

n-DİKLİĞİ KORUYAN VE n-ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER

Tuba KILINÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2007
ANKARA**

Tuba KILINÇ tarafından hazırlanan n -DİKLİĞİ KORUYAN ve n -ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oybirliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Zafer ERCAN

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Tarih : 28/06/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tuba KILINÇ

n-DİKLİĞİ KORUYAN VE n-ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Tuba KILINÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2007

ÖZET

Aralık koruyan operatörlerle dikliği koruyan operatörler arasındaki dual ilişki iyi bilinmektedir. Bizde bu tezde S.J. Bernau, C.B. Huijsmans ve B.De Pagter tarafından yayınlanan n-dikliği koruyan operatörlerin sunulduğu makaleyi derinlemesine inceledik. n-aralık koruyan operatörleri tanımlayıp n-aralık koruyan operatörler ile n-dikliği koruyan operatörler arasındaki dual ilişkiyi elde ettik.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, lattice homomorfizması, dikliği koruyan operatör, aralık koruyan operatör, n-dikliği koruyan operatör, n-aralık koruyan operatör
Sayfa Adedi : 101
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN

**n-DISJOINTNESS PRESERVING AND n-INTERVAL PRESEVNG
OPERATORS
(MSc Thesis)**

Tuba KILINÇ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2007**

ABSTRACT

The dual relationship between interval preserving operators and disjoint preserving operators are well known. We have studied the article on n-disjoint preserving operators introduced by S.J. Bernau, C.B. Huijsmans and B.De Pagter in detail in this thesis. Firstly we have defined the n-interval preserving operators and then we have showed the dual relationship between n-interval preserving operators and n-disjoint preserving operators.

Science Code	: 204.1.132
Key Words	: Riesz spaces, lattice homomorphism, disjoint preserving operator, interval preserving operator, n-disjoint preserving operator, n-interval preserving operator
Number of Pages	: 101
Adviser	: Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda beni tez öğrencisi olarak kabul eden, tezin her aşamasında büyük katkıları olan, kaynaklarını, bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan, değerli eleştiri ve fikirleri ile beni yönlendiren, ayrıca iyi bir matematikçi olma yolundaki başlangıç adımlarımda bana destek veren Sayın Hocam Prof. Dr. Bahri TURAN’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bunun dışında, akademik ve akademik olmayan konularda bana yardımdan hiçbir zaman kaçınmayan, bu çalışmanın oluşturulmasında katkıları olan Sayın Hocam Dr. Cüneyt ÇEVİK’e çok teşekkür ederim.

Tez çalışmam sırasında gerekli zamanı bulabilmem için tüm ilgi, destek ve sabrını benden esirgemeyen Emekli Sandığı Tahsisler Daire Başkanı Sayın Veysel UYAR’a minnet borçluyum ve çok teşekkür ederim.

Tez çalışmamda zor anlarımda yanımda olan, manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli arkadaşım, Murat MUŞTU’ya teşekkür ederim.

Sonsuz güvenleri, maddi ve manevi destekleri ile her zaman yanımda olan beni destekleyen ailem ve arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE ÖNERMELER	5
3. DİKLİĞİ KORUYAN VE ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER	38
3.1. Dikliği Koruyan Operatörler	38
3.2. Aralık Koruyan Operatörler	47
3.3. Adjoint Operatörü, Dikliği Koruyan ve Aralık Koruyan Operatörler Arasındaki İlişkiler	55
4. n-DİKLİĞİ KORUYAN VE n-ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER	67
4.1. n-Dikliği Koruyan Operatörler	67
4.2. n-Aralık Koruyan Operatörler	92
4.3. Adjoint Operatörü ile n-Dikliği Koruyan ve n-Aralık Koruyan Operatörler Arasındaki İlişkiler	93
5. SONUÇ	101
KAYNAKLAR	102
ÖZGEÇMİŞ	103

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
E^+	E uzayının <i>pozitif kısmı</i>
$x \wedge y$	x ile y 'nin infimumu
$x \vee y$	x ile y 'nin supremumu
$x^+ = x \vee 0$	x 'in pozitif kısmı
$x^- = (-x) \vee 0$	x 'in negatif kısmı
$ x = x \vee (-x)$	x 'in modülü (mutlak değeri)
$x \perp y$	Birbirine dik elemanlar
$L(E, F)$	Operatörlerin vektör uzayı
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörler
I_x	x tarafından üretilen ideal
B_x	x tarafından üretilen band
$E \oplus F$	İki Riesz uzayının direkt toplamı
$A \perp B$	Dik kümeler
A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$A \uparrow$	Yukarı yönlendirilmiş küme
$x_\lambda \uparrow a$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu a olan ağ
$x_\lambda \downarrow b$	Aşağı yönlendirilmiş ve supremumu b olan ağ
$[x, y]$	Sıralı aralık
$E^\sim$	E 'nin sıra duali
$E_n^\sim$	E 'nin sıra sürekli duali
$f \otimes u$	Bir operatörün rankı

Simgeler	Açıklama
ψ	Adjoint operatörü
$\varepsilon(T)$	T 'nin pozitif genişlemelerinin kümesi

1. GİRİŞ

İlk olarak Pozitif Operatörlerin tarihinden kısaca bahsedelim. Pozitif operatörler 19. yy. başlarında ortaya çıkmaya başlamıştır. Başlangıçta İntegral operatörü ve negatif ögesi olmayan matrislerle ilişkilendirilen pozitif operatörler hakkındaki çalışmalar Fonksiyonel Analizin doğuşunu tetiklemiş ve bu alandaki çalışmalar Riesz uzayları alanındaki gelişmeleri yakından takip etmiştir. F. Riesz'in 1928 yılında Bolognada Uluslar arası Matematikçiler Kongresinde Doğrusal Fonksiyonların Pozitif ve Negatif Bileşenlerine Ayırıştırılması hakkındaki konuşması Riesz uzayları ve pozitif operatörler hakkındaki çalışmaların başlangıcını temsil etmektedir. Riesz uzayları teorisi 1930'ların ortalarında aksiyom düzeyinde H. Freudenthal ve L.V. Kantorovic tarafından geliştirilmiştir. Pozitif operatörler ise 1930'ların ortasında L.V. Kantorovic tarafından ortaya atılmış ve üzerinde çalışılmıştır. Bunun sonucu olarak pozitif operatörlerin kitaplarda belirmesi ilk kez G. Birkhoff'un 1940 basım *Lattice Teorisi* kitabı ile gerçekleşmiştir. Kuşkusuz, pozitif operatörlerin sistematik çalışılması F. Riesz, L.V. Kantorovic ve G. Birkhoff tarafından 1930'lara kadar gitmektedir.

1940'lar ve 1950'lerin başlarında pozitif operatörler hakkında çok az makale bulabiliyoruz. Bu dönemde, önemli katkılar Sovyet (L.V. Kantorovic, M.G. Krein, A.G. Pinsker, M.A. Rutman, B.Z. Vulikh) ve Japon Okulundan (H. Nakano, K. Yosida, T.Ogawara, ve öğrencileri) gelmiştir. 1950'de L.V. Kantorovic, B.Z. Vulikh, ve A.G. Pinsker 'in "*Kısmi Düzenli Uzayda Fonksiyonel Analiz*" kitabı Sovyet bilim dünyasında yer almıştır. İngilizceye çevrilmemiş bu kitap o tarihe kadarki pozitif operatörler ve uygulamaları ile ilgili mükemmel bir inceleme niteliğindedir.

1950'lerin ortalarından itibaren pozitif operatörler hakkındaki araştırmalar hız kazanmıştır. 1955'den 1970'e önemli katkılar T. Ando, C. Gofman, S. Kaplan, S. Karlin, P. P. Korovkin, M.A. Kranoselski, P.P. Zabreiko, E.I Pustyl'nik, P.E. Sobolevskii, U. Krengel, G. Ya. Lozanovski, W.A. J. Luxemburg ve A.C. Zaanen, H. Nakano, I. Namioka, A. Peressini, H. H. Schaefer ve B. Z. Vulikh tarafından

yapılmıştır. Dolayısıyla, 1960'ların sonu itibariyle pozitif operatörler teorisi için “zemin çalışması” yapılmış bulunmaktaydı.

1970'ler pozitif operatörler teorisinin olgunlaşma dönemi olarak anılmaktadır. 1974'de tamamen bu konuya ayrılmış olan H.H. Schaefer'in *Lattices ve Pozitif Operatörler* kitabı, pozitif operatörlerin gelişimi üzerinde çok büyük bir etkisi olan bir çalışmadır. Bu zamandan sonra bu alanda çalışan matematikçi sayısı artmış ve araştırmalar daha sistematik bir şekilde gerçekleştirilmeye başlanmıştır. Konunun gelişimi çok hızlı olmuş ve diğer alanlara uygulaması da artmaya başlamıştır. 1970'ler için bir başka dönüm noktası P.G. Dodds ve D. H. Fremlin'in pozitif kompakt operatörler hakkındaki önemli makaleleridir. 1970'lerde pozitif operatörler teorisine katkıda bulunan matematikçiler; Ju. A. Abramovic, C.D. Aliprantis, S.J. Bernau, A.V. Buhvalov, O. Burkinshaw, D.I. Cartwright, P.G. Dodds, M. Duhoux, P. Van Eldik, J.J. Grobler, D.H. Fremlin, H.P. Lotz, W.A. J. Kuxemburg, M. Meyer, P. Meyer-Nieberg, R.J. Nagel, U. Schlotterbeck, H.H. Schaefer, A.R. Schep, C.T. Tucker, A.I. Vecksler, A.W. Wickstead, M. Wolff ve A.C. Zaanen'dir.

1980'ler pozitif operatörler teorisi için gayet iyi başlamıştır. Pozitif kompakt operatörler konusunda bir dizi önemli makale C.D. Aliprantis ve O. Burkinshaw tarafından kaleme alınmıştır. Pozitif operatörler hakkındaki bir başka mükemmel kitap olan A.C. Zaanen'in *Riesz Uzayları* adında ve daha çok 1980'lere kadar yapılan araştırmalar ile ilgilenen kitabı pozitif operatörler yazınına girmiştir. Ayrıca, Banach uzayları teorisi ile ilgilenen birçok matematikçi pozitif operatör çalışır olmuşlar ve bu durum projeye daha da ivme kazandırmıştır. Ek olarak, pozitif operatörler teorisi matematiksel fizikten ekonomiye kadar çok çeşitli alanlarda bazı etkileyici uygulama alanları bulabilmiştir.

Bu nedenle, 1980'lere yaklaşırken pozitif operatörlerin geleceğinin parlak olduğunu söylemek mümkündür. Alan gayet canlıdır, uygulama ve teoride genişlemektedir [1].

Şimdi de kısaca çalışmamızın kapsam ve amacından bahsedelim. Riesz uzaylarında sıra koruyan operatörlerin önemi büyüktür. Eğer bir operatörün tersi var ve kendisi

ile tersi sıra koruyan ise buna *Riesz izomorfizmi* denir. Eğer iki uzay arasında Riesz izomorfizmi varsa bu iki uzayın sıralama özellikleri aynı düşünülebilir. Bunun yanında Riesz uzayları arasında lattice operasyonlarını koruyan operatörler de birçok bilim adamı tarafından çalışılmıştır.

E ve F Riesz uzayları $T : E \rightarrow F$ lineer dönüşüm olsun. Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ ise T 'ye *dikliği koruyan operatör* denir. Eğer $T : E \rightarrow F$ lineer, pozitif ve her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ (veya $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$) sağlanıyorsa T 'ye *Riesz homomorfizması* (veya *lattice homomorfizması*) denir. Her Riesz homomorfizması dikliği koruyan operatördür. Genelde iki dikliği koruyan operatörün toplamı dikliği koruyan operatör değildir. Dolayısıyla dikliği koruyan operatörlerin kümesi bir vektör uzayı değildir. S.J. Bernau, C.B. Huijsmans and B.De Pagter 1992 yılında yayımladıkları "*Sums of Lattice Homomorphisms*" isimli makalelerinde n-dikliği koruyan operatörü tanımlayarak özelliklerini incelemişler ve dikliği koruyan operatörlerin ürettiği sıra idealin ne olduğunu n-dikliği koruyan operatörlere bağlı olarak elde etmişlerdir.

E ve F Riesz uzayı, E^- ve F^- bunların sıra dualleri olmak üzere $T : E \rightarrow F$ lineer sıra sınırlı dönüşümü için T 'nin *sıra adjointi* $T^- : F^- \rightarrow E^-$, $T^-(f) = f \circ T$ biçiminde tanımlanır ve T^- lineer ve sıra sınırlı bir operatördür. Bunun yardımıyla

$$\psi : L_b(E, F) \rightarrow L_b(F^-, E^-), \quad T \rightarrow \psi(T) = T^-$$

biçiminde tanımlı adjoint operatörünün özellikleri bilinmektedir. Bundan başka $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olmak üzere her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ özelliğini sağlayan operatöre *aralık koruyan operatör* denir. Riesz homomorfizmaları ile aralık koruyan operatörler arasında dual ilişki vardır. Bu ilişkiyi aşağıdaki şekilde gösterebiliriz;

- $T : E \rightarrow F$ aralık koruyan ise $T^- : F^- \rightarrow E^-$ Riesz homomorfizmasıdır.

- $F^\sim$, F 'nin noktalarını ayırmak üzere $T : E \rightarrow F$ Riesz homomorfizmasıdır ancak ve ancak $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ aralık koruyandır.

Bunları göz önüne alarak bizde n -aralık koruyan operatörleri tanımlayarak n -dikliği koruyan operatörlerle bunlar arasındaki dual ilişkiyi elde etmeyi düşündük.

Bu tezin ikinci bölümünü, Riesz uzayları ve Riesz uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümler ile çalışmamızda bize gerekli olan tanım ve teoremlere ayırdık. Üçüncü bölümde dikliği koruyan operatörler, Riesz homomorfizmalar, aralık koruyan operatörleri tanıtarak, belli özelliklerini çıkarıp uygun örnekler verdik. Adjoint operatörü ile aralarındaki dual ilişkisini veren teoremleri ayrıntılarıyla inceledik. Dördüncü bölümde S.J. Bernau, C.B. Huijsmans and B.De Pagter tarafından 1992 yılında yayımlanan “Sums of Lattice Homomorphisms” isimli makaleyi ayrıntılarıyla inceleyerek verdik.

Orjinal olan son bölümde n -aralık koruyan operatörleri tanımlayarak n -dikliği koruyan operatörlerle n -aralık koruyan operatörler arasındaki dual ilişkiyi verdik. Genelde toplamları aralık koruyan olmayan aralık koruyan operatörler kümesinin ürettiği sıra ideali elde ettik.

2. TEMEL TANIMLAR VE ÖNERMELER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanımları vererek önermeleri özetliyoruz.

2.1. Tanım

E boştan farklı bir küme olsun. E üzerinde tanımlı “ $\leq$ ” bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, “ $\leq$ ” bağıntısına *sıralama bağıntısı*, $(E, \leq)$ ikilisine de *kısmi sıralı küme* denir.

- i) Her $x \in E$ için $x \leq x$ (Yansıma özelliği)
- ii) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$ (Ters simetri özelliği)
- iii) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ (Geçişme özelliği)

2.2. Tanım

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı “ $\leq$ ” olmak üzere, her $x, y, z \in E$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken ;

- i) $x + z \leq y + z$
- ii) $\alpha x \leq \alpha y$

şartlarını sağlayan E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir. E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ bağıntısını sağlayan elemanlarına *pozitif* denilecektir. E uzayının *pozitif kısmı* $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ şeklindeki E ’nin bütün pozitif elemanlarından oluşmaktadır. E ve F iki vektör uzayı olmak üzere bir $T : E \rightarrow F$ lineer dönüşümü (her $x, y \in E$ ve

her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ kısaca *operatör* olarak adlandırılacaktır. Genel olarak $T(x)$ değeri Tx ile belirtilecektir.

2.3. Tanım

E ve F iki sıralı vektör uzayı $T: E \rightarrow F$ operatör olmak üzere, her bir $x \in E^+$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T operatörüne *pozitif operatör* denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçiminde gösterilir.

Eğer $x \leq y$ iken $Tx \leq Ty$ oluyorsa T operatörüne *sıra koruyan operatör* denir.

Sonuç

E ve F sıralı vektör uzayları, $T: E \rightarrow F$ operatör ve $x, y \in E$ olmak üzere T 'nin pozitif operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T 'nin sıra koruyan operatör olmasıdır. Yani,

“ $T: E \rightarrow F$ operatörünün pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul $x \leq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in E$ için $Tx \leq Ty$ olmasıdır ($T(E^+) \subseteq F^+$).”

İspat

($\Rightarrow$) T 'nin pozitif operatör olduğunu kabul edelim. $x \leq y$ olacak biçimde $x, y \in E$ için

$$\begin{aligned} x - x &\leq y - x \Rightarrow 0 \leq y - x \Rightarrow 0 \leq T(y - x) \Rightarrow 0 \leq Ty - Tx \\ &\Rightarrow Tx \leq Ty - Tx + Tx \Rightarrow Tx \leq Ty \end{aligned}$$

olduğundan T sıra koruyan operatördür.

($\Leftarrow$) T 'nin sıra koruyan operatör olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \geq 0$ iken $Tx \geq T0$ ve böylece $Tx \geq 0$ olur ki bu da T 'nin pozitif operatör olduğunu gösterir.

2.4. Tanım

$(A, \leq)$ kısmi sıralı küme $B \subseteq A$ ve $a, b \in A$ olmak üzere;

i) Her $x \in B$ için $x \leq a$

ii) Her $x \in B$ için $x \leq b$ iken $a \leq b$

şartları sağlanırsa a elemanına B kümesinin *üst sınırlarının en küçüğü* (*supremumu*) denir ve $\sup B = a$ biçiminde gösterilir.

i) Her $x \in B$ için $a \leq x$

ii) Her $x \in B$ için $b \leq x$ iken $b \leq a$

şartları sağlanırsa a elemanına B kümesinin *alt sınırlarının en büyüğü* (*infimumu*) denir ve $\inf B = a$ ile gösterilir.

B kümesi yerine iki elemanlı $\{x, y\}$ kümesini alırsak $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde göstereceğiz.

2.5. Tanım

$(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere, her $x, y \in A$ için $x \vee y \in A$ ve $x \wedge y \in A$ ise A kümesine *lattice (örgü)* denir.

E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için $\sup\{x, y\} = x \vee y \in E$ veya $\inf\{x, y\} = x \wedge y \in E$ oluyorsa E 'ye *Riesz uzayı* denir.

2.6. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere; $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x \vee (-x)$ elemanlarına sırasıyla $x \in E$ 'nin *pozitif kısmı*, *negatif kısmı* ve *modülü* (*mutlak değeri*) denir.

2.1. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olmak üzere, aşağıdaki önermeler doğrudur [1].

- 1) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
- 2) $x + y = x \vee y + x \wedge y$
- 3) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- 4) Her $\lambda \geq 0$ için $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$ ve $\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$
- 5) $x = x^+ - x^-$
- 6) $|x| = x^+ + x^-$
- 7) $x^+ \wedge x^- = 0$
- 8) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$
- 9) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$
- 10) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ ve $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$

$$11) \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$12) \quad |(x \vee z) - (y \vee z)| \leq |x - y| \text{ ve } |(x \wedge z) - (y \wedge z)| \leq |x - y|$$

$$13) \quad \text{Eğer } x, y, z \in E^+ \text{ ise } x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$$

Sonuç

E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $\sup A$ varsa bu durumda;

$$a) \quad \inf(-A) \text{ vardır ve } \inf(-A) = -\sup A$$

$$b) \quad \sup(x + A) := \sup\{x + a : a \in A\} \text{ vardır ve } \sup(x + A) = x + \sup A$$

$$c) \quad \text{Her } \lambda \geq 0 \text{ için } \sup \lambda A := \sup\{\lambda a : a \in A\} \text{ vardır ve } \sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

gerçeklenir [1].

Sonuç

E sıralı vektör uzayı olsun. E 'nin Riesz uzayı olması için aşağıdaki şartlardan birinin gerçekleşmesi yeterlidir.

$$a) \quad \text{Her } x, y \in E \text{ için } x \vee y \in E$$

$$b) \quad \text{Her } x, y \in E \text{ için } x \wedge y \in E$$

$$c) \quad \text{Her } x \in E \text{ için } x^+ \in E$$

$$d) \quad \text{Her } x \in E \text{ için } x^- \in E$$

e) Her $x \in E$ için $|x| \in E$

Önerme

E sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ alt vektör uzayı ise E ’den gelen sıralama ile V sıralı alt vektör uzayı olur.

2.1. Örnek

$\Omega \neq \emptyset$ ve $\mathbb{R}^\Omega = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyon}\}$ olmak üzere her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ için;

$$“f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)”$$

noktasal sıralaması ile $(\mathbb{R}^\Omega, \leq)$ Riesz uzayıdır.

