r(\Delta^m)$ olur. x ' in tek olduğu Teorem 2.1.1 deki gibi gösterilebilir.



BÖLÜM 3. α -, β -, VE γ - DUALLERİ

3.1 $e_0^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m)$ Uzaylarının α -, β -, Ve γ - Dualleri

Bu bölümde $e_0^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının α -, β -, ve γ - dualleri hesaplanacaktır.

Teorem 3.1.1 $e_0^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının α - duali

$$D = \{a = (a_k) \in w : \sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| < \infty \}$$

kümesidir. Burada, her $n, k \in N$ için,

$$b_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} a_n & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

dır.

İspat: Bir X dizi uzayının α - duali,

$$\begin{aligned}
X^\alpha &= \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \right\} \\
&= \left\{ a = (a_k) \in w : (a_k x_k) \in l_1 \right\}
\end{aligned}$$

olacağından, (1.3) de ki (x_n) ve (y_n) arasındaki ilişkiden dolayı;

$$\begin{aligned}
a_n x_n &= a_n \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} \right] y_k \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} a_n \right] y_k \\
&= \sum_{k=0}^n b_{nk} y_k \\
&= (By)_n
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, her $x = (x_k) \in e_0^r(\Delta^m)$ için $(a_n x_n) \in l_1 \Leftrightarrow By \in l_1$ olmasıdır. Her $y \in c_0$ ve $By \in l_1$ olması için gerekli ve yeterli şart $B \in (c_0 : l_1)$ olmasıdır. Lemma 1.1.1 den dolayı;

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| < \infty$$

olur. Bundan dolayı $[e_0^r(\Delta^m)]^\alpha = [e_c^r(\Delta^m)]^\alpha = [e_\infty^r(\Delta^m)]^\alpha = D$ olur.

Teorem 3.1.2 Eğer B_1, B_2 ve B_3 kümeleri,

$$B_1 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty \right\}$$

$$B_2 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} b_{nk} \text{ mevcut her } k \in N \text{ için} \right\}$$

ve

$$B_3 = \{a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k b_{nk} \text{ mevcut} \}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda;

$$[e_0^r(\Delta^m)]^\beta = B_1 \cap B_2,$$

$$[e_c^r(\Delta^m)]^\beta = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

ve

$$[e_\infty^r(\Delta^m)]^\beta = B_1$$

olur. Burada;

$$b_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^n c_{ik} a_i & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ve

$$c_{ik} = \begin{cases} \sum_{j=k}^i \binom{m+i-j-1}{i-j} \binom{j}{k} r^{-j} (r-1)^{j-k} a_i & , \quad 0 \leq k \leq i \\ 0 & , \quad k > i \end{cases} \quad (i, k \in N)$$

dır.

İspat: Bir X dizi uzayının β – duali;

$$\begin{aligned} X^\beta &= \{ a = (a_k) \in w : (a_k x_k) \in cs \} \\ &= \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_k a_k x_k \text{ yakınsak} \right\} \end{aligned}$$

