

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ



**n'den k ÇIKIŞLI TAMİR EDİLEMEZ
SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

HAZIRLAYAN

Yrd. Doç. Dr. Yunus BULUT

Veysel KAYA

MALATYA-2015

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n'den k ÇIKIŞLI TAMİR EDİLEMEZ
SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yunus BULUT

HAZIRLAYAN
Veysel KAYA

Jürimiz 17.08.2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda bu yüksek lisans tezi, oybirliği ile başarılı bulunarak Ekonometri Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyelerinin Unvan Ad Soyadı	İmzası
1. Yrd. Doç. Dr. Yunus BULUT (Danışman)	
2. Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR	
3. Yrd. Doç. Dr. Gökhan GÖKDERE	

İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulunun
tarih vesayılı kararıyla bu tezin kabulü onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAGÖZ

Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yrd. Doç. Dr. Yunus BULUT'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığım **n'den k ÇIKIŞLI TAMİR EDİLEMEZ SİSTEMLERİN GÜVENİLİRLİĞİ ÜZERİNE** başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün yapıtların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

17.08.2015

Veysel KAYA

BİLDİRİM

Hazırladığım tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kağıt ve elektronik kopyalarının İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım:

- ☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.



17.08.2015

Veysel KAYA

ÖZET

KAYA, Veysel. n'den k Çıkışlı Tamir Edilemez Sistemlerin Güvenilirliği Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Malatya, 2015.

Sistem, belirli bir amacı gerçekleştirmek üzere karmaşık bir biçimde düzenlenmiş parçaların bileşimidir. Sistemi oluşturan parçalara, sistemin bileşeni denilmektedir. Sistemlerin bileşenlerinin bağımlı ya da bağımsız olması, tamir edilebilir ya da tamir edilemez olması gibi durumlarda farklı sistem çeşitleri elde edilmektedir. Bu sistemler temel olarak seri, paralel ve n'den k çıkışlı olmak üzere üçe ayrılabilir da en genel olan ve en sık kullanılan sistemler, n'den k çıkışlı sistemlerdir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, güvenilirlik kavramı ve sistemlerden bahsedilmiş ve sistem güvenilirliği hakkındaki önceki çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde, güvenilirlik analizinde kullanılan fonksiyonlar ve değerler tanıtılmış ve parçaların güvenilirliğini hesaplamak için kullanılan bazı özel dağılımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; sistemleri kurmak için kullanılan yapılar ile yol ve kesen kümeleri tanıtılmış, ayrıca yol ve kesen kümelerinin nasıl elde edileceği gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, bağımsız bileşenli sistemler tanıtılmış ve güvenilirliklerinin nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise bağımsız bileşenli ve tamir edilemez n'den k çıkışlı sistemler, F sistem, G sistem ve ardıl sistemin tanımı yapılmıştır. n'den k çıkışlı: F sistem, n'den k çıkışlı: G sistem ve ardıl sistemin $n=5$ olmak üzere, ayrı ayrı analizi yapılmış ve son olarak bu sistemler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sistem Güvenilirliği, Bağımsız Bileşenli Sistemler, Tamir Edilemez Sistemler, n'den k Çıkışlı: F (G) Sistemler, Ardıl Sistem

ABSTRACT

KAYA Veysel. About Reliability of Nonrepairable k-out-of-n System, Master Thesis, Malatya, 2015.

The system is a combination of items designed in a complex form to achieve a specific aim. The constituent parts of system is called system's component. Different system types is obtained such situations components of the system is repairable or nonrepairable, to be dependent or independent. There are three basic systems by serial, parallel and k-out-of-n however most commonly and frequently are used k-out-of-n systems.

In the first chapter, it is adverted the reliability concept and systems also it is mentioned previous studies about system reliability. In the second chapter, basic functions and values are introduced that are used in reliability analysis also some special distributions used to calculate the reliability of items are introduced. In third chapter, the structures are used to build the systems, path and cut sets are introduced, also it is described how to obtain cut and path sets. In the fourth chapter, the systems with independent components are introduced and shown how to calculate their reliabilities. In the fifth chapter; nonrepairable k-out-of-n systems with independent components, F systems, G systems and consecutive systems are introduced. k-out-of-n: F system, G system and consecutive system are analyzed separately and finally these system compared for $n=5$.

Keywords: System Reliability, Systems with Independent Components, Nonrepairable Systems, k-out-of-n Systems, k-out-of-n: F (G) system, Consecutive System

İÇİNDEKİLER

ONUR SÖZÜ	iii
BİLDİRİM	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ	xii
SİMGELER LİSTESİ	xiii
KISALTMALAR LİSTESİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Üstel Dağılım	9
2.2. Weibull Dağılımı	10
3. YAPI FONKSİYONU ve ANALİZİ	14
3.1. Seri Sistem	14
3.2. Paralel Sistem	15
3.3. n'den k Çıkışlı Sistem	16
3.4. Tutarlı Sistemler	17
3.5. Tutarlı Sistemlerin Genel Karakteristiği	18
4. BAĞIMSIZ BİLEŞENLİ SİSTEMLER	27
4.1. Sistem Güvenilirliği	27
4.1.1. Seri Yapıların Güvenilirliği	28
4.1.2. Paralel Sistemlerin Güvenilirliği	29
4.1.3. n'den k Çıkışlı Sistemlerin Güvenilirliği	31
4.2. Kantitatif Hata Ağacı Analizi	33
4.2.1. Tek VE Kapılı Hata Ağacı	34
4.2.2. Tek VEYA Kapılı Hata Ağacı	35
4.3. Kesin Sistem Güvenilirliği	36
4.3.1. Yapı Fonksiyonu Kullanarak Hesaplama	36
4.3.2. Minimal Kesen veya Yol Kümesine Dayalı Hesaplama	36
4.3.3. Dahil Etme-Çıkarma Prensipleri	37
4.4. Artıklık	42
5. BAĞIMSIZ BİLEŞENLİ TAMİR EDİLEMEZ SİSTEMLER	43

5.1. Tamir Edilemez Seri Sistemler	43
5.2. Tamir Edilemez Paralel Sistemler.....	44
5.3. Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı Sistemler	45
5.4. Bağımsız Bileşenli ve Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı: G ve F Sistem	48
5.4.1. Sabit Hata Oranına Sahip, Aynı Tip Bileşenlerden Oluşan ve Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı Sistemler	48
5.4.2. Sabit Hata Oranına Sahip Farklı Bileşenlerden Oluşan Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı Sistemler	57
5.5. n'den k Çıkışlı Ardıl Sistem.....	65
5.5.1. n'den k Çıkışlı Ardıl: G Sistem	65
5.5.2. n'den k Çıkışlı Ardıl: F Sistem.....	68
6. SONUÇ	73
KAYNAKÇA.....	75

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Bir parçanın durum değişkeni ve hata zamanı.....	3
Şekil 2.2. $F(t)$ dağılım fonksiyonu ve $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu	4
Şekil 2.3. $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu	5
Şekil 2.4. Küvet eğrisi.....	7
Şekil 2.5. Seçilen α değerleri için Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	12
Şekil 2.6. Seçilen α değerleri için Weibull dağılımının hata oranı fonksiyonu.....	12
Şekil 3.1. n boyutlu bir seri sistemin güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	14
Şekil 3.2. n boyutlu bir paralel sistemin güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	15
Şekil 3.3. 3'den 2 çıkışlı sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	16
Şekil 3.4. 3'den 2 çıkışlı sistem için alternatif gösterim (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	17
Şekil 3.5. Örnek sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	18
Şekil 3.6. Örnek sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	21
Şekil 3.7. Sistem seviyesindeki artıklık (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	21
Şekil 3.8. Bileşen seviyesindeki artıklık (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	21
Şekil 3.9. Bir 3'den 2 çıkışlı sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	23
Şekil 3.10. Köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	24
Şekil 3.11. Minimal yol seri yapılardan oluşan bir paralel yapı şeklinde temsil edilen köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	25
Şekil 3.12. Minimal kesen paralel yapılardan oluşan bir seri yapı şeklinde temsil edilen köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	26
Şekil 4.1. Gaz kaçağı için kullanılan otomatik bir alarm sisteminin güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	32

Şekil 4.2. Tek VE kapılı bir hata ağacı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)..	34
Şekil 4.3. Tek VEYA kapılı bir hata ağacı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)..	35
Şekil 4.4. Örnek güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)..	37
Şekil 4.5. Bir köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	40
Şekil 5.1. Bağımsız, aynı tipte ve sabit λ hata oranlı bileşenlerden oluşan 3 'den 2 çıkışlı sistemin hata oranı fonksiyonu $z_{S_4}(t)$ 'nin grafiği.....	47
Şekil 5.2. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu.....	50
Şekil 5.3. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin dağılım fonksiyonu.....	51
Şekil 5.4. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	52
Şekil 5.5. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin hata oranı fonksiyonu.....	53
Şekil 5.6. Bağımsız bileşenli 5'den 2 çıkışlı bir G sistemin güvenilirlik blok diyagramı.....	57
Şekil 5.7. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu.....	61
Şekil 5.8. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin dağılım fonksiyonu.....	61
Şekil 5.9. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	62
Şekil 5.10. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir sistemin hata oranı fonksiyonu.....	62
Şekil 5.11. Bağımsız bileşenli 5'den 2 çıkışlı ardıl bir G sistemin güvenilirlik blok diyagramı.....	65
Şekil 5.12. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin güvenilirlik fonksiyonu.....	66
Şekil 5.13. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin dağılım fonksiyonu.....	67

Şekil 5.14. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	67
Şekil 5.15. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin hata oranı fonksiyonu.....	68
Şekil 5.16. Bağımsız bileşenli 5’den 2 çıkışlı ardıl bir F sistemin güvenilirlik blok diyagramı.....	68
Şekil 5.17. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin güvenilirlik fonksiyonu.....	70
Şekil 5.18. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin dağılım fonksiyonu.....	70
Şekil 5.19. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	71
Şekil 5.20. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin hata oranı fonksiyonu.....	71

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 5.1. Bazı bağımsız ve eş bileşenli n 'den k çıkışlı sistemlerin ortalama hata süreleri (MTTF) (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).....	46
Tablo 5.2. Bileşenlerin sabit hata oranı $\lambda = 0,5$ ve $n = 5$ olmak üzere bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri.....	55
Tablo 5.3. Bileşenlerin sabit hata oranı $\lambda = 1$ ve $n = 5$ olmak üzere bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri.....	56
Tablo 5.4. Bileşenlerin sabit hata oranı $\lambda = 2$ ve $n = 5$ olmak üzere bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri.....	56
Tablo 5.5. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri.....	64

SİMGELER LİSTESİ

t	: Zaman
t_0	: Belirli bir zaman
$\text{Pr}(\cdot)$	: Bir olayın gerçekleşme olasılığı
$X(t)$	: Durum değişkeni
T	: Hata zamanı
$f(t)$	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$R(t)$	: Güvenilirlik fonksiyonu
$z(t)$	: Hata oranı fonksiyonu
$F(t)$	: Dağılım fonksiyonu
Δt	: Zaman aralığının uzunluğu (zamandaki değişim)
t_m	: Medyan zamanı
λ	: Sabit hata oranı
α	: Şekil parametresi
ρ	: Ölçü parametresi
e	: Üstel (sabit sayı)
$x_i(t)$	: i bileşeninin durum değişkeni
x	: Durum vektörü
$\phi(x)$	: Yapı fonksiyonu
$E[\cdot]$	: Bir olayın beklenen değeri
P	: Minimal yol kümesi
K	: Minimal kesen kümesi
C	: Bileşen kümesi
$p_i(t)$	: i bileşeninin güvenilirliği
$q_i(t)$	: i bileşeninin güvenilmezliği
$Q_0(t)$	: Sistem güvenilmezliği
$p_s(t)$	: Sistem güvenilirliği
h	: Bileşenleri bağımsız olan sistemlerin güvenilirliği
$\psi(\cdot)$	: Hata ağacının yapı fonksiyonu
$Y(t)$	: Temel olayın durum vektörü
$Y_i(t)$	: i temel olayının durum değişkeni
$\check{Q}_j(t)$	: j minimal kesen paralel yapısının t anında arızalanma olasılığı

KISALTMALAR LİSTESİ

- IEC : Uluslararası Elektroteknik Komisyonu
- ISO 8402 : Uluslararası Standartlar Teşkilatı (International Organization for Standardization) tarafından yayınlanan bir standart
- MRL : Ortalama artık zaman (Mean Residual Life)
- MTBF : Hatalar arası ortalama zaman (Mean Time Between Failures)
- MTTF : Ortalama hata zamanı (Mean Time To Failure)
- MTTR : Ortalama tamir zamanı (Mean Time To Repair)



1. GİRİŞ

Güvenilirlik, herhangi bir maddenin, istenen bir görevi, verilen çevresel ve operasyonel şartlar altında, belirli bir zaman diliminde yerine getirmesidir (ISO 8402). Tanımdan da anlaşılacağı gibi bu kavram, ürünlerin ne kadar dayanacağını ölçmek için kullanılmaktadır. Her ne kadar bu kavramın çıkış noktası savunma sanayii olsa da günümüzde hemen hemen her türlü endüstriyel alanda kullanılmaktadır.

Herhangi bir parçanın güvenilirliğini ölçmek için gözlemsel yöntemler yeterlidir. Aynı üretim aşamasından geçen, aynı hammaddeler kullanılarak üretilen ve aynı ortamda kullanılan parçaların güvenilirliklerinin de aynı olacağını düşünmek yanlış olmaz. Parçalardan oluşan sistemlerde ise karmaşık hesaplamalara ihtiyaç duyulur. Bu hesaplamalar, sistemlerin yapısına ve bileşenlerin cinsine göre farklılık gösterebilir. Bir sistemin tasarımını, bağımlı ya da bağımsız bileşenlerden oluşması, tamir edilebilir ya da tamir edilemez olması gibi durumlar etkiler. Bazı sistemlerde, sistemi tehdit eden iç ve dış tehlikeler ve bu tehlikeler için alınan önlemler gibi çeşitli değişkenler de sistemin güvenilirliği analiz edilirken hesaba dahil edilebilir. Bu tarz değişkenler sistemi karmaşık hale getirip işlemi zorlaştırırsa da kesin bir güvenilirlik değeri elde etmek için hayati önem taşımaktadır.

Sistemler temel olarak; seri, paralel ve n 'den k çıkışlı olmak üzere üç ana başlıkta ele alınmaktadır. Bunların arasında en sık kullanılan ve en çok üzerinde çalışılan sistem n 'den k çıkışlı sistemlerdir. Çünkü farklı n ve k değerleri için farklı sistemler elde etmek mümkündür. n 'den k çıkışlı: F sistem, n 'den k çıkışlı: G sistem ve ardıl sistem ise n 'den k çıkışlı sistemlerin bazı özel durumlarıdır. Bu çalışmada, n 'den k çıkışlı sistemler, tamir edilemez ve bileşenlerinin bağımsız olduğu durum için incelenecektir.

Bu konuda yapılan bazı çalışmalar ise şunlardır: Derman ve arkadaşları 1986 yılında, ardıl n 'den k çıkışlı: F sistemler üzerine bir çalışma yayınladılar. Bu çalışmada bağımsız ve aynı dağılımlı bileşenlerden oluşan sistemler için alt ve üst sınırları elde ettiler. Ayrıca alt ve üst sınırları elde etmek için kullanılan hesaplamaları tanımladılar. Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayanlar için ise en uygun sistem tasarımı üzerine çalıştılar. Koutras ve arkadaşları 1993 yılında iki boyutlu ardıl F sistemlerin güvenilirliği üzerinde bir çalışma yayınladılar ve bağımsız ve aynı dağılımlı bileşenlerden oluşan F sistemler için alt ve üst sınırlar türettirler. Chao ve arkadaşları 1995 yılında n 'den k çıkışlı ardıl sistemler için kapsamlı bir derleme oluşturdular.

Huang ve arkadaşları 2000 yılında n 'den k çıkışlı: G sistemler üzerine bir çalışma yayınladılar. Bu çalışmada sistemin çalışması için çalışması gereken minimum sayıda bileşenin hangi farklı durumlarda elde edilebileceğini araştırdılar ve bu farklı durumların kaç farklı şekilde olabileceğini hesapladılar.

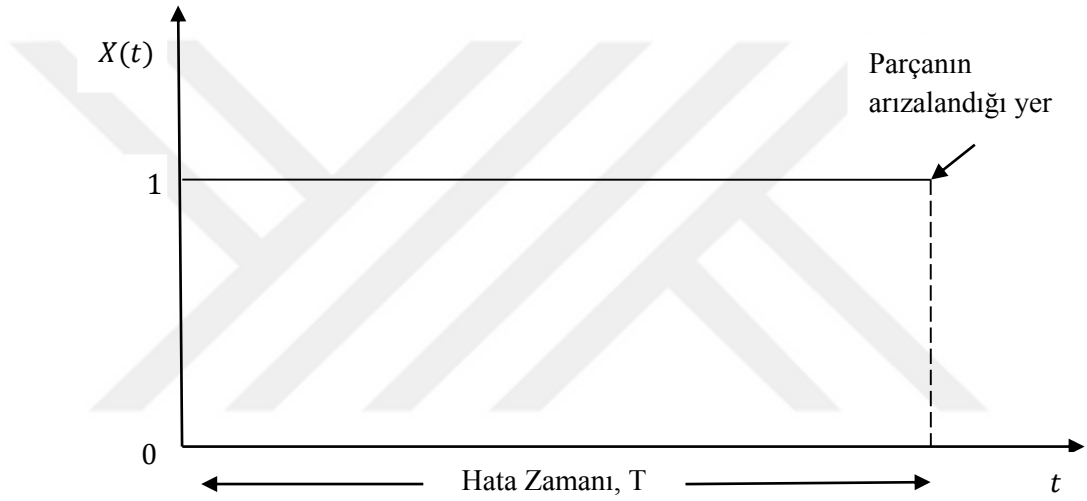


2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Durum Değişkeni) Bir parçanın t anındaki durumu, durum değişkeni olarak adlandırılır. t anındaki durum değişkeni genel olarak $X(t)$ şeklinde gösterilir ve

$$X(t) = \begin{cases} 1, & t \text{ anında parça çalışıyor ise} \\ 0, & t \text{ anında parça çalışmıyor ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 2.1. Bir parçanın durum değişkeni ve hata zamanı

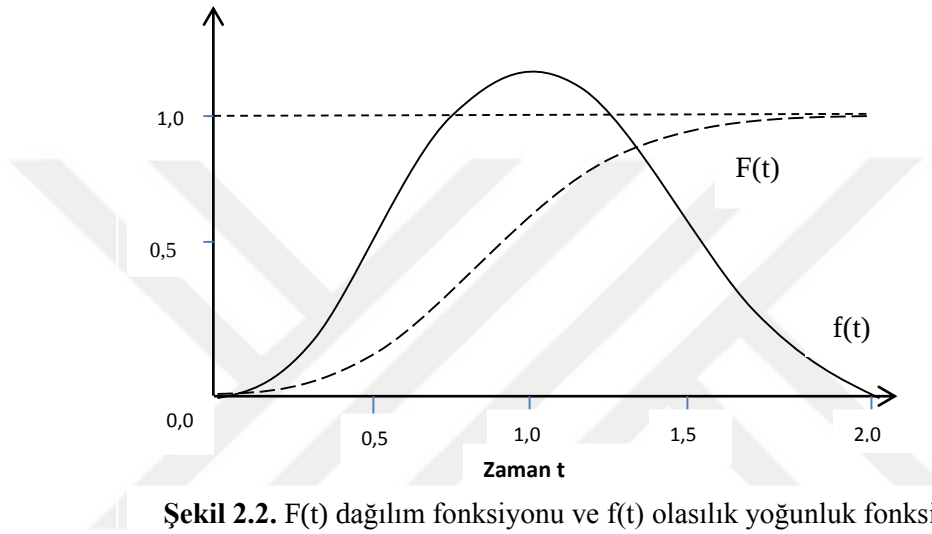
Tanım 2.2. (Hata Zamanı) Bir parçanın çalışmaya başlamasından, ilk arızasına kadar geçen süreye hata zamanı denir. Hata zamanı tesadüfi bir değişken olarak kabul edilir ve T ile gösterilir. $X(t)$ durum değişkeni ile T hata zamanı arasındaki ilişki, Şekil 2.1’de gösterilmiştir.

