

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-POTANSİYEL İÇEREN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN
TERS NODAL PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET KAPLAN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

TEMMUZ-2019

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-POTANSİYEL İÇEREN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN
TERS NODAL PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET KAPLAN
(161121102)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Haziran 2019

TEMMUZ-2019

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-POTANSİYEL İÇEREN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN
TERS NODAL PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEHMET KAPLAN
(161121102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Haziran 2019

Tezin Savunulduğu Tarih: 26 Temmuz 2019

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Emrah YILMAZ (F.Ü.)
Dr. Öğr. Üyesi Sertaç GÖKTAŞ (ME.Ü)

TEMMUZ-2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU 'na ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın Doç. Dr. Emrah YILMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet KAPLAN
ELAZIĞ-2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
2. DIRICHLET ŞARTLI TERS NODAL PROBLEM	11
3. AYRILABİLİR SINIR ŞARTLI TERS NODAL PROBLEM	15
KAYNAKLAR.....	22
ÖZGEÇMİŞ	25

ÖZET

Diferensiyel operatörlerin spektral teorisi gerek fen bilimleri gerek ise mühendislikte önemli bir yere sahiptir. Bu operatörlerden biri de Sturm-Liouville operatörüdür. Sturm-Liouville problemi ile ilgili direkt problem ve ters problem anlamında literatürde pek çok sonuç mevcuttur. Bununla birlikte problemdeki potansiyel fonksiyona farklı şartlar eklenerek ilginç ve literatüre katkı sağlayacak daha çok sonuç elde edilebilir. Bu çalışmada Sturm-Liouville denklemi ile birlikte ayrılabilir sınır şartları göz önüne alınmış ve özfonksiyonların sıfırları (nodal noktalar) yardımıyla ters problemin çözümüne ulaşılmıştır. Özellikle, Prüfer dönüşümü yardımıyla özdeğerler, nodal noktalar, nodal uzunluklar ve potansiyel fonksiyonlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Bu çalışmadaki problem birden fazla potansiyel fonksiyonu kapsamı açısından önceki çalışmalardan farklı ve ilginç sonuçlar içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Ters nodal problem, Spektrum, Prüfer dönüşümü

SUMMARY

Inverse Nodal Problem for Sturm-Liouville Operator with n-Potentials

Spectral theory of differential operators has an important role in science and engineering. One of these operators is Sturm-Liouville operator. There are many results in the literature regarding Sturm-Liouville problem both in terms of direct and inverse problems. However, by adding different conditions to the potential function in the problem, more interesting results that can contribute to the literature can be obtained. In this study, separable boundary conditions are taken into consideration with Sturm-Liouville equation and the solution of the inverse problem is reached with the help of the zeros (nodal points) of the eigenfunctions. Especially, a formula for eigenvalues, nodal points, nodal lengths and potential functions has been found with the help of the Prüfer transformation. We can say that the problem in this study includes different and interesting results from the previous studies in terms of covering more than one potential function.

Key Words: Inverse nodal problem, Spectrum, Prüfer transformation

SEMBOLLER LİSTESİ

$L_2[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonlar uzayı
$W_2^1(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
L	: Sturm-Liouville operatörü
$y_n(x)$	: n . özdeğere karşılık gelen n . özfonksiyon
$x_i^{(n)}$	: i . nodal nokta
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler
$w(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
λ_n	: n . özdeğer
$\ell_i^{(n)}$	: i . nodal uzunluk
$q(x)$	: Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1 (İç çarpım uzayı) [4]

Bir iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise üzerinde tanımlanmış metriğe göre tam olan iç çarpım uzayıdır. Burada, ifade edilen iç çarpım $X \times X$ 'den X 'in her x ve y vektör çifti, x ve y 'in vektörel çarpımı olarak ifade edilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen ve her x, y, z vektörleri ve α skaleri için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir.

- i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iv) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tanım 1.2 (Hilbert Uzayı) [4]

$x, y, z, \dots$ elemanlarının bir cümlesi H olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan H uzayına bir soyut Hilbert uzayı denir.

- a) H bir lineer uzayıdır.
- b) H uzayındaki her $x, y \in H$ eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen, aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen bir reel sayı karşılık gelir.

- i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- ii) $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, (\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için})$
- iv) $x \neq 0$ için $\langle x, x \rangle > 0$
- c) $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ile verilen metriğe göre H uzayı tamdır.
- d) H uzayı sonsuz boyutludur.

Eğer, sadece a, b ve c şartları sağlanıyorsa, H uzayına üniter Hilbert uzayı denir.