olacağından, (1.3) de ki (x_n) ve (y_n) arasındaki ilişkiden dolayı;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left[\sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=i}^k \binom{m+k-j-1}{k-j} \binom{j}{i} r^{-j} (r-1)^{j-i} \right) y_i \right] \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left[\sum_{i=0}^k \left(\binom{m+k-i-1}{k-i} \binom{i}{i} r^{-i} + \binom{m+k-i-2}{k-i-1} \binom{i+1}{i} r^{-i-1} (r-1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{m+k-i-3}{k-i-2} \binom{i+2}{i} r^{-i-2} (r-1)^2 + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{k}{i} r^{-k} (r-1)^{k-i} \right) y_i \right] \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left\{ \left[\binom{m+k-1}{k} + \binom{m+k-2}{k-1} \binom{1}{0} r^{-1} (r-1) + \binom{m+k-3}{k-2} \binom{2}{0} r^{-2} (r-1)^2 + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{m-1}{0} \binom{k}{0} r^{-k} (r-1)^k \right] y_0 + \left[\binom{m+k-2}{k-1} \binom{1}{1} r^{-1} + \binom{m+k-3}{k-2} \binom{2}{1} r^{-2} (r-1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{k}{1} r^{-k} (r-1)^{k-1} \right] y_1 + \left[\binom{m+k-3}{k-2} \binom{2}{2} r^{-2} + \binom{m+k-4}{k-3} \binom{3}{2} r^{-3} (r-1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{m+k-5}{k-4} \binom{4}{2} r^{-4} (r-1)^2 + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{k}{2} r^{-k} (r-1)^{k-2} \right] y_2 + \dots + r^{-k} y_k \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 y_0 + a_1 [m y_0 + r^{-1}(r-1) y_0 + r^{-1} y_1] + \\
&+ a_2 \left[\frac{m(m-1)}{2} y_0 + m r^{-1}(r-1) y_0 + r^{-2}(r-1)^2 y_0 + m r^{-1} y_1 + \right. \\
&+ 2 r^{-2}(r-1) y_1 r^{-2} y_2 \left. \right] + \dots + a_n \left\{ \left[\binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n-2}{n-1} \binom{1}{0} r^{-1}(r-1) + \right. \right. \\
&+ \binom{m+n-3}{n-2} \binom{2}{0} r^{-2}(r-1)^2 + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{n}{0} r^{-n}(r-1)^n \left. \right] y_0 + \left[\binom{m+n-2}{n-1} \binom{1}{1} r^{-1} + \right. \\
&+ \left. \binom{m+n-3}{n-2} \binom{2}{1} r^{-2}(r-1) + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{n}{1} r^{-n}(r-1)^{n-1} \right] y_1 + \dots + r^{-n} y_n \left. \right\} \\
&= \left\{ a_0 + m a_1 + a_1 r^{-1}(r-1) + \frac{m(m+1)}{2!} a_2 + m a_2 r^{-1}(r-1) + a_2 r^{-2}(r-1)^2 + \dots + \right. \\
&+ a_n \left[\binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n-2}{n-1} \binom{1}{0} r^{-1}(r-1) + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{n}{0} r^{-n}(r-1)^n \right] \left. \right\} y_0 + \\
&+ \left\{ a_1 + m a_2 r^{-1} + 2 a_2 r^{-2}(r-1) + \dots + \right. \\
&+ a_n \left[\binom{m+n-2}{n-1} r^{-1} + \binom{m+n-3}{n-2} \binom{2}{1} r^{-2}(r-1) + \dots + \binom{n}{1} r^{-n}(r-1)^{n-1} \right] \left. \right\} y_1 + \dots + a_n r^{-n} y_n \\
&= \left\{ a_0 + (m a_1 + r^{-1}(r-1)) a_1 + \left(\frac{m(m+1)}{2!} + m r^{-1}(r-1) + a_2 r^{-2}(r-1)^2 \right) a_2 + \dots + \right. \\
&+ \left[\binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n-2}{n-1} \binom{1}{0} r^{-1}(r-1) + \dots + \binom{m-1}{0} \binom{n}{0} r^{-n}(r-1)^n \right] a_n \left. \right\} y_0 + \\
&+ \{ a_1 + (m r^{-1} + 2 r^{-2}(r-1)) a_2 + \dots + \\
&+ \left[\binom{m+n-2}{n-1} r^{-1} + \binom{m+n-3}{n-2} \binom{2}{1} r^{-2}(r-1) + \dots + \binom{n}{1} r^{-n}(r-1)^{n-1} \right] a_n \left. \right\} y_1 + \dots + a_n r^{-n} y_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n a_i \left[\sum_{j=0}^i \binom{m+i-j-1}{i-j} \binom{j}{0} r^{-j} (r-1)^j \right] y_0 + \sum_{i=0}^n a_i \left[\sum_{j=1}^i \binom{m+i-j-1}{i-j} \binom{j}{1} r^{-j} (r-1)^{j-1} \right] y_1 + \\
&+ \dots + \sum_{i=n}^n a_i \left[\sum_{j=n}^i \binom{m+i-j-1}{i-j} \binom{j}{n} r^{-j} (r-1)^{j-n} \right] y_n \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \left(\sum_{j=k}^i \binom{m+i-j-1}{i-j} \binom{j}{k} r^{-j} (r-1)^{j-k} \right) a_i \right] y_k \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^n c_{ik} a_i \right) y_k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n b_{nk} y_k$$

$$= (By)_n$$

olur.