Hata zamanı kavramı aslında biraz yanıltıcı olabilir. Çünkü, T hata zamanı her zaman süre olarak hesaplanmaz. Örneğin, periyodik olarak çalışan bir sistemin döngü sayısı, bir aracın kat ettiği mesafe, bir cismin aldığı darbe sayısı gibi ölçüler de hata zamanının konusu olabilir. Bu nedenle hata zamanı genelde süreksiz bir değişkendir. Ancak süreksiz bir değişkene, sürekli bir değişken yardımıyla da yaklaşılabilir. Bu yüzden hata zamanı, $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F(t)$ dağılım fonksiyonu

olan sürekli bir değişken olarak kabul edilir. $F(t)$, parçanın $(0, t]$ aralığında arızalanma olasılığıdır ve $F(t)$ dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \int_0^t f(u)du \quad , t > 0 \text{ için} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.2. $F(t)$ dağılım fonksiyonu ve $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$$

şeklinde tanımlanır. Δt çok küçük ise

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t) \approx f(t) \cdot \Delta t$$

şeklinde bir olasılık tanımlanmaktadır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

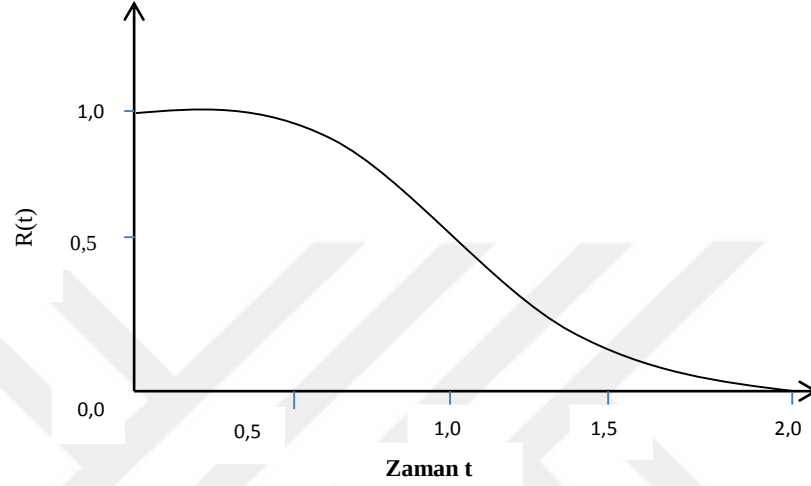
Tanım 2.3. (Güvenilirlik Fonksiyonu) Güvenilirlik fonksiyonu, bir parçanın $(0, t]$ aralığında arızalanmama olasılığıdır. Başka bir deyişle t anı geldiğinde bu parçanın çalışmaya devam etmesidir. Bu fonksiyon genelde $R(t)$ ile gösterilir ve

$$R(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t) \quad , t > 0 \text{ için} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde,

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(u)du = \int_t^\infty f(u)du \quad (2.3)$$

eşitliğini kullanmak mümkündür (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 2.3. R(t) güvenilirlik fonksiyonu

Tanım 2.4. (Hata Oranı Fonksiyonu) Bir parçanın t anında çalışır olması şartı ile bu parçanın $(t, t + \Delta t]$ aralığında arızalanma olasılığı,

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t)}{\Pr(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu olasılık Δt zaman aralığına bölünür ve $\Delta t \rightarrow 0$ olursa $z(t)$ hata oranı (2.4)'de elde edilir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

$$\begin{aligned} z(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Δt 'nin çok küçük olduğu durumlarda ise olasılık,

$$\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \approx z(t) \cdot \Delta t \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır. Diğer fonksiyonlarla olan bağlantısına bakılacak olursa

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} (1 - R(t)) = -R'(t) \quad (2.6)$$

eşitliği yazılabilir. Böylece

$$z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \ln R(t) \quad (2.7)$$

denklemini yazılır. $R(0) = 1$ olduğundan

$$\int_0^t z(u) du = -\ln R(t) \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak hata oranı fonksiyonu ile güvenilirlik fonksiyonu arasındaki bağlantı,

$$R(t) = e^{-\int_0^t z(u) du} \quad (2.9)$$

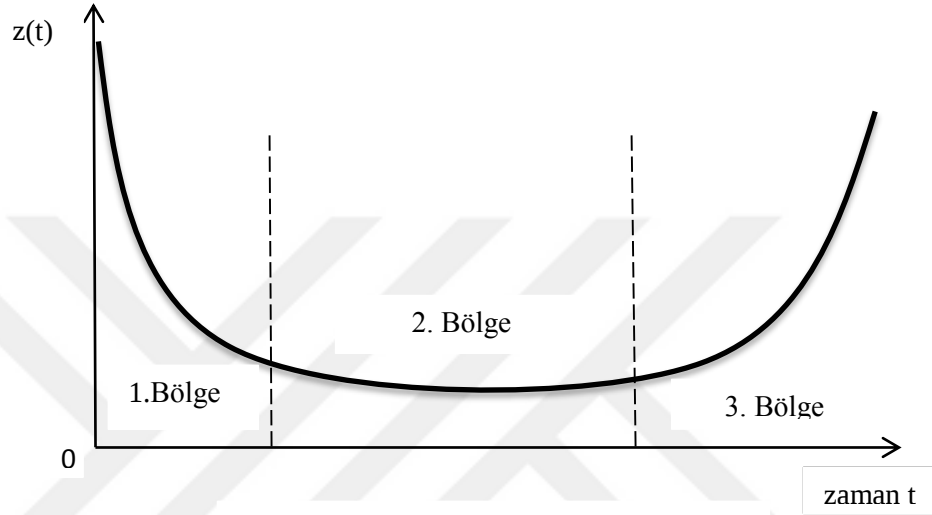
şeklinde ifade edilir. (2.9) eşitliği yardımıyla da görülmektedir ki $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu ve $F(t) = 1 - R(t)$ dağılım fonksiyonu, $z(t)$ hata oranı fonksiyonu yardımıyla belirlenebilmektedir.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu belirli bir aralıkta arızalanan parçaların sayısıdır. Hata oranı fonksiyonu ise belirli bir aralıkta arızalanan parçaların, aralığın başlangıcında çalışır vaziyette olan parçalara oranıdır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Örnek 2.1: 2000 adet ampul test edildiğinde, 1000. saatte çalışır vaziyette olanların sayısı 1200, sonraki 50 saat içinde patlayanların sayısı 30, bir sonraki 50 saat içinde patlayanların sayısı yine 30 ise, bu ampuller için $t = 1000$ için ortalama hata oranı $z(t)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$z(2000) = \frac{1000. \text{saatten sonra bir saat içinde patlayan ampul sayısı}}{1000. \text{saatte çalışır vaziyette olan ampul sayısı}} = \frac{30/50}{1200} = 0,0005$$

Hata oranı fonksiyonu güvenilirlik analizinde çok önemli bir yere sahiptir. Çünkü model oluşturmak için sıklıkla hata oranına bakılır. Hata oranının artan, azalan ya da sabit olması ile farklı modeller ortaya çıkmaktadır. Parçanın yıpranmasıyla birlikte hata oranının artması ya da sabit kalması da parçaların hangi durumlarda arızalandığını belirlemede oldukça etkili bir yöntemdir.



Şekil 2.4. Küvet Eğrisi

$z(t)$ hata oranı fonksiyonu, parçaların yapısına göre değişiklik gösterse de en genel gösterimi Şekil 2.4’de gösterilen küvet eğrisidir. Burada görüldüğü gibi bu eğri üç farklı bölgeden oluşmaktadır. 1. Bölgede hata oranı başlarda yüksek olup zamanla azalan bir eğilim göstermektedir. Bunun sebebi kusurlu üretilen parçalardır. 2. Bölgede hata oranı sabit kalır. Çünkü ilk kısımda arızalanan parçalar çıkarıldığında geriye sağlam parçalar kalır ve bu parçalar belli bir süre sorunsuz çalışır, o yüzden bu bölgeye kullanışlı ömür periyodu da denir. 3. Bölgede hata oranı artan bir görünüm sergiler. Bu bölgede zamanla parçalar yıpranır ve hata oranı yavaşça artar (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Tanım 2.5. (Ortalama Hata Zamanı (MTTF)) Bir parçanın ortalama hata zamanı,

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Arızalanan bir parçanın tamir edilmesi ya da değiştirilmesi için geçen süre MTTF'ye göre çok kısa ise MTTF ayrıca hatalar arası ortalama zamanı (MTBF) da içerir. Eğer tamir süresi dikkate alınacak kadar uzun ise MTBF'ye ortalama tamir süresi (MTTR) de dahil olur.

$f(t) = -R'(t)$ olduğundan

$$MTTF = - \int_0^{\infty} tR'(t)dt \quad (2.11)$$

eşitliğini de yazmak mümkündür. Burada kısmi integral alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (2.12)$$

eşitliği elde edilecektir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Tanım 2.6. (Medyan) Dağılımı iki eşit parçaya ayıran noktaya medyan denir. Yani başka bir ifadeyle $R(t_m) = F(t_m) = 0,50$ eşitliğini sağlayan t_m değeridir. Parçanın bu noktadan önce ve sonra arızalanma olasılığı eşit olup 1/2 dir ((Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Tanım 2.7. (Mod) Dağılım içinde arıza sayısının en yüksek olduğu noktaya dağılımın modu denir. $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu bu noktada maksimuma ulaşır. $f(t_{mod})$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

$$f(t_{mod}) = \max_{0 \leq t \leq \infty} f(t) \quad (2.13)$$

Tanım 2.8. (Ortalama Artık Zaman (MRL)) $t = 0$ iken işleme dahil olan bir parçanın hata süresi T olsun. Bu parçanın t anında hala çalışır vaziyette olup fazladan bir x aralığı kadar dayanma olasılığı,

$$R(x|t) = \Pr(T > x + t | T > t) = \frac{\Pr(T > x + t)}{\Pr(T > t)} = \frac{R(x + t)}{R(t)} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde, $R(x|t)$, parçanın koşullu güvenilirlik fonksiyonu olarak adlandırılır. Parçanın t anındaki artık (kalan) ömrü $MRL(t)$ ile ifade edilir ve

$$MRL(t) = \mu(t) = \int_0^{\infty} R(x|t)dx = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} R(x)dx \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Burada özel olarak $\mu(0) = MTTF$ eşitliği verilebilir. Çünkü $t = 0$ iken parça yenidir ve olasılığı değiştirecek bir koşul bulunmamaktadır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

2.1. Üstel Dağılım

Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & , \quad t > 0 \text{ ve } \lambda > 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu dağılıma λ parametrelili üstel dağılım denir ve $T \sim \exp(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Üstel dağılıma sahip olan bir parçanın güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = e^{-\lambda t} , t > 0 \text{ için} \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir. Bu dağılımın ortalama hata zamanı,

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} \quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilir. T 'nin varyansı ise $var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ olarak hesaplanır. Üstel dağılımlı bir parçanın ortalama hata süresine kadar dayanma olasılığı sabittir. Sonuç olarak,

$$R(MTTF) = R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{-1} \approx 0,3679$$

eşitliği tanımlanmaktadır. Bu dağılımın hata oranı da sabit olup λ 'ya eşittir. Bu durum ise

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \quad (2.18)$$

eşitliği ile gösterilmektedir.

Küvet eğrisine (Şekil 2.4) bakılacak olursa, bu dağılımın 2. Bölgeye denk geldiği görülür. Bu dağılımda parçaların eskimesi ya da yıpranması söz konusu değildir. Yani parça çalışır vaziyette olduğu müddetçe yeni olarak kabul edilir ve değiştirmeye gerek yoktur. Bu yüzden üstel dağılımın hafızası yoktur denilebilir. Üstel dağılıma bazen Epstein dağılımı da denir. Bu dağılımda güvenilirlik fonksiyonunu ve diğer fonksiyonları tahmin etmek için işlemde geçen süreyi ve hata sürelerini gözlemlemek yeterlidir (Lenz, M. ve J. Rhodin, 2011).

2.2. Weibull Dağılımı

Güvenilirlik analizinde en sık kullanılan dağılımlardan birisi olan Weibull dağılımı, İsveçli bilim adamı Prof. Wallodi Weibull tarafından geliştirilmiştir. Weibull dağılımı esnek bir dağılım olduğu için, parametrelerin uygun bir şekilde ayarlanmasıyla, çok farklı tipte hata oranı davranışlarını modelleyebilir.

Hata zamanı T olan bir parça, parametreleri $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olmak üzere Weibull dağılımlı olsun. Bu dağılım $T \sim \text{Weibull}(\alpha, \rho)$ şeklinde gösterilir ve dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\rho t)^\alpha} & , t > 0 \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Buna uygun olarak olasılık yoğunluk fonksiyonu da

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \begin{cases} \alpha \rho^\alpha t^{\alpha-1} e^{-(\rho t)^\alpha} & , t > 0 \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte α ifadesi için şekil parametresi, ρ ifadesi için ölçü parametresi tabiri kullanılır. Güvenilirlik fonksiyonu,

$$R(t) = \Pr(T > 0) = e^{-(\rho t)^\alpha} , t > 0 \text{ için} \quad (2.21)$$

şeklinde, hata oranı fonksiyonu ise

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha \rho^\alpha t^{\alpha-1}, t > 0 \text{ için} \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilir (Lenz, M. ve J. Rhodin, 2011).

Weibull dağılımı, $\alpha = 1$ olduğunda üstel dağılımlıdır ve hata oranı sabittir, $\alpha > 1$ olduğunda hata oranı fonksiyonu artandır ve $\alpha < 1$ olduğunda ise hata oranı azalandır. Özel olarak da $\alpha = 2$ iken dağılım Rayleigh Dağılım adını alır.

Yine özel olarak, $t = \frac{1}{\rho}$ eşitliği (2.32)'de yerine yazıldığında

$$R\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{e} \approx 0.3679 \quad \text{tüm } \alpha > 0 \text{ için}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte görüldüğü gibi $\Pr\left(T > \frac{1}{\rho}\right) = 1/e$ olasılığı α parametresinden bağımsızdır. Bu yüzden $1/\rho$ sayısına karakteristik ömür süresi denir. Ortalama hata zamanı,

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{1}{\rho} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad (2.23)$$

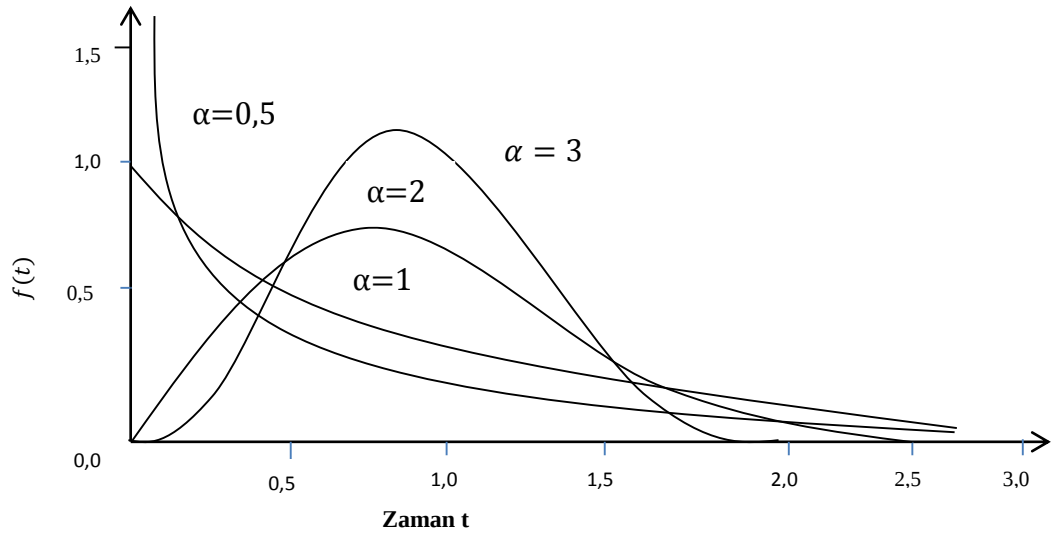
şeklinde, t_m orta ömür

$$R(t_m) = 0,50 \Rightarrow t_m = \frac{1}{\rho} (\ln 2)^{1/\alpha} \quad (2.24)$$

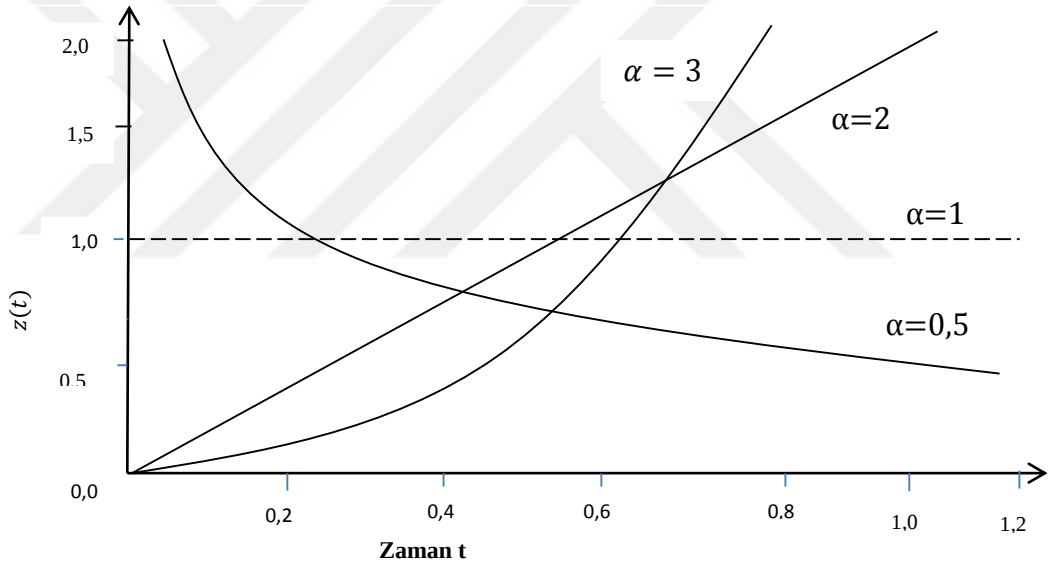
şeklinde, T'nin varyansı da

$$var(T) = \frac{1}{\rho^2} \left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right) \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.



Şekil 2.5. Seçilen α değerleri için Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ($\rho = 1$)



Şekil 2.6. Seçilen α değerleri için Weibull dağılımının hata oranı fonksiyonu ($\rho = 1$)

Örnek 2.1. Değişken bir kısma valfinin hata zamanı T 'nin şekil parametresi $\alpha = 2,25$ ve ölçü parametresi $\rho = 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ saat}^{-1}$ olmak üzere Weibull dağılımlı olsun. Bu valfin sürekli bir işlemden 6 ay boyunca ($t = 4380$ saat) çalışma olasılığı,

$$R_1(t) = e^{-(\rho t)^\alpha} = e^{-(1,15 \cdot 10^{-4} \cdot 4380)^{2,25}} \approx 0,808$$

şeklinde hesaplanmıştır. Ortalama hata süresi,

$$MTTF_1 = \frac{1}{\rho} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) = \frac{\Gamma(1,44)}{1,15 \cdot 10^{-4}} \text{ saat} \approx 7706 \text{ saat}$$

şeklinde yazılabilir. Orta ömür ise

$$t_m = \frac{1}{\rho} (\ln 2)^{1/\alpha} \approx 7389 \text{ saat}$$

şeklinde yazılabilir. Bir valf 6 ay boyunca hiç arızalanmadan çalışması şartı ile ($t_1 = 4380$ saat), bir 6 ay daha çalışma olasılığı ($t_2 = 4380$ saat)

$$R_1(t_1 + t_2 | t_1) = \frac{R_1(t_1 + t_2)}{R_1(t_1)} = \frac{e^{-(\rho(t_1+t_2))^\alpha}}{e^{-(\rho t_1)^\alpha}} \approx 0,448$$

şeklinde hesaplanır. Son iki sonuç karşılaştırıldığında valfin, ikinci altı ayda çalışabilme olasılığının ilkinde göre daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durumda hata oranının artan olduğu anlaşılmaktadır. Bunun sebebi dağılımın şekil parametresinin birden büyük ($\alpha > 1$) olmasıdır.

Son olarak 6 ay ($t = 4380$ saat) boyunca arızalanmadan çalışan bir valfin ortalama artık ömrü,

$$MRL_1(t) = \frac{1}{R_1(t)} \int_0^\infty R(t+x) dx \approx 4730 \text{ saat}$$

olarak hesaplanmıştır (Hoyland, A., Rausand M., 2002).

3. YAPI FONKSİYONU ve ANALİZİ

1'den n'ye kadar ardışık olarak numaralandırılmış n tane bileşenden oluşan sisteme n boyutlu sistem denir.

i bileşenin durumu, ikili bir değişken olan x_i ile tanımlanır ($i = 1, 2, \dots, n$). Bileşen çalışır durumda ise 1, arızalı durumda ise 0 sonucunu alır.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{i bileşeni çalışıyorsa} \\ 0, & \text{i bileşeni arızalıysa} \end{cases} \quad (3.1)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'e durum vektörü denir. Ayrıca, n tane bileşenin tümünün durumu bilindiğinde sistemin de çalışır durumda olup olmadığı bilinebilir. Benzer şekilde, sistemin durumu ikili bir fonksiyonla,

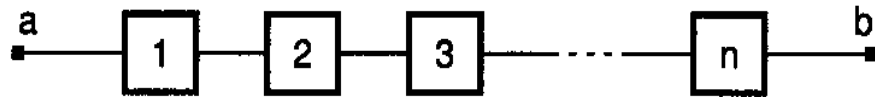
$$\phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durum fonksiyonu;

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{sistem çalışıyorsa} \\ 0, & \text{sistem arızalıysa} \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. $\phi(x)$ durum fonksiyonuna, sistemin yapı fonksiyonu ya da sadece yapısı da denir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).

3.1. Seri Sistem



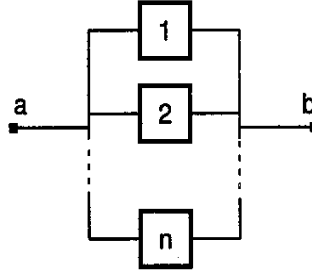
Şekil 3.1. n boyutlu bir seri sistemin güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Bir sistem, ancak ve ancak n tane bileşenin tamamı çalışır durumda olduğunda çalışıyor ise bu sisteme seri sistem denir. Seri sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n x_i \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Şekil 3.1’de gösterilen a ile b arasındaki bağlantının sağlanması, sistemin çalışması demektir. Bu bağlantının sağlanması için de tüm bileşenlerin çalışır vaziyette olması gerekir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).

3.2. Paralel Sistem



Şekil 3.2. n boyutlu bir paralel sistemin güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Bir sistem, ancak ve ancak n tane bileşeninden sadece birisinin çalışır durumda olması ile çalışıyor ise bu sisteme paralel sistem denir. Paralel sistemin fonksiyonu,

$$\phi(x) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. (3.5)’in sağ tarafındaki ifade genellikle $\prod_{i=1}^n x_i$ şeklinde yazılır. Burada $\prod$ “ip” diye okunur. (3.5)’den 2 boyutlu paralel yapının fonksiyonu,

$$\phi(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) = \prod_{i=1}^2 x_i \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir. (3.6) eşitliğinde, sağ tarafı ayrıca $x_1 \sqcup x_2$ şeklinde yazmak da mümkündür. (3.6) eşitliği,

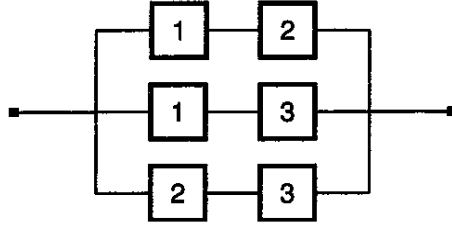
$$\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2 \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada x_1 ve x_2 ikili değişkenler olduğundan, $x_1 \sqcup x_2$ ifadesi x_i ’lerin maksimumuna eşit olacaktır. Bu durum,

$$\prod_{i=1}^n x_i = \max_{i=1,2,\dots,n} x_i \quad (3.8)$$

eşitliği ile de gösterilebilmektedir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).