Çözüm

Her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ için;

$$“f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)”$$

biçiminde tanımlanan “ $\leq$ ” bir sıralama bağıntısı olduğu için $(\mathbb{R}^\Omega, \leq)$ sıralı bir kümedir. Her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{ll} f + g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} & \alpha f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) & x \rightarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{array}$$

biçimindeki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}^\Omega, \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$f \leq h$ olacak biçimde $f, g, h \in \mathbb{R}^\Omega$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in \Omega$ için $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f \leq h &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x) \\ &\Rightarrow \mathbb{R}'\text{de } f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } (f + h)(x) \leq (g + h)(x) \\ &\Rightarrow f + h \leq g + h \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f \leq h &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } \lambda f(x) \leq \lambda g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } \lambda f \leq \lambda g \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathbb{R}^\Omega$ sıralı vektör uzayıdır. Şimdi yine $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ olmak üzere her $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} h: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow h(x) = \max \{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $x \in \Omega$ için $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ olur ve $\mathbb{R}$ tam sıralı olduğu için maksimum elemanı vardır. Dolayısıyla $\max \{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ olacağından her $x \in \Omega$ için $h(x) \in \mathbb{R}$ elde edilir. Böylece h dönüşümü anlamlıdır. f ve g iyi tanımlı olduğundan $x, y \in \Omega$ için,

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow f(x) = f(y) \text{ ve } g(x) = g(y) \\ &\Rightarrow \{f(x), g(x)\} = \{f(y), g(y)\} \\ &\Rightarrow \max \{f(x), g(x)\} = \max \{f(y), g(y)\} \\ &\Rightarrow h(x) = h(y) \end{aligned}$$

eşitliği h dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak $h \in \mathbb{R}^\Omega$ elde edilir. $\mathbb{R}^\Omega$ 'nin Riesz uzayı olduğunu tanımlı kullanarak görelim.

(i) Her $x \in \Omega$ için

$$f(x) \leq \max\{f(x), g(x)\} = h(x) \text{ ve } g(x) \leq \max\{f(x), g(x)\} = h(x)$$

olması $f \leq h$ ve $g \leq h$ anlamına gelir.

(ii) $f \leq t$ ve $g \leq t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{R}^\Omega$ alalım. Bu durumda her $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} f(x) \leq t(x) \text{ ve } g(x) \leq t(x) &\Rightarrow \max\{f(x), g(x)\} \leq t(x) \\ &\Rightarrow h(x) \leq t(x) \\ &\Rightarrow h \leq t \end{aligned}$$

supremum tanımı gereği (i) ve (ii)'den $f \vee g = h$ olur ki $h \in \mathbb{R}^\Omega$ olduğundan $f \vee g \in \mathbb{R}^\Omega$ bulunur. Sonuç olarak $\mathbb{R}^\Omega$ Riesz uzayıdır.

2.2 Örnek

Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı, gerçel değerli, sürekli fonksiyonların kümesi $C(\Omega)$ için her $f, g \in C(\Omega)$ olmak üzere

$$“f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)”$$

noktasal sıralaması ile Riesz uzayıdır.

Çözüm

Öncelikle $C(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ uzayının sıralı vektör uzayı olduğunu görelim; $\mathbb{R}^\Omega$ 'un vektör uzayı olduğu Örnek 2.1'den bilinmektedir.

$C(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ olduğundan $C(\Omega)$ 'nin alt vektör uzayı olduğunu görebilmek için her $f, g \in C(\Omega)$ için $f + g \in C(\Omega)$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f \in C(\Omega)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için $f, g \in C(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere keyfi $x \in \Omega$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $f, g \in C(\Omega)$ olduğundan f ve g süreklidir. Dolayısıyla f ile g $x \in \Omega$ noktasında sürekli olacağından her $u \in U$ için $|fu - fx| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve her $v \in V$ için $|gv - gx| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $U, V \in \beta(x)$ vardır. $W = U \cap V$ alınırsa $W \in \beta(x)$ ve her $w \in W$ için,

$$|(f + g)w - (f + g)x| = |(fw - fx) + (gw - gx)| \leq |fw - fx| + |gw - gx| < \varepsilon$$

olur ki bu da $f + g$ fonksiyonunun x noktasında sürekli olduğu anlamına gelir. Burada x noktası keyfi seçildiğinden her $x \in \Omega$ için $f + g$ sürekli fonksiyondur yani $f + g \in C(\Omega)$ 'dir. $f, x \in \Omega$ noktasında sürekli olduğundan her $u \in U$ ve $\lambda \neq 0$ için $|fu - fx| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ olacak şekilde $U \in \beta(x)$ vardır. Ayrıca her $u \in U$ için,

$$|(\lambda f)u - (\lambda f)x| = |\lambda(fu - fx)| = |\lambda||fu - fx| < \varepsilon$$

olur ki bu $\lambda \neq 0$ iken λf fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir. $\lambda = 0$ için $\lambda f = 0$ sabit fonksiyonu süreklidir. O halde $\lambda f \in C(\Omega)$ 'dir. Sonuç olarak $C(\Omega)$ vektör uzayı olur ki $C(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ olduğundan aynı zamanda sıralı vektör uzayıdır.

Her $f \in C(\Omega)$ iken $|f| \in C(\Omega)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Bunun için $|f|$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermemiz gerekir. Keyfi bir $x \in \Omega$ seçilsin. f sürekli olduğundan x noktasında da süreklidir. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $u \in \Omega$ için $|fx - fu| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U \in \beta(x)$ vardır. Örnek 2.1'den

$$|f|: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \max \{fx, -fx\} = |fx|$$

olur. Ayrıca $||fx| - |fu|| \leq |fx - fu| < \varepsilon$ olduğundan $|f|$ fonksiyonu sürekli yani $|f| \in C(\Omega)$ 'dir. Böylece $C(\Omega)$ bir Riesz uzayıdır.

2.3. Örnek

$\Omega \neq \emptyset$, $l_\infty(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ biçimindeki Ω üzerinde tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı olan $l_\infty(\Omega)$, $\mathbb{R}^\Omega$ üzerindeki noktasal sıralamaya göre Riesz uzayıdır.

Çözüm

$f, g \in l_\infty(\Omega)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f 'nin sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in \Omega$ için $|f(x)| \leq M$ olacak biçimde $M \geq 0$ sayısının var olmasıdır. $f, g \in l_\infty(\Omega)$ olduğundan her $x \in \Omega$ için $|f(x)| \leq M$ ve $|g(x)| \leq N$ olacak biçimde $0 < M, N \in \mathbb{R}$ vardır

$$(i) \quad |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N > 0$$

$$(ii) \quad |(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| M > 0$$

(i) ve (ii)'den $l_\infty(\Omega)$ uzayı $\mathbb{R}^\Omega$ 'nin alt vektör uzayıdır. Böylece $l_\infty(\Omega)$, $\mathbb{R}^\Omega$ 'den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned}
f \in l_\infty(\Omega) &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } |f(x)| \leq M \text{ olacak biçimde } M \geq 0 \text{ vardır} \\
&\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } ||f(x)|| \leq M \text{ olacak biçimde } M \geq 0 \text{ vardır} \\
&\Rightarrow |f| \in l_\infty(\Omega)
\end{aligned}$$

Böylece $l_\infty(\Omega)$ Riesz uzayıdır.

2.4. Örnek

$$(1 \leq p \leq \infty \text{ için}) \quad \ell_p = \left\{ (x_n) : (x_n) \text{ reel dizi ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad \text{ve} \quad (x_n), (y_n) \in \ell_p$$

olmak üzere

$$“(x_n) \leq (y_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \leq y_n”$$

sıralaması ile $(\ell_p, \leq)$ sıralı vektör uzayı Riesz uzayıdır.

Çözüm

$(x_n), (y_n) \in \ell_p$ olsun. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \vee (y_n) = \max\{x_n, y_n\}$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n \vee y_n|^p \leq |x_n|^p + |y_n|^p$$

ve böylece

$$\sum_{n=1}^k |x_n \vee y_n|^p \leq \sum_{n=1}^k |x_n|^p + \sum_{n=1}^k |y_n|^p$$

her $k \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan $k \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \vee y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty$$

bulunur. Sonuç olarak $(x_n) \vee (y_n) \in \ell_p$ olduğundan ℓ_p Riesz uzayıdır.

2.5. Örnek

$\mathfrak{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 1. dereceden türevlenebilir fonksiyon}\}$ biçiminde tanımlı $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ alt vektör uzayı $\mathbb{R}^\Omega$ 'den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. Ancak $\mathfrak{R}$ Riesz uzayı değildir.

Çözüm

Aşağıdaki gibi tanımlı $f, g \in \mathfrak{R}$ elemanlarını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x & x &\rightarrow g(x) = -x \end{aligned}$$

her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 1$ ve $g'(x) = -1$ 'dir. $(f \vee g)(x) = \max\{fx, gx\} = |x|$ olup $x = 0$ için $f \vee g$ 'nin türevi yoktur. $f \vee g \notin \mathfrak{R}$ olduğu için $\mathfrak{R}$ Riesz uzayı değildir.

2.6. Örnek

$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = m.x, m \in \mathbb{R}\}$ biçiminde tanımlanan doğrusal fonksiyonların uzayı Riesz uzayı değildir. $V \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ alt vektör uzayı $\mathbb{R}^\Omega$ 'den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. Fakat V Riesz uzayı değildir.

Çözüm

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x, m_1 = -1 & x &\rightarrow g(x) = -x, m_2 = 1 \end{aligned}$$

biçimindeki $f, g \in V$ 'dir. $f \vee g = h$ diyelim ve kabul edelim ki $h \in V$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = mx$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{R}$ vardır. h üst sınır olduğu için $f \leq h$ ve $g \leq h$ dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için $fx \leq hx$ ve $gx \leq hx$ olur. $f(-1) = 1$, $g(-1) = -1$ olduğundan,

- $m \geq 0 \Rightarrow x = -1$ için $h(-1) = m(-1) \leq 0 \Rightarrow 0 \geq -m = h(-1) < f(-1) = 1$
- $m < 0 \Rightarrow x = 1$ için $h(1) = m(1) = m < 0 \Rightarrow h(1) < g(1) = 1$

her iki durumda h 'nın supremum olması ile çelişir. Sonuç olarak doğrusal fonksiyonların uzayı Riesz uzayı değildir.

2.7. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun, eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve bu durum $x \perp y$ biçiminde gösterilir. $\emptyset \neq A \subseteq E$ olmak üzere,

$$\{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$$

kümesine A kümesinin *dik tümleyeni* denir ve A^d ile gösterilir. $A, B \subseteq E$ alt kümeleri alındığında her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümeleri birbirine diktir denir ve $A \perp B$ biçiminde gösterilir.

2.7. Örnek

E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olmak üzere $x \perp y$ olması için gerekli ve yeterli koşul $|x + y| = |x - y|$ olmasıdır.

Çözüm

Teorem 2.1 gereği $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|)$ eşitliğini kullanarak,

$$|x| \wedge |y| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|) = 0 \Leftrightarrow (|x+y| - |x-y|) = 0 \Leftrightarrow |x+y| = |x-y|$$

eşitliği elde edilir.

2.8. Tanım

A ve B bir Riesz uzayının alt kümeleri olmak üzere, aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz;

$$\text{i)} \quad |A| = \{|a| : a \in A\}$$

$$\text{ii)} \quad A^+ := \{a^+ : a \in A\}$$

$$\text{iii)} \quad A^- := \{a^- : a \in A\}$$

$$\text{iv)} \quad A \vee B := \{a \vee b : a \in A, b \in B\}$$

$$\text{v)} \quad A \wedge B := \{a \wedge b : a \in A, b \in B\}$$

$$\text{vi)} \quad x \vee A := \{x \vee a : a \in A\}$$

$$\text{vii)} \quad x \wedge A := \{x \wedge a : a \in A\}$$

2.2. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Eğer $\sup A$ varsa her $x \in E$ için $\sup(x \wedge A)$ var ve $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ 'dır. Benzer şekilde, eğer $\inf A$ varsa her $x \in E$ için $\inf(x \vee A)$ var ve $\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$ 'dır [1].

2.9 Tanım

$\Lambda \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı verilsin. Eğer,

- (i) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \leq \lambda$
- (ii) Her $\lambda, \beta, \alpha \in \Lambda$ için $\lambda \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ iken $\lambda \leq \alpha$
- (iii) Her $\lambda, \beta \in \Lambda$ için $\lambda \leq \alpha$ ve $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Lambda$ vardır.

önergeleri sağlanırsa Λ kümesine $\leq$ bağıntısıyla *(yukarı) yönlendirilmiş küme* denir. $(\Lambda, \leq)$ yönlendirilmiş kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X içinde bir *ağ* denir.

(x_λ) E Riesz uzayında bir ağ (net) olsun; her $x_\lambda, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'deki sıralamaya göre $x_\lambda \leq x_\chi$ ve $x_\beta \leq x_\chi$ olacak şekilde bir $x_\chi \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) *ağı yukarı yönlendirilmiştir* denir ve $x_\lambda \uparrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup(x_\lambda) = a$, E içinde varsa $x_\lambda \uparrow a$ biçiminde gösterilir. Benzer şekilde her $x_\lambda, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'deki sıralamaya göre $x_\alpha \leq x_\lambda$ ve $x_\alpha \leq x_\beta$ olacak şekilde $x_\alpha \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) *ağı aşağı yönlendirilmiştir* denir ve $x_\lambda \downarrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf(x_\lambda) = b$, E içinde varsa $x_\lambda \downarrow b$ biçiminde gösterilir.

$(x_\lambda) \subseteq E$ ağı yerine herhangi bir $A \subseteq E$ alt kümesi alındığında;

- $A \uparrow$ ve $\sup A = a$, E içinde varsa $A \uparrow a$ biçiminde gösterilir.
- $A \downarrow$ ve $\inf A = b$, E içinde varsa $A \downarrow b$ biçiminde gösterilir.

2.10. Tanım

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E 'ye *Arşimedyen (Archimedean) Riesz uzayı* denir.

Fonksiyonel analizdeki bütün klasik uzaylar özellikle fonksiyon uzayları Arşimedyandır.

2.1. Lemma

E 'nin Arşimedyen Riesz uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in \mathbb{N}^+$ için $0 \leq ny \leq x$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}^+$ varken $y = 0$ olmasıdır.

2.8. Örnek

$\mathbb{R}^2$ 'de

$$“(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ veya } (x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2)”$$

biçiminde tanımlanan *Lexografik sıralama* ile $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayıdır. Ancak Arşimedyen Riesz uzayı değildir.

Çözüm

$(x, y) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ olduğunda $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \geq \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$ olduğu için $\frac{1}{n}(x, y) = \frac{1}{n}(1, 1) \downarrow$ 'dır. Ancak $\frac{1}{n}(1, 1) \downarrow 0$ değildir. Çünkü $0 = (0, 0) < (0, 1) \leq \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ olduğundan sıfır ile bu dizi arasında bir eleman vardır. Böylece $\inf \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\mathbb{R}^2$, *Lexografik sıralama* ile Arşimedyan Riesz uzayı değildir.

2.3. Teorem (Kantorovic)

E Riesz uzayı, F Arşimedyan Riesz uzayı ve $T: E^+ \rightarrow F^+$ toplamsal dönüşüm yani her $x, y \in E^+$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ olsun. O zaman T , E 'den F içine bir tek ve pozitif operatör olarak genişler. Bu genişleme yine T ile gösterilirse,

$$T: E \rightarrow F, \text{ her } x \in E \text{ için } T(x) = T(x^+) - T(x^-)$$

şeklindedir [1].

Sonuç olarak, E Riesz uzayı, F Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere $T: E^+ \rightarrow F^+$ dönüşümünün bir tek pozitif operatöre genişlemesi için gerekli ve yeterli koşul T 'nin toplamsal dönüşüm olmasıdır.

E ve F Riesz uzayları olmak üzere, E 'den F içine tanımlanan bütün operatörlerin (reel) vektör uzayı $L(E, F)$ ile gösterilir $L(E, F) = \{T \mid T: E \rightarrow F \text{ operatör}\}$. Her $S, T \in L(E, F)$ için,

$$“S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0”$$

şeklinde tanımlanan “ $\leq$ ” sıralaması ile $L(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned} T - S \geq 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } (T - S)(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Tx - Sx \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Tx \geq Sx \end{aligned}$$

olduğundan bağıntımızı her $S, T \in L(E, F)$ için,

$$“S \leq T \Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx \leq Tx”$$

olarak da verebiliriz.

Sıralı vektör uzayı olduğunu görmek için; $S \leq T$ olacak biçimde $S, T, Z \in L(E, F)$ $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alalım.

(i) $Sx, Tx, Zx \in F$ ve F ’nin sıralı vektör uzayı olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} S \leq T &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx \leq Tx \\ &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx + Zx \leq Tx + Zx \\ &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } (S + Z)x \leq (T + Z)x \\ &\Rightarrow S + Z \leq T + Z \end{aligned}$$

(ii) F Riesz uzayı ve $Sx, Tx \in F$ olduğundan

$$\begin{aligned} S \leq T &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx \leq Tx \\ &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } \lambda Sx \leq \lambda Tx \\ &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } (\lambda S)x \leq (\lambda T)x \\ &\Rightarrow \lambda S \leq \lambda T \end{aligned}$$

Bu durumda (i) ve (ii)’den $L(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

2.11. Tanım

E ve F Riesz uzayları olsun. $T: E \rightarrow F$ operatörü için $T \vee (-T)$ varsa bu supremuma T operatörünün *modülü* denir ve $|T|$ ile gösterilir.

2.4. Teorem

E bir Riesz uzayı, $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in E$ olmak üzere $|x| \leq |y_1 + y_2 + \dots + y_n|$ ise öyle $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları vardır ki $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere her i için $|x_i| \leq |y_i|$ 'dir. Eğer x elemanı pozitif alınırsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları pozitif seçilebilir [1].

2.5. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ operatör olmak üzere; her $x \in E^+$ için $\sup \{|Ty| : |y| \leq x\}$, F içinde varsa o zaman T 'nin modülü vardır ve her $x \in E^+$ için,

$$|T|(x) = \sup \{|Ty| : |y| \leq x\}$$

biçimindedir [1].

Sonuç

$T: E \rightarrow F$ lineer bir dönüşüm olsun. T 'nin modülü var ise her $x \in E$ için $|Tx| \leq |T||x|$ 'dir. Bu durumda her $x \in E^+$ için $|Tx| = |T|x$ olacağı açıktır.

İspat

Her $x \in E$ için $x = x^+ - x^-$ eşitliğini biliyoruz. $|T| = T \vee (-T)$ olduğu için supremum tanımından $T \leq |T|$, $-T \leq |T|$ 'dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\pm T \leq |T| &\Rightarrow \pm Tx^+ \leq |T|x^+ \text{ ve } \pm Tx^- \leq |T|x^- \\
&\Rightarrow \pm (Tx^+ - Tx^-) \leq |T||x| \\
&\Rightarrow \pm T(x) \leq |T||x| \\
&\Rightarrow |Tx| \leq |T||x|
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.12. Tanım

x ve y , E Riesz uzayında $x \leq y$ olacak şekilde iki eleman iken $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine *sıralı aralık*, E 'nin bir sıralı aralığı tarafından kapsanan alt kümesine de *sıra sınırlı küme* denir.

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ operatör olmak üzere; eğer T operatörü E deki her sıra sınırlı kümeyi F deki sıra sınırlı kümeye dönüştürüyorsa T operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir. E 'den F 'ye tanımlanan bütün sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir. T sıra sınırlı operatör ise $D \subseteq E$ sıra sınırlı kümesi için F içinde $T(D)$ alt kümesi sıra sınırlı olur.

$$L_b(E, F) = \{T \in L(E, F) : D \subseteq E \text{ sıra sınırlı küme iken } T(D) \subseteq F \text{ sıra sınırlı küme}\}$$

2.9. Örnek

Pozitif her operatör sıra sınırlıdır.

Çözüm

$A \subseteq E$ sıra sınırlı küme olsun. Bu durumda $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır. T pozitif operatör dolayısıyla sıra koruyan olduğundan her $a \in A$ için

$x \leq a \leq y$ dolayısıyla $T(x) \leq T(a) \leq T(y)$ olur ki bu da $T(A) \subseteq [T(x), T(y)]$ demektir. Böylece T sıra sınırlı operatördür.

2.10. Örnek

$L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ alt uzayı olduğu için $L_b(E, F)$, $L(E, F)$ üzerinde

“ $S \leq T \Leftrightarrow$ her $x \in E^+$ için $Sx \leq Tx$ ”

şeklindeki sıralama bağıntısı ile sıralı vektör uzayıdır. Ancak Riesz uzayı değildir.

Çözüm

Öncelikle $L_b(E, F)$ 'nin alt vektör uzayı olduğunu görelim

(i) $T, S \in L_b(E, F)$ ve $A \subseteq E$ sıra sınırlı küme olsun. Bu durumda $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır. Yani her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ 'dir. T ve S sıra sınırlı operatör olduğu için $T(A) \subseteq F$, $S(A) \subseteq F$ sıra sınırlı kümelerdir. Böylece $m \leq T(a) \leq n$, $k \leq S(a) \leq l$ olacak biçimde $m, n, k, l \in F$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m+k \leq Ta+Sa &= (T+S)(a) \leq n+l \Rightarrow (T+S)(A) \subseteq [m+k, n+l] \subseteq F \\ &\Rightarrow T+S \text{ sıra sınırlıdır.} \\ &\Rightarrow T+S \in L_b(E, F) \end{aligned}$$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \subseteq E$ sıra sınırlı küme olsun. Bu durumda $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ var ve böylece her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ olduğundan $\lambda \geq 0$ ise her $a \in A$ için $\lambda x \leq \lambda a \leq \lambda y$ 'dir. $T \in L_b(E, F)$ olduğu için $T(A) \subseteq F$ sıra sınırlı kümedir. Buradan her $a \in A$ için $m \leq T(a) \leq n$, $m, n \in F$;

$$\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda m \leq \lambda T(a) \leq \lambda n \Rightarrow (\lambda T)(A) \subseteq [\lambda m, \lambda n]$$

$$\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda n \leq \lambda T(a) \leq \lambda m \Rightarrow (\lambda T)(A) \subseteq [\lambda n, \lambda m]$$

olduğu için $\lambda T \in L_b(E, F)$ 'dir.