Her $x = (x_k) \in e_0^r(\Delta^m)$ için $(a_k x_k) \in cs \Leftrightarrow By \in cs$ olmasıdır. Her $y \in c_0$ ve $By \in cs$ olması için gerekli ve yeterli şart $B \in (c_0 : c)$ olmasıdır. Lemma 1.1.2 den

$$\text{i. } \sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$$

$$\text{ii. } \lim_n b_{nk} \text{ mevcut her } k \in N \text{ için}$$

olur. Dolayısıyla; $[e_0^r(\Delta^m)]^\beta = B_1 \cap B_2$ olur.

Her $x = (x_k) \in e_c^r(\Delta^m)$ için $(a_k x_k) \in cs \Leftrightarrow By \in cs$ olmasıdır. Her $y \in c$ ve $By \in cs$ olması için gerekli ve yeterli şart $B \in (c : c)$ olmasıdır. Lemma 1.1.3 den

i. $\sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$

ii. $\lim_n b_{nk}$ mevcut her $k \in N$ için

iii. $\lim_n \sum b_{nk}$ mevcut

olur. Dolayısıyla; $[e_c^r(\Delta^m)]^\beta = B_1 \cap B_2 \cap B_3$ olur.

Her $x = (x_k) \in e_\infty^r(\Delta^m)$ için $(a_k x_k) \in cs \Leftrightarrow By \in cs$ olmasıdır. Her $y \in l_\infty$ ve $By \in cs$ olması için gerekli ve yeterli şart $B \in (l_\infty : c)$ olmasıdır. Lemma 1.1.4 den

i. $\sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$

olur. Dolayısıyla $[e_\infty^r(\Delta^m)]^\beta = B_1$ olur.

Teorem 3.1.3 $e_0^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının γ – duali;

$$B_1 = \{a = (a_k) \in w : \sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty\}$$

kümesidir.

İspat: Bir X dizi uzayının γ – duali;

$$X' = \{a = (a_k) \in w : (a_k x_k) \in bs\}$$

olacağından, (1.3) de ki (x_n) ve (y_n) arasındaki ilişkiden dolayı;

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left[\sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=i}^k \binom{m+k-j-1}{k-j} \binom{j}{i} r^{-j} (r-1)^{j-i} \right) y_i \right] \\
 &= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=k}^n \left(\sum_{j=k}^i \binom{m+i-j-1}{i-j} \binom{j}{k} r^{-j} (r-1)^{j-k} \right) a_i \right] y_k \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^n c_{ik} a_i \right) y_k \\
 &= \sum_{k=0}^n b_{nk} y_k \\
 &= (By)_n
 \end{aligned}$$

olduğundan; her $x \in e_0^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_\infty^r(\Delta^m)$ için $(a_k x_k) \in bs \Leftrightarrow By \in cs$

olmasıdır. Her $y \in c_0$, c , l_∞ ve $By \in cs$ olması için gerekli ve yeterli şart

$B \in (c_0 : l_\infty)$, $(c : l_\infty)$ ve $(l_\infty : l_\infty)$ olmasıdır. Lemma 1.1.5 den dolayı;

$$\sup_n \sum_k |b_{nk}| < \infty$$

olur. Dolayısıyla; $\left[e_0^r(\Delta^m) \right] \gamma = \left[e_c^r(\Delta^m) \right] \gamma = \left[e_\infty^r(\Delta^m) \right] \gamma = B_1$ olur.