3.3. n'den k Çıkışlı Sistem

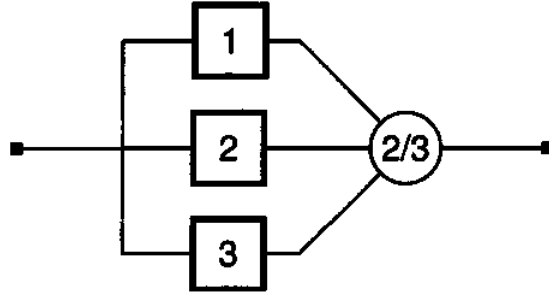


Şekil 3.3. 3'den 2 çıkışlı sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Bir sistem, ancak ve ancak n tane bileşeninden en az k tanesi çalışır durumdayken çalışıyorsa bu sisteme n'den k çıkışlı sistem (koon) denir. Bu tanıma göre; bir seri sistem, n'den n çıkışlı sisteme ve bir paralel sistem de n'den 1 çıkışlı sisteme eşdeğerdir. Bir n'den k çıkışlı sistemin fonksiyonu,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \text{ ise} \\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i < k \text{ ise} \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılmaktadır. Örnek olarak Şekil 3.3'de gösterilen 3'den 2 çıkışlı yapıda tek bileşenin arızası sorun oluşturmaz ama iki ya da daha fazla bileşen arızalandığında sistem de arızalanmış olur. 3'den 2 çıkışlı yapının güvenilirlik blok diyagramı ayrıca Şekil 3.4'deki gibi de çizilebilir. Bu gösterim IEC61078 tarafından tercih edilmektedir, ancak bu gösterimi kullanarak yapı fonksiyonu kurmak biraz sorunludur. O yüzden genel olarak Şekil 3.3'deki gösterim kullanılmaktadır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 3.4. 3’den 2 çıkışlı sistem için alternatif gösterim (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Şekil 3.3’de görülen 3’den 2 çıkışlı yapının fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x) &= x_1x_2 \sqcup x_1x_3 \sqcup x_2x_3 \\
 &= 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) \\
 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 - x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_1^2x_3^2 \\
 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1x_2x_3
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilir. (3.10) eşitliğinde x_i ikili değişken olduğundan, $x_i^k = x_i$ şeklinde yazılabilmektedir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

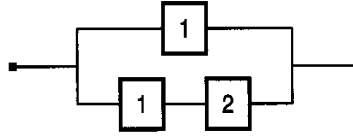
3.4. Tutarlı Sistemler

Bir sistemin yapısını kurarken, sistemin çalışması için direk rol oynamayan bileşenleri dışarıda bırakmak mantıklı olacaktır. Bu yapılan işlemde; dışarıda bırakılmayan bileşenlere ilişkili, dışarıda bırakılan bileşenlere ise ilişkisiz denir. Eğer i bileşeni ilişkisiz ise

$$\phi(1_i, x) = \phi(0_i, x), \text{ tüm } (.i, x) \text{ için} \tag{3.11}$$

eşitliği sağlanır. Eğer bir sistemin her bileşeni ilişkili ise $\phi(1_i, x) = 1$ ve $\phi(0_i, x) = 0$ olur. (3.11) eşitliğinde; $(1_i, x)$, i . bileşenin bire eşit olduğu durumu gösteren durum vektörü, $(0_i, x)$, i . bileşenin sıfıra eşit olduğu durumu gösteren durum vektörü ve $(.i, x)$

de i . bileşenin sıfıra mı yoksa bire mi eşit olduğu durumu gösteren durum vektörüdür. Şekil 3.5’de 2. bileşenin ilişkisiz olduğu 2 boyutlu bir sistem gösterilmektedir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).



Şekil 3.5. Örnek sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Uyarı. “ilişkili/ilişkisiz” ifadesi bazen yanıltıcı olabilir. Çünkü bazı sistemlerde ilişkisiz gibi görülen bileşenler sistem için hayati öneme sahip olabilir. Güvenilirlik blok diyagramı ve yapı fonksiyonu, belirli bir sistem fonksiyonu için kurulmuştur. Koruma sistemlerinin durdurma işlevi, bu tanıma göre, sistem fonksiyonu için ilişkisiz olacaktır. Çünkü acil bir durum olmadıkça koruma sisteminin durdurma işlevi devreye girmeyecek ve sistemi etkilemeyecektir.

Bir bileşen için ilişkisiz ifadesi kullanıldığında, bu belirli bir sistem fonksiyonu için geçerlidir. Çünkü aynı bileşen başka bir sistem fonksiyonu için ilişkili olabilir.

Ayrıca, x_i belirli bir bileşenin fonksiyonunu (veya fonksiyonun belirli bir altkümesinin) durumunu temsil etmektedir. i bileşeni için ilişkisiz ifadesi kullanıldığında aslında ifade edilmek istenen, bu bileşenin belirli bir fonksiyon için ilişkisiz olduğudur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Tanım 3.1. (Tutarlı Sistem) Bir sistemin bütün bileşenleri ilişkili ve her bir değişkeni için yapı fonksiyonu azalmayan ise bu sisteme tutarlı sistem denir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).

Burada, ilgilenilen tüm sistemlerin tutarlı olması gibi bir algı oluşabilir, ancak bu doğru değildir. Bazı sistemlerde, bu tanıma göre, ilişkili olmayan bir bileşen sistem için gerekli olabilmektedir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

3.5. Tutarlı Sistemlerin Genel Karakteristiği

Teorem 3.1. n boyutlu tutarlı bir sistemin yapı fonksiyonu $\phi(x)$ olmak üzere

$$\phi(0) = 0 \text{ ve } \phi(1) = 1 \quad (3.12)$$

eşitlikleri sağlanır. Başka bir deyişle, tutarlı bir sistemdeki bileşenlerin hepsi çalışıyorsa sistem de çalışıyordur ya da tutarlı bir sistemdeki bileşenlerin hepsi arızalıysa sistem de arızalıdır.

İspat. $\phi(x)$ yapı fonksiyonu, yalnızca 0 ve 1 değerlerini alabilir.

Eğer $\phi(0) = 1$ olursa, $\phi(x)$ her bir değeri için azalmayan sayıldığından, $\phi(0) = \phi(1) = 1$ olur. Bu da sistemdeki bütün bileşenlerin ilişkisiz olduğu anlamına gelir. Bu da tutarlılık varsayımıyla çelişir. Dolayısıyla $\phi(0) = 0$ olur. Benzer şekilde $\phi(1) = 0$ ise $\phi(0) = 0$ olur. Bu da tüm bileşenlerin gereksiz olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $\phi(1) = 1$ olmalıdır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Teorem 3.2. n boyutlu tutarlı bir sistemin yapı fonksiyonu $\phi(x)$ olsun. Böylece

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(x) \leq \prod_{i=1}^n x_i \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanır. Başka bir deyişle; tutarlı bir sistem en az n boyutlu bir seri sistem kadar ve en çok da n boyutlu bir paralel sistem kadar iyi çalışır.

İspat. $\prod_{i=1}^n x_i$ ve $\prod_{i=1}^n x_i$ 'nin her ikisinin de ikili oldukları bilinmektedir. $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ olsun. $\phi(x) \geq 0$ olduğundan (3.13) eşitsizliğinin sol tarafı sağlanmış olur. $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ olursa, bu $x = 1$ demektir. Dolayısıyla Teorem 3.1'e göre $\phi(x) = 1$ olur. Yani, (3.13) eşitsizliğinin sol tarafı her zaman sağlanır. $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ olsun, burada $x = 0$ demektir. Teorem 3.1'e göre de $\phi(x) = 1$ 'dir. Son olarak $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ olsun, $\phi(x) \leq 1$ olduğundan son iki sonuç göz önüne alınırsa (3.13) eşitsizliğinin sağ tarafı her zaman sağlanır.

Teorem 3.3. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ durum vektörleri için $x.y$ ve $x \sqcup y$ sırasıyla,

$$x.y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) \quad (3.14)$$

$$x \sqcup y = (x_1 \sqcup y_1, x_2 \sqcup y_2, \dots, x_n \sqcup y_n) \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. ϕ bir tutarlı yapı olmak üzere,

$$\phi(x \sqcup y) \geq \phi(x) \sqcup \phi(y) \quad (3.16)$$

$$\phi(x.y) \leq \phi(x). \phi(y) \quad (3.17)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.16) eşitsizliğine bakılırsa, $x_i \sqcup y_i \geq x_i$ durumu tüm i 'ler için sağlanır. ϕ tutarlı olduğu için her bir değişkeni için azalmayandır. Bu nedenle

$$\phi(x \sqcup y) \geq \phi(x) \quad (3.18)$$

ve

$$\phi(x \sqcup y) \geq \phi(y) \quad (3.19)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca $\phi(x)$ ve $\phi(y)$ fonksiyonlarının her ikisi de ikili olduklarından

$$\phi(x \sqcup y) \geq \phi(x) \sqcup \phi(y)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.17) eşitsizliğinde tüm i 'ler için $x_i.y_i \leq x_i$ 'dir. ϕ tutarlı olduğundan

$$\phi(x.y) \leq \phi(x) \quad (3.20)$$

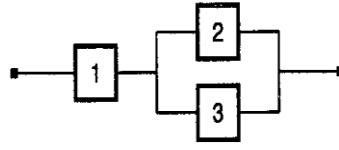
ve

$$\phi(x.y) \leq \phi(y) \quad (3.21)$$

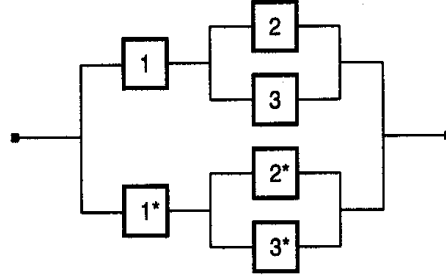
eşitsizlikleri sağlanır. Son olarak, $\phi(x)$ ve $\phi(y)$ fonksiyonlarının her ikisi de ikili olduklarından,

$$\phi(x.y) \leq \phi(x). \phi(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

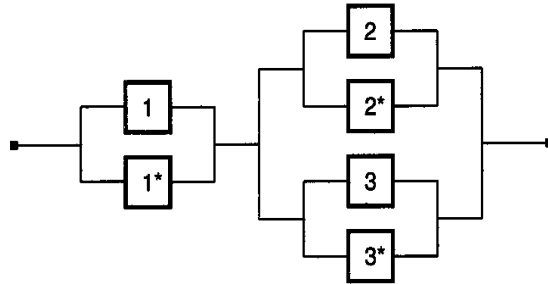


Şekil 3.6. Örnek Sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 3.7. Sistem seviyesindeki artıklık (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Şekil 3.6'da gösterilen yapının fonksiyonu $\phi_2(x)$ olsun. Ayrıca y vektörlü, $\phi_2(x)$ 'e eş bir $\phi_2(y)$ yapı fonksiyonu olduğu varsayalım. Şekil 3.7'de sistem seviyesindeki artıklığı gösterilmektedir. Bu sistemin yapı fonksiyonu $\phi_2(x) \sqcup \phi_2(y)$ 'dir. Daha sonra, Şekil 3.6'daki her bir x_i ve y_i paralel olarak bağlansın. Böylece elde edilen sistemde bileşen seviyesinde artıklık bulunmaktadır. Bu sistem Şekil 3.8'de gösterilmektedir. Bu sistemin fonksiyonu $\phi_2(x \sqcup y)$ olur. Teorem 3.3'e göre $\phi_2(x \sqcup y) \geq \phi_2(x) \sqcup \phi_2(y)$ olduğundan bileşen seviyesindeki artıklık ile elde edilen sistem, sistem seviyesindeki artıklıktan elde edilen sistemden daha iyi bir sistem olduğu görülmektedir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 3.8. Bileşen seviyesindeki artıklık (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

3.6. Yollar Ve Kesenler İle Temsil Edilen Yapılar

n boyutlu bir yapı 1'den n 'ye kadar numaralandırılmış n tane bileşen içerir. Bu bileşenlerin kümesi,

$$C = \{1, 2, \dots, n\}$$

şeklinde gösterilir.

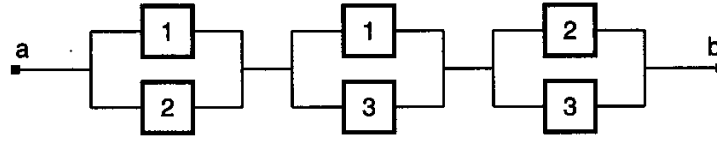
Tanım 3.2. (Yol Kümesi) C 'de bulunan bileşenlerden oluşan bir kümedeki tüm elemanlar çalışırken sistem de çalışıyorsa bu kümeye yol kümesi denir ve P ile gösterilir. Bir P yol kümesinde, bir bileşen arızalandığında sistem de arızalanıyorsa bu yol kümesine minimal yol kümesi denir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).

Tanım 3.3. (Kesen Kümesi) C 'de bulunan bileşenlerden oluşan bir kümedeki tüm elemanlar arızalıyken sistem de arızalıysa bu kümeye kesen kümesi denir ve K ile gösterilir. Bir K kesen kümesi, herhangi bir bileşeni azaldığında kesen kümesi özelliğini kaybediyorsa bu kümeye minimal kesen kümesi denir (Aven, T. ve U. Jensen, 1999).

Örnek 3.1. Şekil 3.6'da güvenilirlik blok diyagramı gösterilen yapının bileşen kümesi $C = \{1, 2, 3\}$ olur.

Yol kümeleri	Kesen kümeleri
$\{1, 2\} *$	$\{1\} *$
$\{1, 3\} *$	$\{2, 3\} *$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2\}$
	$\{1, 3\}$
	$\{1, 2, 3\}$

Minimal yol ve kesen kümeleri $*$ ile işaretlenmiştir. Bu durumda, $P_1 = \{1, 2\}$ ve $P_2 = \{1, 3\}$ minimal yol kümeleri olacaktır. Aynı şekilde minimal kesen kümeleri de $K_1 = \{1\}$ ve $K_2 = \{2, 3\}$ şeklinde tanımlanmaktadır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 3.9. 3’den 2 çıkışlı sistem (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Örnek 3.2. Şekil 3.9’da gösterilen 3’den 2 çıkışlı yapının minimal yol kümeleri aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$P_1 = \{1,2\}, \quad P_2 = \{1,3\} \quad \text{ve} \quad P_3 = \{2,3\}$$

Şekil 3.9’da gösterilen yapının minimal kesen kümeleri ise aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$K_1 = \{1,2\}, \quad K_2 = \{1,3\} \quad \text{ve} \quad K_3 = \{2,3\}$$

Şekil 3.9’da gösterilen 3’den 2 çıkışlı yapı, kendi minimal kesen paralel yapılarından oluşan bir seri yapı olarak tanımlanabilir.

Minimal yol kümeleri $P_1, P_2, \dots, P_p$ ve minimal kesen kümeleri $K_1, K_2, \dots, K_k$ olan bir yapıda, P_j minimal yol kümesinden elde edilen $P_j(x)$ yapı fonksiyonu

$$P_j(x) = \prod_{i \in P_j} x_i, j = 1, 2, \dots, s \text{ için} \quad (3.22)$$

eşitliği ile tanımlanır ($j = 1, 2, \dots, p$). (3.22)’de $P_j(x)$, P_j minimal yol kümelerinin bileşenlerinden oluşan bir seri yapının yapı fonksiyonu olduğundan $P_j(x)$ ’e j. minimal yol seri yapısı denir.

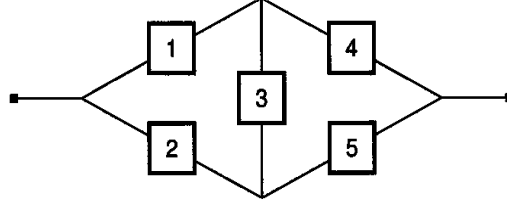
Bir yapının çalışması için, bu yapının minimal yol seri yapılarından en az birisinin çalışması gerekmektedir. O halde

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^p p_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^p (1 - p_j(x)) \quad (3.23)$$

eşitliği yazılabilir. Yani bu yapı, minimal yol seri yapıların bir paralel yapısı olarak yorumlanabilir. (3.22) ve (3.23) birleştirilirse,

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in p_j} x_i \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilecektir.



Şekil 3.10. Köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Örnek 3.3. Şekil 3.10’da verilen köprü yapının minimal yol kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$P_1 = \{1,4\}, \quad P_2 = \{2,5\}, \quad P_3 = \{1,3,5\} \quad \text{ve} \quad P_4 = \{2,3,4\}$$

Şekil 3.10’da verilen köprü yapının minimal kesen kümeleri

$$K_1 = \{1,2\}, \quad K_2 = \{4,5\}, \quad K_3 = \{1,3,5\} \quad \text{ve} \quad K_4 = \{2,3,4\}$$

olduğundan bu minimal yol kümelerinin seri yapıları

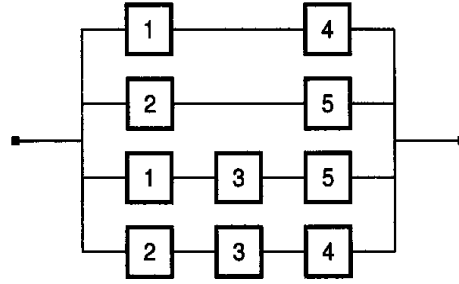
$$\begin{aligned} p_1(x) &= x_1 \cdot x_4 \\ p_2(x) &= x_2 \cdot x_5 \\ p_3(x) &= x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \\ p_4(x) &= x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan köprü yapının yapı fonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \prod_{j=1}^4 p_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^4 (1 - p_j(x)) \\ &= 1 - (1 - p_1(x))(1 - p_2(x))(1 - p_3(x))(1 - p_4(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_2x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_2x_3x_4) \\
&= x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4 \\
&\quad - x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Şeklinde elde edilir. Ayrıca bu köprü yapı Şekil 3.11’de gösterilen güvenilirlik blok diyagramı şeklinde gösterilebilir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 3.11. Minimal yol seri yapılarından oluşan bir paralel yapı şeklinde temsil edilen köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

(3.23) eşitliğine benzer şekilde, (3.26) eşitliği de tanımlanabilir.

$$K_j(x) = \prod_{i \in K_j} x_i = 1 - \prod_{i \in K_j} (1 - x_i) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, k \text{ için} \tag{3.26}$$

(3.26) eşitliğinde $K_j(x)$, K_j minimal kesen kümesinin elemanlarından oluşan bir paralel yapının yapı fonksiyonudur. Dolayısıyla $K_j(x)$ ’e j . minimal kesen paralel yapı denir.

Bir yapının arızalanması için, bu yapının minimal kesen paralel yapılarından en az birinin arızalanması yeterli olduğundan

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^k K_j(x) \tag{3.27}$$

eşitliği yazılabilir. Bundan dolayı bu yapı, minimal kesen paralel yapılardan oluşan bir seri yapı olarak kabul edilebilir. (3.26) ve (3.27) birleştirilirse sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} x_i \quad (3.28)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 3.10'da verilen köprü yapının, K_1 , K_2 , K_3 ve K_4 minimal kesen kümeleri ile minimal kesen paralel yapıları

$$K_1(x) = x_1 \sqcup x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)$$

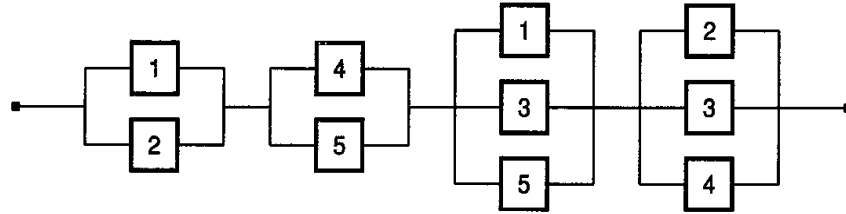
$$K_2(x) = x_4 \sqcup x_5 = 1 - (1 - x_4)(1 - x_5)$$

$$K_3(x) = x_1 \sqcup x_3 \sqcup x_5 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_5)$$

$$K_4(x) = x_2 \sqcup x_3 \sqcup x_4 = 1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, bu ifadeler (3.27)'de yerine yazılırsa bu köprü yapının yapı fonksiyonu elde edilir. Bu köprü yapının güvenilirlik blok diyagramı da Şekil 3.12'de gösterilmiştir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 3.12. Minimal kesen paralel yapılardan oluşan bir seri yapı şeklinde temsil edilen köprü yapısı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

4. BAĞIMSIZ BİLEŞENLİ SİSTEMLER

n tane bileşenin t anındaki durum değişkenleri $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, durum vektörü $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ ve yapı fonksiyonu $\phi(X(t))$ olsun. Buna bağlı olarak ilgili olasılıklar,

$$\Pr(x_i(t) = 1) = p_i(t) \quad \text{için } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.1)$$

$$\Pr(\phi(x(t)) = 1) = p_s(t) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

t anındaki, $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ durum değişkenleri bağımsız tesadüfi değişkenlerdir. Durum değişkenleri bağımsız oldukları için bir bileşenin arızalanması, başka bir bileşenin arızalanmasına yol açmaz ya da daha iyi çalışmasını sağlamaz. Ayrıca bir bileşenin t anındaki çalışma durumu da tesadüfidir. (4.1) ve (4.2) eşitlikleri sırasıyla, i . bileşenin ve sistemin güvenilirlik fonksiyonlarıdır.