(i) ve (ii)'den $L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ alt vektör uzayıdır. Sonuç olarak $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

[1]'de Örnek 1.12'den biliyoruz ki c yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere, öyle bir $T: c \rightarrow c$ sıra sınırlı operatörü vardır öyle ki $L_b(c, c)$ içinde $|T|$ modülü yoktur. Yani herhangi bir E, F Riesz uzayları için $L_b(E, F)$ Riesz uzayı olmayabilir.

2.13. Tanım

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin infimumu varsa bu Riesz uzayına *Dedekind tam* (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

Önerme

E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ olacak şekilde her ağın E uzayı içinde supremumunun var olmasıdır.

E Riesz uzayının σ -Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ olacak şekilde her dizinin E uzayı içinde supremumunun var olmasıdır.

2.11. Örnek

$\Omega \neq \emptyset$, $l_\infty(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ Riesz uzayı Dedekind tamdır.

Çözüm

$0 \leq f_\alpha \leq f$ olacak şekilde f ile üstten sınırlı $f_\alpha \uparrow$ ağıının supremumunun olduğunu göstermek için

$$h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow hx = \sup_\alpha \{f_\alpha x\}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $x \in \Omega$ için $\mathbb{R}$ Dedekind tam Riesz uzayı ve $0 \leq f_\alpha x \leq fx$ olduğundan $\sup_\alpha \{f_\alpha x\} \in \mathbb{R}$ ve $x_1 = x_2$ için $hx_1 = hx_2$ olur ki böylece h dönüşümü anlamlı ve iyi tanımlı olduğundan fonksiyondur. Ayrıca her $x \in \Omega$ için $0 \leq f_\alpha x \leq fx \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ var olduğundan $0 \leq \sup_\alpha f_\alpha x \leq M$ yani $0 \leq hx \leq M$ ve bu da $h \in l_\infty(\Omega)$ demektir. Her $x \in \Omega$ ve her α için $f_\alpha x \leq \sup_\alpha f_\alpha x = h(x)$ olduğundan h bir üst sınırdır. Şimdi $f_\alpha \leq g$ ve $g \in l_\infty(\Omega)$ alalım. Her $x \in \Omega$ için $f_\alpha x \leq gx$ ise $\sup_\alpha f_\alpha x \leq gx$ yani $hx \leq gx$ olur. O halde $h = \sup_\alpha f_\alpha$ elde edilir ki bu da $l_\infty(\Omega)$ 'un Dedekind tam Riesz uzayı olduğunu gösterir.

2.6. Teorem (Riesz-Kantorovic)

E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayı, Dedekind tam Riesz uzayıdır ve her $S, T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için aşağıdakiler sağlanır [1].

$$(S \vee T)(x) = \sup \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$(S \wedge T)(x) = \inf \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$|T|(x) = \sup \{|T(y)| : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T^+(x) = \sup \{T(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T^-(x) = \sup \{-T(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

2.7. Teorem

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olmak üzere $\emptyset \neq D \subseteq L_b(E, F)$ ve $D \uparrow$ olsun. O zaman $\sup D \in L_b(E, F)$ olması için gerekli ve yeterli şart her $x \in E^+$ için $\{Tx : T \in D\} \subset F$ sıra sınırlı olmasıdır. Bu durumda her $x \in E^+$ için

$$(\sup D)x = \sup \{Tx : T \in D\}$$

'dir [1].

2.8. Teorem (Riesz Ayırıştırma Özelliği)

Bir Riesz uzayının $\{x_i : 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+\}$ ve $\{y_j : 1 \leq j \leq m, m \in \mathbb{N}^+\}$ şeklindeki pozitif elemanlarından oluşan sonlu alt kümelerini alalım. Eğer $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j$ ise

$x_i = \sum_{j=1}^m z_{ij}$, $i = 1, \dots, n$ ve $y_j = \sum_{i=1}^n z_{ij}$, $j = 1, \dots, m$ olacak şekilde pozitif elemanlardan

oluşan $\{z_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ sonlu alt kümesi vardır [1].

2.9. Teorem

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. O zaman her $S, T \in L_b(E, F)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır [1].

- (i) $\left\{ \sum_{i=1}^n S(x_i) \vee T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\} \uparrow S \vee T(x)$
- (ii) $\left\{ \sum_{i=1}^n S(x_i) \wedge T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\} \downarrow S \wedge T(x)$
- (iii) $\left\{ \sum_{i=1}^n |(Tx_i)| : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x \right\} \uparrow |T|(x)$

2.10. Teorem

E ve F Riesz uzayları, F σ -Dedekind tam olsun. $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör ise her $x \in E$ için aşağıdaki özellikler sağlanır [1].

- (i) $T(x^+) = \max \{ S(x) : S \in L(E, F); 0 \leq S \leq T \}$
- (ii) $T(x^-) = \max \{ -S(x) : S \in L(E, F); 0 \leq S \leq T \}$
- (iii) $T(|x|) = \max \{ S(x) : S \in L(E, F); -T \leq S \leq T \}$

2.14. Tanım

G vektör uzayı, F Riesz uzayı ve $p : G \rightarrow F$ bir fonksiyon olmak üzere eğer;

- i) Her $x, y \in G$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

ii) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

şartları sağlanırsa p 'ye *alt lineer dönüşüm* denir.

2.12. Örnek

$l_\infty = \{(x_n) : (x_n) \text{ reel terimli sınırlı dizi}\}$ olmak üzere Örnek 2.3'den $\Omega = \mathbb{N} - \{0\}$ olarak alınırsa

“($x_n \leq y_n$) $\Leftrightarrow$ her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ ”

noktasal sıralaması ile l_∞ Riesz uzayı olur. Reel sayılar kümesi Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $\inf_n \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) \in \mathbb{R}$ olur. O halde,

$$T : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x_n) \rightarrow T(x_n) = \limsup(x_n) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} x_k \right)$$

dönüşümü anlamlı ve iyi tanımlıdır. Şimdi bu fonksiyonun alt lineer olduğunu gösterebilmek için alt toplamsal ve pozitif homojen olduğunu gösterelim; $(x_n), (y_n) \in l_\infty$ olsun. Her $x_k \in (x_n), y_k \in (y_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_k + y_k &\leq \sup_{k \geq n} (x_k) + \sup_{k \geq n} (y_k) \Rightarrow \sup_{k \geq n} (x_k + y_k) \leq \sup_{k \geq n} (x_k) + \sup_{k \geq n} (y_k) \\ &\Rightarrow \inf_n \left(\sup_{k \geq n} (x_k + y_k) \right) \leq \inf_n \left(\sup_{k \geq n} (x_k) + \sup_{k \geq n} (y_k) \right) = \inf_n \sup_{k \geq n} (x_k) + \inf_n \sup_{k \geq n} (y_k) \\ &\Rightarrow \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n) \\ &\Rightarrow T(x_n + y_n) \leq T(x_n) + T(y_n) \end{aligned}$$

olduğundan T alt toplamsaldır. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $(x_n) \in l_\infty^+$ için

$$T(\alpha x_n) = \limsup(\alpha x_n) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} (\alpha x_k) \right) = \inf_n \left(\alpha \sup_{k \geq n} x_k \right) = \alpha \inf_n \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) = \alpha T(x_n)$$

olduğundan T pozitif homojendir. Böylece T alt lineer fonksiyondur.

2.11. Teorem (Hahn-Banach)

G vektör uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $p: G \rightarrow F$ alt lineer dönüşüm olsun. $H \subseteq G$ alt vektör uzayı olmak üzere her $x \in H$ için $S(x) \leq p(x)$ olacak biçimdeki $S: H \rightarrow F$ lineer dönüşümü için,

(i) H üzerinde $S = T$

(ii) Her $x \in G$ için $T(x) \leq p(x)$

şartlarını sağlayacak şekilde $T: G \rightarrow F$ lineer genişlemesi vardır [1].

2.15. Tanım

E Riesz uzayı ve G alt vektör uzayı olsun.

- Her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ ise G 'ye E 'nin *Riesz alt vektör uzayı* denir.
- Her $y \in E$ ve $x \in G$ olmak üzere $|y| \leq |x|$ iken $y \in G$ oluyorsa G 'ye (*sıra*) *ideal* denir. Her $x \in G$ için $[-|x|, |x|] \subseteq G$ olması için gerekli ve yeterli şart G 'nin sıra ideal olmasıdır.
- I ideal ve herhangi bir $\{x_\alpha\} \subseteq I$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in I$ oluyorsa, I ideale E uzayında *band* denir.
- $\emptyset \neq A \subseteq E$ altkümesini kapsayan en küçük Riesz alt uzayına (ideale/banda) A kümesinin ürettiği *Riesz alt uzayı (ideal/band)* denir.

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği ideal;

$$I_A = \left\{ x \in E : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, \text{ olacak şekilde } 0 \leq i \leq n \text{ olmak üzere } \lambda_i \in \mathbb{R}^+, x_i \in A \text{ ve} \right. \\ \left. \text{en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \right\}$$

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanının ürettiği ideal;

$$I_x = \{ y \in E : |y| \leq \lambda |x| \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ vardır} \}$$

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği band;

$$B_A = \{ x \in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq A \text{ var} \}$$

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanının ürettiği band;

$$B_x = \{ y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \}$$

biçiminde elde edilir [1].

Sonuç

Her sıra ideal bir Riesz alt uzayıdır.

İspat

G bir ideal ve $x \in G$ olsun. $||x| \leq |x|$ ve G ideal olduğundan $|x| \in G$ olur ki böylece G ideali aynı zamanda Riesz uzayıdır.

2.16. Tanım

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B 'ye *projeksiyon band* denir. Eğer E Dedekind tam ise $B \subseteq E$ bandı için $E = B \oplus B^d$ sağlanır. $P: E \rightarrow E$ lineer dönüşümü için $P^2 = P$ ise, P 'ye *projeksiyon* denir. P, E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P 'ye "*pozitif projeksiyon*" denir. $B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda

$E = B \oplus B^d$ ve her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in B, x_2 \in B^d$ $P_B: E \rightarrow E$; $P_B(x) = x_1$ biçiminde tanımlayalım.

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(x_1) = P(x_1 + 0) = x_1 = P(x)$$

olduğundan $P^2 = P$ 'dir.

$x \geq 0$ iken $x = x_1 + x_2$; $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ yazılışı tek türdür. Ayrıca, $P_B(x) = x_1 \geq 0$ olduğunu düşünürsek P_B pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde $P_{B^d}: E \rightarrow E$; $P_{B^d}(x) = x_2$ biçiminde tanımlandığından P_{B^d} projeksiyonu da pozitiftir. P_B pozitif projeksiyonuna "*sıralı projeksiyon*" ya da "*band projeksiyon*" denir.

2.12. Teorem

E Riesz uzayı, B projeksiyon band olsun. Her $x \in E^+$ için

$$P_B(x) = \sup\{y \in B : 0 \leq y \leq x\}$$

'dir [1].

2.13. Teorem

E Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [1].

- 1) T sıralı projeksiyondur
- 2) $I : E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$ 'dir.
- 3) T ve $I - T$ 'nin görüntüleri diktir. Yani her $x, y \in E$ için $Tx \perp y - Ty$ 'dir.

2.14. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere $A, B \subseteq E$, projeksiyon band iseler A^d , $A \cap B$, $A + B$ projeksiyon band'dir ve

- 1) $P_{A^d} = I - P_A$
- 2) $P_{A \cap B} = P_A P_B = P_B P_A$
- 3) $P_{A+B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$

eşitlikleri sağlanır [1].

2.15. Teorem

E Riesz uzayı ve $A, B \subseteq E$ projeksiyon band olmak üzere, aşağıdaki önermeler birbirine denktir [1].

- 1) $A \subseteq B$
- 2) $P_A P_B = P_B P_A = P_A$

$$3) \quad P_A \leq P_B$$

2.17. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x 'in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x 'e *projeksiyon eleman*, ürettiği banda *principal band* denir. Bir Riesz uzayında her eleman projeksiyon eleman ise bu uzaya *principal projeksiyon özelliğine sahiptir* denir. Bu durumda $E = B_x \oplus B_x^d$ olur.

2.16. Teorem

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. Bu durumda, x 'in projeksiyon eleman olması için gerekli ve yeterli koşul her $y \geq 0$ için $\sup\{y \wedge n|x|\}$ var ve her $y \geq 0$ için $P_x(y) = \sup\{y \wedge n|x|\}$ olmasıdır [1].

2.18. Tanım

E Riesz uzayı $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere;

- $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq E$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına *sıra yakınsar* denir ve $x_\alpha \rightarrow 0$ biçiminde gösterilir.
- $0 \leq u \in E$ alındığında, her $\varepsilon \geq 0$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in E$ bulunabiliyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x elemanına *u -düzgün yakınsar (düzgün yakınsar)* denir.
- E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör ve $\{x_\alpha\} \subseteq E$ olmak üzere, $x_\alpha \rightarrow 0$ iken F 'de $Tx_\alpha \rightarrow 0$ oluyorsa T operatörüne *sıra sürekli operatör* denir.

$\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması aynı zamanda; $x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olması veya $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ olması anlamına gelir. T sıra sınırlı operatör olarak alınırsa T 'nin sıra sürekli olması da $x_\alpha \downarrow 0$ iken $|Tx_\alpha| \downarrow 0$ olmasına denktir. E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E, F)$ ile gösterilir. Bu küme $L_b(E, F)$ 'nin alt uzayıdır ve $L_n(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ 'dir. F Dedekind tam olduğunda $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ içinde band olur. E üzerinde bütün sıra sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı $L_n(E, R) = E_n^-$ olarak gösterilir.

2.19. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere $L_b(E, \mathbb{R})$ operatörler uzayına E 'nin (sıra) duali denir ve E^- biçiminde gösterilir.

Her $0 \neq x \in E$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde $f \in E^-$ varsa, E^- 'ya E uzayının noktalarını ayıran (sıra) duali denir. E^- , E 'nin noktalarını ayıran sıra duali ise her $f \in E^-$ için $f(x) = 0$ iken $x = 0$ 'dır.

2.17. Teorem

E^- , E Riesz uzayının noktalarını ayıran sıra duali iken, herhangi bir $x \in E$ elemanının pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul her $0 \leq f \in E^-$ için $f(x) \geq 0$ olmasıdır [1].

2.20. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $f \in E^-$ ve $u \in F$ ise o zaman $f \otimes u$ ifadesi, her $x \in E$ için

$$f \otimes u(x) := f(x)u$$

biçiminde tanımlanan $L_b(E, F)$ 'nin sıra sınırlı bir operatörünü belirtir.

2.18. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere; eğer $0 \leq f \in E^\sim$ ve $u, v \in F$ ise o zaman $(f \otimes u) \vee (f \otimes v)$ ve $(f \otimes u) \wedge (f \otimes v)$ $L(E, F)$ içinde vardır ve

$$(f \otimes u) \vee (f \otimes v) = f \otimes (u \vee v), \quad (f \otimes u) \wedge (f \otimes v) = f \otimes (u \wedge v)$$

'dir [1]

3. DİKLİĞİ KORUYAN VE ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER

Bu bölümde Riesz uzayları arasında lineer bir dönüşümün, Riesz homomorfizmalarının sonlu bir toplamı olması için gerekli ve yeterli durumlar incelenecektir. Çalışmamızdaki E ve F uzaylarının gerçel Riesz uzayları olduğunu kabul ediyoruz.

3.1. Dikliği Koruyan Operatörler

Bu bölümde pozitif operatörlerin özel bir sınıfını öğreneceğiz. Bu sınıftaki operatörler lattice operatörleri olarak bilinir ve *lattice (Riesz) homomorfizmaları* olarak adlandırılır.

3.1. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun. Herhangi iki $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa, T 'ye *dikliği koruyan operatör* denir.

3.1. Lemma (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985)

E ve F Riesz uzayları, F Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatör ise her $x, y \in E^+$ için

$$(Tx)^+ \wedge (Ty)^- = 0$$

'dir [2].

3.2. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ eşitliği gerçekleşiyorsa, T operatörüne *lattice (Riesz) homomorfizması* denir.

Herhangi bir $x \in E^+$ alalım. T lattice homomorfizması ise

$$T(x^+) = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = Tx \vee 0 = (Tx)^+ \geq 0$$

olduğundan her lattice homomorfizması aynı zamanda pozitif operatördür.

E, F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ lattice homomorfizması olsun. $T(E) \subseteq F$ alt vektör uzayı olduğu açıktır ve dolayısıyla $T(E)$ uzayı F 'den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. $u, v \in T(E)$ alalım. Bu durumda $T(x) = u$ ve $T(y) = v$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır. T 'nin lattice homomorfizması olması ve E 'nin Riesz uzayı olması sebebiyle $x \vee y \in E$ olacağından $u \vee v = Tx \vee Ty = T(x \vee y) \in T(E)$ elde edilir. Böylece bir lattice homomorfizmasının görüntüsü Riesz alt vektör uzayıdır.

3.1. Teorem

E ve F iki Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

- 1) T operatörü Riesz homomorfizmasıdır
- 2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$
- 3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$
- 4) Her $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ ise F uzayı içinde $Tx \wedge Ty = 0$
- 5) Her $x \in E$ için $T(|x|) = |Tx|$

İspat

(1 $\Rightarrow$ 2) $x \in E$ olmak üzere T 'nin lattice homomorfizması olması ve Riesz uzayında bir elemanın pozitif kısım tanımını kullanarak,

$$x^+ = x \vee 0 \Rightarrow T(x^+) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = T(x) \vee 0 = [T(x)]^+$$

elde edilir.

(2 $\Rightarrow$ 3) Her $x, y \in E$ olmak üzere Teorem 2.1 ile Riesz uzayında bir elemanın pozitif kısmının tanımını kullanarak, öncelikle $x \wedge y = x - (x - y)^+$ eşitliğini elde edelim.

$$\begin{aligned} x - (x - y)^+ &= x - [(x - y) \vee 0] \\ &= x - [-(y - x) \vee 0] \\ &= x + [(y - x) \wedge 0] \\ &= (x + y - x) \wedge (x + 0) \\ &= y \wedge x \dots * \end{aligned}$$

'dir. * eşitliğini, hipotez ve T 'nin lineerliğini kullanarak

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T(x - (x - y)^+) \\ &= T(x) - T[(x - y)^+] \\ &= T(x) - [T(x - y)]^+ \\ &= T(x) - [T(x) - T(y)]^+ \\ &= T(x) \wedge T(y) \end{aligned}$$

$T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ eşitliğini elde ederiz.

(3 $\Rightarrow$ 4) $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ olsun. Bu durumda hipotezden $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ olduğundan $T(0) = T(x) \wedge T(y)$ ve $0 = T(x) \wedge T(y)$ elde edilir.

(4 $\Rightarrow$ 5) $x \in E$ olmak üzere hipotez ve Teorem 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 |T(x)| &= |T(x^+ - x^-)| = |T(x^+) - T(x^-)| \\
 &= Tx^+ \vee Tx^- - (Tx^+ \wedge Tx^-) \\
 &= Tx^+ \vee Tx^- - 0 \\
 &= \frac{1}{2} [Tx^+ + Tx^- + |Tx^+ - Tx^-|] \\
 &= \frac{1}{2} [T(|x|) + |T(x)|]
 \end{aligned}$$

eşitliğinden her $x \in E$ için $|T(x)| = T(|x|)$ elde edilir.

(5 $\Rightarrow$ 1) Teorem 2.1 ve hipotez kullanılarak, herhangi $x, y \in E$ için

$$\begin{aligned}
 T(x \vee y) &= T\left[\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)\right] \\
 &= \frac{1}{2} [Tx + Ty + T(|x - y|)] \\
 &= \frac{1}{2} [Tx + Ty + |T(x - y)|] \\
 &= \frac{1}{2} [Tx + Ty + |Tx - Ty|] \\
 &= Tx \vee Ty
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3 ve Teorem 3.1'i birlikte düşündüğümüzde aşağıdaki sonucu elde ederiz;

Sonuç

“ $T : E^+ \rightarrow F^+$ dönüşümü E^+ içinde toplamsal ve $x \wedge y = 0$ iken $Tx \wedge Ty = 0$ oluyorsa, bu durumda T dönüşümü E ’den F içine bir tek lattice homomorfizması olarak genişletilebilir.” Bu genişlemeyi $\hat{T}$ ile gösterirsek;

$$\begin{aligned}\hat{T}(x) \wedge \hat{T}(y) &= [T(x^+) - T(x^-)] \wedge [T(y^+) - T(y^-)] \\ &= T(x^+ - x^-) \wedge T(y^+ - y^-) \\ &= Tx \wedge Ty \\ &= 0\end{aligned}$$

eşitliği $\hat{T}$ ’nin lattice homomorfizması olduğu anlamına gelir.

3.2. Lemma (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E ve F Riesz uzayları olmak üzere; $T : E \rightarrow F$ operatörünün lattice homomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T ’nin pozitif ve dikliği koruyan operatör olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$) T ’nin lattice homomorfizması olduğunu kabul edelim. Her $x \in E^+$ için

$$Tx = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = Tx \vee 0 \geq 0$$

olduğundan T pozitif operatördür. $|x| \wedge |y| = 0$ olacak biçimdeki her $x, y \in E$ için

$$|Tx| \wedge |Ty| = T|x| \wedge T|y| = 0$$

eşitliğinden T operatörü dikliği koruyandır.

($\Leftarrow$) T 'nin pozitif ve dikliği koruyan operatör olduğunu kabul edelim. $x \wedge y = 0$ olacak biçimdeki her $x, y \in E^+$ için $x = |x|$, $y = |y|$ olduğundan $|x| \wedge |y| = 0$ demektir.

Bu durumda

$$0 \leq Tx \wedge Ty \leq |Tx| \wedge |Ty| = 0$$

olacağından T lattice homomorfizması olur.

3.1. Örnek

Her sıra (band) projeksiyon lattice homomorfizmasıdır.