Tanım 1.3 ($L_2[a, b]$ uzayı) [4]

$[a, b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilen, ölçülebilir, kompleks değerli $f(x), g(x), \dots$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L_2[a, b]$ uzayı denir. $L_2[a, b]$ uzayı $\forall f, g \in L_2[a, b]$ için

$d: L_2[a, b] \times L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

metriği ile bir metrik uzay;

$$\| \cdot \| : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Bu uzayda iç çarpım,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

biçiminde ifade edilir. $L_2[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.4 ($C[a, b]$ uzayı) [4] $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli, reel veya kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C[a, b]$ uzayı denir. Bu uzay $f, g \in C[a, b]$ ve

$$d: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ olmak üzere}$$

$$d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

metriğiyle bir metrik uzay; $\| \cdot \| : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normuyla bir normlu uzay olur. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

olarak ifade edilir.

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuyla tam olmayan bu uzay Hilbert uzayı değildir.

Tanım 1.5 (Sobolev uzayı) [4] Sobolev uzayları eliptik diferensiyel denklemleri incelemek amacıyla Rus matematikçi Sergei Lvovich Sobolev tarafından 1930 lu yıllarda ifade edilmiştir. Sobolev uzayı önemli bir Hilbert uzayıdır.

Kabul edelim ki Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bir bölge ve $L_2(\Omega)$ uzayı bir Lebesgue uzayı olsun. $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayı, $u \in L_2(\Omega)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ şartını sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayıdır. Buradaki 1, mertebesi bir olan kısmi türevlerin $L_2(\Omega)$ uzayına

ait olması gerektiğini göstermektedir. 2 ise, $L_2(\Omega)$ uzayına ait olma koşulundaki integralin kuvvetini ifade etmektedir. $W^{1,2}(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ uzayları arasında $W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ biçiminde bir ilişki vardır. $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$ olmak üzere $W^{1,2}(\Omega)$ sobolev uzayındaki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \cdot g dx + \int_{\Omega} \text{grad} f \cdot \text{grad} g dx$$

veya

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} dx + \int_{\Omega} \Delta f \cdot \Delta g dx$$

biçiminde tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} f^2 dx + \int_{\Omega} |\text{grad} f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak ifade edilir. Sobolev uzayına W -uzayları olarak da adlandırılır.

Örnek 1.1 (Sobolev uzayıyla ilgili bir örnek) [4]

Farz edelim ki, Ω bölgesi $Y = [0, 2\pi]^2$ karesi olsun ve

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$$

olsun. Bu durumda $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos x_1$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\sin x_2$ olmak üzere

$$\int_Y |f|^2 dx = \int_Y |\sin x_1 + \cos x_2|^2 dx \leq \int_Y |1 + 1|^2 dx = \int_Y 4 dx = 4|Y| < \infty,$$

$$\int_Y \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 dx = \int_Y |\cos x_1|^2 dx \leq \int_Y |1|^2 dx = Y < \infty,$$

$$\int_Y \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2 dx = \int_Y |-\sin x_2|^2 dx \leq \int_Y |1|^2 dx = |Y| < \infty$$

olur. Böylece, $f \in L_2(Y)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_2(Y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_2} \in L_2(Y)$ olur. Buradan, $f \in W^{1,2}(Y)$ elde edilir.

Teorem 1.1 (İntegral için ortalama değer teoremi) [4]

$f, [a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli ise $c \in (a, b)$ olacak biçimde en az bir c vardır.

Öyle ki,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Tanım 1.6 (Özdeğer- özfonksiyon) [26] L lineer bir operatör ve $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ oluyorsa y fonksiyonuna L operatörünün özfonksiyonu (yada özvektörü), λ ya ise L operatörünün bir özdeğeri denir.

Tanım 1.7 (Sturm-Liouville operatörü) [26] Kuantum mekaniğinin yanı sıra klasik fizikteki birçok özdeğer problemi, (a, b) aralığında

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

sınır şartlarını sağlayan

$$[p(x)y'(x)]' + [\lambda \rho(x) - q(x)]y(x) = 0 \quad (1.2)$$

diferensiyel denklem sınıfına uygundur. Burada, p, q ve ρ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardır. ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu adı verilir.

Uygulamalarda sık sık kullanılan temel operatörlerden birisi de

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklindeki Sturm-Liouville operatörüdür. Denklemdaki q fonksiyonu reel ve $[a, b]$ aralığında süreklidir. L operatörü için en önemli sınır şartları $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ olmak üzere genelde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Bu sınır şartlarına ayrık sınır şartları adı verilir.