Arızalandıklarında, değiştirilebilen ya da tamir edilebilen bileşenlere ve sistemlere ‘tamir edilebilir’ denir. Bu durumda, (4.1) ve (4.2)’ye, sırasıyla i bileşenin ve sistemin geçerliliği denir. Tamir edilebilen bileşenler ve sistemler, sadece ilk arıza ortaya çıkana kadar, tamir edilemezmiş gibi işlem görür.

$p_i(t)$ ’ye, kısaca, i bileşenin t anındaki güvenilirliği, $q_i(t) = 1 - p_i(t)$ ’ye de i bileşenin t anındaki güvenilmezliği denir. Aynı şekilde, $p_s(t)$ ’ye t anındaki sistem güvenilirliği, $Q_0(t) = 1 - p_s(t)$ ’ye de t anındaki sistem güvenilmezliği denir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.1. Sistem Güvenilirliği

$i = 1, 2, \dots, n$ için $X_i(t)$ durum değişkenleri ikili olduğundan,

$$\begin{aligned} E[X_i(t)] &= 0 \cdot \Pr(X_i(t) = 0) + 1 \cdot \Pr(X_i(t) = 1) \\ &= p_i(t), i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde, t anındaki sistem güvenilirliği ise,

$$p_s(t) = E(\phi(X(t))) \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bileşenler bağımsız olduğunda, $p_s(t)$ sistem güvenilirliğinin, sadece $p_i(t)$ 'nin bir fonksiyonu olduğu görülebilir. Bundan dolayı $p_s(t)$ (4.5)'de gösterildiği şekilde yazılabilir.

$$p_s(t) = h(p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) = h(p(t)) \quad (4.5)$$

h harfi, bileşenlerin bağımsız olduğu durumlarda sistem güvenilirliğini ifade etmek için kullanılmaktadır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.1.1. Seri Yapıların Güvenilirliği

n boyutlu bir seri sistemin t anındaki yapı fonksiyonu

$$\phi(X(t)) = \prod_{i=1}^n X_i(t) \quad (4.6)$$

şeklindedir.

$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ 'ler bağımsız olmak üzere sistem güvenilirliği,

$$\begin{aligned} h(p(t)) &= E(\phi(X(t))) = E\left(\prod_{i=1}^n X_i(t)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E(X_i(t)) = \prod_{i=1}^n p_i(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $h(p(t)) \leq \min_i p_i(t)$ 'dir. Yani; seri sistem, güvenilirliği en düşük olan bileşen kadar güvenilirdir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Örnek 4.1. Üç bağımsız bileşenli bir seri sistem için belirli bir t anında bileşenlerin güvenilirliği; $p_1=0,95$, $p_2=0,97$ ve $p_3=0,94$ olsun. Böylece t anındaki sistem güvenilirliği (4.7) yardımıyla

$$p_{s_1} = h(p) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,95 \cdot 0,97 \cdot 0,94 \approx 0.866$$

olarak hesaplanır.

Özel olarak, eğer bütün bileşenler aynı $p(t)$ güvenilirliğine sahip ise n boyutlu bir seri sistemin güvenilirliği,

$$p_{s_1}(t) = p(t)^n \quad (4.8)$$

olur. Örnek olarak, $n = 10$ ve $p(t) = 0.995$ ise, sistemin güvenilirliği,

$$p_{s_1}(t) = 0.995^{10} \approx 0.951$$

olur. Seri bir sisteminin güvenilirliğinin, herhangi bir bileşeninin güvenilirliğinden daha düşük olduğu bu örnek yardımıyla da görülmektedir.

Uyarı. Bir seri sistemin güvenilirliği yapı fonksiyonu kullanılmadan da belirlenebilir. i bileşeninin t anında çalışır durumda olması olayı $E_i(t)$ olmak üzere bu olayın gerçekleşme olasılığı $Pr(E_i(t)) = p_i(t)$ 'dir. Bir seri sistem ancak ve ancak bütün bileşenler çalışırken çalışır durumda olacağından ve bileşenler bağımsız olduğundan, seri yapının güvenilirliği,

$$\begin{aligned} h_1(p(t)) &= Pr(E_1(t) \cap E_2(t) \cap \dots \cap E_n(t)) \\ &= Pr(E_1(t)) \cdot Pr(E_2(t)) \dots Pr(E_n(t)) = \prod_{i=1}^n p_i(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

olur. (4.9)'un (4.7)'ye eşit olduğu kolayca görülebilir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.1.2. Paralel Sistemlerin Güvenilirliği

n boyutlu bir paralel sistemin yapı fonksiyonu

$$\phi(X(t)) = \prod_{i=1}^n X_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i(t)) \quad (4.10)$$

ile tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
h(p(t)) &= E(\phi(X(t))) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - E(X_i(t))) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i(t)) = \prod_{i=1}^n p_i(t)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.2. Üç bağımsız bileşenli bir paralel sistemin t anında bileşenlerin güvenilirliği; $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.97$, $p_3 = 0.94$ olmak üzere (4.11)'e göre, t anındaki sistem güvenilirliği,

$$p_{S_2} = h(p) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.05 \cdot 0.03 \cdot 0.06 \approx 0.99991$$

olur. Özel olarak, bütün bileşenler aynı $p(t)$ güvenilirliğine sahip ise n boyutlu bir paralel sistemin güvenilirliği,

$$p_{S_2}(t) = 1 - (1 - p(t))^n \tag{4.12}$$

şeklinde olur (Hoyland, A. ve M. Rausand M, 2002).

Uyarı. Seri sistemde olduğu gibi, paralel yapının güvenilirliği de, yapı fonksiyonu kullanılmadan da belirlenebilir. $E_i^*(t)$, i bileşeninin t anında arızalı olması olayı olsun. Bu olayın olasılığı,

$$Pr(E_i^*(t)) = 1 - p_i(t)$$

şeklinde tanımlanır. Paralel sistemin arızalanması için, bütün bileşenlerin arızalı durumda olması gerektiğinden ve bileşenleri bağımsız olduğundan,

$$\begin{aligned}
1 - h(p(t)) &= Pr(E_1^*(t) \cap E_2^*(t) \cap \dots \cap E_n^*(t)) \\
&= Pr(E_1^*(t)) \cdot Pr(E_2^*(t)) \dots Pr(E_n^*(t)) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i(t))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.11) ile uyumlu olarak,

$$h(p(t)) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i(t)) \quad (4.14)$$

dir. Bu yaklaşım, paralel ve seri sistemler için uygundur. Fakat daha karmaşık sistemler için uygulanması zordur. Böyle durumlarda, bu yaklaşım yerine yapı fonksiyonunu kullanmak daha uygundur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.1.3. n'den k Çıkışlı Sistemlerin Güvenilirliği

n'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik fonksiyonu

$$\phi(X(t)) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i(t) \geq k \text{ ise} \\ 0, & \sum_{i=1}^n X_i(t) < k \text{ ise} \end{cases} \quad (4.15)$$

ile tanımlanır.

Bütün n bileşenlerinin $p_i(t) = p(t)$ aynı güvenilirliğe sahip ise, bir n'den k çıkışlı sistem için, ayrık bileşenlerin hataları bağımsız olaylar olarak varsayıldığından, verilen bir t anında, $Y(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$ binom dağılımlı olur. Yani $i = 1, 2, \dots, n$ için $(n, p(t))$ parametrelili

$$\Pr(Y(t) = y) = \binom{n}{y} p(t)^y (1 - p(t))^{n-y}, y = 0, 1, \dots, n \text{ için}$$

binom dağılımına uyar.

Bu nedenle, eş güvenilirlikli bileşenlerden oluşan n'den k çıkışlı sistemin güvenilirliği,

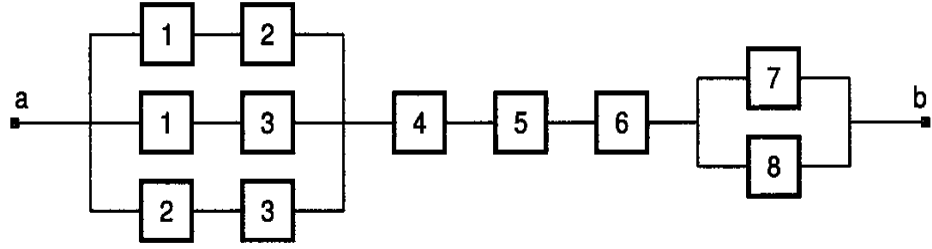
$$p_s(t) = \Pr(Y(t) \geq k) = \sum_{y=k}^n \binom{n}{y} p(t)^y (1 - p(t))^{n-y} \quad (4.16)$$

olur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Örnek 4.3. Aynı tipte dört bağımsız bileşeni olan 4’den 2 çıkışlı bir sistemde belirli bir t anında bir bileşenin güvenilirliği $p = 0.97$ olsun. (4.16)’ya göre, t anındaki sistem güvenilirliği

$$p_{S_3} = h(p) = \binom{4}{2} 0,97^2 0,03^2 + \binom{4}{3} 0,97^3 0,03 + \binom{4}{4} 0,97^4 \approx 0,99989$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 4.1. Gaz kaçağı için kullanılan otomatik bir alarm sisteminin güvenilirlik blok diyagramı
(Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Örnek 4.4. Şekil 4.1’de gaz kaçağı için kullanılan, basitleştirilmiş bir otomatik alarm sisteminin güvenilirlik blok diyagramı gösterilmiştir. Gaz kaçağı durumunda, a ve b arasındaki bağlantı sağlanacak ve böylece alarm zillerinden en az birisi çalmaya başlayacaktır. Sistemin 3’den 2 çıkışlı bir seçim ünitesine bağlı olan üç bağımsız gaz detektörü vardır. Yani, alarm çalmaya başlamadan önce, en az iki detektörünün gaz kaçağını göstermesi gerekir. 5 bileşeni güç kaynağı ünitesidir ve 6 bileşeni de röledir. Sistem belirli bir t anı için incelenecektir. Notasyonu sadeleştirmek adına zamana göre referans alınmayacaktır. Şekil 4.1’de gösterilen sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi_4(X) = (X_1X_2 + X_1X_3 - X_2X_3 - 2X_1X_2X_3)(X_4X_5X_6)(X_7 + X_8 - X_7X_8)$$

şeklindedir. i bileşeninin t_0 anındaki güvenilirliği p_i olmak üzere $i = 1, 2, \dots, 8$ için $X_1, X_2, \dots, X_8$ ikili değişkenleri bağımsız olduğuna göre t_0 anındaki sistem güvenilirliği,

$$p_{S_4} = (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3) \cdot p_4p_5p_6 \cdot (p_7 + p_8 - p_7p_8) \quad (4.17)$$

şeklindedir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.2. Kantitatif Hata Ağacı Analizi

n boyutlu hata ağacında n , hata ağacındaki farklı temel olayların sayısını ifade eder. n tane temel olay hesaplanmaktadır. Durum değişkenleri ise $i=1,2,\dots,n$ için

$$Y_i(t) = \begin{cases} 1, & i \text{ temel olayı } t \text{ anında oluşursa} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$, yapı için t anındaki durum vektörlerini ifade eder. Bir hata ağacının kantitatif analizinin amacı genelde esas olayların (sistem hatası) olasılığını belirlemektir.

t anındaki esas olayın durumu, $\psi(Y(t))$ ikili değişkeniyle açıklanabilir. Bu değişken

$$\psi(Y(t)) = \begin{cases} 1, & \text{esas olay } t \text{ anında oluşursa} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. n tane temel olayın durumu ve esas olayların oluşup oluşmadığı bilindiğine göre,

$$\psi(Y(t)) = \psi(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)) \quad (4.18)$$

fonksiyonu yazılabilir. $\psi(Y(t))$ fonksiyonuna hata ağacının yapı fonksiyonu denir. $q_i(t)$, i temel olayının t anında oluşma olasılığı olmak üzere $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\Pr(Y_i(t) = 1) = E(Y_i(t)) = q_i(t), \quad (4.19)$$

eşitliği yazılabilir. Burada olay, sistemin t anındaki çalışma durumudur. Olayın oluşması ise duruma göre çalışma ya da çalışmamadır.

Eğer i temel olayı sistemdeki i bileşenin hatalı durumda olması olayı ise

$$\Pr(Y_i(t) = 1) = q_i(t) = 1 - p_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.20)$$

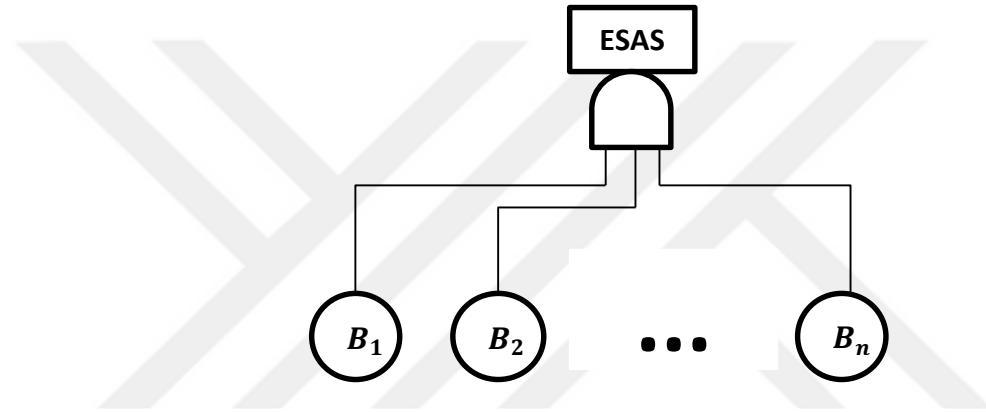
eşitliği yazılabilir. Burada $p_i(t)$, i bileşenin t anında hala çalışır vaziyette olması olasılığıdır. Bu yüzden $q_i(t)$, i bileşenin t anındaki güvenilirliği, benzer şekilde,

$Q_0(t)$ de t anındaki sistemin güvenilirmezliği olarak adlandırılır. Sistem güvenilirmezliği olan $Q(t)$,

$$Q(t) = 1 - h(p(t)) = 1 - h[1 - q_1(t), 1 - q_2(t), \dots, 1 - q_n(t)] \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte $p_i(t)$ ve $h(p(t))$, (4.3) ve (4.5) de tanımlanmıştır ($i = 1, 2, \dots, n$). Burada dikkat edilirse, $Q(t)$ sadece $q_i(t)$ 'nin bir fonksiyonudur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.2.1. Tek VE Kapılı Hata Ağacı



Şekil 4.2. Tek VE kapılı bir hata ağacı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Şekil 4.2’de tek VE kapılı bir hata ağacı gösterilmiştir. Burada şekilden de görüleceği gibi, esas olay ancak ve ancak $B_1, B_2, \dots, B_n$ temel olaylarının tamamının eş zamanlı olarak oluşmasıyla meydana gelebilir. Bu hata ağacının yapı fonksiyonu,

$$\psi(Y(t)) = Y_1(t).Y_2(t) \dots Y_n(t) = \prod_{i=1}^n Y_i(t) \quad (4.23)$$

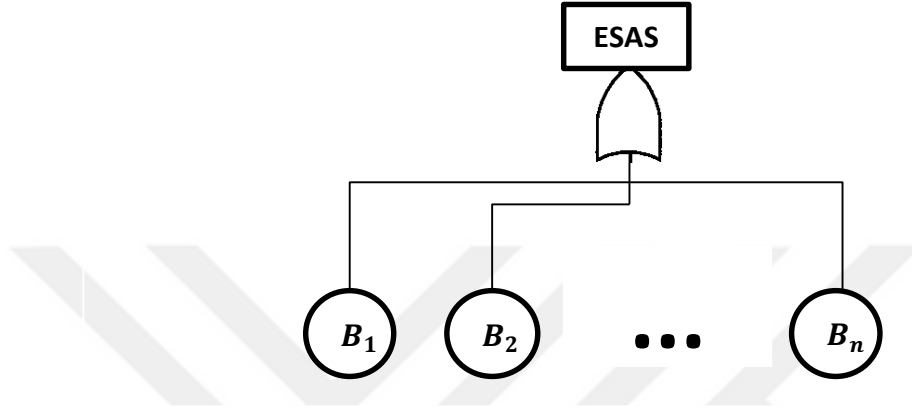
şeklinde ifade edilir. Temel olayların bağımsız olduğu varsayıldığından, sistemin güvenilirmezliği,

$$\begin{aligned} Q(t) &= E(\psi(Y(t))) = E(Y_1(t).Y_2(t) \dots Y_n(t)) \\ &= E(Y_1(t)).E(Y_2(t)) \dots E(Y_n(t)) \end{aligned}$$

$$= q_1(t) \cdot q_2(t) \dots q_n(t) = \prod_{i=1}^n q_i(t) \quad (4.24)$$

şeklindedir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.2.2. Tek VEYA Kapılı Hata Ağacı



Şekil 4.3. Tek VEYA kapılı bir hata ağacı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Şekil 4.3’de tek VEYA kapılı bir hata ağacı gösterilmiştir. Burada da esas olay ancak ve ancak $B_1, B_2, \dots, B_n$ temel olaylarından en az birisinin oluşmasıyla meydana gelir. Bu hata ağacının yapı fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \psi(Y(t)) &= Y_1(t) \sqcup Y_2(t) \sqcup \dots \sqcup Y_n(t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - Y_i(t)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlanır. Temel olayların bağımsız olduğu varsayıldığından, sistemin güvenilirliği,

$$\begin{aligned} Q(t) &= E(\psi(Y(t))) = 1 - \prod_{i=1}^n E(1 - Y_i(t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - E(Y_i(t))) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - q_i(t)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

şeklinde elde edilebilir.

4.3. Kesin Sistem Güvenilirliği

Bu bölümde, n tane bileşenin bağımsız olduğu durumlarda, verilen bir t_0 anında kesin sistem güvenilirliğini hesaplamak için kullanılan bazı farklı yöntemlerden bahsedilmiştir. Notasyonu basitleştirmek için t_0 anındaki j . bileşenin güvenilirliği $p_j(t_0)$ yerine p_j kullanılmıştır. ($j = 1, 2, \dots, n$) (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.3.1. Yapı Fonksiyonu Kullanarak Hesaplama

Kesin sistem güvenilirliğini hesaplamak için kullanılan en basit yöntem Örnek 4.4’de gösterilen yöntemdir. Sistemin yapı fonksiyonu kurulmuş ve X_i ’lerin kuvvetleri silinmiştir ($i = 1, 2, \dots, n$). Böylece kesin sistem güvenilirliği, X_i ’lerin yerine p_i ’ler konularak elde edilmiştir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.3.2. Minimal Kesen veya Yol Kümesine Dayalı Hesaplama

Tüm minimal kesen kümeleri $K_1, K_2, \dots, K_k$ ve/veya minimal yol kümeleri $P_1, P_2, \dots, P_p$ ’ler belirlendiğinde, yapı fonksiyonu

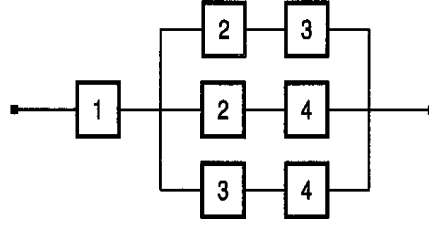
$$\phi(X) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} X_i \quad (4.27)$$

veya

$$\phi(X) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} X_i \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ’lerin bağımsız olduğu varsayıldığından, sistem güvenilirliği, yapı fonksiyonundaki X_i ’lerin yerine p_i ’ler konularak elde edilir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 4.4. Örnek güvenilirlik blok diyagramı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Örnek 4.5. Şekil 4.4’de grafiği verilen yapının minimal yol kümeleri $P_1 = \{1,2,3\}$, $P_2 = \{1,2,4\}$, $P_3 = \{1,3,4\}$ ’dir.

Burada, durum değişkenleri (4.28)’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \phi_5(X) &= \prod_{j=1}^3 \prod_{i \in P_j} X_i = X_1 X_2 X_3 \sqcup X_1 X_2 X_4 \sqcup X_1 X_3 X_4 \\
 &= 1 - (1 - X_1 X_2 X_3)(1 - X_1 X_2 X_4)(1 - X_1 X_3 X_4) \\
 &= X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + X_1 X_3 X_4 - X_1 X_2 X_3 X_4 - X_1 X_2 X_3 X_4 - X_1 X_2 X_3 X_4 - X_1 X_2 X_3 X_4 \\
 &= X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + X_1 X_3 X_4 - 2X_1 X_2 X_3 X_4
 \end{aligned}$$

dir (Tüm X_i ’ler ikili olduğundan $i = 1,2,3,4$ için, $X_i^k = X_i$ ’dir). Bileşenler bağımsız olduğundan sistem güvenilirliği, $i=1,2,3,4$ için X_i ’ler yerine p_i ’ler yazılarak;

$$h(p) = p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_3 p_4 - 2p_1 p_2 p_3 p_4$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifadede $i=1,2,3,4$ için p_i yerine $p_i(t_0)$ yazarak t_0 anındaki kesin sistem güvenilirliği elde edilebilir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.3.3. Dahil Etme-Çıkarma Prensibi

Bir sistemin n tane bağımsız bileşeni ve $K_1, K_2, \dots, K_k$ gibi k tane minimal kesen kümesi olsun. E_j , minimal kesen kümesi K_j ’nin bileşenlerinin tamamının arızalanmış olması olayını gösterebilir. E_j olayı, j . minimal kesen paralel yapının t anında arızalanması olayıdır. Temel olaylar da bağımsız olduklarına göre

$$\Pr(E_j) = \check{Q}_j = \prod_{i \in K_j} q_i \quad (4.29)$$

eşitliği yazılabilir. (4.29)'da $i=1,2,\dots,n$ için q_i , i bileşeninin t_0 anındaki güvenilirliğini göstermektedir. Bu sistemin arızalanması için, minimal kesen paralel yapılarından en az birisinin arızalanması yeterli olduğu için, sistem güvenilirliği

$$Q_0 = \Pr\left(\bigcup_{j=1}^k E_j\right) \quad (4.30)$$

şeklinde hesaplanabilir. Genel olarak, E_j ayrık olayları, kendi içinde ayrık değildir. Bu yüzden, $\Pr(\bigcup_{j=1}^k E_j)$ olasılığı olasılık teorisindeki genel toplam teoremi yardımıyla belirlenir.

$$Q_0 = \sum_{j=1}^k \Pr(E_j) - \sum_{i < j} \Pr(E_i \cap E_j) + \dots + (-1)^{j+1} \Pr(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) \quad (4.31)$$

İşlemi kolaylaştırmak adına sırasıyla,

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{j=1}^k \Pr(E_j) \\ W_2 &= \sum_{i < j} \Pr(E_i \cap E_j) \\ &\vdots \\ W_k &= \Pr(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) \end{aligned}$$

eşitlikleri tanımlanırsa, (4.31) eşitliği

$$Q_0 = W_1 - W_2 + W_3 - \dots + (-1)^{k+1} W_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} W_j \quad (4.32)$$

Sistem güvenilirmezliği olan Q_0 'ı (4.31) yardımıyla hesaplamak, sistem basit olsa bile, hem zor hem de zaman alıcıdır. Bu yüzden, sistemin güvenilirmezliğini yaklaşım yoluyla tahmin etmek daha basit olacaktır.