Çözüm

E Riesz uzayı, $B \subseteq E$ projeksiyon band ve $P_B : E \rightarrow E$ band projeksiyon olsun. B projeksiyon band olduğundan $E = B \oplus B^d$ olarak yazılabilir. $x \in E$ alalım ve $|x| = x^+ + x^-$ olduğundan $x^+ \in B$, $x^- \in B^d$ ve $x^+, x^- \geq 0$ 'dır.

$$P_B(|x|) = P_B(x^+ + x^-) = x^+ = |x^+| = |P_B(x^+ + x^-)| = |P_B(x)|$$

olup Teorem 3.1 gereği P_B lattice homomorfizmasıdır.

3.2. Örnek

Sürekli fonksiyonların uzayı Riesz uzayı olduğundan $C[-1,1]$ Riesz uzayıdır. $T : C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$; her $x \in C[-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ için $T(fx) = xf(x)$ biçiminde tanımlanan T dönüşümü lineer ve dikliği koruyan operatördür.

Çözüm

$f, g \in C[-1, 1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in [-1, 1]$ için;

$$T(f + g)(x) = x.(f + g)(x) = x(fx + gx) = xf(x) + xg(x) = Tfx + Tgx$$

$$T(\lambda f)(x) = x(\lambda f)(x) = x\lambda f(x) = \lambda xf(x) = \lambda Tf(x)$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir. $f \perp g$ olacak biçimde $f, g \in C[-1, 1]$ elemanları ve $x \in [-1, 1]$ için,

$$\begin{aligned} (|Tf| \wedge |Tg|)(x) &= \min\{|Tf|(x), |Tg|(x)\} = \min\{|Tf(x)|, |Tg(x)|\} \\ &= \min\{|xf(x)|, |xg(x)|\} = |x| \min\{|f(x)|, |g(x)|\} \\ &= |x|(|f| \wedge |g|)(x) = |x|.0 = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden T dönüşümü dikliği koruyandır.

3.3. Örnek

$\mathbf{1} \in C[0, 1]$ ve her $x \in [0, 1]$ için $\mathbf{1}(x) = 1$ olmak üzere

$$S, T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; f \rightarrow S(f) = f(0).\mathbf{1} \text{ ve } f \rightarrow T(f) = f(1).\mathbf{1}$$

olsun. S, T dikliği koruyan operatörlerdir.

Çözüm

Örnek 2.2'den $C[0, 1]$ sürekli fonksiyon uzayının Riesz uzayı olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}
S(f \vee g)(x) &= (f \vee g)(0) \cdot \mathbf{1}(x) = \max\{f(0), g(0)\} \cdot \mathbf{1}(x) \\
&= \max\{f(0) \cdot \mathbf{1}(x), g(0) \cdot \mathbf{1}(x)\} \\
&= (f(0) \cdot \mathbf{1} \vee g(0) \cdot \mathbf{1})(x) \\
&= (S(f) \vee S(g))(x)
\end{aligned}$$

olduğundan S lattice homomorfizmasıdır. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}
T(f \vee g)(x) &= (f \vee g)(1) \cdot \mathbf{1}(x) = \max\{f(1), g(1)\} \cdot \mathbf{1}(x) \\
&= \max\{f(1) \cdot \mathbf{1}(x), g(1) \cdot \mathbf{1}(x)\} \\
&= (f(1) \cdot \mathbf{1} \vee g(1) \cdot \mathbf{1})(x) \\
&= (T(f) \vee T(g))(x)
\end{aligned}$$

olduğundan T lattice homomorfizmasıdır. Sonuç olarak Lemma 3.2'den S ve T pozitif ve dikliği koruyan operatörlerdir.

$T_1, T_2 \in L_b(E, F)$; T_1, T_2 lattice homomorfizması iken $T_1 + T_2$ lattice homomorfizması olmak zorunda değildir. Bu önermenin doğruluğunu göstermek için Örnek 3.3'de tanımlanan S ve T lattice homomorfizmalarını ve

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{3}{5} \text{ ise} \\ x - \frac{3}{5}, & x \geq \frac{3}{5} \text{ ise} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} - x, & x \leq \frac{2}{5} \text{ ise} \\ 0, & x \geq \frac{2}{5} \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f, g \in C[0,1]$ fonksiyonlarını dikkate alalım. Her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
(|f| \wedge |g|)(x) &= \min \{|f|(x), |g|(x)\} = \min \{|f(x)|, |g(x)|\} \\
&= |f(x)| \wedge |g(x)| = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{2}{5} \\ 0, & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 0, & x \geq \frac{3}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

olduğundan $|f| \wedge |g| = 0$ 'dır.

$$\begin{aligned}
(S+T)|f| \wedge (S+T)|g| &= (|f|(0) + |f|(1)) \cdot 1 \wedge (|g|(0) + |g|(1)) \cdot 1 \\
&= (|f(0)| + |f(1)|) \cdot 1 \wedge (|g(0)| + |g(1)|) \cdot 1 \\
&= \left(0 + \frac{2}{5}\right) \cdot 1 \wedge \left(\frac{2}{5} + 0\right) \cdot 1 \\
&= \frac{2}{5} \neq 0
\end{aligned}$$

Sonuç olarak herhangi $f, g \in C[0,1]$ ve $|f| \wedge |g| = 0$ iken $(S+T)|f| \wedge (S+T)|g| \neq 0$ olduğu için $S+T$ lattice homomorfizması değildir. Dolayısıyla bir lattice uzayında tanımlanan dikliği koruyan operatörlerin kümesi, vektör uzayı olmak zorunda değildir.

3.2. Aralık Koruyan Operatörler

Bu kısımda amacımız lattice homomorfizmalar ile aralık koruyan operatörler arasındaki ilişkileri incelemek olacaktır. Aralık koruyan operatör kavramı ilk olarak D. Maharom tarafından ortaya çıkarılmıştır.

3.3. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olmak üzere, her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa, T operatörüne *aralık koruyan operatör* denir.

Şimdi aralık koruyan operatörler ile ilgili sonuçları verelim;

Sonuç

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. $x \in E^+$ olmak üzere; “ T operatörünün aralık koruyan olması için gerekli ve yeterli şart $0 \leq y \leq Tx$ iken $Tu = y$ olacak biçimde bir $u \in [0, x]$ olmasıdır.”

İspat

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör ve $x \in E^+$ olmak üzere;

($\Rightarrow$) T operatörü aralık koruyan ve $0 \leq y \leq Tx$ olduğunu kabul edelim. $T[0, x] = [0, Tx]$ olduğu için $y \in [0, Tx]$ iken $y \in T[0, x]$ olur ki böylece $0 \leq u \leq x$ iken $y = Tu$ olacak biçimde $u \in E$ vardır.

($\Leftarrow$) $0 \leq y \leq Tx$ iken $Tu = y$ olacak şekilde $u \in [0, x]$ olduğunu kabul edelim. $y \in [0, Tx]$ alalım, hipotez gereği $Tu = y$ olacak şekilde $u \in [0, x]$ elemanı vardır. Buradan $Tu = y \in T[0, x]$ olur ki böylece $[0, Tx] \subseteq T[0, x]$ elde edilir. Şimdi de herhangi $y \in T[0, x]$ alalım, bu durumda $y = Tu$ olacak şekilde $u \in [0, x]$ elemanı vardır. T operatörünün pozitif, dolayısıyla sıra koruyan olduğu kullanılarak

$$0 \leq u \leq x \Rightarrow 0 \leq Tu \leq Tx \Rightarrow 0 \leq y \leq Tx \Rightarrow y \in [0, Tx]$$

bulunur ki böylece $T[0, x] \subseteq [0, Tx]$ olur. Alt küme bağıntısının ters simetrik özelliği düşünüldüğünde $T[0, x] = [0, Tx]$ elde edilir. Sonuç olarak T aralık koruyan operatördür.

Sonuç

Aralık koruyan operatörün görüntüsü idealdir.

İspat

$x \in E^+$ olmak üzere $0 \leq y \leq Tx$ olacak biçimdeki $y \in F$ elemanı alındığında, T operatörü aralık koruyan olduğu için $y \in T[0, x]$ 'dir. Bu durumda $y = Tz \in T(E)$ olacak şekilde $z \in [0, x]$ vardır. Böylece $T(E)$ görüntü kümesi idealdir.

Sonuç

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. $T(E)$ 'nin ideal olması T operatörünün aralık koruyan olmasını gerektirmez.

3.4. Örnek

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \rightarrow T(x, y) = (x + y, y)$ biçiminde tanımlanan operatör için $T(\mathbb{R}^2)$ görüntü kümesi idealdir ancak T operatörü aralık koruyan değildir.

Çözüm

Öncelikle T 'nin pozitif operatör olduğunu gösterelim;

- Anlamlı olduğunu görmek için $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alalım. Bu durumda $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ vektör uzayı olduğundan $x + y \in \mathbb{R}$ olur ki böylece $(x + y, y) \in \mathbb{R}^2$ olacağından T anlamlıdır.

- İyi tanımlılığını görmek için $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$\begin{aligned}
a = b &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \\
&\Rightarrow (x_1 + y_1, y_1) = (x_2 + y_2, y_2) \Rightarrow T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \Rightarrow Ta = Tb \\
&\Rightarrow T \text{ iyi tanımlıdır.}
\end{aligned}$$

- Lineerliğini görmek için $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$\begin{aligned}
\lambda Ta + Tb &= \lambda T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = \lambda(x_1 + y_1, y_1) + (x_2 + y_2, y_2) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda y_1) + (x_2 + y_2, y_2) \\
&= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda y_1 + y_2) \\
&= T(\lambda a + b) \\
&\Rightarrow T \text{ lineerdir.}
\end{aligned}$$

- Pozitifliğini görmek için $0 \leq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$\begin{aligned}
0 \leq (x, y) &\Rightarrow 0 \leq x \text{ ve } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x + y \text{ ve } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq (x + y, y) \Rightarrow 0 \leq T(x, y) \\
&\Rightarrow T \text{ pozitifdir}
\end{aligned}$$

- Örtten olduğunu görmek için $b = (m, n) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $m = m - n + n$ yazılabilir ve $m, n \in \mathbb{R}$ olduğundan $m - n, n \in \mathbb{R}$ 'dir. $a = (m - n, n)$ olacak biçimde $a \in \mathbb{R}^2$ elemanını alalım. Bu durumda $Ta = T(m - n, n) = (m - n + n, n) = (m, n) = b$ olduğu için T operatörü örtendir.

$u, v \in \mathbb{R}^2$ aldığımızda T operatörü örtten olduğundan $Tx = u$ ve $Ty = v$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}^2$ vardır. $|u| \leq |v|$ ve $v \in T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ olsun. T operatörü örtten olduğundan $u \in \mathbb{R}^2 = T\mathbb{R}^2$ elde edilir. Sonuç olarak T örtten olduğunda $T\mathbb{R}^2$ görüntüsü idealdir.

$(0, 1) \in [(0, 0), T(1, 1)]$ alalım. Bu durumda $(0, 0) \leq (0, 1) \leq (2, 1) = T(1, 1)$ olduğundan $T(a, b) = (0, 1)$ olacak şekilde $(0, 0) \leq (a, b) = u \leq (1, 1) = x$ aralığında eleman bulamayız. Böylece T operatörü aralık koruyan değildir.

Sonuç

E bir Riesz uzayı olmak üzere herhangi bir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif lineer operatörü aralık koruyandır.

İspat

Herhangi bir $x \in E^+$ olmak üzere her $u \in [0, x]$ için $0 \leq u \leq x$ 'dir. f pozitif olduğundan $0 \leq f(u) \leq f(x)$ olur ki, bu $f[0, x] \subseteq [0, f(x)]$ anlamına gelir. $y \in [0, fx]$ alalım. Bu durumda $0 \leq y \leq fx$ 'dir.

- $fx = 0$ olsun. Buradan $y = 0$ olur ki $u = 0$ alırsak $u \in [0, x]$ ve $f(u) = y$ 'dir.
- $fx \neq 0$ olsun. $\lambda = \frac{y}{fx}$ olmak üzere $u = \lambda x$ diyelim. $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğundan $u \in [0, x]$ ve $f(u) = f(\lambda x) = f\left(\frac{y}{fx} x\right) = \frac{y}{fx} fx = y$ olur. Bu da $[0, fx] \subseteq f[0, x]$ anlamına gelir. Sonuç olarak $f[0, x] = [0, fx]$ eşitliğini elde ederiz.

Sonuç

Aralık koruyan operatörler ile lattice homomorfizmaları birbirinden bağımsızdırlar.

3.5. Örnek

$\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \phi(f) = \int_0^1 f(t) dt$, şeklinde tanımlanan ϕ pozitif operatörü aralık koruyandır fakat lattice homomorfizması değildir.

Çözüm

İntegral fonksiyonu pozitif olduğu için $f \geq 0$ aldığımızda $\phi(f) \geq 0$ olur. Her pozitif lineer fonksiyonel aralık koruyan olduğu için ϕ operatörü de aralık koruyandır. lattice homomorfizması olmadığını göstermek için,

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \rightarrow fx = x - \frac{1}{2}$$

biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonu alalım.

$$|\phi f| = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \right| = \left| \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right)_0^1 \right| = |0 - 0| = 0 \dots *$$

$$|f|x = |fx| = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ x - \frac{1}{2}, & x \geq \frac{1}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlanışını kullanarak

$$\begin{aligned} \phi(|f|) &= \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = \int_0^{1/2} \left(-x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right)_0^{1/2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right)_{1/2}^1 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \dots ** \end{aligned}$$

buluruz. * ve ** gereğince $|\phi f| < \phi(|f|)$ dir. $|\phi f| \neq \phi(|f|)$ olduğundan Teorem 3.1 gereği ϕ Riesz homomorfizması değildir.

3.6. Örnek

$L_1[0,1] = \{g \mid g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ integrallenebilir fonksiyon} \}$ olmak üzere

$$T : C[0,1] \rightarrow L_1[0,1], f(t) \rightarrow T(f(t)) = t.f(t), t \in [0,1]$$

biçiminde tanımlanan T operatörü lattice homomorfizmasıdır ancak aralık koruyan değildir;

Çözüm

$f \in C[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$T|f(t)| = t|f(t)| = |tf(t)| = |Tf(t)|$$

eşitliğinden T Riesz homomorfizmasıdır. $\mathbf{1} \in C[0,1]$ ve her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{1}(t) = 1$ olacak şekildeki sabit fonksiyonu belirtmek üzere; her $t \in [0,1]$ için $0 \leq \sin t \leq 1$ 'dir ve buradan $0 \leq t \left| \sin \frac{1}{t} \right| \leq t = T\mathbf{1}(t) = t.1$ doğrudur. Şimdi T 'nin aralık koruyan operatör olmadığını olmayana ergi yöntemini kullanarak ispatlayalım. Bunun için T 'nin aralık koruyan operatör olduğunu kabul edelim. Her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{1}(t) = 1$ biçiminde tanımlanan sabit fonksiyon $C[0,1]$ 'in elemanıdır.

$$h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow h(t) = \begin{cases} t \left| \sin \frac{1}{t} \right| & : t \neq 0 \\ 0 & : t = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonu integrallenebilirdir ve her $t \in [0,1]$ için $0 \leq h(t) \leq t = T.\mathbf{1}(t)$ sağlanır. T operatörü aralık koruyan olduğundan $0 \leq f \leq \mathbf{1}$ ve

$t \in [0,1]$ için $T(f)(t) = h(t)$ olacak şekilde $f \in C[0,1]$ vardır. Bu ve T 'nin tanımı her $t \in [0,1]$ için $T(f)(t) = t.f(t) = h(t)$ olmasını gerektirir. O halde her $t \in [0,1]$ için $f(t) = \frac{h(t)}{t} = \left| \sin \frac{1}{t} \right|$ olur. f sürekli olduğundan $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ vardır. Bu bize $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \sin \frac{1}{t} \right|$ limitinin var olmasını verir ki bu bir çelişkidir. O halde T operatörü aralık koruyan olamaz.

Sonuç

İki aralık koruyan operatörün toplamı aralık koruyan olmayabilir.

3.7. Örnek

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow T_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow T_2(x_1, x_2) = (x_2, 0)$$

biçiminde tanımlanan T_1, T_2 lineer operatörlerdir. Ancak toplamları olan $T_1 + T_2$ operatörü aralık koruyan değildir.

Çözüm

$$0 \leq (x_1, x_2) = a \in \mathbb{R}^2 \text{ olmak üzere}$$

$$T_1(a) = (x_1, x_2) \geq (0, 0) \text{ ve } T_2(a) = T_2(x_1, x_2) = (x_2, 0) \geq (0, 0)$$

olduğundan T_1, T_2 pozitif operatörlerdir. $x \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $0 \leq y \leq T_1 x$ olsun. Bu durumda $0 \leq (y_1, y_2) \leq T_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ olduğundan $u = (y_1, y_2)$ seçersek $u \in [0, x]$ iken $T_1 u = T_1(y_1, y_2) = y$ sağlanır. Böylece T_1 aralık koruyan operatördür.

$x \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $0 \leq y \leq T_2 x$ olsun. Bu durumda $0 \leq (y_1, y_2) \leq T_2(x_1, x_2) = (x_2, 0)$ olduğundan $y_1 \leq x_2$ ve $y_2 \leq 0$ dolayısıyla $y_2 = 0$ olur. $u = (y_2, y_1) = (0, y_1)$ seçersek $u \in [0, x]$ iken $T_2 u = T_2(y_2, y_1) = T_2(0, y_1) = (y_1, 0)$ sağlanır. Böylece T_2 aralık koruyan operatördür.

$T_1 + T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(T_1 + T_2)(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$ biçimindeki operatörün aralık koruyan olmadığını Örnek 3.4'de ispatlamıştık. Sonuç olarak aralık koruyan operatörlerin toplamı aralık koruyan olmayabilir.

Sonuç

E ve F Riesz uzayları, $R : E \rightarrow F$, aralık koruyan operatör ve $x \in E$ olmak üzere; “ $y + z = Rx$ olacak şekilde $y, z \in [0, Rx]$ elemanlarının var olması için gerekli ve yeterli koşul $u + v = x$, $y = Ru$ ve $z = Rv$ olacak şekilde $u, v \in [0, x]$ var olmasıdır.”

İspat

($\Rightarrow$) $y + z = Rx$ olacak şekilde $y, z \in [0, Rx]$ elemanlarının var olduğunu kabul edersek $0 \leq y \leq Rx$ ve $0 \leq z \leq Rx$ olur. R aralık koruyan operatör olduğundan $Ru = y$ ve $Rv = z$ olacak biçimde $0 \leq u \leq x$ ve $0 \leq v \leq x$ elemanları vardır. $v = x - u$ seçilirse $Rv = Rx - Ru = Rx - y = z$ eşitliğinden istenilen elde edilir.

($\Leftarrow$) $y = Ru$, $z = Rv$ ve $u + v = x$ olacak şekilde $u, v \in [0, x]$ elemanlarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \leq u \leq x$ ve $0 \leq v \leq x$ olur. R pozitif olduğundan sıra koruyandır ki böylece $0 \leq Ru = y \leq Rx$ ve $0 \leq Rv = z \leq Rx$ elde edilir. Buradan $y, z \in [0, Rx]$ ve $y + z = Ru + Rv = R(u + v) = Rx$ bulunur.

3.3. Adjoint Operatörü, Dikliği Koruyan ve Aralık Koruyan Operatörler Arasındaki İlişkiler

3.4. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere her $f \in F^\sim$ ve her $x \in E$ için

$$T^\sim f(x) = (f \circ T)(x) = f(T(x))$$

şeklinde tanımlanan $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ operatörüne T 'nin (sıra) *adjointi* denir. Adjoint operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) T lineer iken $T^\sim$ lineerdir.

T ve f operatörlerinin lineer olmasını kullanarak her $x, y \in E$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} T^\sim f(\alpha x + y) &= (f \circ T)(\alpha x + y) = f(T(\alpha x + y)) \\ &= f(T(\alpha x) + Ty) = f(T(\alpha x)) + f(Ty) \\ &= \alpha f(Tx) + T^\sim fy = \alpha T^\sim fx + T^\sim fy \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) T sıra sınırlı iken $T^\sim$ sıra sınırlıdır. Bu özellik Teorem 3.2'de gösterilecektir.

iii) T pozitif iken $T^\sim$ pozitifdir;

$0 \leq f \in F^\sim$ iken her $x \in E^+$ için $T^\sim f(x) = f(Tx) \geq 0$ dır.

3.2. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ sıra adjointi sıra sınırlı ve sıra sürekli operatördür [1].