BÖLÜM 4. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

4.1 $(e_c^r(\Delta^m):l_p), (e_\infty^r(\Delta^m):l_p), (e_0^r(\Delta^m):l_p), (e_c^r(\Delta^m):c)$ ve $(e_c^r(\Delta^m):l_\infty)$ Matris Dönüşümleri

Bu bölümde $(e_c^r(\Delta^m):l_p), (e_\infty^r(\Delta^m):l_p), (e_0^r(\Delta^m):l_p), (e_c^r(\Delta^m):c)$ ve $(e_c^r(\Delta^m):l_\infty)$ matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Teorem 4.1.1 $A \in (e_c^r(\Delta^m):l_p)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty \quad (4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} \text{ mevcut her } k \in N \text{ için} \quad (4.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k t_{nk} \text{ mevcut} \quad (4.3)$$

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} t_{nk} \right|^p < \infty \quad (1 \leq p < +\infty) \quad (4.4)$$

$$\sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty \quad (p = +\infty) \quad (4.5)$$

olmasıdır. Burada,

$$t_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} a_{ni}$$

dır.

İspat: $1 \leq p < +\infty$ olsun. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) şartlarının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda $A \in (e_c^r(\Delta^m): l_p)$ olduğu gösterilmelidir. O zaman kabulden dolayı her $n \in N$ için $(a_{nk})_{k \in N} \in (e_c^r(\Delta^m))^\beta$ olup, Ax mevcuttur. Şimdi her $n, k \in N$ için $b_{nk} = t_{nk}$ ile $B = (b_{nk})$ matrisini tanımlayalım. Şimdi $s \rightarrow \infty$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ serisinin s. kısmi toplamından elde edilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} t_{nk} y_k \quad (4.6)$$

eşitliği göz önüne alınsın. (4.4) ve Lemma 1.1.6 dan dolayı $B \in (c: l_p)$ olduğu dikkate alınarak (4.6) da ki l_p normu alınırsa,

$$\|Ax\|_{l_p} = \|By\|_{l_p} < \infty$$

olur. Dolayısıyla $A \in (e_c^r(\Delta^m): l_p)$ olur.

Bu defa $p = \infty$ olsun. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.5) şartlarının sağlandığı kabul edilsin. O zaman her $n \in N$ için $(a_{nk})_{k \in N} \in (e_c^r(\Delta^m))^\beta$ olup, Ax mevcuttur. Şimdi (4.6) da ki l_∞ normu alınırsa;

$$\|Ax\|_{l_\infty} = \sup_{n \in N} \left| \sum_k t_{nk} y_k \right| \leq \|y\|_{l_\infty} \sup_{n \in N} \sum_k |t_{nk}| < \infty$$

olduğundan $A \in (e_c^r(\Delta^m) : l_\infty)$ olur.

Tersine $1 \leq p < +\infty$ için $A \in (e_c^r(\Delta^m) : l_p)$ olsun. Bu durumda (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.5) şartlarının sağlandığı gösterilmelidir. $A \in (e_c^r(\Delta^m) : l_p)$ olduğundan her $n \in N$ $(a_{nk})_{k \in N} \in (e_c^r(\Delta^m))^\beta$ olacağından (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. $e_c^r(\Delta^m)$ ve l_∞ birer BK-uzayları olup, BK-uzayları arasındaki matris dönüşümleri sürekli olacağından [14] ;

$$\|Ax\|_{l_p} = k\|x\|_{e_c^r(\Delta^m)}$$

olacak şekilde her $x \in e_c^r(\Delta^m)$ için $k > 0$ sabiti mevcuttur. Çünkü (4.6) eşitliği

$$x = (x_k) = \sum_{k \in F} b^{(k)}(m, r) \in e_c^r(\Delta^m) \text{ için doğru olup herhangi } K \in F \text{ için,}$$

$$\|Ax\|_{l_p} = \left(\sum_n \left| \sum_{k \in F} t_{nk} \right|^p \right)^{1/p} \leq k\|x\|_{e_c^r(\Delta^m)} = K$$

olur. Böylece (4.4) şartı sağlanmış olur.