Sistem güvenilirmezliği Q_0 'ı belirlemek için;

$$\begin{aligned} Q_0 &\leq W_1 \\ W_1 - W_2 &\leq Q_0 \\ Q_0 &\leq W_1 - W_2 + W_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklindeki, dahil etme-çıkarma prensibine dayanan sonuçtan yararlanılır. Bu da genel olarak,

$$(-1)^{j-1}Q_0 \leq (-1)^{j-1} \sum_{v=1}^j (-1)^{v-1}W_v, j = 1, 2, \dots, k \text{ için} \quad (4.34)$$

şeklinde gösterilir. (4.34) eşitliği, ardışık alt ve üst sınırlar arasındaki farkların monoton azalan olduğu izlenimini verebilir. Ancak bu durum her zaman gerçekleşmemektedir.

(4.34) eşitliğinde; Q_0 'nın alt ve üst sınırları ardışık olarak tahmin edilir, sınırlar yeteri kadar yakın oluncaya dek (4.34)'de aşağıya kadar devam edilir. Sistem güvenilirmezliği Q_0 'nın t anındaki ilk üst sınırı, (4.34)'e göre,

$$Q_0(t) \leq W_1 = \sum_{j=1}^k \check{Q}_j(t) \quad (4.35)$$

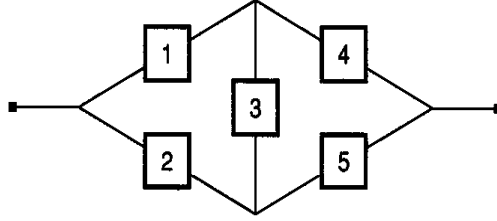
şeklinde yazılabilir. Aynı temel olaylar farklı kesen kümelerinde oluşabileceğine göre,

$$Q_0(t) \leq 1 - \prod_{j=1}^k (1 - \check{Q}_j(t)) \quad (4.36)$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak,

$$1 - \prod_{j=1}^k (1 - \check{Q}_j(t)) \leq \sum_{j=1}^k \check{Q}_j(t) \quad (4.37)$$

eşitsizliği tanımlanır. Bundan dolayı (4.36)'nın sağ tarafı, $Q_0(t)$ 'ye daha yakın olduğu için, (4.35)'den daha makul bir tahmin olacaktır (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).



Şekil 4.5. Bir köprü yapı (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

Örnek 4.6. Şekil 4.6'de gösterilen köprü yapının minimal kesen kümeleri, $K_1 = \{1,2\}$, $K_2 = \{1,3,5\}$, $K_3 = \{2,3,4\}$, $K_4 = \{4,5\}$ 'dir. (4.32)'ye göre Q_1 'in kesin değeri

$$Q_1 = W_1 - W_2 + W_3 - W_4$$

dür. (4.31)'e göre

$$W_1 = \sum_{j=1}^4 \Pr(E_j) = q_1q_2 + q_1q_3q_5 + q_2q_3q_4 + q_4q_5, \quad (4.38)$$

$$W_2 = q_1q_2q_4q_5 + q_1q_2q_3q_5 + q_1q_2q_3q_4 + q_1q_3q_4q_5 + q_2q_3q_4q_5 + q_1q_2q_3q_4q_5, \quad (4.39)$$

$$W_3 = 4q_1q_2q_3q_4q_5 \text{ ve} \quad (4.40)$$

$$W_4 = q_1q_2q_3q_4q_5 \quad (4.41)$$

elde edilir. Şekil 4.5'de gösterilen köprü yapının bütün bileşenlerinin belirli bir t_0 anındaki güvenilirlikleri $q_i = 0,05$ olsun. Dolayısıyla, $W_1 = 5250.10^{-6}$, $W_2 = 31,56.10^{-6}$, $W_3 = 1,25.10^{-6}$ ve $W_4 = 0,31.10^{-6}$ 'dır. Bu bulunan değerler (4.34) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$Q_1 \leq W_1 \approx 5250.10^{-6} = \%0,5250$$

$$Q_1 \geq W_1 - W_2 \approx 5250.10^{-6} - 31,56.10^{-6} = 5218,44.10^{-6} = \%0,5218$$

elde edilir. Yukarıdaki iki eşitsizlik birleştirilirse

$$0,5218 \leq Q_o \leq 0,5250$$

bulunur. Çoğu uygulama için bu tahmin yeterli olacaktır. Ancak yeterli olmadığı durumlarda bir sonraki hesaplamayla devam edilmesi gerekir.

$$Q_1 \geq W_1 - W_2 + W_3 \approx 5219,69.10^{-6} = 0,5220$$

Bu durumda Q_1 'in sınırları

$$0,5218 \leq Q_1 \leq 0,5220$$

dır. Kesin değer ise,

$$Q_1 = W_1 - W_2 + W_3 - W_4 = 5219,38.10^{-6} \approx 0,5219$$

olarak hesaplanır. Güvenilirlik ve hata ağacı analizi için kullanılan birçok program dahil etme-çıkarma prensibine göre çalışmaktadır.

Dahil etme-çıkarma prensibi $P_1, P_2, \dots, P_p$ minimal yol kümelerine de uygulanabilir. $j = 1, 2, \dots, p$ için F_j, P_j minimal yol kümelerindeki bileşenlerin çalışması olayı olmak üzere sistem güvenilirliği $p_s = 1 - Q$

$$p_s = \Pr\left(\bigcup_{j=1}^p F_j\right) \quad (4.42)$$

ve buradan

$$\Pr(F_j) = \prod_{i \in P_j} p_i \quad (4.43)$$

eşitliği elde edilir. Burada p_i, i bileşeninin güvenilirliğidir ($j = 1, 2, \dots, p$). Sistem güvenilirliği p_s 'nin ardışık alt ve üst sınırları (4.30)'da bahsedilen şekilde de elde edilebilir (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

4.4. Artıklık

Bazı sistemlerde, herhangi bir parça (bileşen, alt sistem) sistemin çalışabilmesi için diğerlerinden daha büyük bir öneme sahip olabilir. Mesela, bu parça sistemin geri kalanıyla seri halinde çalışıyorsa, bu parçanın arızalanması sistemin de arızalanmasına sebep olabilir. Bu durumda daha yüksek bir sistem güvenilirliği elde etmek için iki farklı yol vardır. Bunlardan birincisi, sistemdeki bu tarz kritik bölgelerde güvenilirliği yüksek olan parçalar kullanmak, ikincisi de bu tarz bölgelere artık parça eklemektir. Genel olarak kullanılan üç farklı artıklık yöntemi vardır. Bunlardan ilki, aktif artıklıktır.

Önemli parçaların yerine paralel olarak çalışan iki ya da daha fazla parça eklenirse buna aktif artıklık denir. Böylece bu parçalar, başlangıçtan itibaren, ilk parça arızalanana kadar üzerlerindeki yükü paylaşırlar.

İkinci yöntem ise pasif artıklıktır. Pasif artıklıkta; yedek parçalar beklemede tutulur, çalışan parça arızalandığında bu yedek parçalardan birisi işleme dahil olur ve bu iş böylece devam eder. Bu şekilde yedek parçaların beklemede kalarak hiç yükleme yapılmadığı duruma (bu şekilde yedek parçaların arızalanma şansı yoktur) pasif artıklık denir. Bu şekilde bir bekleme safhası geçiren parçaya soğuk beklemede denir.

Üçüncü yöntem de kısmi yüklemeli artıklıktır. Bu yöntemde de; beklemede olan parçalar, bekleme safhasında zayıf bir yüke maruz kalırlar (bu yüzden bu safhada arızalanabilirler).

Pasif artıklık ve kısmi yüklemeli artıklıkta yedekte bekleyen parçalar bulunur. Bu tarz sistemlerde yedekte bekleyen parçaları sisteme dahil eden bir anahtar bulunması gerekir. Sistemin güvenilirliği hesaplanırken bu anahtarın güvenilirliği de işleme dahil edilir. Çünkü bu anahtarın arızalanması doğrudan sistem arızasına sebep olmaktadır.

5. BAĞIMSIZ BİLEŞENLİ TAMİR EDİLEMEZ SİSTEMLER

Tamir edilemez sistemlerde, sistem görevini tamamlamadığı müddetçe tamir edilmesi mümkün olmaz. Bu durumda sistemin güvenilirliği, zamana bağlı azalan bir fonksiyondur. Ayrıca, tamir edilemez bir bileşenin güvenilirliği ile güvenilirlik fonksiyonu eşdeğerdir (Kuo, W. ve M. J. Zuo, 2003).

5.1. Tamir Edilemez Seri Sistemler

(4.7)'ye göre, bağımsız bileşenlerin oluşturduğu tamir edilemez bir seri sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (5.1)$$

şeklindedir. Ayrıca, (2.9)'a göre,

$$R_i(t) = e^{-\int_0^t z_i(u) du} \quad (5.2)$$

denklemini geçerli olduğundan (5.2) eşitliğinde $z_i(t)$, i bileşenin t anındaki hata oranı fonksiyonunu göstermektedir. (5.1) ile (5.2) birleştirilirse sistemin güvenilirliği,

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\int_0^t z_i(u) du} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^n z_i(u) du} \quad (5.3)$$

şeklindedir. Bağımsız bileşenli bir seri sistem hata oranı fonksiyonu $z_S(t)$, ayrıık bileşenlerin hata oranlarının toplamına eşittir. Yani,

$$z_S(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) \quad (5.4)$$

denklemini sağlanır ve bu seri sistemin ortalama hata süresi (MTTF) de

$$MTTF = \int_0^\infty R_{S_1}(t) dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^n z_i(u) du} dt \quad (5.5)$$

olur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Örnek 5.1. $i = 1, 2, \dots, n$ için sabit hata oranı λ_i olan n bağımsız bileşenli bir seri sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_{S_1}(t) = e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t} \quad (5.6)$$

şeklindedir. Ortalama hata oranı (MTTF) de

$$MTTF_1 = \int_0^{\infty} e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t} dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (5.7)$$

şeklinde olur.

3 bileşenli bir seri sistemin bileşenlerden birisi azalan, birisi artan ve birisi de sabit hata oranına sahip olsun. Bu sistem seri olduğu için hata oranı da bu 3 bileşenin hata oranlarının toplamına eşit olur. Sonuç olarak bu seri sistemin hata oranının grafiği kuvvet eğrisi şeklinde olur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

5.2. Tamir Edilemez Paralel Sistemler

(4.11)'e göre, bağımsız bileşenli bir tamir edilemez paralel sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \quad (5.8)$$

olur. Ayrıca $i = 1, 2, \dots, n$ için sistemin bütün bileşenleri, $z_i(t) = \lambda_i$ gibi sabit bir hata oranına sahipse sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad (5.9)$$

olur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Örnek 5.2. Sabit hata oranı λ olan ve aynı tipte n tane bileşeni olan bir paralel sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_{S_2}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona binom formülü uygulanırsa

$$R_{S_2}(t) = 1 - \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (-e^{-\lambda t})^x = \sum_{x=1}^n \binom{n}{x} (-1)^{x+1} e^{-\lambda x t} \quad (5.11)$$

elde edilir. Ortalama hata süresi (MTTF) de

$$MTTF_2 = \int_0^{\infty} R_{S_2}(t) dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{x=1}^n \binom{n}{x} \frac{(-1)^{x+1}}{x} \quad (5.12)$$

olur.

Paralel bir sistemin hata oranı fonksiyonu $z_{S_2}(t) = \frac{R'_{S_2}(t)}{R_{S_2}(t)}$ eşitliği ile bulunur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

5.3. Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı Sistemler

Her birinin hata oranı λ sabiti olan, n tane, aynı tipte ve bağımsız bileşenli n'den k çıkışlı bir sistemin (4.16)'ya göre, güvenilirlik fonksiyonu

$$R_S(t) = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x}$$

şeklinde dir. Ayrıca, $i = 1, 2, \dots, n$ için $R_i(t)$ i bileşenin güvenilirlik fonksiyonu, $F_i(t)$ de i bileşenin dağılım fonksiyonu olmak üzere, sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$R_S(t) = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} R_i(t)^x F_i(t)^{n-x} \quad (5.13)$$

şeklinde de yazılabilir (Kuo, W. ve M. J. Zuo, 2003).

(2.12) 'ye göre ortalama hata zamanı;

$$MTTF = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x} dt \quad (5.14)$$

şeklindedir ve $v = e^{-\lambda t}$ eşitliği tanımlandığında da

$$\begin{aligned}
 MTTF &= \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{n-x} dv \\
 &= \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+1)} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} \frac{(x-1)! (n-x)!}{n!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{x=k}^n \frac{1}{x} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

olur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

Tablo 5.1. Bazı bağımsız ve eş bileşenli n’den k çıkışlı sistemlerin ortalama hata süreleri (MTTF)
(Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002)

k/n	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{3}{2\lambda}$	$\frac{11}{6\lambda}$	$\frac{25}{12\lambda}$	$\frac{137}{60\lambda}$
2	-	$\frac{1}{2\lambda}$	$\frac{5}{6\lambda}$	$\frac{13}{12\lambda}$	$\frac{77}{60\lambda}$
3	-	-	$\frac{1}{3\lambda}$	$\frac{7}{12\lambda}$	$\frac{47}{60\lambda}$
4	-	-	-	$\frac{1}{4\lambda}$	$\frac{9}{20\lambda}$
5	-	-	-	-	$\frac{1}{5\lambda}$

Bazı n’den k çıkışlı sistemlerin ortalama hata süreleri (MTTF), (5.15) eşitliği kullanılarak hesaplanmış ve Tablo 5.1’de gösterilmiştir.

Örnek 5.3. Bir 3’den 2 çıkışlı sistemin yapı fonksiyonu

$$\phi_6(t) = X_1(t)X_2(t) + X_1(t)X_3(t) + X_2(t)X_3(t) - 2X_1(t)X_2(t)X_3(t) \quad (5.16)$$

şeklindedir ve sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$R_{S_3}(t) = R_1(t)R_2(t) + R_1(t)R_3(t) + R_2(t)R_3(t) - 2R_1(t)R_2(t)R_3(t) \quad (5.17)$$

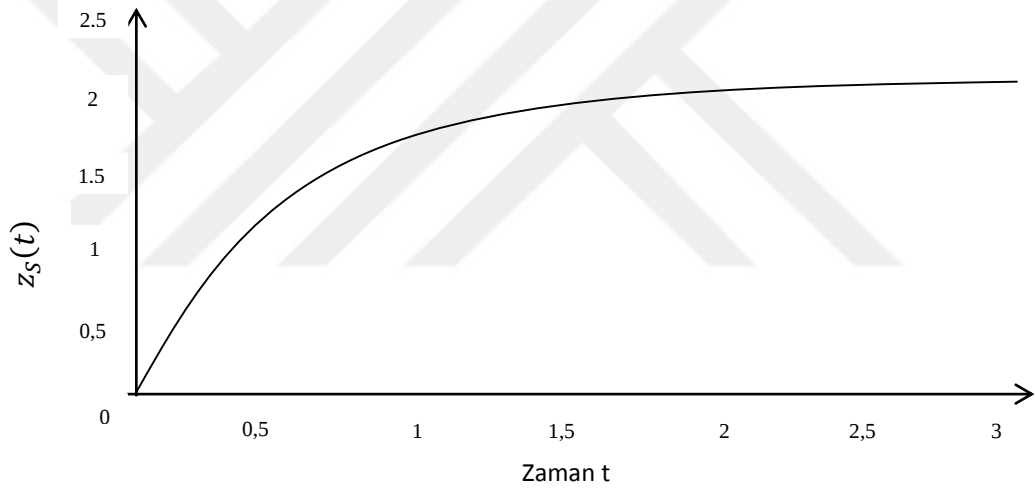
olur. Sistemin üç bileşenin de sabit hata oranına (λ) sahip olduğu durumda güvenilirlik fonksiyonu (2.9) yardımıyla,

$$R_{S_3}(t) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t} \quad (5.18)$$

şeklinde hesaplanır. Bu sistemin hata oranı fonksiyonu da

$$z_{S_3}(t) = \frac{R'_{S_3}(t)}{R_{S_3}(t)} = \frac{6\lambda(e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t})}{3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}} \quad (5.19)$$

olur.



Şekil 5.1: Bağımsız, aynı tipte ve sabit λ hata oranlı bileşenlerden oluşan 3’den 2 çıkışlı sistemin hata oranı fonksiyonu $z_{S_3}(t)$ ‘nin grafiği ($\lambda = 1$)

Son olarak, 3’den 2 çıkışlı bir sistemin ortalama hata süresi (MTTF),

$$MTTF_3 = \int_0^{\infty} R_S(t)dt = \frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = \frac{5}{6\lambda}$$

olur (Hoyland, A. ve M. Rausand, 2002).

5.4. Bağımsız Bileşenli ve Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı: G ve F Sistem

Tanım 5.1. (n'den k Çıkışlı: G Sistem) n tane bileşeni olan ve bu n tane bileşenden en az k tanesi ($n > k$) çalıştığında çalışan bir sisteme n'den k çıkışlı: G sistem denir (Kuo, W. ve M. J. Zuo, 2003).

Tanım 5.2. (n'den k Çıkışlı: F Sistem) n tane bileşeni olan ve bu n tane bileşenden en az k tanesi ($n > k$) arızalandığında arızalanan bir sisteme n'den k çıkışlı: F sistem denir (Kuo, W. ve M. J. Zuo, 2003).

Tanım 5.1 ve Tanım 5.2'ye göre, n'den k çıkışlı: G sistem ile n'den $(n - k + 1)$: F sistem eşdeğerdir. Örneğin, 5'den 2 çıkışlı bir G sistem, 5'den 4 çıkışlı bir F sistem ile eşdeğerdir. (Kuo, W. ve M. J. Zuo, 2003).

Tanım 5.3. (Dual Sistem) ϕ ve ϕ^D birer yapı ve $(1 - x) = (1 - x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere,

$$\phi^D(x) = 1 - \phi(1 - x) \text{ veya } \phi^D(1 - x) = 1 - \phi(x)$$

eşitliği sağlanıyor ise ϕ^D yapısına, ϕ yapısının duali denir.

Yani; aynı bileşen sayısına sahip iki sistemin, birbirine karşılık gelen bileşenlerinden birisi çalışırken diğeri arızalı ise, bu iki sistem birbirinin dualidir. Bu durumun sonucu olarak da sistemlerden birisi çalışır durumdayken diğeri arızalıdır.

Tanım 5.3'e göre, n'den k çıkışlı: G sistem ile n'den k çıkışlı: F sistem birbirinin dualidir. Ayrıca yukarıda bahsedilen eşdeğerlik kavramına göre; n'den k çıkışlı bir G sistem n'den $(n - k + 1)$ çıkışlı bir G sistemin, n'den k çıkışlı bir F sistem de n'den $(n - k + 1)$ çıkışlı bir F sistemin dualidir.

5.4.1. Sabit Hata Oranına Sahip, Aynı Tip Bileşenlerden Oluşan ve Tamir Edilemez n'den k Çıkışlı Sistemler

Sabit hata oranı λ olan, aynı tipte n tane bileşenden oluşan bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu (5.13) eşitliği kullanılarak elde edilir. Öncelikle 5'den 1 çıkışlı bir sistem, yani 5 boyutlu bir paralel sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
R_{S_4}(t) &= \sum_{x=1}^5 \binom{5}{x} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x} \\
&= 5e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^4 + 10e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^3 + 10e^{-3\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^2 \\
&\quad + 5e^{-4\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) + e^{-5\lambda t}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

şeklinde. Sistemin güvenilirlik fonksiyonu, $\lambda = 0,5$ için

$$\begin{aligned}
R_{S_4}(t) &= 5e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^4 + 10e^{-t} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^3 + 10e^{-\frac{3t}{2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 \\
&\quad + 5e^{-2t} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + e^{-\frac{5t}{2}}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklinde, $\lambda = 1$ için

$$\begin{aligned}
R_{S_4}(t) &= 5e^{-t} (1 - e^{-t})^4 + 10e^{-2t} (1 - e^{-t})^3 + 10e^{-3t} (1 - e^{-t})^2 \\
&\quad + 5e^{-4t} (1 - e^{-t}) + e^{-5t}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde, $\lambda = 2$ için

$$\begin{aligned}
R_{S_4}(t) &= 5e^{-2t} (1 - e^{-2t})^4 + 10e^{-4t} (1 - e^{-2t})^3 + 10e^{-6t} (1 - e^{-2t})^2 \\
&\quad + 5e^{-8t} (1 - e^{-2t}) + e^{-10t}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

şeklinde hesaplanır.