İspat

$T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere öncelikle $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ sıra adjointinin sıra sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq f \in F^\sim$ alalım ve

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^n |T^\sim f_i| : f_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^n f_i = f \right\}$$

kümesini tanımlayarak $E^\sim$ içinde $D \uparrow$ olduğunu iddia edelim. Bunu görmek için

$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{j=1}^m g_j = f$ olacak biçimdeki $f_1, \dots, f_n \in F^\sim_+$ ve $g_1, \dots, g_m \in F^\sim_+$ elemanlarını

seçelim. Teorem 2.8'e göre $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} = f$ olacak biçimde $f_i = \sum_{j=1}^m h_{ij}$ ($1 \leq i \leq n$) ve

$g_j = \sum_{i=1}^n h_{ij}$ ($1 \leq j \leq m$) biçimindeki $h_{ij} \in F^\sim_+$ fonksiyonları vardır. Diğer yandan

$$\sum_{i=1}^n |T^\sim f_i| = \sum_{i=1}^n \left| T^\sim \left(\sum_{j=1}^m h_{ij} \right) \right| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m T^\sim h_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |T^\sim h_{ij}|$$

ve benzer olarak

$$\sum_{j=1}^m |T^\sim g_j| = \sum_{j=1}^m \left| T^\sim \left(\sum_{i=1}^n h_{ij} \right) \right| = \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n T^\sim h_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |T^\sim h_{ij}|$$

olur ki bu da $E^\sim$ içinde $D \uparrow$ olduğunu yani herhangi bir $d_1, d_2 \in D$ iken $d_1 \leq d_3$ ve

$d_2 \leq d_3$ olacak biçimde $d_3 \in D$ olduğunu gösterir. Şimdi $x \in E^+$ olmak üzere T

operatörü sıra sınırlı olduğu için her $|y| \leq x$ için $|Ty| \leq u$ sağlayacak biçimde en az bir $u \in F^+$ elemanı vardır. Bundan dolayı $\sum_{i=1}^n f_i = f$ özelliğini sağlayan $f_1, \dots, f_n \in F_+^-$ elemanları için, $|Ty| \leq u$ olması kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n |T^- f_i|, x \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \sup \{ \langle T^- f_i, y \rangle : |y| \leq x \} \\ &= \sum_{i=1}^n \sup \{ \langle f_i, Ty \rangle : |y| \leq x \} \leq \sum_{i=1}^n \langle f_i, u \rangle = f(u) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $\{\phi(x) : \phi \in D\}$ kümesi her $x \in E^+$ için $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlıdır. Teorem 2.7'den dolayı E^- içinde $h = \sup D$ vardır. Çünkü eğer $0 \leq f \in F^-$ ve $0 \leq g \leq f$ iken $0 \leq g$, $f - g \geq 0$, $g + f - g = f$ ve $g = f_1$, $f - g = f_2$ olarak düşünülürse $|T^- g| + |T^- (f - g)| = \sum_{i=1}^2 |T^- f_i| \in D$ 'dir. $\sup D = h$ olduğundan $|T^- g| \leq |T^- g| + |T^- (f - g)| \leq h$ E^- içinde sağlanır ki bu da $T^- [0, f] \subseteq [-h, h]$ olduğunu gösterir. Böylece $T^- : F^- \rightarrow E^-$ sıra sınırlıdır. Son olarak T^- 'nin sıra sürekli olduğunu görelim. F^- içinde $f_\alpha \downarrow 0$ ve $x \in E^+$ sabit nokta olsun. Her $|y| \leq x$ için $|Ty| \leq y$ olacak biçimdeki $u \in F^+$ elemanlarını seçelim.

Teorem 2.9'den $\left\{ \sum_{i=1}^n |T^- f_i| : f_i \in F_+^- \text{ ve } \sum_{i=1}^n f_i = f \right\} \uparrow |T^-| f$ ve (*)'dan

$$\sum_{i=1}^n |T^- f_i|(x) \leq f(u) \text{ olması kullanılarak her } 0 \leq f \in F^- \text{ için } |T^-| f(x) \leq f(u)$$

olduğu sonucu çıkar. Böylece $|T^-| f_\alpha(x) \leq f_\alpha(u) \downarrow 0$ ise her $x \in E^+$ için $|T^-| f_\alpha(x) \downarrow 0$ olduğundan $|T^-| f_\alpha \downarrow 0$, E^- içinde sağlanır. Buradan $|T^-|$ sıra sürekli ve böylece aynı şekilde T^- sıra sürekli.

3.3. Lemma

E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör ise her $f \in F^\sim$ ve her $x \in E^+$ için,

$$f(|Tx|) \leq |T^\sim| f(x)$$

'dir [1].

İspat

$0 \leq f \in F^\sim$ ve $x \in E^+$ alalım. Teorem 2.10'den $-g \leq f \leq g$ olacak biçimdeki her $g \in F^\sim$ için $f(|Tx|) = g(Tx)$ 'dir. Buradan

$$f(|Tx|) = g(Tx) = T^\sim(g)(x) \leq |T^\sim|g(x) \leq |T^\sim|(f)(x)$$

elde edilir.

3.3. Teorem (Kerengel-Synnatzchke)

E ve F iki Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör ise her $f \in F_n^\sim$ için,

$$|T^\sim|f = |T|^\sim f$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat

F Dedekind tam olduğundan T 'nin modülü vardır. Eğer T 'nin modülü varsa, o zaman $\pm T \leq |T|$ iken $\pm T^- \leq |T|^-$ ve T 'nin modülünün olduğu her yerde $|T^-| \leq |T|^-$ sağlanır. Böylece her $0 \leq f \in F_n^-$ için $|T^-|f \leq |T|^-f$ olur. Diğer yandan eğer $0 \leq x \in E$ ise Teorem 2.9 ve Lemma 3.3'den

$$\begin{aligned}
 |T|^- f(x) &= f(|T|x) \\
 &= f\left(\sup\left\{\sum_{i=1}^n |Tx_i| : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x\right\}\right) \\
 &= \sup\left\{\sum_{i=1}^n f(|Tx_i|) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x\right\} \\
 &\leq \sup\left\{\sum_{i=1}^n |T^-|(f)(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x\right\} \\
 &= |T^-|(f)(x)
 \end{aligned}$$

eşitliğini ve buradan $|T|^- f \leq |T^-|f$ olduğunu elde ederiz. Böylece her $f \in F_n^-$ için $|T^-|f = |T|^-f$ 'dir.

Aşağıdaki teorem lattice homomorfizmalar ile aralık koruyan operatörler arasındaki ilk özelliği içermektedir [10].

3.4. Teorem (Arendt)

E ve G iki Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $R : E \rightarrow G$ pozitif operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır

- 1) Eğer R bir Riesz homomorfizması ise $L_b(G, F)$ 'den $L_b(E, F)$ 'ye $T \rightarrow TR$ operatörü aralık koruyandır.

2) Eğer R bir aralık koruyan operatörü ise $L_b(G, F)$ 'den $L_b(E, F)$ 'ye $T \rightarrow TR$ operatörü Riesz homomorfizmasıdır.

İspat

$0 \leq T \in L_b(G, F)$ ve $x \in E^+$ seçelim. Bu durumda $Rx \geq 0$ iken $TRx \geq 0$ olur ki böylece $L_b(G, F)$ 'den $L_b(E, F)$ içine $T \rightarrow TR$ operatörü pozitifdir.

1) $0 \leq T \in L_b(G, F)$ ve $0 \leq S \leq TR$ olmak üzere $0 \leq S \in L_b(E, F)$ alalım. $0 \leq T_1 \leq T$ ve $T_1 R = S$ olacak şekilde bir $T_1 \in L_b(G, F)$ var olduğunu göstermeliyiz. Bunu görmek için, R 'nin görüntüsü üzerinde $T_1(Rx) = Sx$ olacak şekilde T_1 operatörünü tanımlayalım ve T_1 'in iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Eğer $Rx = Ry$ alınırsa, o zaman

$$\begin{aligned} |Sx - Sy| &= |S(x - y)| \leq |S(|x - y|)| = S(|x - y|) \\ &\leq TR(|x - y|) = T|R(x - y)| = T|R x - R y| = T 0 = 0 \end{aligned}$$

olur ki bu $Sx = Sy$ demektir. Böylece T_1 iyi tanımlıdır. Diğer yandan R Riesz homomorfizması olduğundan her $x \in E$ için

$$T_1(Rx) = Sx = S(x^+ - x^-) \leq Sx^+ \leq TRx^+ = T(Rx)^+$$

olur. Her $y \in G$ için $p(y) = T(y^+)$ $p: G^+ \rightarrow F$ biçiminde tanımlı p dönüşümünün alt lineer olduğunu gösterelim. Her $m, n \in G$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} p(m + n) &= (T(m + n)^+) = T((m + n) \vee 0) \leq T((m \vee 0) + (n \vee 0)) \\ &= T(m^+ + n^+) = Tm^+ + Tn^+ = pm + pn \end{aligned}$$

$$p(\lambda m) = T((\lambda m)^+) = T(\lambda m^+) = \lambda T(m^+) = \lambda p(m)$$

'dir. Buradan, her $y \in G$ için $T_1 y \leq T y^+$ olduğu için Hahn Banach teoremine göre G 'nin tamamına T_1 operatörü lineer genişler. Açıktır ki $T_1 \leq T$ ve üstelik eğer $y \in G^+$ ise $-y \leq 0$ olduğundan,

$$-T_1(y) = T_1(-y) \leq T(-y)^+ = T0 = 0$$

olur ki böylece $T_1 y \geq 0$ yani T_1 pozitif operatördür. Bu nedenle $0 \leq T_1 \leq T$ iken arzu ettiğimiz gibi $T_1 R = S$ eşitliğini elde ettik.

2) $x \in E^+$ ve $S, T: G \rightarrow F$ sıra sınırlı lineer operatörler olsun. R aralık koruyan operatör olduğu için;

“ $y + z = Rx$ olacak şekildeki $y, z \in [0, Rx]$ elemanlarının var olması için gerekli ve yeterli koşul $y = Rx$ ve $z = Rx$ olacak şekildeki $u, v \in [0, x]$ elemanlarının $u + v = x$ koşulunu sağlayarak var olmasıdır.” önermesi ile Teorem 2.9'u birlikte düşündüğümüzde

$$\begin{aligned} SR \vee TR(x) &= \sup \{SR(u) + TR(v) : u, v \in E^+ \text{ ve } u + v = x\} \\ &= \sup \{S(y) + T(z) : y, z \in G^+ \text{ ve } y + z = Rx\} \\ &= (S \vee T)(Rx) = (S \vee T)R(x) \end{aligned}$$

olur ki böylece $SR \vee TR = (S \vee T)R$ eşitliği $L_b(E, F)$ içinde sağlanır. Bu da $T \rightarrow TR$ operatörünün Riesz homomorfizması olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

3.5. Teorem

G ve F Dedekind tam Riesz uzayları, $R: G \rightarrow F$ pozitif operatör ve E keyfi Riesz uzayı olmak üzere aşağıdakiler sağlanır [5];

1) R sıra sürekli Riesz homomorfizması ise $L_b(E, G)$ 'den $L_b(E, F)$ 'ye $T \rightarrow RT$ operatörü Riesz homomorfizmasıdır.

2) $L_b(E, G)$ 'den $L_b(E, F)$ 'ye $T \rightarrow RT$ operatörü Riesz homomorfizması ve $F^- \neq \{0\}$ ise R bir Riesz homomorfizmasıdır.

İspat

1) $S, T \in L_b(E, G)$ olsun. O zaman R 'nin sıra sürekli lattice homomorfizması olduğunu ve Teorem 2.9'u kullanarak, her $x \in E^+$ için

$$\begin{aligned}
 R(S \vee T)(x) &= R\left(\sup\left\{\sum_{i=1}^n S(x_i) \vee T(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x\right\}\right) \\
 &= \sup\left\{R\left(\sum_{i=1}^n S(x_i) \vee T(x_i)\right) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x\right\} \\
 &= \sup\left\{\sum_{i=1}^n RS(x_i) \vee RT(x_i) : x_i \in E^+ \text{ ve } \sum_{i=1}^n x_i = x\right\} \\
 &= (RS \vee RT)(x)
 \end{aligned}$$

$R(S \vee T) = RS \vee RT$ elde edilir ki böylece $T \rightarrow RT$ lattice homomorfizmasıdır.

2) Herhangi bir $0 \leq f \in F^-$ alalım ve G içinde $x \wedge y = 0$ sağlansın. Bu durumda Teorem 2.18'den

$$\begin{aligned}
 f \otimes (Rx \wedge Ry) &= (f \otimes Rx) \wedge (f \otimes Ry) \\
 &= R(f \otimes x) \wedge R(f \otimes y) \\
 &= R[(f \otimes x) \wedge (f \otimes y)] \\
 &= R[f \otimes (x \wedge y)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğunu görürüz ki bu $Rx \wedge Ry = 0$ anlamına gelir ve böylece R bir lattice homomorfizmasıdır.

$T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör ise Teorem 3.2'den biliyoruz ki (sıra) adjoint operatörü $T^\sim: F^\sim \rightarrow E^\sim$ sıra sınırlı ve sıra süreklidir. Böylece $\phi: L_b(E, F) \rightarrow L_b(F^\sim, E^\sim); T \rightarrow \phi(T) = T^\sim$ biçimindeki lineer dönüşümünden bahsedilebilir ve bu *adjoint operatörü* olarak adlandırılır. ϕ operatörünün pozitif olduğu açıktır.

Sonuç

F 'nin sıra duali noktaları ayırmak üzere adjoint operatörü birebirdir;

İspat

$\phi: L_b(E, F) \rightarrow L_b(F^\sim, E^\sim); T \rightarrow \phi(T) = T^\sim$ adjoint operatörü iken $T_1, T_2 \in L_b(E, F)$ olmak üzere $\phi(T_1) = \phi(T_2)$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $f \in F^\sim$ ve her $x \in E$ için $F^\sim$ 'nin, F 'nin noktalarını ayıran sıra duali olduğu düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}
 \phi(T_1)f &= \phi(T_2)f \Rightarrow T_1^\sim f = T_2^\sim f \\
 &\Rightarrow f \circ T_1 = f \circ T_2 \\
 &\Rightarrow f(T_1x) = f(T_2x) \\
 &\Rightarrow f(T_1x - T_2x) = 0 \\
 &\Rightarrow T_1x - T_2x = 0 \\
 &\Rightarrow T_1x = T_2x \\
 &\Rightarrow T_1 = T_2
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $T^\sim|_{F_n^-}$ kısıtlaması ile $L_b(E, F)$ 'den $L_b(F_n^-, E^-)$ içine $T \rightarrow T^\sim$ pozitif operatörünü düşünebiliriz.

3.6. Teorem

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. Bu durumda $\phi: T \rightarrow \phi(T) = T^\sim$ pozitif operatörü $L_b(E, F)$ 'den $L_b(F_n^-, E^-)$ içine sıra sürekli lattice homomorfizmasıdır.

İspat

$T_\alpha \in L_b(E, F)$ ve $T_\alpha \downarrow 0$ olsun. O zaman her $0 \leq f \in F_n^-$ ve $x \in E^+$ için $T_\alpha^-(f)(x) = f(T_\alpha x)$ ve f sıra sürekli olduğu için $T_\alpha \downarrow 0$ iken $f(T_\alpha x) \downarrow 0$ olur ki buradan her $0 \leq f \in F_n^-$ için E^- içinde $T_\alpha' f \downarrow 0$ 'dır. Bu da $L_b(F_n^-, E^-)$ içinde $T_\alpha^- \downarrow 0$ olduğu ve böylece $L_b(E, F)$ 'den $L_b(F_n^-, E^-)$ içine $T \rightarrow T^\sim$ pozitif operatörün sıra sürekli olduğunu gösterir. Teorem 3.3'den her $T \in L_b(E, F)$ için $L_b(F_n^-, E^-)$ içinde $|T^\sim| = |T|^\sim$ olduğunu biliyoruz ki buradan $|\phi(T)| = |T^\sim| = |T|^\sim = \phi(|T|)$ olur. Bu da $L_b(E, F)$ 'den $L_b(F_n^-, E^-)$ içine $T \rightarrow T^\sim$ operatörünün lattice homomorfizması olduğunu gösterir.

Sonraki teorem aralık koruyan operatörlerin adjointinin her zaman lattice homomorfizması olduğunu ifade eder.

3.7. Teorem

E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow F$ bir aralık koruyan operatör ise $T^\sim: F^\sim \rightarrow E^\sim$ bir lattice homomorfizmasıdır.

İspat

Adjoint operatörü tanımından $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$; her $f \in F^\sim$ için $T^\sim(f) = f \circ T$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.4'e göre $f \rightarrow f \circ T = T^\sim f$ operatörü bir lattice homomorfizmasıdır. Böylece eğer $F^\sim$ içinde $f \wedge g = 0$ sağlanırsa, $x \in E^+$ aldığımızda, Teorem 2.9'u kullanarak

$$\begin{aligned}
 (f \circ T \wedge g \circ T)(x) &= \inf \{ f \circ T(m) + g \circ T(n) : m, n \in E^+ \text{ ve } m + n = x \} \\
 &= \inf \{ f(Tm) + g(Tn) : m, n \in E^+ \text{ ve } m + n = x \} \\
 &= \inf \{ f(k) + g(l) : Tm = k, Tn = l \in F \text{ ve } k + l = y \} \\
 &= (f \wedge g)(y) \\
 &= (f \wedge g)(Tx) \\
 &= ((f \wedge g) \circ T)(x)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $T^\sim f \wedge T^\sim g = f \circ T \wedge g \circ T = (f \wedge g) \circ T = 0 = T^\sim(f \wedge g)$ eşitliği $E^\sim$ içinde sağlanır. Bu nedenle $T^\sim$ bir lattice homomorfizmasıdır.

Lattice homomorfizmalar ile aralık koruyan operatörler arasındaki başka bir ilişkiyi aşağıdaki teoremle verelim.

3.8. Teorem (Kim-Ando)

E ve F Riesz uzayları olmak üzere eğer $F^\sim$, F 'nin noktalarını ayıran sıra duali ise $T : E \rightarrow F$ pozitif operatörünün bir lattice homomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ operatörünün aralık koruyan olmasıdır.

İspat

Adjoint operatörü tanımından $T^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$, her $f \in F^\sim$ için $T^\sim(f) = f \circ T$ olduğunu biliyoruz.

($\Rightarrow$) T 'nin bir Riesz homomorfizması olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 3.4'den $f \rightarrow f \circ T = T^{\sim} f$ pozitif operatörünün aralık koruyan olduğunu görürüz.

($\Leftarrow$) $x \in E$ ve $T^{\sim}$ aralık koruyan operatör olmak üzere, eğer $0 \leq f \in F^{\sim}$ ise, Teorem 1.46'yı kullanarak

$$\begin{aligned}
 f\left((Tx)^{+}\right) &= \max\left\{g(Tx): g \in F^{\sim} = L_b(F, \mathbb{R}) \text{ ve } 0 \leq g \leq f\right\} \\
 &= \max\left\{(g \circ T)(x): g \in F^{\sim} \text{ ve } 0 \leq g \leq f\right\} \\
 &= \max\left\{T^{\sim} g(x): g \in F^{\sim} \text{ ve } 0 \leq g \leq f\right\} \\
 &= \max\left\{h(x): h \in E^{\sim} \text{ ve } 0 \leq h = T^{\sim} g \leq T^{\sim} f\right\} \\
 &= T^{\sim} f(x^{+}) \\
 &= f \circ T(x^{+}) \\
 &= f\left(T(x^{+})\right)
 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz ve $F^{\sim} \rightarrow F$ 'nin noktalarını ayıran sıra duali olduğundan, her $x \in E$ için,

$$\begin{aligned}
 f\left((Tx)^{+}\right) &= f\left(Tx^{+}\right) \Rightarrow f\left((Tx)^{+}\right) - f\left(Tx^{+}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow f\left((Tx)^{+} - Tx^{+}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow (Tx)^{+} - Tx^{+} = 0 \\
 &\Rightarrow (Tx)^{+} = Tx^{+}
 \end{aligned}$$

eşitliğinden T lattice homomorfizmasıdır.

4. n-DİKLİĞİ KORUYAN VE n-ARALIK KORUYAN OPERATÖRLER

4.1. n-Dikliği Koruyan Operatörler

4.1. Tanım

n pozitif bir tamsayı, E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun. Eğer T operatörü sıra sınırlı ve her $i \neq j$ için $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ olacak biçimdeki her $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ için $\bigwedge_{i=0}^n |Tx_i| = 0$ oluyorsa T operatörüne *n-dikliği koruyan operatör* denir.

n -dikliği koruyan operatör tanımına göre genel olarak 1-dikliği koruyan lineer operatör sıra sınırlı ve eğer $|u| \wedge |v| = 0$ ise, o zaman $|Tu| \wedge |Tv| = 0$ olduğundan dikliği koruyandır. Ayrıca E 'den F 'ye her 1-disjoint pozitif lineer operatör bir lattice (Riesz) homomorfizmasıdır. Bu durum Lemma 3.2'de ispatlanmıştır.

$\mathbb{R}^n$ 'de her (pozitif) lineer operatörün n tane dikliği koruyan operatörlerin (Riesz homomorfizmaların) toplamı olarak yazılabilirliğini kontrol edebiliriz. Bunu göstermek için $\mathbb{R}^n$ 'nin standart tabanına göre matris gösterimini alıp bu matrisi her biri sıfırdan farklı en az bir sütuna sahip ve dikliği koruyan operatörlere karşılık gelecek biçimdeki n -tane matrisin toplamı olarak yazabiliriz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m1} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & & \ddots & a_{mn} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu toplamdaki matrislerinin her biri dikliği koruyan operatörlere karşılık gelen matrislerdir.

4.1. Teorem

E Riesz uzayı, F Archimedyan Riesz uzayı olmak üzere T , $|u| \wedge |v| = 0$ olacak şekilde her $u, v \in E$ için $|T(u)| \wedge |T(v)| = 0$ olan E 'den F içine sıra sınırlı lineer bir operatör olsun. O zaman E 'den F içine T^+ , T^- ve $|T|$ Riesz homomorfizmaları vardır, öyle ki;

$T = T^+ - T^-$, $0 \leq x$ için $(T^+)x = (Tx)^+$ ve $(T^-)x = (Tx)^-$, $|T| = T^+ + T^-$ ve $x \in E$ için $|T(x)| = |T|(|x|)$ 'dir [2-4].

İspat

T , 1-dikliği koruyan lineer operatör olmak üzere;

- $|T|$ modülünün varlığını görmek için $0 \leq y \leq x$ olacak şekilde $x, y \in E$ alalım.

Burada $0 \leq y \leq x$ olduğundan $x - y \geq 0$ 'dır.