Son olarak da $p = +\infty$ durumu için (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.5) şartlarının sağlandığı gösterilsin. $A \in (e_c^r(\Delta^m) : l_\infty)$ olsun. $A \in (e_c^r(\Delta^m) : l_p)$ olduğundan her $n \in N$ $(a_{nk})_{k \in N} \in (e_c^r(\Delta^m))^\beta$ olacağından (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. Bu durumda $e_c^r(\Delta^m)$ ve l_∞ birer BK-uzayları olup, BK-uzayları arasındaki matris dönüşümleri sürekli olacağından [18] ,

$$\|Ax\|_{l_\infty} = k\|x\|_{e_c^r(\Delta^m)}$$

olacak şekilde her $x \in e_c^r(\Delta^m)$ için $k > 0$ sabiti mevcuttur. Çünkü (4.6) eşitliğinden

$$\frac{\|Ax\|_{l_\infty}}{\|y\|_{l_\infty}} = \frac{\sup_n \left| \sum_k t_{nk} y_k \right|}{\|y\|_{l_\infty}} \leq \sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty \quad (4.7)$$

elde edilir. Böylece (4.5) şartı sağlanmış olur.

Teorem 4.1.2 $A \in (e_\infty^r(\Delta^m):l_p)$ olması için gerek ve yeter şart, (4.1) şartının sağlanması ve

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} t_{nk} \right|^p < \infty \quad (1 \leq p < +\infty)$$

olmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.1.1 deki gibi yapılabilir.

Teorem 4.1.3 $A \in (e_0^r(\Delta^m):l_p)$ olması için gerek ve yeter şart, (4.1), (4.2) şartlarının sağlanması,

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in K} t_{nk} \right|^p < \infty \quad (1 \leq p < +\infty)$$

ve

$$\sum_n \sum_k |t_{nk}|^p \quad \text{her } n, k \in N \text{ için yakınsak}$$

olmasıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.1.1 deki gibi yapılabilir.

Teorem 4.1.4 $A \in (e_c^r(\Delta^m) : c)$ olması için gerekli ve yeterli şart; (4.1), (4.2), (4.3) şartlarının sağlanması ve

$$\sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty \quad \text{her } n, k \in N \text{ için} \quad (4.8)$$

$$\lim_n t_{nk} = \alpha_k \quad \text{her } k \in N \quad (4.9)$$

$$\lim_n \sum_k t_{nk} = \alpha \quad (4.10)$$

olmasıdır. Burada;

$$t_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} r^{-i} (r-1)^{i-k} a_{ni}$$

dır.

İspat: (4.1), (4.2), (4.3), (4.8), (4.9), ve (4.10) şartlarının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda $A \in (e_c^r(\Delta^m) : c)$ olduğu gösterilecektir. (4.1), (4.2) ve (4.3) den her $n \in N$ için $(a_{nk})_{k \in N} \in (e_c^r(\Delta^m))^{\beta}$ olup, Ax mevcuttur. (4.6) eşitliğinden, (4.8), (4.9), ve (4.10) ifadeleri dikkate alınırsa $Ax \in c$ olduğu görülür. $k \rightarrow \infty$ için $x_k \rightarrow l$ olacak şekilde $x = (x_k) \in e_c^r(\Delta^m)$ olsun. $y = (y_k)$ ile $x = (x_k)$ arasında (1.3) deki ilişkiden

dolayı $k \rightarrow \infty$ için $y_k \rightarrow l$ olacak şekilde yakınsaktır. (4.8) ve (4.9) şartları göz önüne alınırsa;

$$\sum_{i=0}^k |\alpha_i| \leq \sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty$$

olduğu her $k \in N$ için görülür. Böylece $(\alpha_k) \in l_1$ olur. $m \rightarrow \infty$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ serisinin m inci kısmi toplamından;

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k t_{nk} y_k$$

olur. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} \sum_k a_{nk} x_k &= \sum_k t_{nk} y_k \\ &= \sum_k t_{nk} (y_k - l) + l \sum_k t_{nk} \end{aligned} \quad (4.11)$$

olduğu görülür. Burada $n \rightarrow \infty$ için (4.9) dan dolayı birinci kısım $\sum_k a_k (y_k - l)$ ye gider. (4.10) en dolayı ikinci kısım la ya gider. O zaman $n \rightarrow \infty$ için (4.11) den dolayı;

$$(Ax)_n \rightarrow \sum_k a_k (y_k - l) + la$$

olur. Böylece $A \in (e_c^r(\Delta^m):c)$ olduğu görülür.