5'den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
R_{S_5}(t) &= \sum_{x=2}^5 \binom{5}{x} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x} \\
&= 10e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^3 + 10e^{-3\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^2 + 5e^{-4\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) + e^{-5\lambda t}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

şeklinde. Sistemin güvenilirlik fonksiyonu, $\lambda = 0,5$ için

$$R_{S_5}(t) = 10e^{-t} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^3 + 10e^{-\frac{3t}{2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 + 5e^{-2t} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + e^{-\frac{5t}{2}} \tag{5.25}$$

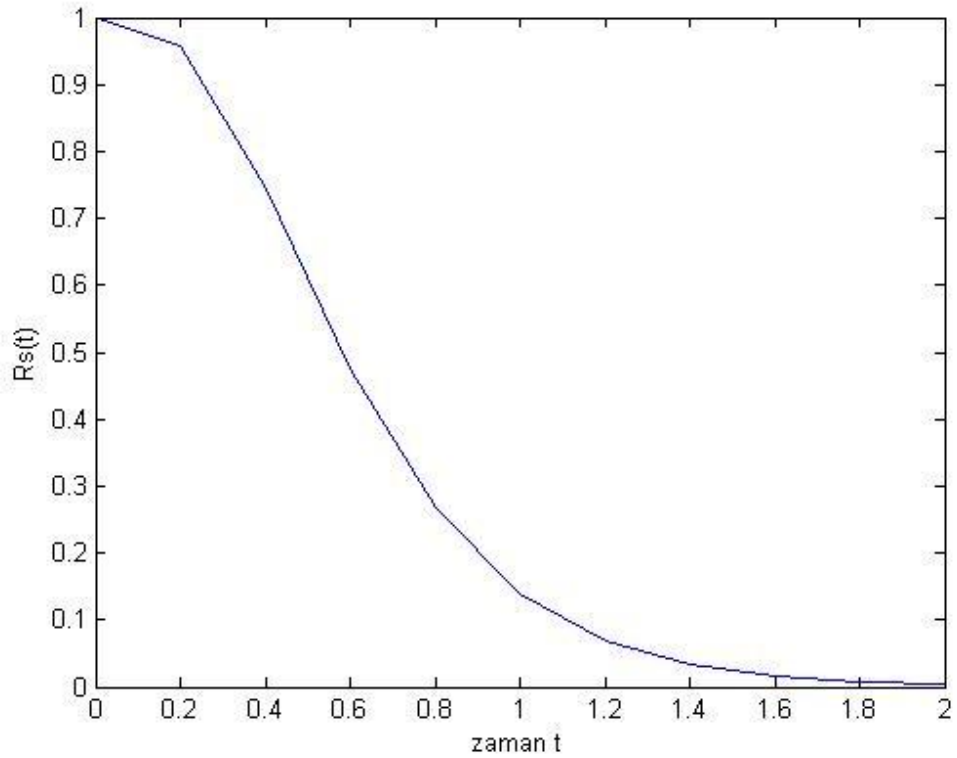
şeklinde, $\lambda = 1$ için

$$R_{S_5}(t) = 10e^{-2t}(1 - e^{-t})^3 + 10e^{-3t}(1 - e^{-t})^2 + 5e^{-4t}(1 - e^{-t}) + e^{-5t} \quad (5.26)$$

şeklinde, $\lambda = 2$ için

$$R_{S_5}(t) = 10e^{-4t}(1 - e^{-2t})^3 + 10e^{-6t}(1 - e^{-2t})^2 + 5e^{-8t}(1 - e^{-2t}) + e^{-10t} \quad (5.27)$$

şeklinde hesaplanır.

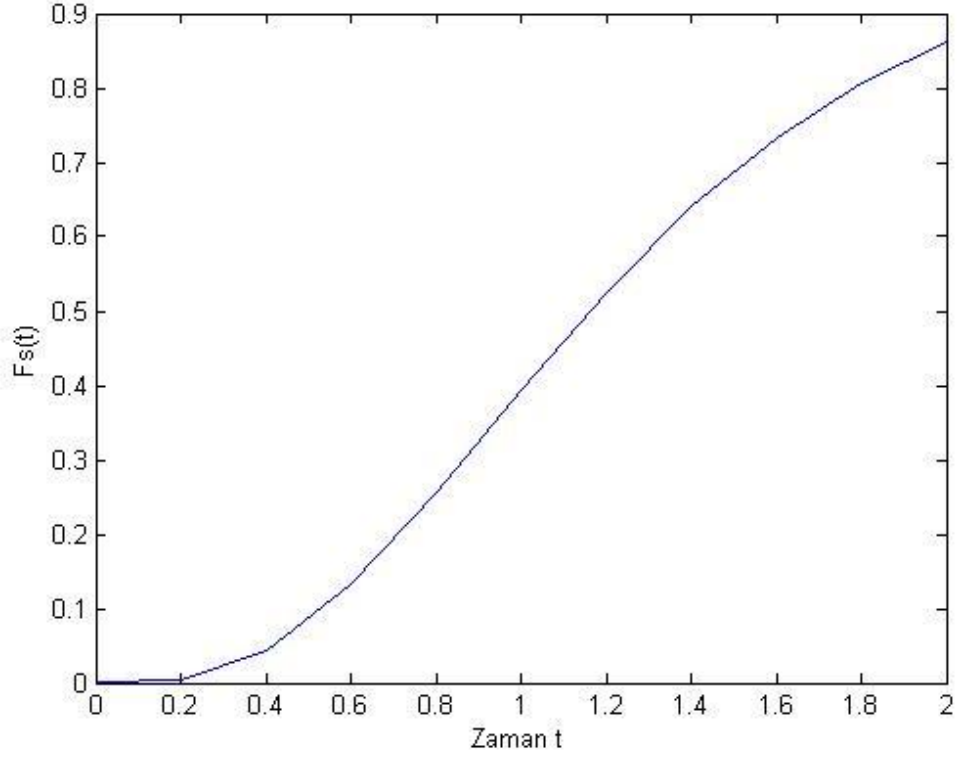


Şekil 5.2. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu ($\lambda = 1$)

Bu sistemin dağılım fonksiyonu $R_{S_5}(t) = 1 - F_{S_5}(t)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{S_5}(t) = & 10e^{-2\lambda t}(e^{-\lambda t} - 1)^3 - 10e^{-3\lambda t}(e^{-\lambda t} - 1)^2 \\ & + 5e^{-4\lambda t}(e^{-\lambda t} - 1) - e^{-5\lambda t} + 1 \end{aligned} \quad (5.28)$$

şeklinde,

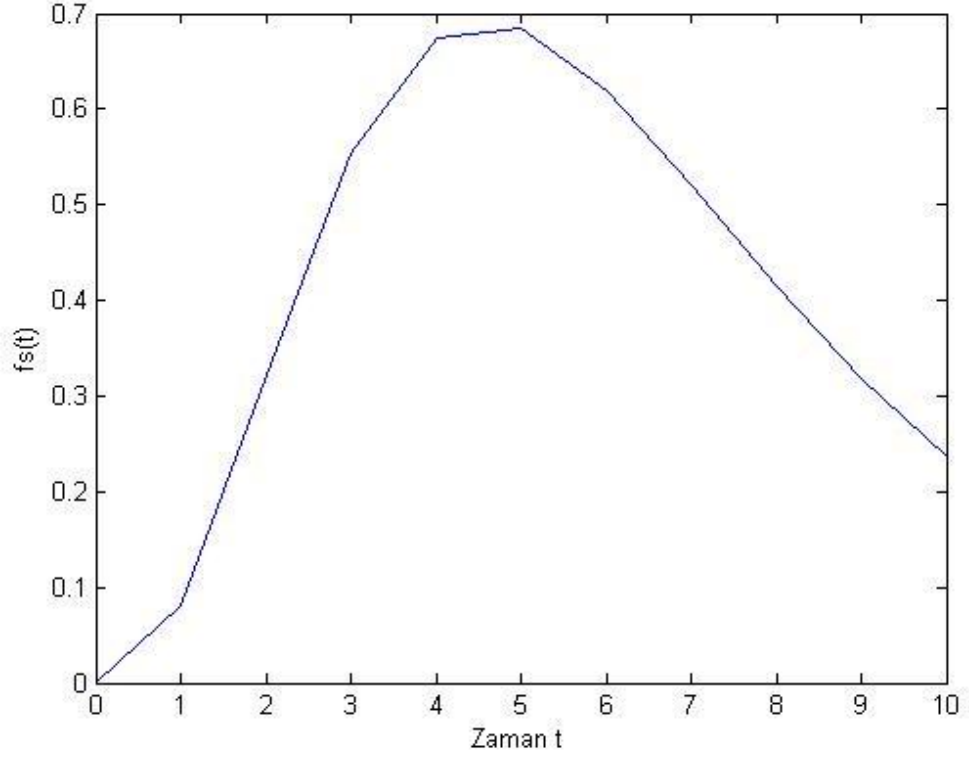


Şekil 5.3. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin dağılım fonksiyonu ($\lambda=1$)

olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{S_5}(t) = -R'_{S_5}(t)$ eşitliği kullanılarak

$$f_{S_5}(t) = -20\lambda e^{-2\lambda t}(e^{-\lambda t} - 1)^3 \quad (5.29)$$

şeklinde,

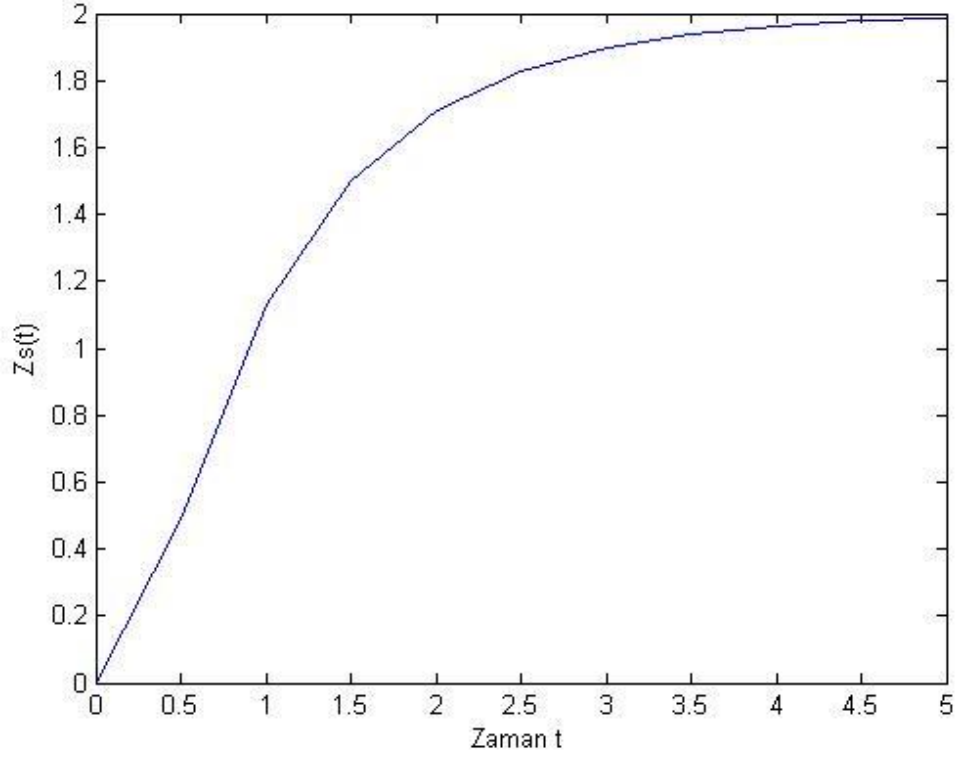


Şekil 5.4. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu ($\lambda=1$)

hata oranı fonksiyonu da $z_{S_5}(t) = \frac{f_{S_5}(t)}{R_{S_5}(t)}$ eşitliği ile

$$z_{S_5}(t) = \frac{-20\lambda e^{-2\lambda t}(e^{-\lambda t} - 1)^3}{10e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^3 + 10e^{-3\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^2 + 5e^{-4\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-5\lambda t}} \quad (5.30)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 5.5. Bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin hata oranı fonksiyonu ($\lambda=1$)

5’den 3 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_{S_6}(t) = \sum_{x=3}^5 \binom{5}{x} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x}$$

$$10e^{-3\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^2 + 5e^{-4\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) + e^{-5\lambda t} \quad (5.31)$$

şeklindedir. Sistemin güvenilirlik fonksiyonu, $\lambda = 0,5$ için

$$R_{S_6}(t) = 10e^{-\frac{3t}{2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 + 5e^{-2t} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + e^{-\frac{5t}{2}} \quad (5.32)$$

şeklinde, $\lambda = 1$ için

$$R_{S_6}(t) = 10e^{-3t} (1 - e^{-t})^2 + 5e^{-4t} (1 - e^{-t}) + e^{-5t} \quad (5.33)$$

şeklinde, $\lambda = 2$ için

$$R_{S_6}(t) = 10e^{-6t}(1 - e^{-2t})^2 + 5e^{-8t}(1 - e^{-2t}) + e^{-10t} \quad (5.34)$$

şeklinde hesaplanır.

5'den 4 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_{S_8}(t) = \sum_{x=4}^5 \binom{5}{x} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x} = 5e^{-4\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-5\lambda t} \quad (5.35)$$

şeklindedir. Sistemin güvenilirlik fonksiyonu, $\lambda = 0,5$ için

$$R_{S_7}(t) = 5e^{-2t} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + e^{-\frac{5t}{2}} \quad (5.36)$$

şeklinde, $\lambda = 1$ için

$$R_{S_7}(t) = 5e^{-4t}(1 - e^{-t}) + e^{-5t} \quad (5.37)$$

şeklinde, $\lambda = 2$ için

$$R_{S_7}(t) = 5e^{-8t}(1 - e^{-2t}) + e^{-10t} \quad (5.38)$$

şeklinde hesaplanır.

5'den 5 çıkışlı bir sistem, yani beş boyutlu bir seri yapının güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_{S_8}(t) = \sum_{x=4}^5 \binom{5}{x} e^{-\lambda t x} (1 - e^{-\lambda t})^{n-x} = e^{-5\lambda t} \quad (5.39)$$

şeklindedir. Sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$R_{S_8}(t) = e^{-\frac{5t}{2}} \quad (5.40)$$

şeklinde, $\lambda = 1$ için

$$R_{S_8}(t) = e^{-5t} \quad (5.37)$$

şeklinde, $\lambda = 2$ için

$$R_{S_9}(t) = e^{-10t} \quad (5.38)$$

şeklinde hesaplanır.

Tablo 5.2. Bileşenlerin sabit hata oranı $\lambda = 0,5$ ve $n = 5$ olmak üzere bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$t = 0,1$	1.000		0.998	0.978	0.778
$t = 0,2$	1.000	0.999	0.992	0.925	0.606
$t = 0,3$	0.999	0.998	0.978	0.854	0.472
$t = 0,4$	0.999	0.995	0.955	0.775	0.367
$t = 0,5$	0.999	0.990	0.924	0.693	0.286
$t = 0,6$	0.998	0.982	0.886	0.613	0.223
$t = 0,7$	0.997	0.971	0.843	0.537	0.173
$t = 0,8$	0.996	0.956	0.795	0.468	0.135
$t = 0,9$	0.993	0.938	0.745	0.404	0.105
$t = 1$	0.990	0.917	0.693	0.348	0.082

Tablo 5.3. Bileşenlerin sabit hata oranı $\lambda = 1$ ve $n = 5$ olmak üzere bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri

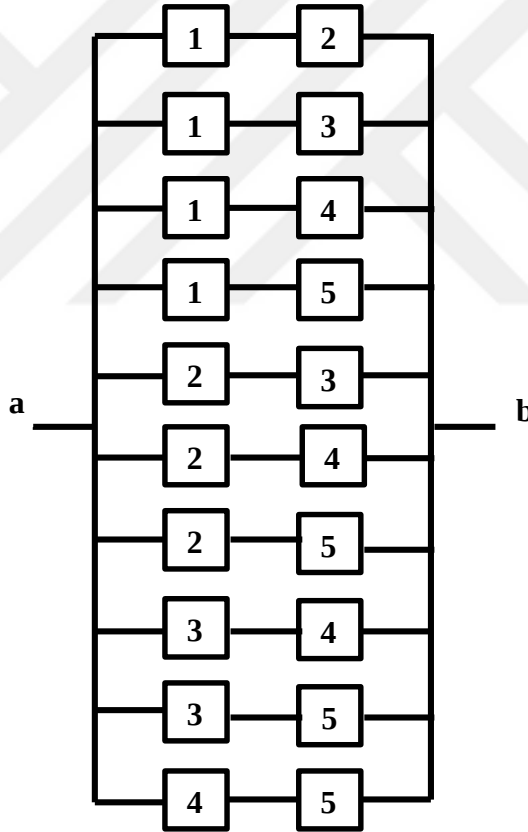
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$t = 0,1$	1.000	0.999	0.992	0.925	0.606
$t = 0,2$	0.999	0.995	0.955	0.775	0.367
$t = 0,3$	0.998	0.982	0.886	0.613	0.223
$t = 0,4$	0.996	0.956	0.795	0.468	0.135
$t = 0,5$	0.990	0.917	0.693	0.348	0.082
$t = 0,6$	0.981	0.867	0.590	0.254	0.049
$t = 0,7$	0.967	0.808	0.493	0.183	0.030
$t = 0,8$	0.949	0.742	0.405	0.130	0.018
$t = 0,9$	0.926	0.674	0.328	0.092	0.011
$t = 1$	0.899	0.605	0.263	0.064	0.006

Tablo 5.4. Bileşenlerin sabit hata oranı $\lambda = 2$ ve $n = 5$ olmak üzere bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$t = 0,1$	0.999	0.995	0.955	0.775	0.367
$t = 0,2$	0.996	0.956	0.795	0.468	0.135
$t = 0,3$	0.981	0.867	0.590	0.254	0.049
$t = 0,4$	0.949	0.742	0.405	0.130	0.018
$t = 0,5$	0.899	0.605	0.263	0.064	0.006
$t = 0,6$	0.833	0.474	0.164	0.031	0.002
$t = 0,7$	0.757	0.360	0.100	0.014	0.000
$t = 0,8$	0.676	0.266	0.059	0.007	0.000
$t = 0,9$	0.594	0.193	0.034	0.003	0.000
$t = 1$	0.516	0.138	0.020	0.001	0.000

Tablo 5.2, 5.3 ve 5.4’de bağımsız, aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan n ’den k çıkışlı sistemlerin belirli hata oranları için güvenilirlik değerleri gösterilmiştir. Bu tablolardan görülmektedir ki, sistemin çalışması için gereken bileşen sayısı ve bileşenlerin hata oranı arttıkça sistemin güvenilirliği düşmektedir. Ayrıca Şekil 5.2, Şekil 5.3, Şekil 5.4 ve Şekil 5.5 de bağımsız ve aynı tipte sabit hata oranına sahip 5’den 2 çıkışlı bir sistemin sırasıyla; güvenilirlik fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve hata oranı fonksiyonu gösterilmiştir.

5.4.2. Sabit Hata Oranına Sahip Farklı Bileşenlerden Oluşan Tamir Edilemez n ’den k Çıkışlı Sistemler



Şekil 5.6. Bağımsız bileşenli 5’den 2 çıkışlı bir G sistemin güvenilirlik blok diyagramı

Bu bölümde 5 boyutlu, bağımsız bileşenli, tamir edilemez ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan n ’den k çıkışlı sistemler için inceleme yapılacaktır.

5’den 1 çıkışlı, yani beş boyutlu bir paralel sistemin yapı fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\phi_7(X) &= X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup X_4 \sqcup X_5 \\
&= 1 - (1 - X_1)(1 - X_2)(1 - X_3)(1 - X_4)(1 - X_5) \\
&= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 - X_1X_2 - X_1X_3 - X_1X_4 - X_1X_5 - X_2X_3 - X_2X_4 \\
&\quad - X_2X_5 - X_3X_4 - X_3X_5 - X_4X_5 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_2X_5 + X_1X_3X_4 \\
&\quad + X_1X_3X_5 + X_1X_4X_5 + X_2X_3X_4 + X_2X_3X_5 + X_2X_4X_5 + X_3X_4X_5 \\
&\quad - X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_5 - X_1X_2X_4X_5 - X_1X_3X_4X_5 - X_2X_3X_4X_5 + \\
&\quad X_1X_2X_3X_4X_5
\end{aligned} \tag{5.39}$$

şeklindedir.

Tamir edilemez bir sistemde sistemin güvenilirlik fonksiyonu, (4.2) eşitliği yardımıyla, $i = 1,2,3,4,5$ için X_i durum fonksiyonunun yerine, $R_i(t)$ güvenilirlik fonksiyonu yazılarak elde edilir. Bu durumda yapı fonksiyonu verilen bu sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
R_{S_9}(t) &= R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) + R_4(t) + R_5(t) - R_1(t)R_2(t) - R_1(t)R_3(t) \\
&\quad - R_1(t)R_4(t) - R_1(t)R_5(t) - R_2(t)R_3(t) - R_2(t)R_4(t) - R_2(t)R_5(t) \\
&\quad - R_3(t)R_4(t) - R_3(t)R_5(t) - R_4(t)R_5(t) + R_1(t)R_2(t)R_3(t) \\
&\quad + R_1(t)R_2(t)R_4(t) + R_1(t)R_2(t)R_5(t) + R_1(t)R_3(t)R_4(t) \\
&\quad + R_1(t)R_3(t)R_5(t) + R_1(t)R_4(t)R_5(t) + R_2(t)R_3(t)R_4(t) \\
&\quad + R_2(t)R_3(t)R_5(t) + R_2(t)R_4(t)R_5(t) + R_3(t)R_4(t)R_5(t) \\
&\quad - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_5(t) \\
&\quad - R_1(t)R_2(t)R_4(t)R_5(t) - R_1(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) \\
&\quad - R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) \\
&\quad + R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

olur.