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x - y + y) \\ &= T(x - y) + T(y) \\ &= [T(x - y)]^+ - [T(x - y)]^- + [T(y)]^+ - [T(y)]^- \\ &= [T(x - y)]^+ + [T(y)]^+ - ([T(x - y)]^- + [T(y)]^-) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &\leq ([T(x - y)]^+ + [T(y)]^+) \wedge ([T(x - y)]^- + [T(y)]^-) \\ \Rightarrow 0 &\leq [T(x - y)]^+ \wedge [T(x - y)]^- + [T(x - y)]^+ \wedge [T(y)]^- + [T(y)]^+ \wedge [T(x - y)]^- \\ &\quad + [T(y)]^+ \wedge [T(y)]^- = 0 \end{aligned}$$

olduğundan yani

$$T(x) = [T(x-y)]^+ + [T(y)]^+ - ([T(x-y)]^- + [T(y)]^-)$$

ve

$$[(T(x-y))^+ + (T(y))^+] \wedge [(T(x-y))^- + (T(y))^-] = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |T(x)| &= [T(x-y)]^+ + [T(y)]^+ + ([T(x-y)]^- + [T(y)]^-) \\ &= |T(x-y)| + |T(y)| \\ &\geq |T(y)| \end{aligned} \tag{4.1}$$

dir. $x, y \in E$ ve $|y| \leq x$ olsun. $y^+ \wedge y^- = 0$ olması $|y^+| \wedge |y^-| = 0$ anlamına gelir ve bu durumda $|Ty^+| \wedge |Ty^-| = 0$ olur ki böylece $Ty^+ \perp Ty^-$ elde edilir. Buradan $|Ty^+ - Ty^-| = |Ty^+ + Ty^-|$ dir. Böylece $|y| \leq x$ olması ve Eş. 4.1 kullanılarak,

$$|Ty| = |T(y^+ - y^-)| = |Ty^+ - Ty^-| = |Ty^+ + Ty^-| = |T||y| \leq |Tx|$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x \in E^+$ için, $|Tx| = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ 'dir ve Teorem 2.5'den $|T|$ vardır, her $x \in E^+$ için $|T|x = |Tx|$ ve her $x \in E$ için $|Tx| \leq |T|(|x|)$ 'dir.

- $x \in E$ için $|T(x)| = |T|(|x|)$ eşitliğini görmek için $Tx^+ \perp Tx^-$ iken $|Tx^+ + Tx^-| = |Tx^+ - Tx^-|$ eşitliği de kullanılarak, her $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
|T|x| &= |T|(|x|) = |T|(x^+ + x^-) = |T|x^+ + |T|x^- = |Tx^+| + |Tx^-| = |Tx^+| \vee |Tx^-| + |Tx^+| \wedge |Tx^-| \\
&= \frac{1}{2}(|Tx^+ + Tx^-| + |Tx^+ - Tx^-|) = |Tx^+ - Tx^-| = |Tx|
\end{aligned}$$

olduğundan $|T|x| = |Tx| = |T||x|$ elde edilir.

• $|T|$ 'nin lattice homomorfizması olduğunu görmek için $x \wedge y = 0$ olacak şekildeki $x, y \in E$ elemanlarını alalım. $|x| \wedge |y| = 0$ ve T 1-dikliği koruyan operatör olduğundan $|T|x \wedge |T|y = |T||x| \wedge |T||y| = |Tx| \wedge |Ty| = 0$ olur ki böylece $|T|$ lattice homomorfizmasıdır.

• $T = T^+ - T^-$, $|T| = T^+ + T^-$ olduğunu görmek için $R = \frac{1}{2}(|T| + T)$ ve

$S = \frac{1}{2}(|T| - T)$ alalım. Buradan $T = R - S$ olur ve

$$\begin{aligned}
R \wedge S &= \frac{1}{2}[(|T| + T) \wedge (|T| - T)] \\
&= \frac{1}{2}[|T| + (T \wedge -T)] \\
&= \frac{1}{2}[|T| - (-T \vee T)] \\
&= \frac{1}{2}[|T| - |T|] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $T = R - S$ eşitliğinin yazılışı tek türdür. Bu durumda $T^+ = R$, $T^- = S$ olacağından $T = T^+ - T^-$, $|T| = T^+ + T^-$ elde edilir.

• T^+ , T^- 'nin lattice homomorfizması olduğunu görmek için $x \wedge y = 0$ olacak biçimde $x, y \in E$ elemanlarını alalım. T 1-dikliği koruyan operatör olduğundan

$$0 \leq T^+x \wedge T^+y \leq |T|x \wedge |T|y = |Tx| \wedge |Ty| = 0$$

bulunur. Bu T^+ 'nın lattice homomorfizması olduğu anlamına gelir. Benzer biçimde T^- 'nin da lattice homomorfizması olduğu görülür.

- $0 \leq x$ için $(T^+)x = (Tx)^+$ ve $(T^-)x = (Tx)^-$ olduğunu görmek için $0 \leq x \in E$ alalım. $x \in E^+$ için $|Tx| = |T|x$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
 T^+x &= \left[\frac{1}{2}(|T| + T) \right](x) & T^-x &= \left[\frac{1}{2}(|T| - T) \right](x) \\
 &= \frac{1}{2}(|T|x + Tx) & &= \frac{1}{2}(|T|x - Tx) \\
 &= \frac{1}{2}(|Tx| + Tx) & &= \frac{1}{2}(|Tx| - Tx) \\
 &= \frac{1}{2}[(Tx \vee -Tx) + Tx] & &= \frac{1}{2}[(Tx \vee -Tx) - Tx] \\
 &= \frac{1}{2}[(Tx + Tx) \vee (-Tx + Tx)] & &= \frac{1}{2}[(Tx - Tx) \vee (-2Tx)] \\
 &= \frac{1}{2}(2Tx \vee 0) = Tx \vee 0 & &= \frac{1}{2}(0 \vee -2Tx) = 0 \vee -Tx \\
 &= (Tx)^+ & &= (Tx)^-
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme

E ve F Riesz uzayları $T_1, \dots, T_n : E \rightarrow F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatörler olsun. Bu durumda $T_1 + \dots + T_n = T$ biçiminde tanımlanan $T : E \rightarrow F$ operatörü, n-dikliği koruyan olur. Aynı zamanda $T_1, \dots, T_n$ operatörlerinin pozitif olduğu varsayılırsa bu durumda $T_1, \dots, T_n$ operatörleri lattice homomorfizmaları olur (Prop. 2 [6]).

İspat

$L_b(E, F)$ sıra sınırlı operatörlerin kümesi, vektör uzayı olduğu için $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ operatörü sıra sınırlı ve lineerdir. Her $i \neq j$ için $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ olacak biçimdeki $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ elemanlarını alalım ve

$$\begin{aligned}
 \bigwedge_{i=0}^n |Tx_i| &= \bigwedge_{i=0}^n \left| \sum_{j=1}^n T_j x_i \right| \\
 &= \bigwedge_{i=0}^n |T_1 x_i + T_2 x_i + \dots + T_n x_i| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n T_j x_0 \right| \wedge \left| \sum_{j=1}^n T_j x_1 \right| \wedge \dots \wedge \left| \sum_{j=1}^n T_j x_n \right| \\
 &\leq \sum |T_{j_0} x_0| \wedge \dots \wedge |T_{j_n} x_n|
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

olduğunu tümevarım yöntemini kullanarak görelim;

$n = 2$ için Eş. 4.2'nin doğru olduğunu görmek için, $T_1, T_2 : E \rightarrow F$ 1-dikliği koruyan operatör olmak üzere $T = T_1 + T_2$ biçiminde tanımlayalım. Her $i \neq j$ iken $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ olacak biçimdeki $x_0, x_1, x_2 \in E$ elemanları için

$$\begin{aligned}
 \bigwedge_{i=0}^2 |Tx_i| &= |Tx_0| \wedge |Tx_1| \wedge |Tx_2| \\
 &= |(T_1 + T_2)x_0| \wedge |(T_1 + T_2)x_1| \wedge |(T_1 + T_2)x_2| \\
 &\leq (|T_1 x_0| + |T_2 x_0|) \wedge (|T_1 x_1| + |T_2 x_1|) \wedge (|T_1 x_2| + |T_2 x_2|) \\
 &\leq \left[(|T_1 x_0| \wedge |T_1 x_1|) + (|T_2 x_0| \wedge |T_1 x_1|) + (|T_1 x_0| \wedge |T_2 x_1|) + (|T_2 x_0| \wedge |T_2 x_1|) \right] \wedge (|T_1 x_2| + |T_2 x_2|) \\
 &= (|T_2 x_0| \wedge |T_1 x_1|) + (|T_1 x_0| \wedge |T_2 x_1|) \wedge (|T_1 x_2| + |T_2 x_2|) \\
 &\leq (|T_2 x_0| \wedge |T_1 x_1| \wedge |T_1 x_2|) + (|T_2 x_0| \wedge |T_1 x_1| \wedge |T_2 x_2|) + (|T_1 x_0| \wedge |T_2 x_1| \wedge |T_1 x_2|) + (|T_1 x_0| \wedge |T_2 x_1| \wedge |T_2 x_2|) \\
 &= \sum |T_{i_0} x_0| \wedge |T_{i_1} x_1| \wedge |T_{i_2} x_2| \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki toplamda i indisleri $\{1,2\}$ üzerinden i_0, i_1, i_2 olmak üzere seçilmiştir. Her toplamda iki tanesi denk olan i_0, i_1, i_2 indisleri vardır ve $0 \leq \bigwedge_{i=0}^2 |Tx_i| \leq 0$ dolayısıyla $\bigwedge_{i=0}^2 |Tx_i| = 0$ olduğu için T operatörü 2-dikliği koruyandır.

$n-1$ için Eş. 4.2'nin doğru olduğunu kabul edelim.

n için $T_1, \dots, T_n : E \rightarrow F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatörler olmak üzere $T_1 + T_2 + \dots + T_n = T$ biçiminde tanımlayalım. $i \neq j$ iken $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ olacak biçimdeki $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ elemanları için, Teorem 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=0}^n |Tx_i| &= \bigwedge_{i=0}^{n-1} |Tx_i| \wedge |Tx_n| \leq \left(\sum |T_{j_0} x_0| \wedge \dots \wedge |T_{j_{n-1}} x_{n-1}| \right) \wedge |Tx_n| \\ &\leq \left(\sum |T_{j_0} x_0| \wedge \dots \wedge |T_{j_{n-1}} x_{n-1}| \right) \wedge (|T_1 x_n| + \dots + |T_n x_n|) \\ &\leq \sum |T_{j_0} x_0| \wedge \dots \wedge |T_{j_n} x_n| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki toplamda i indisleri $\{1, 2, \dots, n\}$ üzerinden $j_0, j_1, \dots, j_n$ olmak üzere seçilmiştir. Her toplamda en az iki tanesi denk olan $j_0, j_1, \dots, j_n$ indisleri vardır. Farz edelim ki , $k \neq l$ ve $j_k = j_l = j$ olsun. T_j operatörünün 1-dikliği koruyan olduğu düşünüldüğünde

$$|T_{j_0} x_0| \wedge \dots \wedge |T_{j_n} x_n| \leq |T_j x_k| \wedge |T_j x_l| = 0$$

olur ki böylece $\bigwedge_{i=0}^n |Tx_i| \leq \sum |T_{j_0} x_0| \wedge \dots \wedge |T_{j_n} x_n| = 0$ olduğundan n tane 1-dikliği

koruyan operatörün toplamı olan $\sum_{i=1}^n T_i = T$ operatörü n -dikliği koruyandır.

Bu önermenin tersi yani “n-dikliği koruyan bir operatör alındığında bunu 1-dikliği koruyan operatörlerin toplamı olarak yazabilir miyiz?” sorusu düşünüldüğünde Huijsmans ve de Pagter (Remark 2.3, [8])’da F ’nin bazı özel $C(X)$ tipi uzaya eşit olduğunda 2-dikliği koruyan pozitif operatörlerin iki lattice homomorfizmasının toplamı olarak yazılabildiğini göstermişlerdir. İlerde bunun daha genel halini elde edeceğiz.

$G \subseteq E$ alt vektör uzayı ve $T: G \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. T ’nin E ’ye bütün pozitif genişlemelerinin cümlesini $\varepsilon(T)$ ile gösterelim.

$$\varepsilon(T) = \{S \in L(E, F) : S \geq 0 \text{ ve } S|_G = T\}$$

Şimdi, $u \in E$ tarafından üretilen ideale, T ’nin kısıtlamasının, pozitif en küçük genişletmesinin standart tanımını yapalım (Thm 83.7–83.8 [7]).

4.2. Tanım

$G \subseteq E$ alt vektör uzayı ve $T: G \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. Her $R \in \varepsilon(T)$ için $S \leq R$ olacak biçimde en azından bir $S \in \varepsilon(T)$ varsa S ’ye T ’nin *en küçük genişlemesi* denir.

“ S , T ’nin en küçük genişlemesi $\Leftrightarrow \min \varepsilon(T) = S \in L(E, F)$ ”

4.2. Teorem

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. E ’nin her A ideali için $T_A: E^+ \rightarrow F^+$; $x \rightarrow T_A x = \sup \{T(y) : 0 \leq y \leq x \text{ ve } y \in A\}$ dönüşümü yardımıyla bir $\hat{T}_A: E \rightarrow F$ operatörü vardır ve aşağıdakileri sağlar.

i) $0 \leq \hat{T}_A \leq T$

ii) A üzerinde $\hat{T}_A = T$ ve A^d üzerinde $\hat{T}_A = 0$

iii) $A \subseteq B$, $B \subseteq E$ ideal iken $\hat{T}_A \leq \hat{T}_B$

'dir [1].

4.3. Teorem

E ve F Riesz uzayları F Dedekind tam, $A \subseteq E$ ideal ve $T: A \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. $\varepsilon(T) \neq \emptyset$ ise T 'nin en küçük genişlemesi olan $\min \varepsilon(T)$ vardır ve bu genişleme S ile gösterilirse, her $x \in E^+$ için

$$S(x) = \sup \{Ty : y \in A \text{ ve } 0 \leq y \leq x\}$$

'dir [1].

4.1. Lemma

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. Farz edelim ki $T: E \rightarrow F$ pozitif lineer bir dönüşüm ve $0 \leq u \in E$ olsun. $x \in E^+$ için $T_u(x) = \bigvee_{n=1}^{\infty} T(x \wedge nu)$ ve keyfi $x \in E$ için $T_u x = T_u x^+ - T_u x^-$ olacak biçimdeki $T_u: E \rightarrow F$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $T_u: E \rightarrow F$ lineer dönüşümdür. Ayrıca $E = F$ ve T birim dönüşüm olduğunda T_u , u^{dd} üzerinde band projeksiyon olur.

İspat

$x \in E^+$ ve $0 \leq u \in E$ için $x \wedge nu \leq x$ iken T pozitif dolayısıyla sıra koruyan olduğundan $T(x \wedge nu) \leq T(x)$ olur ki böylece $\{T(x \wedge nu) \in F : n = 1, 2, \dots\}$ kümesi üstten sınırlıdır. F Dedekind tam olduğundan üstten sınırlı her alt kümesinin

supremumu vardır. Böylece $\bigvee_{n=1}^{\infty} T(x \wedge nu) \in F$ olur ki bu T_u 'nun anlamlı olduğunu gösterir. $x, y \in E^+$ ve $0 \leq u \in E^+$ olmak üzere T 'nin iyi tanımlılığı düşünüldüğünde,

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x \wedge nu = y \wedge nu \Rightarrow T(x \wedge nu) = T(y \wedge nu) \\ &\Rightarrow \{T(x \wedge nu) : n = 1, \dots\} = \{T(y \wedge nu) : m = 1, \dots\} \\ &\Rightarrow \sup \{T(x \wedge nu) : n = 1, \dots\} = \sup \{T(y \wedge nu) : m = 1, \dots\} \\ &\Rightarrow T_u x = T_u y \end{aligned}$$

$x, y \in E^+$ için $T_u x = T_u y$ elde edilir. $x = y$ olacak biçimde $x, y \in E$ ve $0 \leq u \in E^+$ alalım. Teorem 2.1'e göre $x = x^+ - x^-$, $y = y^+ - y^-$ yazılışı tek olduğu için $x^+ = y^+$, $x^- = y^-$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} &\Rightarrow T_u(x^+) = T_u(y^+) \text{ ve } T_u(x^-) = T_u(y^-) \Rightarrow T_u(x^+) - T_u(x^-) = T_u(y^+) - T_u(y^-) \\ &\Rightarrow T_u(x) = T_u(y) \end{aligned}$$

eşitliğinden T_u iyi tanımlıdır.

T_u 'nun lineerliğini görmek için $x \in E^+$ olmak üzere

$$W = \{Tw : w \in A_u, 0 \leq w \leq x\} \text{ ve } W' = \{T(x \wedge nu) : n = 1, 2, \dots\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\sup W' = T_u(x)$ olur.

$$A_u = \{z \in E : |z| \leq n|u|, \exists n \geq 0 \text{ için}\}$$

u tarafından üretilen ideal olmak üzere $u \in E^+$ için $0 \leq x \wedge nu \leq nu$ olduğundan $x \wedge nu \in A_u$ ve $0 \leq x \wedge nu \leq x$ olduğundan $T(x \wedge nu) \in W$ olur ki buradan $W' \subseteq W$ olduğu açıktır. $W, W' \subseteq F$ ve F Dedekind tam olduğundan üstten sınırlı her alt

kümesinin supremumu vardır. Böylece $\sup W' \leq \sup W \dots (*)$ elde edilir. $Tw \in W$ verildiğinde $0 \leq w \leq x$ ve $w \in A_u$ olduğundan bazı n doğal sayıları için $w \leq nu$ olduğundan $w \leq x \wedge nu$ elde ederiz. T operatörü pozitif dolayısıyla sıra koruyan olduğundan $Tw \leq T(x \wedge nu)$ olur ki $W' \subseteq W$ olduğundan $\sup W' \leq \sup W \dots (**)$ elde edilir. $(*)$ ve $(**)$ eşitsizliklerinden

$$\sup W' = \sup W = T_u(x)$$

bulunur. $x \in E^+$ olmak üzere T_u 'nın toplamsal olduğunu görmek için $\sup W$ 'nin toplamsal olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\sup W = \sup \{Tw : w \in A_u, 0 \leq w \leq x\} = \tau(x)$$

diyelim. $w \in A_u$, $0 \leq w \leq x_1 + x_2$ $x_1, x_2 \in E^+$ olmak üzere Teorem 2.4'e göre $0 \leq w_1 \leq x_1$, $0 \leq w_2 \leq x_2$ iken $w = w_1 + w_2$ olacak biçimde $w_1, w_2 \in E^+$ vardır. Ayrıca $0 \leq w_1 \leq w$ ve $0 \leq w_2 \leq w$ olduğundan ideal tanımına göre $w_1, w_2 \in A_u$ olur ki buradan

$$\begin{aligned} T(w) &= T(w_1 + w_2) = Tw_1 + Tw_2 \leq \sup \{Tw : 0 \leq w \leq x_1\} + \sup \{Tw : 0 \leq w \leq x_2\} \\ &= \tau(x_1) + \tau(x_2) \\ \Rightarrow \sup T(w) &\leq \tau(x_1) + \tau(x_2) \Rightarrow \tau(x_1 + x_2) \leq \tau(x_1) + \tau(x_2) \dots (i) \end{aligned}$$

bulunur. $0 \leq w_1 \leq x_1$ ve $0 \leq w_2 \leq x_2$, $w_1, w_2 \in A_u$ alalım. İdeal, vektör uzayı olduğu için $0 \leq w_1 + w_2 \leq x_1 + x_2$ ve $w_1 + w_2 \in A_u$ olur ve T 'nin lineerliğini de kullanarak

$$\begin{aligned} T(w_1) + T(w_2) &= T(w_1 + w_2) \leq \sup T(w_1 + w_2) = \tau(x_1 + x_2) \\ \Rightarrow \sup T(w_1) + T(w_2) &\leq \tau(x_1 + x_2) \Rightarrow \tau(x_1) + \sup T(w_2) \leq \tau(x_1 + x_2) \\ \Rightarrow \tau(x_1) + \tau(x_2) &\leq \tau(x_1 + x_2) \dots (ii) \end{aligned}$$

bulunur. (i) ve (ii)'den $\tau(x_1) + \tau(x_2) = \tau(x_1 + x_2)$ elde edilir ki bu durumda $\tau = T_u$, E^+ 'dan F^+ 'ya toplamsal dönüşümdür. Teorem 2.3'den $\hat{T}_u : E \rightarrow F$ lineer genişlemesi vardır ve her $x \in E$ için $\hat{T}_u(x) = T_u(x^+) - T_u(x^-)$ olacak şekilde tektir. O zaman her $x \in E$ için $\hat{T}_u(x) = T_u(x)$ olması $\hat{T}_u = T_u$ anlamına gelir. Böylece $x \in E^+$ için $T_u(x) = \bigvee_{n=1}^{\infty} T(x \wedge nu)$ ve $x \in E$ için $T_u(x) = T_u(x^+) - T_u(x^-)$ biçiminde tanımlanan $T_u : E \rightarrow F$ dönüşümü lineerdir. $E = F$ ve T birim dönüşüm olduğunda T_u 'nun u^{dd} üzerinde band projeksiyon olduğunu gösterelim. $A_u = u^{dd}$ [1] ve $T_u x = \bigvee_{n=1}^{\infty} T(x \wedge nu) = \bigvee_{n=1}^{\infty} (x \wedge nu)$ olduğundan Teorem 2.12 kullanılarak

$$\begin{aligned} T_u x &= \sup W = \sup \{Tw : w \in A_u, 0 \leq w \leq x\} = \sup \{w : w \in A_u, 0 \leq w \leq x\} \\ &= \sup \{w : w \in u^{dd}, 0 \leq w \leq x\} = P_{u^{dd}}(x) \end{aligned}$$

bulunur ve T_u , $T = I$ ve $E = F$ olduğunda $P_{u^{dd}}$ 'e eşittir.