Tersine, $A \in (e_c^r(\Delta^m) : c)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $n \in N$ için $(a_{nk})_{k \in N} \in (e_c^r(\Delta^m))^B$ olduğundan (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. A matrisi her $x \in e_c^r(\Delta^m)$ dizisini yakınsak bir diziye dönüştüreceğinden, (4.7) ve $c \subset l_\infty$ dan dolayı (4.8) sağlanır. (4.9) ün sağlandığını göstermek için, $x = x^{(k)} = \{x_n^{(k)}(m, r)\}_{n \in N} \in e_c^r(\Delta^m)$ dizisi,

$$x_n^{(k)}(m, r) = \begin{cases} \sum_{i=k}^n \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} (r-1)^{i-k}, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, her $x \in e_c^r(\Delta^m)$ için Ax yakınsaktır. Yani her $k \in N$ için $Ax^{(k)} = (t_{nk})_{n \in N} \in c$ olur. Dolayısıyla (4.9) şartı sağlanır.

Benzer olarak $x = \{b_n^{-1}(m, r)\} \in e_c^r(\Delta^m)$ aldığımızda (4.10) şartı sağlanır.

Sonuç 4.1.1 $A \in (e_c^r(\Delta^m) : c_0)$ olması için (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.8) de $\alpha_k = 0$ ile (4.9) da $\alpha = 0$ ve (4.10) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Teorem 4.1.5 $A \in (e_c^r(\Delta^m) : bs)$ olması için (4.1), (4.2) ve (4.3) ile (4.2) şartının t_{nk} yerine $t_{nk}^\bullet$ şartının sağlanması gerek ve yeterdir. Burada,

$$t_{nk}^\bullet = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{m+n-i-1}{n-i} \binom{i}{k} (r-1)^{i-k} \sum_{j=0}^n a_{ji} \quad (4.12)$$

dır.

İspat: $A \in (e_c^r(\Delta^m) : bs)$ olsun. Bu durumda (4.12) şartının sağlandığı gösterilecektir.

$b_{nk} = \sum_{j=0}^n a_{jk}$ ile $B = (b_{nk})$ matrisi tanımlansın. $m \rightarrow \infty$ için $\sum_j \sum_k a_{jk} x_k$ serisinin n.

ve m. kısmi toplamlarından elde edilen

$$\sum_{j=0}^n (Ax)_j = \sum_k b_{nk} x_k$$

eşitliğini gözönüne alınsın. bs ve l_∞ uzayları birbirine lineer olarak izomorf olduklarından $A \in (e_c^r(\Delta^m) : bs)$ olması için gerekli ve yeterli şart $B \in (e_c^r(\Delta^m) : l_\infty)$ olmasıdır [2].

BÖLÜM 5. SONUÇLAR

Bu tezde tanımlanıp çalışılan, m inci mertebeden olan mutlak olmayan tipten bazı Euler fark dizi uzayları ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Tanımlanan $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ kümeleri birer vektör uzayları olan dizi uzaylarıdır.
2. Üzerlerinde tanımlanan normlara göre $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzayları birer BK- uzaylarıdır.
3. $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının Schauder tabanları hesaplandı.
4. Dizi uzayları arasındaki matris dönüşümlerini karakterize etmekte faydalanan ve uzayların yapısını tanımaya yarayan α -, β - ve γ - dualleri $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzayları için hesaplandı.
5. Tanımlanan dizi uzayları için $(e_c^r(\Delta^m):l_p)$, $(e_c^r(\Delta^m):c)$ ve $(e_c^r(\Delta^m):l_{\infty})$ matris dönüşümleri yapıldı.

BÖLÜM 6. TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Bu bölümde; önceki bölümlerde tanımlanıp, çalışılan m inci mertebeden olan mutlak olmayan tipten bazı Euler fark dizi uzaylarıyla ilgili bazı sorulara yer verilecektir.