Bu sistemin bileşenlerinin her biri farklı bir sabit hata oranına sahiptir ve $i = 1,2,3,4,5$ olmak üzere λ_i , i bileşeninin sabit hata oranını göstermektedir ve (2.9) eşitliğine göre sistemin güvenilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
R_{S_9}(t) = & e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} \\
& - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} \\
& + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

şeklinde elde edilir.

Şekil 5.6'da 5'den 2 çıkışlı bir G sistemin güvenilirlik blok diyagramı gösterilmiştir. Bu sistemin minimal yol kümeleri; $P_1 = \{1,2\}$, $P_2 = \{1,3\}$, $P_3 = \{1,4\}$, $P_4 = \{1,5\}$, $P_5 = \{2,3\}$, $P_6 = \{2,4\}$, $P_7 = \{2,5\}$, $P_8 = \{3,4\}$, $P_9 = \{3,5\}$, $P_{10} = \{4,5\}$ 'dir. Benzer şekilde bu sistemin minimal kesen kümeleri; $K_1 = \{1,2,3,4\}$, $K_2 = \{1,2,3,5\}$, $K_3 = \{1,2,4,5\}$, $K_4 = \{1,3,4,5\}$, $K_5 = \{2,3,4,5\}$ 'dir. Şekil 5.6'da güvenilirlik blok diyagramı verilen 5'den 2 çıkışlı sistemin yapı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\phi_8(X) &= X_1 X_2 \sqcup X_1 X_3 \sqcup X_1 X_4 \sqcup X_1 X_5 \sqcup X_2 X_3 \sqcup X_2 X_4 \sqcup X_2 X_5 \sqcup X_3 X_4 \sqcup X_3 X_5 \sqcup X_4 X_5 \\
&= 1 - (1 - X_1 X_2)(1 - X_1 X_3)(1 - X_1 X_4)(1 - X_1 X_5)(1 - X_2 X_3)(1 - X_2 X_4) \\
&\quad (1 - X_2 X_5)(1 - X_3 X_4)(1 - X_3 X_5)(1 - X_4 X_5) \\
&= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_1 X_4 + X_1 X_5 + X_2 X_3 + X_2 X_4 + X_2 X_5 + X_3 X_4 + X_3 X_5 \\
&\quad + X_4 X_5 - 2X_1 X_2 X_3 - 2X_1 X_2 X_4 - 2X_1 X_2 X_5 - 2X_1 X_3 X_4 - 2X_1 X_3 X_5 \\
&\quad - 2X_1 X_4 X_5 - 2X_2 X_3 X_4 - 2X_2 X_3 X_5 - 2X_2 X_4 X_5 - 2X_3 X_4 X_5 + 3X_1 X_2 X_3 X_4 \\
&\quad + 3X_1 X_2 X_3 X_5 + 3X_1 X_2 X_4 X_5 + 3X_1 X_3 X_4 X_5 + 3X_2 X_3 X_4 X_5 \\
&\quad - 4X_1 X_2 X_3 X_4 X_5
\end{aligned} \tag{5.42}$$

şeklindedir. Sistemin güvenilirlik fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
R_{S_{11}}(t) = & R_1(t)R_2(t) + R_1(t)R_3(t) + R_1(t)R_4(t) + R_1(t)R_5(t) + R_2(t)R_3(t) \\
& + R_2(t)R_4(t) + R_2(t)R_5(t) + R_3(t)R_4(t) + R_3(t)R_5(t) + R_4(t)R_5(t) \\
& - 2R_1(t)R_2(t)R_3(t) - 2R_1(t)R_2(t)R_4(t) - 2R_1(t)R_2(t)R_5(t) \\
& - 2R_1(t)R_3(t)R_4(t) - 2R_1(t)R_3(t)R_5(t) - 2R_1(t)R_4(t)R_5(t) \\
& - 2R_2(t)R_3(t)R_4(t) - 2R_2(t)R_3(t)R_5(t) - 2R_2(t)R_4(t)R_5(t) \\
& - 2R_3(t)R_4(t)R_5(t) + 3R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) + 3R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_5(t) \\
& + 3R_1(t)R_2(t)R_4(t)R_5(t) + 3R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) \\
& + 3R_1(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) - 4R_1(t)R_2(t) + R_1R_3(t)R_4(t)R_5(t) \quad (5.43)
\end{aligned}$$

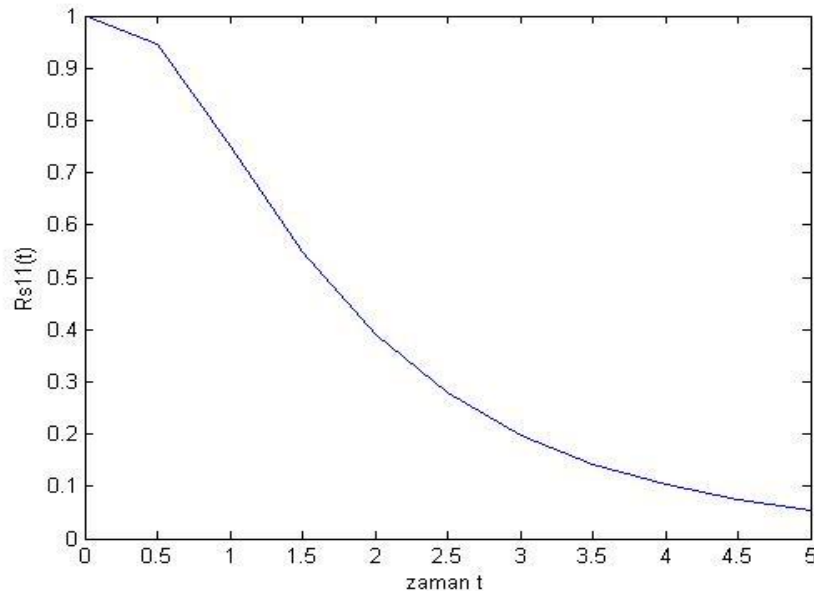
olur. Bileşenlerin hata oranları sabit olduğundan, (2.9)'a göre sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
R_{S_{11}}(t) = & e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} \\
& + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} - 2e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& - 2e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - 2e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - 2e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& + 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + 3e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - 4e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \quad (5.44)
\end{aligned}$$

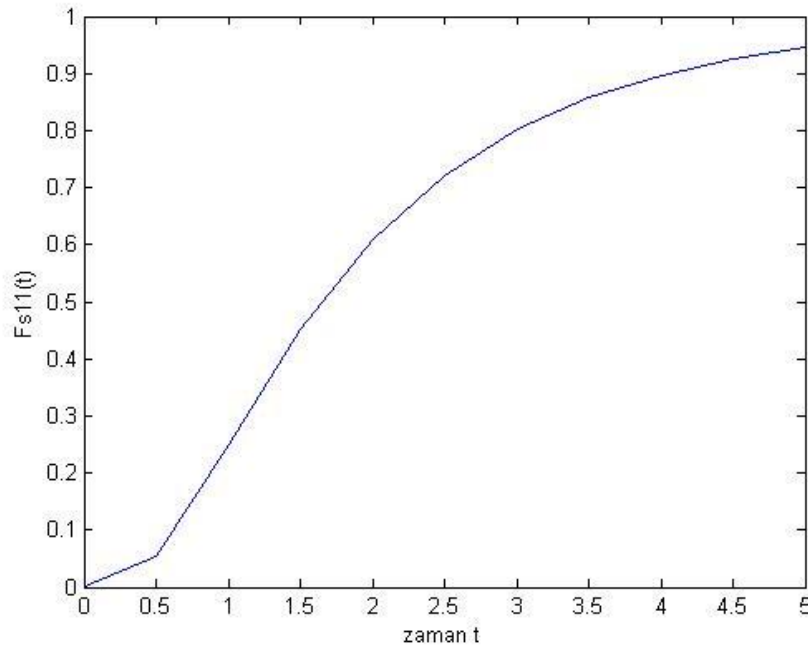
şeklinde, sistemin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F_{S_{11}}(t) = & 4e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - 3e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - 3e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& + 2e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + 2e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + 2e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& + 2e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
& - e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + 1 \quad (5.45)
\end{aligned}$$

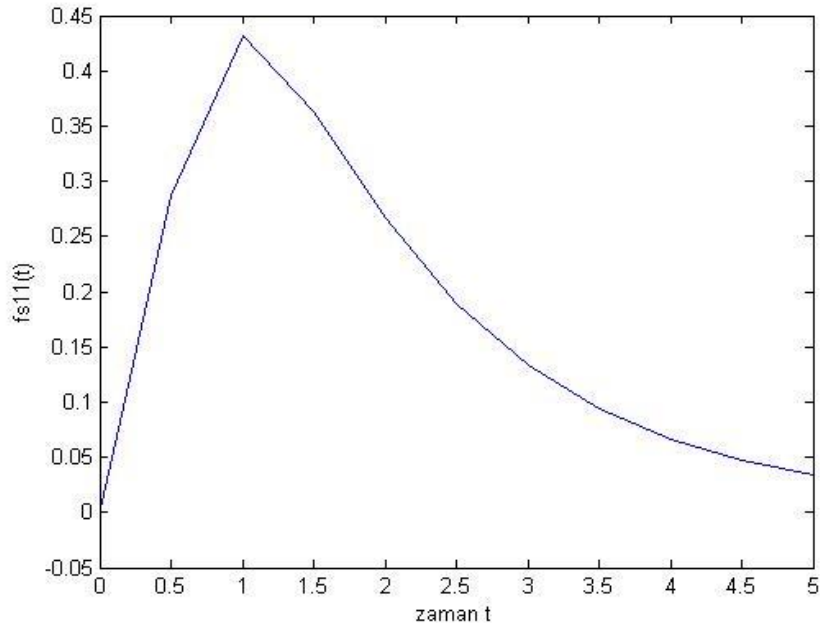
şeklinde olur.



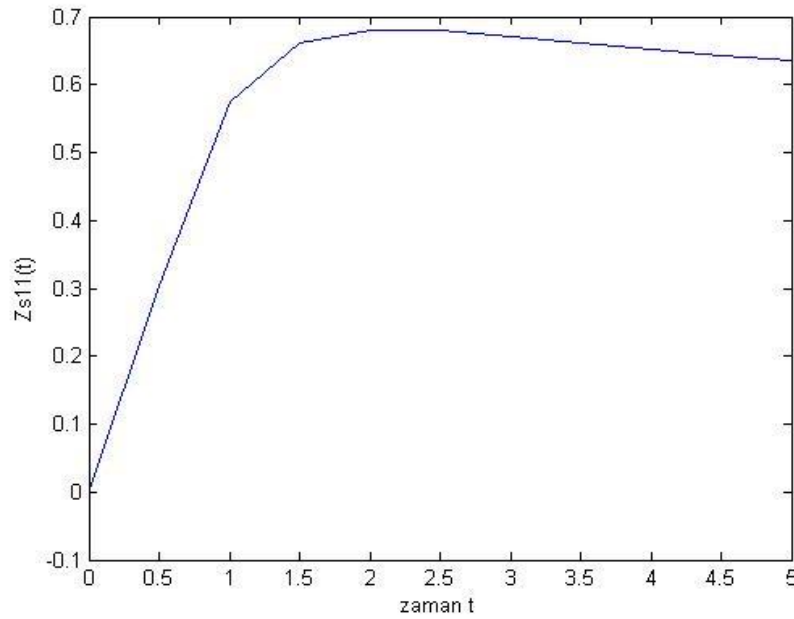
Şekil 5.7. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin güvenilirlik fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.8. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin dağılım fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.9. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.10. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir sistemin hata oranı fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)

5’den 3 çıkışlı bir sistemin yapı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\phi_9(X) &= X_1X_2X_3 \sqcup X_1X_2X_4 \sqcup X_1X_2X_5 \sqcup X_1X_3X_4 \sqcup X_1X_3X_5 \sqcup X_1X_4X_5 \sqcup X_2X_3X_4 \\
&\quad \sqcup X_2X_3X_5 \sqcup X_2X_4X_5 \sqcup X_3X_4X_5 \\
&= 1 - (1 - X_1X_2X_3)(1 - X_1X_2X_4)(1 - X_1X_2X_5)(1 - X_1X_3X_4)(1 - X_1X_3X_5) \\
&\quad (1 - X_1X_4X_5)(1 - X_2X_3X_4)(1 - X_2X_3X_5)(1 - X_2X_4X_5)(1 - X_3X_4X_5) \\
&= X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_2X_5 + X_1X_3X_4 + X_1X_3X_5 + X_1X_4X_5 + X_2X_3X_4 \\
&\quad + X_2X_3X_5 + X_2X_4X_5 + X_3X_4X_5 - 3X_1X_2X_3X_4 - 3X_1X_2X_3X_5 \\
&\quad - 3X_1X_2X_4X_5 - 3X_1X_3X_4X_5 - 3X_2X_3X_4X_5 \\
&\quad + 6X_1X_2X_3X_4X_5
\end{aligned} \tag{5.46}$$

şeklindedir. Bu sistemin güvenilirlik fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
R_{S_{12}}(t) &= e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} \\
&\quad + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - 3e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad - 3e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad + 6e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

olur.

5'den 4 çıkışlı bir sistemin yapı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\phi_{10}(X) &= X_1X_2X_3X_4 \sqcup X_1X_2X_3X_5 \sqcup X_1X_2X_4X_5 \sqcup X_1X_3X_4X_5 \sqcup X_2X_3X_4X_5 \\
&= 1 - (1 - X_1X_2X_3X_4)(1 - X_1X_2X_3X_5)(1 - X_1X_2X_4X_5) \\
&\quad (1 - X_1X_3X_4X_5)(1 - X_2X_3X_4X_5) \\
&= X_1X_2X_3X_4 + X_1X_2X_3X_5 + X_1X_2X_4X_5 + X_1X_3X_4X_5 + X_2X_3X_4X_5 \\
&\quad - 4X_1X_2X_3X_4X_5
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu sistemin güvenilirlik fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
R_{S_{13}}(t) = & e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
& - 4e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

olur.

5'den 5 çıkışlı bir sistemin, yani bir seri sistemin yapı fonksiyonu;

$$\phi_{11}(X) = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 \tag{5.50}$$

şeklinde. Bu sistemin güvenilirlik fonksiyonu ise

$$R_{S_{14}}(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \tag{5.51}$$

olur.

Tablo 5.5. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan n'den k çıkışlı sistemlerin güvenilirlik değerleri (n=5)
($\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$t = 0,1$	1.000	0.999	0.991	0.898	0.516
$t = 0,2$	0.999	0.996	0.948	0.710	0.267
$t = 0,3$	0.999	0.987	0.874	0.528	0.138
$t = 0,4$	0.999	0.970	0.781	0.378	0.071
$t = 0,5$	0.997	0.944	0.682	0.265	0.036
$t = 0,6$	0.996	0.913	0.586	0.183	0.019
$t = 0,7$	0.993	0.876	0.497	0.125	0.009
$t = 0,8$	0.989	0.835	0.419	0.085	0.005
$t = 0,9$	0.985	0.793	0.350	0.058	0.002
$t = 1$	0.980	0.750	0.292	0.039	0.001

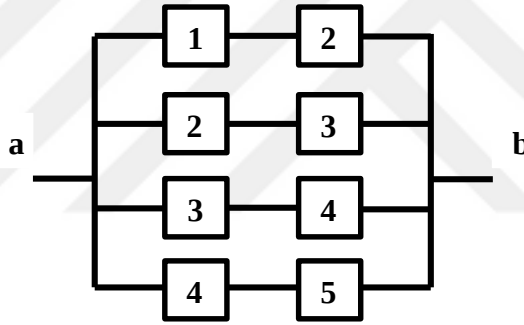
5'den 2 çıkışlı bir G sistemin; Şekil 5.7'de (5.44)'de fonksiyonu verilen güvenilirlik fonksiyonunun grafiği, Şekil 5.8'de (5.45)'de fonksiyonu verilen dağılım fonksiyonunun grafiği, Şekil 5.9'da olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği, Şekil 5.10'da ise hata oranı fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.

5.5. n’den k Çıkışlı Ardıl Sistem

Tanım 5.3. (Ardıl Sistem) n tane bileşeni olan ve yalnız ardıl olan bileşenleri çalışırken çalışan ya da arızalıyken arızalı olan sisteme ardıl sistem denir. Sadece ardıl bileşenler arızalı durumda olduğunda arızalanan sisteme n’den k çıkışlı ardıl: F sistem, sadece ardıl bileşenleri çalışır durumda olduğunda çalışan sisteme n’den k çıkışlı ardıl: G sistem denir (Kuo, W. ve M. J. Zuo, 2003).

Ardıl bir sistem, normal bir n’den k çıkışlı sistemin şartlı bir durumudur. Bölüm 5.4’de bahsedilen sistemde, beş bileşenden herhangi ikisinin çalışması ya da arızalanmasına göre sistem ele alınmıştı. Ardıl sistemde ise sadece ardıl bileşenlerin çalışması ya da arızalanmasına dayalı bir hesaplama yapılacaktır.

5.5.1. n’den k Çıkışlı Ardıl: G Sistem



Şekil 5.11. Bağımsız bileşenli 5’den 2 çıkışlı ardıl bir G sistemin güvenilirlik blok diyagramı

Şekil 5.11’de bağımsız bileşenli ardıl bir G sistemin güvenilirlik blok diyagramı gösterilen sistemin minimal yol kümeleri; $P_1 = \{1,2\}$, $P_2 = \{2,3\}$, $P_3 = \{3,4\}$, $P_4 = \{4,5\}$ ’dir. Bu sistemin minimal kesen kümeleri; $K_1 = \{2,4\}$, $K_2 = \{1,3,4\}$, $K_3 = \{1,3,5\}$, $K_4 = \{2,3,5\}$ ’dir.

Bu sistemin yapı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 \phi_{11}(X) &= X_1X_2 \sqcup X_2X_3 \sqcup X_3X_4 \sqcup X_4X_5 \\
 &= 1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_2X_3)(1 - X_3X_4)(1 - X_4X_5) \\
 &= X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + X_4X_5 - X_1X_2X_3 - X_2X_3X_4 - X_3X_4X_5 \\
 &\quad - X_1X_2X_4X_5 + X_1X_2X_3X_4X_5
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

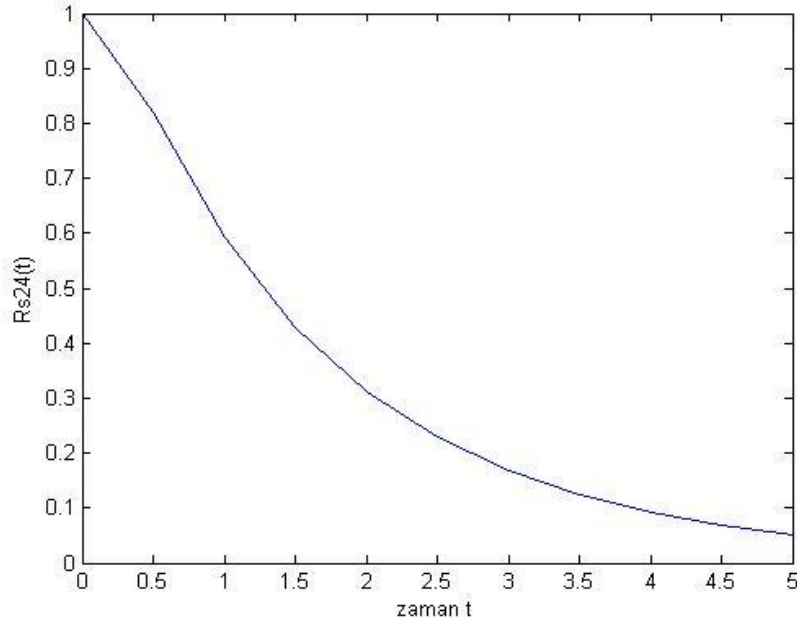
şeklindedir. $i = 1,2,3,4,5$ olmak üzere yapı fonksiyonundaki X_i 'lerin yerine $R_i(t)$ koyarak sistemin güvenilirlik fonksiyonu elde edilir. Bu durumda güvenilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} R_{S_{24}}(t) = & R_1(t)R_2(t) + R_2(t)R_3(t) + R_3(t)R_4(t) + R_4(t)R_5(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t) \\ & - R_2(t)R_3(t)R_4(t) - R_3(t)R_4(t)R_5(t) - R_1(t)R_2(t)R_4(t)R_5(t) \\ & + R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) \end{aligned} \quad (5.53)$$

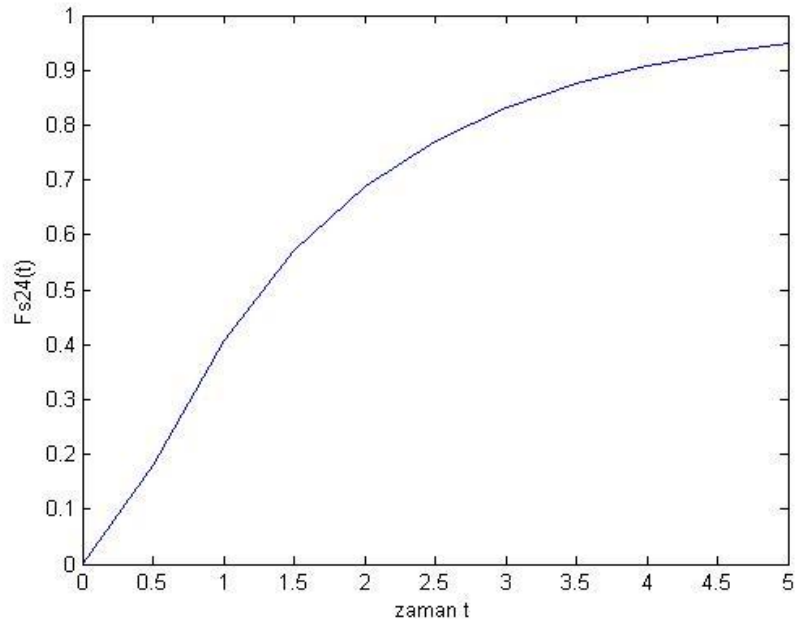
olur. $i = 1,2,3,4,5$ olmak üzere λ_i , i bileşenin sabit hata oranını göstermektedir. Böylece (2.9) eşitliğine göre sistemin güvenilirlik fonksiyonu;

$$\begin{aligned} R_{S_{24}}(t) = & e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} \\ & - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\ & + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \end{aligned} \quad (5.54)$$

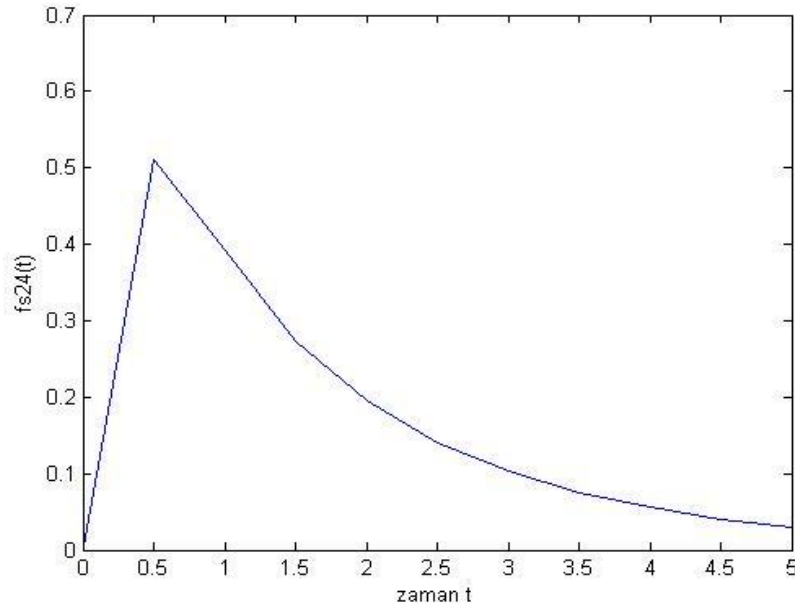
şeklinde elde edilir.