4.2. Lemma

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T : E \rightarrow F$ n -dikliği koruyan pozitif lineer bir operatör olsun. $u_0, u_1, \dots, u_n \in E$ ve her $i \neq j$ için $u_i \wedge u_j = 0$ olduğunu varsayalım. $P_i, (Tu_i)^{dd}$ üzerinde F 'nin band projeksiyonunu belirtmek üzere Tu_0 operatörü yerine de T_0 yazarak yukarıdaki Lemma 4.1'deki gibi tanımlayalım. $R = P_0 \dots P_{n-1} T_0$ ve $S = P_0 \dots P_{n-1} (T - T_0)$ olmak üzere R bir Riesz homomorfizması ve S $(n-1)$ -dikliği koruyan operatördür.

İspat

Lineer fonksiyonların bileşkesi yine lineer fonksiyon olduğu için R ve S 'nin anlamlı, iyi tanımlı ve lineer olduğu açıktır. R 'nin Riesz homomorfizması olduğunu görmek için $x \wedge y = 0$ olacak şekilde $x, y \in E$ alalım. Her $m \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $i \neq j$ için $u_i \wedge u_j = 0$ iken

$$(x \wedge mu_0) \wedge (y \wedge mu_0) \leq x \wedge y = 0$$

ve

$$u_i \wedge x \wedge mu_0 \leq mu_i \wedge mx \wedge mu_0 = m(u_i \wedge x \wedge u_0) \leq m(u_i \wedge u_0) = m.0 = 0$$

olduğu için $u_1, \dots, u_{n-1}, x \wedge mu_0, y \wedge mu_0$ E 'nin $n+1$ tane ikişerli ayrık pozitif elemanlarıdır. T 'nin n -dikliği koruyan operatör olduğu düşünüldüğünde

$$|Tu_1| \wedge |Tu_2| \wedge \dots \wedge |Tu_{n-1}| \wedge |T(x \wedge mu_0)| \wedge |T(y \wedge mu_0)| = 0$$

olacaktır ve aynı zamanda T pozitif olduğundan

$$Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1} \wedge T(x \wedge mu_0) \wedge T(y \wedge mu_0) = 0$$

'dır. $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ ve $T_0 x = T_{u_0}(x) = \bigvee_{m=1}^{\infty} T(x \wedge mu_0)$ eşitliğini kullanarak,

$$\sup_m (Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1} \wedge T(x \wedge mu_0)) = Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1} \wedge T_0 x = 0 \text{ ve}$$

$$\sup_m (Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1} \wedge T_0 x \wedge T(y \wedge mu_0)) = Tu_1 \wedge Tu_2 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1} \wedge T_0 x \wedge T_0 y = 0$$

elde edilir.

$$P_i \equiv P_{u_i} \equiv P_{(Tu_i)^{dd}} : F \rightarrow (Tu_i)^{dd}, \quad F = (Tu_i)^d \oplus (Tu_i)^{dd}, \quad P_{(Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}} = P_1 P_2 \dots P_{n-1}$$

eşitliklerinden $P_1 \dots P_{n-1} (T_0 x \wedge T_0 y) = 0$ bulunur. Her band projeksiyon lattice homomorfizması olduğundan $(P_1 \dots P_{n-1} T_0 x) \wedge (P_1 \dots P_{n-1} T_0 y) = 0$ olur ki buradan $Rx \wedge Ry = 0$ demektir. Böylece R Riesz homomorfizmasıdır.

S 'nin $n-1$ dikliği koruyan operatör olduğunu göstermek için E 'nin ikişerli ayrık (dik) pozitif $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarını alalım. S 'nin sıra sınırlı olduğunu görmek için pozitif olduğunu göstermek yeterlidir. $P_0, \dots, P_{n-1}$ band projeksiyonları pozitif operatörlerdir. T pozitif olduğundan $x \geq 0$ iken $\bigvee_{n=1}^{\infty} T(x \wedge nu_0) \geq 0$ olur. Buradan Tu_0 pozitifdir ve

$$x \wedge nu_0 \leq x \Rightarrow T(x \wedge nu_0) \leq Tx \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} T(x \wedge nu_0) \leq Tx \Rightarrow T_{u_0} x \leq Tx \Rightarrow Tx - T_{u_0} x \geq 0$$

olduğundan $T - T_{u_0}$ pozitifdir. Böylece $S = P_0 \dots P_{n-1} (T - T_0)$ pozitif operatörlerin bileşkesi de pozitifdir. Buradan $S = P_0 \dots P_{n-1} (T - T_0)$ pozitif lineer operatör olduğundan sıra sınırlıdır.

$i \neq j$ için $x_i \wedge x_j = 0$ ve $S = P_0 \dots P_{n-1} (T - T_0)$ olmak üzere S 'nin $n-1$ disjoint yani

$$\bigwedge_{i=1}^n S(x_i) = 0 \text{ olduğunu görmek için}$$

$$\bigwedge_{i=1}^n P_0 (T - T_0)(x_i) = 0 \tag{4.3}$$

eşitliğini görmemiz yeterlidir. Çünkü her P projeksiyonu için $0 \leq P \leq I$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

olduğundan $u_0 - \left(u_0 \wedge \frac{1}{m}x\right)$ ve n elemanlı $(x_i - (x_i \wedge mu_0))$ elemanları E 'nin $n+1$ tane ikişerli ayrık pozitif elemanlarıdır.

$$T - T_0(x_i) = T - T_{u_0}(x_i) = Tx_i - T_{u_0}x_i = Tx_i - \bigvee_{n=1}^{\infty} T(x_i \wedge mu_0) \leq Tx_i - T(x_i \wedge mu_0)$$

ve

$$\begin{aligned} u_0 \wedge \frac{1}{m}x &\geq \frac{1}{m}u_0 \wedge \frac{1}{m}x \Rightarrow u_0 \leq u_0 - u_0 \wedge \frac{1}{m}x + \frac{1}{m}(u_0 \wedge x) \\ &\Rightarrow Tu_0 \leq T\left(u_0 - u_0 \wedge \frac{1}{m}x\right) + \frac{1}{m}T(u_0 \wedge x) \end{aligned}$$

ve T 'nin n -dikliği koruyan operatör olmasını da kullanarak,

$$\begin{aligned} Tu_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^n (T - T_0)(x_i) &\leq Tu_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^n (Tx_i - x_i \wedge mu_0) \\ &\leq T\left(u_0 - \left(u_0 \wedge \frac{1}{m}x\right)\right) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (Tx_i - x_i \wedge mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{m}T(u_0 \wedge x) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (Tx_i - x_i \wedge mu_0) \\ &= 0 + \frac{1}{m}T(u_0 \wedge x) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (Tx_i - x_i \wedge mu_0) \\ &\leq \frac{1}{m}T(u_0) \end{aligned}$$

$m \rightarrow \infty$ için

$$T(u_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (T - T_0)(x_i) = 0$$

olur. Böylece

$$\bigwedge_{i=1}^n P_0(T - T_0)(x_i) = P_0 \bigwedge_{i=1}^n (T - T_0)(x_i) = 0$$

bulunur.

4.4. Teorem

F Dedekind tam olmak üzere E ve F Riesz uzayları olsun ve $T: E \rightarrow F$ pozitif n -dikliği koruyan lineer operatörü verilsin. O zaman $T = \sum_{i=1}^n T_i$ olacak biçimde E 'den F 'ye n tane $T_1, \dots, T_n$ lattice homomorfizmaları mevcuttur.

İspat

Tümevarım metodunu kullanarak ispatı yapalım.

- $n=1$ durumu totolojidir. Çünkü $n=1$ iken T pozitif ve 1-dikliği koruyan operatör yani sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatör olduğundan T Riesz homomorfizmasıdır
- $n-1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. $P_1, P_2 \in \wp$ olmak üzere $P_1 \neq P_2$ iken $P_1 P_2 = 0$ ve her $P \in \wp$ için $PF \subseteq (Tu_0 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}$ olacak biçimde $i \neq j$ iken $u_i \perp u_j$ biçiminde n tane $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in E^+$ elemanları var olacak şekilde $\wp$ kümesini tanımlayalım. Zorn Lemmaya göre F üzerinde band projeksiyonların maksimal bir $\wp$ kümesi vardır.

$$\wp = \left\{ \begin{array}{l} P_i \text{ band projeksiyon: } i \neq j \text{ için } P_i \neq P_j \Rightarrow P_i P_j = 0 \text{ ve } u_0, \dots, u_{n-1} \in E^+ \\ \exists i \neq j \text{ için } u_i \perp u_j : P_i F \subset (Tu_0 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd} \end{array} \right\} \dots \dots *$$

$\mathcal{A} = \{\wp : \wp * \text{ şartını sağlasın} \}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{A}$ kümesine Zorn Lemmayı uygulayabileceğimizi görelim. $\wp = \{0\}$ aldığımızda sıfır band projeksiyon ve her elemana dik olduğundan $0F = 0 \subseteq (Tu_0 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}$ olur ki $*$ şartını sağladığından $\wp = \{0\} \in \mathcal{A}$ ve böylece $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olur. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tam sıralı bir alt kümesi olsun. $\mathcal{B}$ 'nin $\mathcal{A}$ içinde bir üst sınırı olduğunu görmek için

$$\bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp = \{P : \exists \wp \in \mathcal{B} \text{ için } P \in \wp\}$$

kümesini göz önüne alalım. $\wp_1, \wp_2 \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{B}$ tam sıralı olduğundan $\wp_1 \subseteq \wp_2$ veya $\wp_2 \subseteq \wp_1$ 'dir. $P_i, P_j \in \bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp$ alalım.

$$P_i, P_j \in \bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp \Rightarrow \exists \wp_i \in \mathcal{B} : P_i \in \wp_i \text{ ve } \exists \wp_j \in \mathcal{B} : P_j \in \wp_j$$

'dir. $\mathcal{B}$ tamsıralı olduğu için iki durum vardır:

- i) $\wp_i \subseteq \wp_j$ ise $P_i, P_j \in \wp_j$ olur ki $\wp_j$ 'nin tanımından $P_i P_j = 0$
- ii) $\wp_j \subseteq \wp_i$ ise $P_i, P_j \in \wp_i$ olur ki $\wp_i$ 'nin tanımından $P_i P_j = 0$

$$\begin{aligned} P \in \bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp &\Rightarrow P \in \wp_i \text{ olacak şekilde } \wp_i \in \mathcal{B} \text{ vardır} \\ &\Rightarrow PF \subseteq (Tu_0 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd} \\ &\Rightarrow \bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

'dir. Her $\wp \in \mathcal{B}$ için $\wp \subseteq \bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp$ olduğundan $\bigcup_{\wp \in \mathcal{B}} \wp$, $\mathcal{B}$ 'nin bir üst sınırıdır. O halde

Zorn lemmadan $\mathcal{A}$ 'nın maksimal elemanı vardır. $P \in \wp$ ve $i \neq j$ iken $u_i \perp u_j$

olacak biçimdeki $u_0, u_1, \dots, u_n$ için $PF \subseteq (Tu_0 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}$ vardır ve bu her P için farklı u_j 'ler için geçerlidir. $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$, $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ 'e karşılık gelen bandlar olmak üzere Lemma 4.2'den $R = P_0 P_1 \dots P_{n-1} T_0$ lattice homomorfizması ve $S = P_0 P_1 \dots P_{n-1} (T - T_0)$ (n-1)-disjointtir. Bunu görmek için $PR = T_p$ diyelim. $P \circ R(x^+) = (P \circ R(x))^+$ olduğundan T_p lattice homomorfizmasıdır.

$$PT_p = PPR = P^2 R = PR = T_p, \quad P_0 P_1 \dots P_{n-1} : F \rightarrow (Tu_0 \wedge Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}$$

band projeksiyondur ve $PF \subseteq (Tu_0 \wedge Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}$ olduğundan Teorem 2.13 ve 2.15'den $P(P_0 P_1 \dots P_{n-1}) = P$ 'dir.

$$\begin{aligned} PS &= P(P_0 P_1 \dots P_{n-1} T - P_0 P_1 \dots P_{n-1} T_0) \\ &= P(P_0 P_1 \dots P_{n-1} T) - P(P_0 P_1 \dots P_{n-1} T_0) \\ &= PT - PR \\ &= PT - T_p \end{aligned}$$

P ve S , n-1 disjoint olduğundan $PS = PT - T_p$, (n-1) disjointtir. $0 \leq x \in E$ olmak üzere

$$T_1 : E^+ \rightarrow F; \quad x \rightarrow T_1 x = \vee \{T_p x : P \in \wp\}$$

biçiminde tanımlayalım. Her $P \in \wp$ ve $T_p = PR \leq R \leq T_0$ olduğundan bu küme üstten sınırlıdır. $R \leq T_0$ ise $T_p x \leq T_0 x$ böylece her $P \in \wp$ için $T_1 x \in F$ 'dir. F Dedekind tam ve $\{T_p x : P \in \wp\} \subseteq F$ kümesi üstten sınırlı olduğu için supremumu var ve dolayısıyla T_1 anlamlıdır. $x = y$ olacak biçimde $x, y \in E$ alalım. Bu durumda

$$\vee \{T_p x : P \in \wp\} = \vee \{T_Q y : Q \in \wp\}$$

olur ki bu da $T_1x = T_1y$ demektir. Yani T_1 iyi tanımlıdır. $(x + y) \geq 0$ için

$$\begin{aligned} T_1(x + y) &= \vee \{T_P(x + y) : P \in \wp\} \leq \vee \{T_P(x) + T_Q(y) : P, Q \in \wp\} \\ &= \vee \{T_P(x) : P \in \wp\} + \vee \{T_Q(y) : Q \in \wp\} = T_1x + T_1y \Rightarrow T_1(x + y) \leq T_1x + T_1y \quad * \end{aligned}$$

$P, Q \in \wp$ için $P \neq Q$ ise $PQ = 0$ ise $P \wedge Q = 0$ ve $T_P = PR$, $T_Q = QR$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow T_Px \wedge T_Qy = PRx \wedge QRy = 0 \Rightarrow T_Px \vee T_Qy \leq T_P(x + y) \vee T_Q(x + y) \\ &\Rightarrow \sup_{P \in \wp} T_Px + T_Qy \leq T_P(x + y) \vee T_Q(x + y) \Rightarrow T_1x + \sup_{Q \in \wp} T_Qy \leq T_P(x + y) \vee T_Q(x + y) \\ &\Rightarrow T_1x + T_1y \leq \sup_{P \in \wp} T_P(x + y) \Rightarrow T_1x + T_1y \leq T_1(x + y) \quad ** \end{aligned}$$

* ve **'dan T_1 toplamsaldır. Bu durumda Teorem 2.3 gereği T_1 , E 'den F 'ye lineer bir operatör olarak genişler. $x, y \in E$ ve $x \wedge y = 0$ olduğunu kabul edelim. T_P 'nin lattice homomorfizması olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} T_1x \wedge T_1y &= \vee \{T_Px : P \in \wp\} \wedge \vee \{T_Qy : Q \in \wp\} \\ &= \vee \{T_Px \wedge T_Qy : P, Q \in \wp\} \\ &= \vee \{T_Px \wedge T_Py : P \in \wp\} \\ &= \vee \{T_P(x \wedge y) : P \in \wp\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece T_1 lattice homomorfizmasıdır. $S = T - T_1$ olsun. S 'nin $n-1$ disjoint olduğunu göstermeliyiz. Her $i \neq j$ için $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in E$ ve $u_i \wedge u_j = 0$ olsun. $\wp$ 'nin maksimalliğinden

$$Tu_0 \wedge Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1} = \vee \{P(Tu_0 \wedge Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1}) : P \in \wp\}$$

$$Su_0 \wedge Su_1 \wedge \dots \wedge Su_{n-1} \in (Tu_0 \wedge Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_{n-1})^{dd}$$

ve P projeksiyon dolayısıyla lattice homomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned} Su_0 \wedge Su_1 \wedge \dots \wedge Su_{n-1} &= \vee \{ P(Su_0 \wedge Su_1 \wedge \dots \wedge Su_{n-1}) : P \in \wp \} \\ &= \vee \{ PSu_0 \wedge PSu_1 \wedge \dots \wedge PSu_{n-1} : P \in \wp \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$PS = PT - T_p$ 'nin $(n-1)$ disjoint olması kullanılarak elde edilir. Böylece S $(n-1)$ disjointtir ve $T = S + T_1$ eşitliğinden T , n tane lattice homomorfizmasının toplamı olarak yazılabilir.

Sonuç

E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow F$ n -dikliği koruyan lineer bir operatör olsun. Bu durumda $T = \sum_{i=1}^n T_i$ olacak şekilde E 'den F 'ye n tane dikliği koruyan operatörleri mevcuttur.

İspat

Öncelikle $|T|$ operatörünün n -disjoint olduğunu ispatlayalım. F Dedekind tam olduğu için $|T|$ vardır. Teorem 2.5'e göre her $x \in E$ için $|T|(|x|) = \sup \{ |Tu| : u \in E \text{ ve } |u| \leq |x| \} \in F$ 'dir. $|T|$ pozitif ve pozitif her operatör sıra sınırlıdır. $x_0, x_1, \dots, x_n \in E^+$ ve her $i \neq j$ için $x_i \wedge x_j = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer $u_j \in E$ ve her j için $|u_j| \leq x_j$ ise $0 \leq |u_i| \wedge |u_j| \leq x_i \wedge x_j = 0$ olur ki buradan $|u_i| \wedge |u_j| = 0$ olacağından u_j 'ler E 'nin $n+1$ tane ikişerli ayrık (dik) elemanlarıdır.

Buradan ve T n -disjoint olduğundan $\bigwedge_{j=0}^n |Tu_j| = 0$ elde edilir. $|u_j| \leq |x_j| \leq x_j$ olan bütün $u_j \in E$ boyunca birbirini izleyen j değerleri için supremum alındığında ve $x \in E^+$ için $|Tx| = |T||x|$ olduğundan

$$0 = \bigwedge_{j=0}^n |Tu_j| \leq \bigwedge_{j=0}^n |T|(|u_j|) \leq \bigwedge_{j=0}^n |T|x_j = \bigwedge_{j=0}^n |T||x_j| = \bigwedge_{j=0}^n |Tx_j| = 0$$

$\bigwedge_{j=0}^n |T|x_j = 0$ elde ederiz. Diğer bir deyişle $|T|$ operatörü n -dikliği koruyandır. $|T|$

pozitif n -disjoint lineer operatör olduğu için Teorem 4.4'den $|T| = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ olacak şekilde $S_1, S_2, \dots, S_n$ Riesz homomorfizmaları vardır.

$$\left. \begin{aligned} T^+(x) &= \sup \{Ty : |y| \leq x\} \\ T^-(x) &= \sup \{-Ty : |y| \leq x\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |T|(x) = \sup \{|Ty| : |y| \leq x\}$$

olduğundan $0 \leq T^+ \leq |T|$ ve $0 \leq T^- \leq |T|$ 'dir. Buradan ve Riesz ayrışma özelliğinden E 'den F 'ye $U_1, U_2, \dots, U_n, V_1, V_2, \dots, V_n$ sıra sınırlı lineer operatörleri vardır öyle ki $T^+ = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ve $T^- = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ 'dir.

$$T^+ \leq |T| \Rightarrow T^+ \leq S_1 + S_2 + \dots + S_n = |T| \text{ ve } T^- \leq |T| \Rightarrow T^- \leq S_1 + S_2 + \dots + S_n = |T|$$

ile

$$T^+ = U_1 + U_2 + \dots + U_n \text{ ve } T^- = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

olduğu için Teorem 1,4'den her $i = 1, 2, \dots, n$ için $U_i \leq S_i, V_i \leq S_i$ ise $U_i + V_i \leq 2S_i$ olur. Her i için $T_i = U_i - V_i$ yazarsak $|T_i| = |U_i - V_i| \leq U_i + V_i \leq 2S_i$ olur. S_i operatörü dikliği koruyan olduğundan $|x| \wedge |y| = 0$ iken $|S_i x| \wedge |S_i y| = 0$ 'dir. $T_i \leq 2S_i$ olduğundan

$$|T_i x| \wedge |T_i y| \leq |2S_i x| \wedge |2S_i y| = 2(|S_i x| \wedge |S_i y|) = 0$$

olur ki bu da her $i = 1, 2, \dots, n$ için T_i operatörünün dikliği koruyan olduğu anlamına gelir.

$$\begin{aligned} T &= T^+ - T^- = U_1 + U_2 + \dots + U_n - (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = U_1 - V_1 + U_2 - V_2 + \dots + U_n - V_n \\ &= T_1 + T_2 + \dots + T_n \Rightarrow T = \sum_{i=1}^n T_i \end{aligned}$$

oluşumundan ispat biter.

Yukarıdaki ispatın yapılışı, n -disjoint lineer bir operatörün n tane lattice homomorfizmasının toplamı olarak tek şekilde ayrıştırılamayacağını açıkça gösterir.

4.1. Örnek

$E = F = \mathbb{R}^2$ olsun ve $T : E \rightarrow F$; $T(a, b) = (a + b, a + b)$ olarak tanımlansın. O zaman T operatörü 2-dikliği koruyandır. $I : E \rightarrow F$ özdeşlik dönüşümü olsun ve $R : E \rightarrow F$; $R(a, b) = (a, a)$ olarak tanımlansın. I ve $T - I$ rankı 2 olan lattice homomorfizmaları, R ve $T - R$ rankı 1 olan lattice homomorfizmalarıdır. Böylece 2-dikliği koruyan olan T operatörü $T = I + T - I = R + T - R$ biçiminde ayrı ayrı 2 tane lattice homomorfizmalarının toplamı olarak yazılabilir. Aslında bu örnek α, β, λ ve δ pozitif olmak üzere $T(a, b) = (\alpha a + \beta b, \lambda a + \delta b)$ formundaki her $T \in \mathbb{R}^2$ 'ye kolayca uygulanabilir.