Bu tezde çalışılan $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarının birer Banach cebiri olup olmadıkları araştırılabilir. Olumlu bazı sonuçlar elde edilmesine rağmen doğrudan göstermek mümkün olmamıştır. $l_{\infty}, c, c_0, bs, cs, bv \dots$ gibi dizi uzaylarından $e_{\infty}^r(\Delta^m)$, $e_c^r(\Delta^m)$ ve $e_0^r(\Delta^m)$ dizi uzaylarına matris karakterizasyonlarını ya da ters dönüşümlerini gözönüne almak mümkündür. Ayrıca burada çalışılan dizi uzayları gibi $e_p^r(\Delta^m)$ dizi uzayı tanımlanabilir mi? sorusu da araştırılabilir. Bu sorular ayrı bir çalışma konusu olabilecek hacimdedir.

KAYNAKLAR

- [1] ALTAY, B. and BAŞAR, F., "Some Euler Sequence Spaces of Non-Absolute Type," Yazışma Safhasında.
- [2] BAŞAR, F., "Infinite Matrices and Almost Boundedness", Boll. Un. Math. Ital. A(7), pp. 395-402, 1992.
- [3] BAŞARIR, M. and ET, M., "On Some New Generalized Difference Sequence Spaces," Period. Math Hungar. Vol. 35 (3) (1997) 169-175
- [4] CHOUDHRY, B. and NANDA, S., "Functional with Applications", John Wiley Sons Inc. New Delhi, 1989.
- [5] CONWAY, B., "A Course in Functional Analysis", Springer, Verlag, New York Inc. , 1985.
- [6] ET, M., "On Some Generalized Cesaro Difference Sequence Spaces", İst. Üni. Fen Fak. Mat. Dergisi, 55-56, pp. 221-229, 1996-1997.
- [7] ET, M. and ÇOLAK, R., "On Genarallized Difference Sequence Spaces", Soochow J. Math. Vol. 24(4), pp. 337-386, 1995.
- [8] HARDY, G.H., "Divergent Series", Oxford Uni. Press. 1973.
- [9] KAMTHAN, P.K. and GUPTA, M., "Sequence Spaces and Series", Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1981.

- [10] KIZMAZ, H., "On Certain Sequence Spaces", Canad. Math. Bull. (2), pp. 169-176, 1981.
- [11] KNOPP, K., "Infinite Sequence and Series", Dover Publication Inc., New-York, 1956
- [12] MADDUX, I. J., "Elements of Functional Analysis", Cambridge Uni. Press. Cambridge, London-New -York-Melbourne, 1969.
- [13] MALKOWSKY, E. and PARASHAR, S.D., "Matrix Transformations in Spaces of Bounded and Convergent Difference Sequences of Order m ", Oldenbourg Verlag München Analysis 17, pp. 87-97, 1997.
- [14] NANDA, S., "Matrix Transformation and Sequence Spaces", Miramare-Trieste, 1963.
- [15] ORLICZ, W., "Lineer Functional Analysis", World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. Singapore , 1992.
- [16] POWEL, R. and SHAH; S.M., "Summability Theory and Applications", Von Nostrand Reinhold Comp. Lim., London, 1972.
- [17] STIEGLITZ, M. and TIETZ, H., "Matrix Transformationen", Von Folgeraumen Eine Ergebniübesict, Math. Z., 154, pp. 1-16, 1977.
- [18] WILLANSKY, A., " Summability through Functional Analysis", North Holland Math. Studies 85, Amsterdam-New York-Oxford, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

27.06.1963'te Erzurum Karayazı'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladıktan sonra, 1985'te Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Bitlis Mutki Lisesinde matematik öğretmenliği, Harran Üniversitesinde Araştırma görevliliği yaptı. "Genelleştirilmiş Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri" adlı yüksek lisans tezini Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tamamladı. Ayrıca, Malatya Pütürge Dumlupınar İlköğretim Okulunda matematik öğretmenliği yaptı. Halen, İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesinde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.