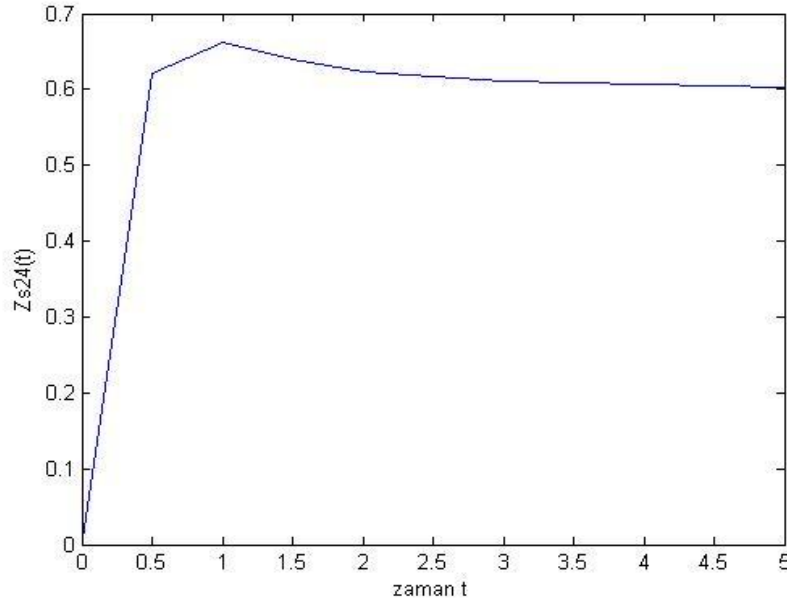
Şekil 5.12. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin güvenilirlik fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.13. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin dağılım fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



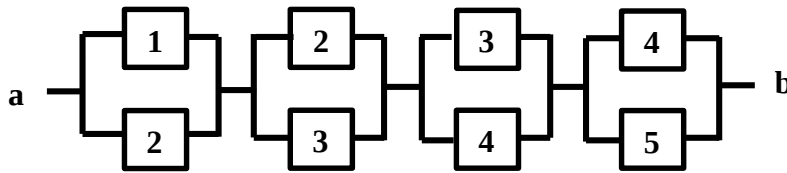
Şekil 5.14. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.15. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin hata oranı fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)

Şekil 5.12, Şekil 5.13, Şekil 5.14, Şekil 5.15’de bağımsız ve sabit hata oranına sahip, farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: G sistemin sırasıyla; güvenilirlik, dağılım, olasılık yoğunluk, hata oranı fonksiyonlarının grafiği gösterilmiştir. Bu grafikler Şekil 5.11’de verilen güvenilirlik blok diyagramı yardımıyla elde edilen fonksiyonların grafikleridir.

5.5.2. n’den k Çıkışlı Ardıl: F Sistem



Şekil 5.16. Bağımsız bileşenli 5’den 2 çıkışlı ardıl bir F sistemin güvenilirlik blok diyagramı

Şekil 5.16’da bağımsız bileşenli 5’den 2 çıkışlı ardıl bir F sistemin güvenilirlik blok diyagramı gösterilmiştir. Bu yapının minimal yol kümeleri; $P_1 = \{2,4\}$, $P_2 = \{2,3,5\}$, $P_3 = \{1,3,4\}$, $P_4 = \{1,3,5\}$ ’dir. Minimal kesen kümeleri de; $K_1 = \{1,2\}$, $K_2 = \{2,3\}$, $K_3 = \{3,4\}$, $K_4 = \{4,5\}$ ’dir.

Bu sistemin yapı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\phi_{12}(X) &= (X_1 \sqcup X_2) \cdot (X_2 \sqcup X_3) \cdot (X_3 \sqcup X_4) \cdot (X_4 \sqcup X_5) \\
&= (X_1 + X_2 - X_1X_2)(X_2 + X_3 - X_2X_3)(X_3 + X_4 - X_3X_4)(X_4 + X_5 - X_4X_5) \\
&= X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_1X_3X_5 + X_2X_3X_5 - X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_5 \\
&\quad - X_1X_3X_4X_5 - X_2X_3X_4X_5 + X_1X_2X_3X_4X_5
\end{aligned} \tag{5.55}$$

şeklindedir.

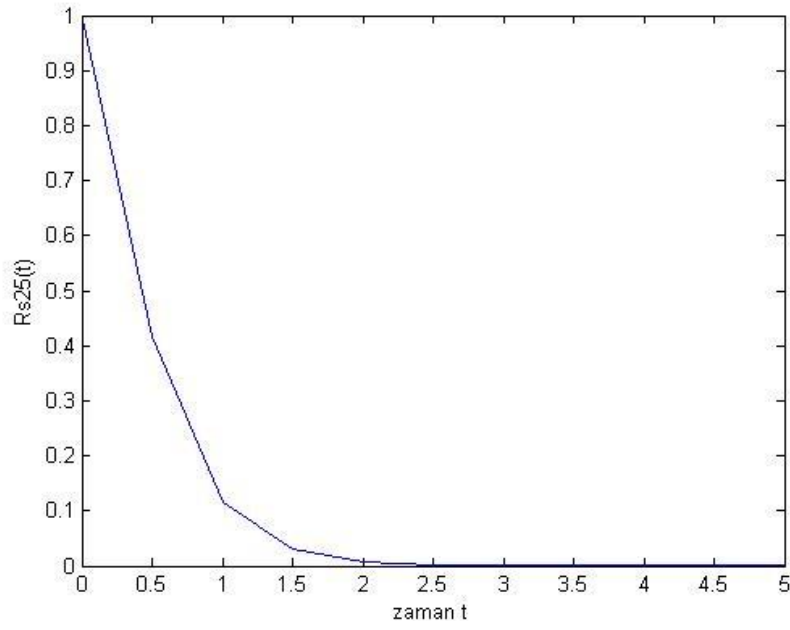
Yapı fonksiyonundaki X_i 'lerin yerine $R_i(t)$ koyarak sistemin güvenilirlik fonksiyonu elde edilir ($i = 1,2,3,4,5$). Bu durumda sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
R_{S_{25}}(t) &= R_2(t)R_4(t) + R_1(t)R_3(t)R_4(t) + R_1(t)R_3(t)R_5(t) + R_2(t)R_3(t)R_5(t) \\
&\quad - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_5(t) - R_1(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) \\
&\quad - R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t) + R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t)R_5(t)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

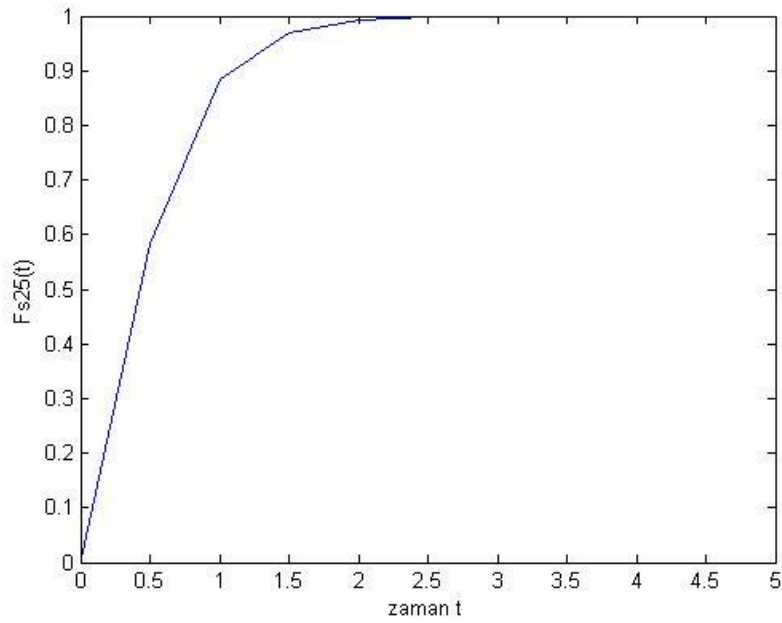
olur. $i = 1,2,3,4,5$ olmak üzere λ_i , i bileşenin sabit hata oranını göstermektedir. Böylece (2.9) eşitliğine göre sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
R_{S_{25}}(t) &= e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_5 t} - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} \\
&\quad - e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t} + e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} e^{-\lambda_4 t} e^{-\lambda_5 t}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

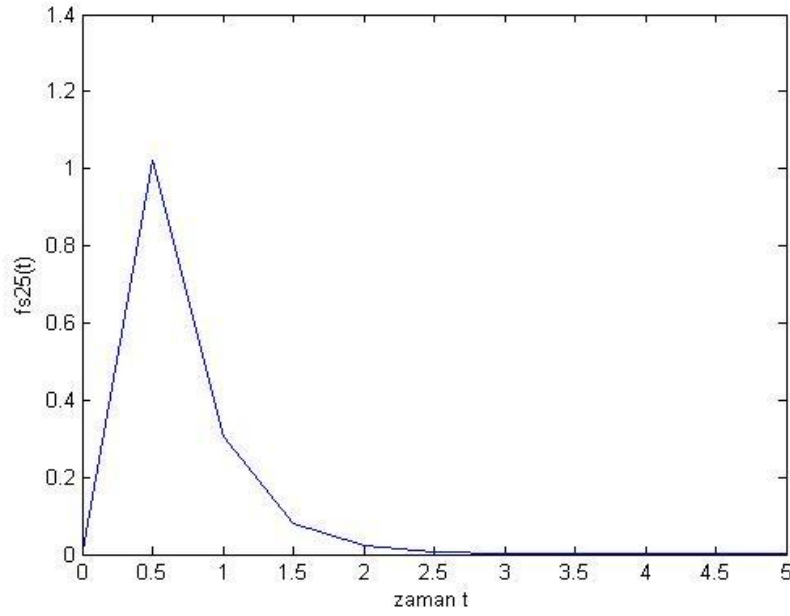
şeklinde elde edilir.



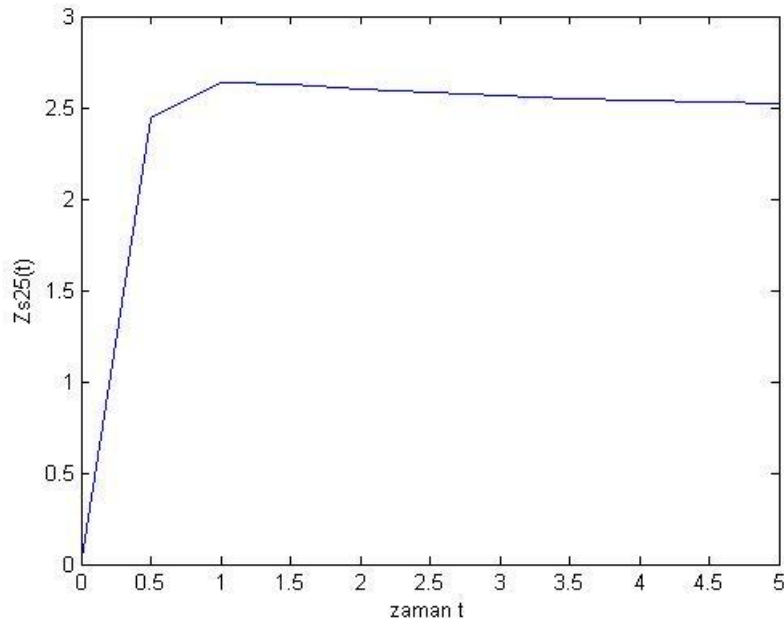
Şekil 5.17. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin güvenilirlik fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.18. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin dağılım fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.19. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)



Şekil 5.20. Bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı bir ardıl: F sistemin hata oranı fonksiyonu ($\lambda_1 = 0,2, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 3$)

Şekil 5.17, Şekil 5.18, Şekil 5.19, Şekil 5.20’de bağımsız ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan 5’den 2 çıkışlı ardıl bir F sistemin sırasıyla;

güvenilirlik, dağılım, olasılık yoğunluk, hata oranı fonksiyonlarının grafiği gösterilmiştir.



6. SONUÇ

Bu çalışmada; bağımsız bileşenli, tamir edilemez ve n 'den k çıkışlı sistemler hakkında, $n = 5$ olmak üzere, üç farklı durum için inceleme yapılmıştır. Aynı tipte ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan sistemler, hata oranı sabit olan farklı bileşenlerden oluşan sistemler için ve sabit hata oranına sahip farklı bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı ardıl: G ve F sistemler incelenmiştir.

Bağımsız bileşenli, tamir edilemez, aynı tipte ve hata oranları sabit olan bileşenlerden oluşan beş boyutlu n 'den k çıkışlı sistemler için güvenilirlik fonksiyonları yazılmış, hata oranı $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 2$ olmak üzere her bir k değeri için sistemlerin güvenilirlikleri hesaplanmış ve sırasıyla; Tablo 5.2, Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'de gösterilmiştir. Bu tablolar yardımıyla, bileşenlerin hata oranı ve k değeri arttıkça, sistemin güvenilirliğinin azalmakta olduğu görülmüştür. Buradan bileşenin güvenilirliği düşük ise sistemin de güvenilirliği düşük olduğu anlaşılmıştır. k değerinin artması demek, sistemin çalışması için çalışır vaziyette olması gereken bileşen sayısının artması demektir. Dolayısıyla güvenilirliği ne kadar yüksek olursa olsun çalışır vaziyette olması gereken fazladan bir bileşen, sistemin arıza olasılığını arttırmakta ve güvenilirliğini azaltmaktadır. Özel olarak, $k=2$ için; güvenilirlik, dağılım, olasılık yoğunluk ve hata oranı fonksiyonu hesaplanmış ve grafikleri çizilmiştir. Bu grafikler sırasıyla Şekil 5.2, Şekil 5.3, Şekil 5.4 ve Şekil 5.5'de gösterilmiştir. Şekil 5.2'de gösterilen güvenilirlik fonksiyonunun grafiğinde güvenilirliğin zamanla azaldığı görülmüştür. Bunun sebebi bileşenlerdeki yıpranmadır. Şekil 5.3'de gösterilen dağılım fonksiyonu tanım olarak güvenilirlik fonksiyonunun tam tersi olduğu için zamanla artmaktadır. Şekil 5.4'de gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonu önce bir tepe noktasına kadar artıp daha sonra aynı hızla azalmaktadır. Bu fonksiyon, arızanın en çok hangi bölgede oluştuğunu göstermektedir. Şekil 5.5'de gösterilen hata oranı fonksiyonunun yavaşça arttığı görülmüştür. Zaman geçtikçe bileşenlerin arızalanma olasılığı artmakta ve dolayısıyla hata oranı da artmaktadır.

Bağımsız bileşenli, tamir edilemez, sabit hata oranına sahip olan ve farklı bileşenlerden oluşan beş boyutlu sistemler için öncelikle yapı fonksiyonları oluşturulmuş ve bu yapı fonksiyonlarına bağlı olarak, her bir bileşene farklı hata oranı verilerek, güvenilirlik fonksiyonları hesaplanmıştır. Daha sonra bu hesaplanan değerler Tablo 5.5'de gösterilmiş ve k değerleri arttıkça güvenilirliğin azaldığı görülmüştür.

Özel olarak $k=2$ için güvenilirlik, dağılım, olasılık yoğunluk ve hata oranı fonksiyonlarının grafikleri çizilmiş ve sırasıyla; Şekil 5.7, Şekil 5.8, Şekil 5.9 ve Şekil 5.10'da gösterilmiştir. Her bir fonksiyon, bölüm 5.4.1'de bahsedilen; bağımsız bileşenli, aynı tipteki bileşenlerden oluşan n 'den k çıkışlı sistemlerin fonksiyonlarına benzer şekilde hareket etmiş ancak sadece hata oranı fonksiyonu farklılık göstermiştir. Şekil 5.10'da görüldüğü gibi, hata oranı önce hızla artmış belli bir tepe noktasına ulaştıktan sonra ise yavaşça azalmıştır. Bu durum şu şekilde açıklanabilmektedir; sistemde hata oranı yüksek olan bileşenlerin olması sebebiyle sistemin hata oranı, hata oranı en yüksek olan bileşenin hata oranına kadar yükselmektedir. Daha sonra bu bileşenlerin arızalanarak sistemden çıkmasıyla birlikte daha küçük olanın hata oranı seviyesine doğru düşmektedir. Böylece yavaşça azalmakta ve en düşük hata oranlı bileşenin hata oranı seviyesinde kalmaktadır.

n 'den k çıkışlı ardıl: G ve F sistem tanıtılmış ve bağımsız bileşenli, tamir edilemez ve bileşenleri sabit hata oranına sahip olan 5'den 2 çıkışlı ardıl: G ve F sistemin güvenilirlik blok diyagramları Şekil 5.11 ve Şekil 5.16'da gösterilmiştir. Minimal yol ve kesen kümeleri, yapı fonksiyonları ve buna bağlı olarak güvenilirlik fonksiyonları tanımlanmıştır. Şekil 5.12, Şekil 5.13, Şekil 5.14 ve Şekil 5.15'de bağımsız bileşenli, tamir edilemez ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı ardıl bir G sistemin sırasıyla; güvenilirlik, dağılım, olasılık yoğunluk ve hata oranı fonksiyonları gösterilmiştir. Aynı şekilde, Şekil 5.17, Şekil 5.18, Şekil 5.19 ve Şekil 5.20'de de bağımsız bileşenli, tamir edilemez ve sabit hata oranına sahip bileşenlerden oluşan 5'den 2 çıkışlı ardıl bir F sistemin sırasıyla; güvenilirlik, dağılım, olasılık yoğunluk ve hata oranı fonksiyonu gösterilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü üzere n 'den k çıkışlı ardıl bir G sistem, n 'den k çıkışlı ardıl bir F sisteme göre daha güvenilir bir sistemdir. Bunun sebebi n 'den k çıkışlı ardıl: G sistemin n 'den k çıkışlı ardıl: F sisteme göre, çalışır vaziyette olan bileşene daha az ihtiyaç duymasındır. Genel olarak, ardıl olmayan bir sistemin ardıl bir sisteme göre daha güvenilir olduğu yine grafiklerden görülmektedir. Bunun sebebi ardıl sistemlerin, ardıl olmayan sistemlere göre daha az bileşene ihtiyaç duymasındır ve bu sebeple arıza olasılığı yüksek olmaktadır.

KAYNAKÇA

Aven, T. ; Jensen, U. (1999). Stochastic models in reliability. New York: Springer.

Chao, M. T. ; J. C. Fu, and M. V. Koutras, (1995). Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n: F and related systems: IEEE Transactions on reliability.

Chhikara, R. S. ; Folks, J. L. (1989). The Inverse Gaussian distribution. Marcel Decker. Inc., New York.

Chhikara, R. S. ; Folks, J. L. (1977). The inverse Gaussian distribution as a lifetime model. Technometrics.

Epstein, B. ; Weissman, I. (2008). Mathematical models for systems reliability. CRC Press.

Hoyland, A. ; Rausand M., (2002), System Reliability Theory Models, Statistical Methods and Applications Second Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, INC., Publication.

Kuo, W. ; Zuo, M. J. (2003). Optimal reliability modeling, principles and applications, New Jersey: John Wiley & Sons, INC., Publication.

Lenz, M. ; Rhodin, J. (2011). Reliability calculations for complex systems.

Modarres, M. ; Kaminskiy, M. ; Krivtsov, V. (2011). Reliability engineering and risk analysis: a practical guide. CRC press.

Navarro, J. ; Rubio, R, (2009). Computations of signatures of coherent systems with five components. Facultad de Matematicas , Universidad de Murcia.

Papadopoulos, George K.. (1993). Reliability of 2-Dimensional Consecutive-k-out-of-n: F Systems: IEEE Transactions on Reliability

Rausand M. (2014). Reliability Of Safety-Critical Systems. John Wiley & Sons, INC., Publication.

Verheul, E. R. ; Van Tilborg, H. C. (1997). Constructions and properties of k out of n visual secret sharing schemes. Designs, Codes and Cryptography.