$x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ve “ $x \leq y \Leftrightarrow a_1 \leq b_1$ ve $a_2 \leq b_2$ ” sıralaması ile $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayıdır ve her $x, y \in \mathbb{R}^2$ için $x \wedge y = (\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\})$ ve $|x| = (|a_1|, |b_1|)$ 'dir. T operatörünün 2-disjoint olduğunu görmek için, $0 \leq x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ alalım. Bu durumda $a \geq 0, b \geq 0$ ve $a + b \geq 0$ 'dir. Buradan $(a + b, a + b) \geq (0, 0)$ dolayısıyla $Tx \geq 0$ olduğundan T pozitif operatördür ve pozitif

her operatör sıra sınırlı olduğundan T sıra sınırlı operatördür. $0 \leq i, j \leq 2$ için $x_i \perp x_j = 0$ olacak şekilde $x_0 = (a_0, b_0)$, $x_1 = (a_1, b_1)$, $x_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=0}^2 |Tx_i| &= |Tx_0| \wedge |Tx_1| \wedge |Tx_2| = (|a_0 + b_0|, |a_0 + b_0|) \wedge (|a_1 + b_1|, |a_1 + b_1|) \wedge (|a_2 + b_2|, |a_2 + b_2|) \\
&= (\min\{|a_0 + b_0|, |a_1 + b_1|, |a_2 + b_2|\}, \min\{|a_0 + b_0|, |a_1 + b_1|, |a_2 + b_2|\}) \\
&\leq (\min\{[|a_0| + |b_0|], [|a_1| + |b_1|], [|a_2| + |b_2|]\}, \min\{[|a_0| + |b_0|], [|a_1| + |b_1|], [|a_2| + |b_2|]\}) \\
&= (\min\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\} + \min\{|b_0|, |b_1|, |b_2|\}, \min\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\} + \min\{|b_0|, |b_1|, |b_2|\}) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

Böylece T , 2-disjoint operatördür. $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ aldığımızda

$$|I(x)| = |x| = I(|x|)$$

$$|(T - I)x| = |(T - I)(a, b)| = |(b, a)| = (|b|, |a|) = (T - I)(|b|, |a|) = (T - I)(|x|)$$

$$|Rx| = |R(a, b)| = |(a, a)| = (|a|, |a|) = R(|a|, |a|) = R(|x|)$$

$$|(T - R)(x)| = |(T - R)(a, b)| = |(b, b)| = (|b|, |b|) = T - R(|x|)$$

eşitlikleri gerçekleştiğinden I , $T - I$, R ve $T - R$ operatörlerinin lattice homomorfizması olduğu açıktır. Buradan 2-dikliği koruyan olan T operatörünün $T = I + T - I = R + T - R$ biçiminde ayrı ayrı 2 tane lattice homomorfizmalarının toplamı olarak yazılabildiğini görmüş olduk.

Şimdi lattice homomorfizmalar tarafından üretilen ideal olan sıra sınırlı operatörlerin kümesini düşünelim. Bu ideali L ile gösterirsek, $S_1, \dots, S_n$ lattice homomorfizmaları

ve n pozitif tamsayı olmak üzere L ideali $|T| \leq \sum_{i=1}^n S_i$ biçiminde sıra sınırlı lineer T operatörlerinin kümesidir.

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olduğunda $L_b(E, F)$ 'nin Riesz uzayı olduğunu biliyoruz. $T \in L_b(E, F)$ olmak üzere

$$I_T = \{S : |S| \leq \lambda |T|, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$A \subseteq E$ olmak üzere

$$I_A = \left\{ y : |y| \leq \sum_{i=1}^n \lambda |x_i|, \lambda \in \mathbb{R}^+, x_i \in A \right\}$$

olduğunu hatırlayalım.

$$L_b^l = \{T : T : E \rightarrow F, T \in L_b(E, F) \text{ ve } T \text{ lattice homomorfizması}\}$$

biçiminde L_b^l kümesini tanımladığımızda $L_b^l(E, F) \subseteq L_b(E, F)$ olacağı açıktır. Bu durumda

$$I_{L_b^l} = \left\{ S : |S| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |T_i|; \lambda_i \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, T_i \in L_b^l(E, F) \right\}$$

olur.

Sonuç E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $I_{L_b^l}, L_b(E, F)$ içinde lattice homomorfizmalarının ürettiği ideal olsun. Bu durumda $I_{L_b^l}$ 'nin elemanları sadece ve sadece bir $n \in \mathbb{N}$ için n -dikliği koruyan operatörleridir. Yani

$$\mathfrak{T} = \{T : T \in L_b(E, F) \text{ ve en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } T, n\text{-dikliği koruyan operatör}\}$$

İspat

$S \in I_{L_b^l}$ alalım. O zaman $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$|S| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |T_i|$$

'dir. Teorem 2.4'e göre her $i = 1, \dots, n$ için

$$|S_i| \leq |T_i| \text{ ve } S = S_1 + \dots + S_n$$

olacak biçimde $S_1, \dots, S_n \in L_b(E, F)$ elemanları vardır. T_i 'ler lattice homomorfizması olduğundan pozitif ve dikliği koruyan operatörlerdir. $|x| \wedge |y| = 0$ iken

$$0 \leq |S_i x| \wedge |S_i y| \leq |T_i x| \wedge |T_i y| = 0$$

olduğundan $i = 1, \dots, n$ için S_i dikliği koruyandır. Bu durumda $S = S_1 + \dots + S_n$ n-disjointtir. Böylece $I_{L_b^l} \subseteq \mathfrak{T}$ 'dir. $S \in \mathfrak{T}$ alalım. Bu durumda S n-dikliği koruyan

operatör ve S_i dikliği koruyan operatör olmak üzere $S = \sum_{i=1}^n S_i$ 'dir. Bu durumda

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^n S_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |S_i|$$

olur ki burada $|S_i|$ operatörü lattice homomorfizması olduğü için $S \in I_{L_b^l}$ olur.

Böylece $\mathfrak{T} \subseteq I_{L_b^l}$ 'dir.

Sonuç olarak $\mathfrak{I} = I_{L_b^l}$ elde edilir.

4.2. n-Aralık Koruyan Operatörler

4.3. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $T = \sum_{i=1}^n T_i$ olacak şekilde $T_i : E \rightarrow F$ aralık koruyan operatörleri varsa T 'ye *n-aralık koruyan operatör* denir.

4.4. Tanım

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere $|T|$ modülü aralık koruyan operatör ise T 'ye *Maharam operatörü* denir.

4.5. Tanım

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $T = \sum_{i=1}^n T_i$ olacak şekilde ve $T_i : E \rightarrow F$ Maharam operatörleri varsa T 'ye *n-Maharam operatörü* denir.

E ve F Riesz uzayları, $T_i : E \rightarrow F$ lattice homomorfizması olmak üzere; $T = \sum_{i=1}^n T_i$ operatörünü *n-lattice homomorfizması* olarak adlandıracakız. $T : E \rightarrow F$ pozitif ve n-dikliği koruyan operatörünün n-lattice homomorfizması olacağı açıktır.

4.3. Adjoint Operatörü ile n-Dikliği Koruyan ve n-Aralık Koruyan Operatörler Arasındaki İlişkiler

E Riesz uzayı ise o zaman $E^\sim = \{f \mid f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ sıra sınırlı operatör}\}$ sıra duali de Riesz uzayıdır. Buradan $E^\sim$ üzerindeki bütün sıra sınırlı lineer fonksiyonelleri düşünebiliriz.

4.6. Tanım

Her bir $x \in E$ için $E^\sim$ üzerindeki sıra sınırlı lineer $\hat{x}$ fonksiyoneli, her $f \in E^\sim$ için;

$$\hat{x}: E^\sim \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \hat{x}f = f(x) = x''$$

olarak tanımlanır. $f \geq 0$ olacak şekilde $f \in E^\sim$ alalım. $x \geq 0$ iken $f(x) = \hat{x}(f) \geq 0$ olduğundan $\hat{x}$ pozitifdir.

E 'nin ikinci sıra duali $E^{\sim\sim}$ biçiminde gösterilir ve $E^{\sim\sim} := (E^\sim)^\sim$ olarak tanımlanır.

Aynı zamanda $E^\sim$ içinde $f_\alpha \downarrow 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in E^+$ için $f_\alpha(x) \downarrow 0$ olmasıdır. Bunun sonucu olarak, $E^\sim$ üzerindeki her x elemanı, sıra sürekli lineer fonksiyonel tanımlar. Buradan

$$\sigma: E \rightarrow E^{\sim\sim}, x \rightarrow \sigma(x) = \hat{x}$$

pozitif lineer operatörü tanımlanabilir. Bu operatöre *gömme operatörü* denir.

Sonuç

$E^\sim$, E 'nin noktalarını ayıran sıra duali ise gömme operatörü birebirdir.

İspat

$x, y \in E$, $f \in E^\sim$ ve $\sigma(x) = \sigma(y)$ olsun. Bu durumda $\hat{x} = \hat{y}$ olur ki böylece her $f \in E^\sim$ için

$$\hat{x}(f) = \hat{y}(f) \Rightarrow f(x) = f(y)$$

olur. Buradan $f(x - y) = 0$ 'dır $f \in E^\sim$ ve $E^\sim$, E 'nin noktalarını ayıran sıra duali olduğundan $x - y = 0$ olur. Sonuç olarak $x = y$ eşitliğinden gömme operatörü birebirdir.

4.5. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere gömme operatörü lattice koruyan operatördür.

İspat

$x \in E$ ve $0 \leq f \in E^\sim$ alalım.

$$\sigma: E \rightarrow E^{\sim\sim}; \quad x \rightarrow \sigma(x) = \hat{x}$$

olduğu ve Teorem 2.10 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (\sigma(x))^+ f &= (\hat{x})^+ f = \sup \{ \hat{x}(g) : g \in E^\sim \text{ ve } 0 \leq g \leq f \} \\ &= \sup \{ g(x) : g \in E^\sim \text{ ve } 0 \leq g \leq f \} \\ &= f(x^+) \\ &= (x^+)^{\wedge} f \\ \Rightarrow (\hat{x})^+ &= (x^+)^{\wedge} \Rightarrow (\sigma(x))^+ = \sigma(x^+) \end{aligned}$$

elde edilir ve Teorem 3.1 gereği gömme operatörü lattice homomorfizmdir.

E Riesz uzayı ve A , $E^\sim$ 'nin bir ideali olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $\hat{x}|_A$ kısıtlaması sıra sürekli lineer fonksiyonel tanımlar. Böylece E 'den $A_n^\sim$ içine $x \rightarrow \sigma(x) = \hat{x}$ gömme operatörü vardır öyleki her $f \in A$ için

$$\hat{x}(f) := f(x)$$

'dir. Yukarıdaki teoremden görürüz ki; E 'den $A_n^\sim$ içine bir gömme operatörünün, lattice koruyan ve birebir olması için gerekli ve yeterli koşul A 'nın E 'nin noktalarını ayıran olmasıdır.

4.6. Teorem

E ve F Riesz uzayları $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. T n-aralık koruyan operatör ise $T^\sim$ n-lattice (Riesz) homomorfizmasıdır.

İspat

T operatörü n-aralık koruyan olduğundan $T = \sum_{i=1}^n T_i$ olacak şekilde $T_i : E \rightarrow F$ aralık koruyan operatörleri vardır. T_i aralık koruyan operatör olduğundan Teorem 3.7 gereğince $T_i^\sim : F^\sim \rightarrow E^\sim$ operatörü lattice homomorfizmasıdır. $T = \sum_{i=1}^n T_i$ ve adjoint operatörünün lineerliğinden $T^\sim = \sum_{i=1}^n T_i^\sim$ elde edilir. $T_i^\sim$ lattice homomorfizması olduğundan $T^\sim$ n-lattice homomorfizması olur.

4.7. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $F_n^- = F^-$ ve F^- , F 'nin noktalarını ayıran sıra duali olmak üzere $T: E \rightarrow F$ operatörünün n -lattice homomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul $T^-: F^- \rightarrow E^-$ operatörünün n -aralık koruyan olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) $T: E \rightarrow F$ n -lattice homomorfizması olsun. Bu durumda $T = \sum_{i=1}^n T_i$ olacak şekilde $(1 \leq i \leq n)$ $T_i: E \rightarrow F$ lattice homomorfizmaları mevcuttur. F^- , F 'nin noktalarını ayıran sıra duali olduğu için Teorem 3.8 gereğince $T_i^-: F^- \rightarrow E^-$ $(1 \leq i \leq n)$ aralık koruyan operatörleri mevcuttur. Böylece $T^- = \sum_{i=1}^n T_i^-$, n -aralık koruyan operatör olur.

($\Leftarrow$) $T^-: F^- \rightarrow E^-$ n -aralık koruyan operatör olsun. Bu durumda $T^- = \sum_{i=1}^n S_i^-$ olacak şekilde $S_i^-: F^- \rightarrow E^-$ aralık koruyan operatörleri vardır. T_i^- 'ler lattice homomorfizması olmak üzere $T = \sum_{i=1}^n T_i$ eşitliğini arıyoruz. $S_i^-: F^- \rightarrow E^-$ $(i = 1, \dots, n)$ aralık koruyan operatörler ise Teorem 3.7'den $S_i^-: E^{--} \rightarrow F^{--}$ lattice homomorfizmalarıdır.

$S_i^-|_E = T_i$ diyelim. $T_i = S_i^-|_E: E \rightarrow F^{--}$ lattice homomorfizmasıdır. Önce her $i = 1, \dots, n$ için $T_i(E) \subseteq F$ olduğunu gösterelim. $T^- = \sum_{i=1}^n S_i^-$ olduğundan $0 \leq S_i^- \leq T^-$ 'dir. Buradan $0 \leq S_i^- \leq T^-$ elde edilir. Her $x \in E$ ve $g \in F^-$ için

$$0 \leq S_i^-(x'')(g) \leq T^-(x'')(g) = x''(T^-(g)) = T^-(g)(x) = g(Tx) = (Tx)''(g)$$

olur. $(Tx)'' \in F$ ve F , $F^{\sim}$ içinde ideal olduğundan $S_i^-(x'') \in F$ olur. $T^- = \sum_{i=1}^n S_i$

olduğundan $T^{\sim} = \sum_{i=1}^n S_i^{\sim}$ 'dır. Her $x \in E$ için

$$\left(\sum_{i=1}^n T_i \right) (x'') = \sum_{i=1}^n T_i (x'') = \sum_{i=1}^n S_i^-(x'') = T^-(x'')$$

olması ve $T^{\sim}|_E = T$ olması göz önüne alınırsa $T = \sum_{i=1}^n T_i$ elde edilir.

$$L_b^i = \{ T : T : E \rightarrow F, T \in L_b(E, F) \text{ ve } T \text{ aralık koruyan operatör} \}$$

diyelim. Bu durumda $L_b^i(E, F) \subseteq L_b(E, F)$ olduğu açıktır.

$$I_{L_b^i} = \left\{ T : |T| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |T_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i; \lambda_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, T_i \in L_b^i(E, F) \right\} \text{ 'dır.}$$

4.8. Teorem

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam Riesz uzayı E^- , E 'nin noktalarını ayıran sıra duali ve E , $E^{\sim}$ içinde ideal $(E^- = E_n^-)$ olmak üzere; δ , $L_b(E, F)$ içinde aralık koruyan operatörlerin ürettiği ideal olsun. Bu durumda, δ 'nın elemanları $n \in \mathbb{N}$ için n -Maharam operatörlerdir. Yani

$$\delta = \{ T : T \in L_b(E, F) \text{ ve en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } T \text{ n-Maharam operatörü} \}$$

İspat

$T \in I_{L_b^i}$ alalım. Bu durumda T_i aralık koruyan operatör olmak üzere $0 \leq |T| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i$ olur ki Teorem 2.4'den $T = S_1 + \dots + S_n$ ve her $i = 1, \dots, n$ için $0 \leq |S_i| \leq \lambda_i T_i$ olacak biçimde $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, $S_1, \dots, S_n \in L_b(E, F)$ elemanları vardır. Burada T_i operatörü aralık koruyan olduğundan $\lambda_i T_i$ operatörleri de aralık koruyandır. Bu yüzden seçilen S_i 'leri $0 \leq S_i \leq T_i$ olarak alabiliriz. Şimdi bu S_i 'lerin aralık koruyan olduğunu görelim.

$0 \leq S_i \leq T_i$ olduğunda $0 \leq S_i^- \leq T_i^-$ ve Teorem 3.7 gereği T_i aralık koruyan operatör iken T_i^- lattice homomorfizmasıdır. Böylece S_i^- lattice homomorfizması ve Teorem 3.8'den S_i^{--} aralık koruyan operatördür. S_i^{--} aralık koruyan operatör iken S_i 'nin aralık koruyan operatör olduğunu görelim. Bunun için $0 \leq y \leq Sx$ iken $y = S(u)$ olacak biçimde $0 \leq u \leq x$ elemanının varlığını göstermemiz yeterlidir.

$0 \leq y \leq S_i x$ olsun. Bu durumda $0 \leq y'' \leq (S_i x)'' = S_i^{--}(x'')$ olur ki gömme operatörü pozitif olduğundan sıra koruyandır. Bu eşitliği Teorem 4.7'nin ispatında bulmuştuk. $S_i^{--} : E^{--} \rightarrow F^{--}$ aralık koruyan ise $0 \leq y'' \leq S_i^{--}(x'')$ iken $S_i^{--}(G) = y''$ ve $0 \leq G \leq x''$ olacak biçimde $G \in E^{--}$ vardır. $u'' = G$ olacak şekilde $0 \leq u \leq x$ elemanını arıyoruz.

E , E^{--} içinde ideal olduğundan $0 \leq G \leq x''$ iken $G \in E$ olur ve $u'' = G$ olacak biçimde $u \in E$ vardır. Buradan $0 \leq u'' \leq x''$ ve gömme operatörü izomorf olduğu için $0 \leq u \leq x$ olur. Böylece $S_i^{--}(u'') = (S_i u)'' = y''$ olur ki böylece $S_i u = y$ olduğundan S_i aralık koruyan operatördür. Böylece $T = \sum_{i=1}^n S_i$ operatörü n-aralık koruyan olduğu için $I_{L_b^i} \subseteq \delta$ 'dir.

$T \in \mathcal{S}$ alalım. Bu durumda T , n -Maharam operatörüdür ve $|T_i|$ aralık koruyan operatör olmak üzere $T = \sum_{i=1}^n T_i$ 'dır. Bu durumda $|T| = \left| \sum_{i=1}^n T_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |T_i|$ ve $|T_i|$ operatörü aralık koruyan olduğu için $T \in I_{L_b^i}$ olur ki böylece $\mathcal{S} \subseteq I_{L_b^i}$ 'dir. Sonuç olarak $\mathcal{S} = I_{L_b^i}$ elde edilir.

5. SONUÇ

Çalışmamızda Riesz uzayları arasında n -aralık koruyan operatörü tanımlanarak, n -dikliği koruyan operatörlerle n -aralık koruyan operatörler arasındaki dual ilişki incelenmiştir. İki Riesz uzayı arasında tanımlı T operatörü n -lattice homomorfizması iken adjoint operatörünün n -aralık koruyan operatör olması için gerekli ve yeterli durumlar verilmiştir. Ayrıca E ve F Riesz uzayları iken aralık koruyan operatörlerin toplamalarının hangi koşullar altında, E 'den F 'ye sıra sınırlı operatörler içinde aralık koruyan operatörler tarafından üretilen ideale genişleyebileceği üzerinde çalışılmıştır. Bunlara ek olarak F Dedekind tam Riesz uzayı olduğunda $T_1, T_2, \dots, T_n$ E 'den F 'ye tanımlanan aralık koruyan operatörler olmak üzere bu operatörlerin adjointlerinin toplamının n -lattice homomorfizması olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., “Positive Operators”, *Academic Press*, Orlando, 3–13, 23, 30–35, 55, 60–65 (1985).
2. Bernau, S. J., “Orthomorphisms of archimedean vector lattices”, *Math. Proc. Camb.Phil. Soc.* 89: 119–128 (1981).
3. Duhoux, M., “A new prof of the lattice structure of orthomorphisms”, *J. London Math. Soc.*(2) 25: 375–378 (1981).
4. Meyer, M., “Le stabilisateur d’un esrace vectoriel reticule”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* 283: 249–250 (1976).
5. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O. and Krantz, P., “On lattice properties of the composition operator”, *Manuscripta Math.*, 36: 19–31 (1981).
6. Bernau, S. J., Huijsmans, C.B., Pagter, de B., “Sums of vektor lattice homomorphisms”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115: 151–156 (1992).
7. Zaanen, A.C., “Riesz Spaces II”, *North-Holland*, Amsterdam, 65-70 (1983).
8. Huijsmans, C.B., Pagter, de B., “Disjointness preserving and diffuse opertors”, *Compositio Math.*, 79:, 351–374 (1991).
9. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., “Principles of Real Analysis”, *Academic Press*, New York, 161-173, 254-266, 326-348 (1998).
10. Arendt, W., “Über das spektrumregularer operatoren”, *Ph. D. Dissertation. University of Tübingen*, 128 (1979)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KILINÇ Tuba
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 16.08.1982 Karabük
 Medeni hali : Bekâr
 Telefon : 0536 632 13 93
 e-mail : tubakln@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2004
Lise	İbn-i Sina Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı)	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-2007	Sosyal Güvenlik Kurumu Emekli Sandığı (Devredilen)	V.H.K.İ.

Yabancı Dil

İngilizce