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (1.4)$$

denklemini dikkate alalım. Bu denklem (1.2) denkleminin $p(x) = \rho(x) = 1$ özel durumudur. (1.3)-(1.4) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak bilinir. (1.3) sınır şartı $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak şartıyla

$$\begin{aligned} y(a) \cot \alpha + y'(a) &= 0, \\ y(b) \cot \beta + y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilir. Burada, $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ olarak adlandırılırsa

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0, \\ y'(b) + Hy(b) &= 0 \end{aligned}$$

sınır şartları oluşur. Bu sınır şartlarına ayrılabilir sınır şartları denir. Burada H ve h keyfi sabitlerdir.

p, q ve ρ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı hepsi periyodik fonksiyonlar ise (1.2) denkleminde

$$y(a) = y(b) \quad y'(a) = y'(b)$$

periyodik sınır şartları ve

$$y(a) = -y(b) \quad y'(a) = -y'(b)$$

anti periyodik sınır şartlarıyla Sturm-Liouville periyodik (yada anti periyodik) sınır değer problemi adı verilir. Bu koşullarla birlikte (1.4) denkleminde Hill denklemi adı verilir. (1.2) denkleminde özel olarak $p = 1, q = 0$ alınırse elde edilen

$$-y'' = \lambda \rho(x)y$$

denkleme string denklemi adı verilir. [7, 22, 23]

Tanım 1.8 (Operatör) [26] Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşümlere operatör adı verilir.

Tanım 1.9 (Nodal nokta cümlesi) [23] (1.1)-(1.2) probleminin özdeğer probleminin nodal nokta bilgisi $y_n(x)$ özfonksiyonlarının kökleri olan

$$\{x_j^{(n)}\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad n \geq 2$$

cümlesidir. $\{x_j^{(n)}\}$ cümlesi, (1.1) ve (1.2) problemindeki p, q fonksiyonlarına ve sınır şartlarındaki sabitlere bağlıdır.

$$\ell_j^n = x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad n \geq 2$$

biçiminde ifade edilen değere de nodal uzunluk adı verilir.

Tanım 1.10 (Adjoint operatör) [4] X bir Hilbert uzayı, $B(X)$ ise X üzerinde tanımlı tüm lineer sınırlı operatörlerin uzayı olsun. $T \in B(X)$ olmak şartıyla T^* ile ifade edilen T operatörünün adjointi; $\forall x, y \in X$ için $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ eşitliğini sağlayan $B(X)$ uzayının tek bir elemanıdır.

Tanım 1.11 (Self-Adjoint Operatör) [4] $T \in B(X)$ olmak üzere $T = T^*$ şartını sağlayan T operatörüne self-adjoint yada hermityen operatör adı verilir.

Tanım 1.12 (Büyük O Notasyonu) 1892 yılında Alman matematikçi Bachmann, "Analytische Zahlentheorie" adlı kitabında fonksiyonların asimptotik davranışlarını karakterize etmek amacıyla yeni bir notasyon tanımlanmıştır. [17, 28, 34]

Her $n \geq 0$ tam sayısı için $f(n) \geq 0$ bir fonksiyon olsun. Her $n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cg(n)$ olacak biçimde bir n_0 tamsayısı ve $C > 0$ sabiti varsa " $f(n) = O(g(n))$ dir" denir.

Büyük O notasyonunun birkaç matematiksel özelliği aşağıdaki gibidir.

a) $f_1(n) = O(g_1(n))$ ve $f_2(n) = O(g_2(n))$ olsun.

i) $f_1(n) + f_2(n) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$

ii) $O(f_1(n)) \cdot O(f_2(n)) = O(f_1(n) \cdot f_2(n))$

iii) $k \neq 0, \quad O(kf_1(n)) = O(f_1(n))$

iv) $O(k + f_1(n)) = O(f_1(n))$

v) $f_1(n) \times f_2(n) = O(g_1(n) \times g_2(n))$

b) $f_1(n)$ ve $f_2(n)$ fonksiyonları her $n \geq 0$ tam sayısı için pozitif tanımlı fonksiyonlar ve $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ ve $L \geq 0$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = L$ olsun. Bu durumda; $f(n) = O(f_1(n))$ biçimindedir.

c) $f(n) = O(g(n))$ ve $g(n) = O(h(n))$ ise $f(n) = O(h(n))$ biçimindedir.

d) $f(n)$ ve $g(n)$ sonlu bir aralık üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ve $n \geq n_0$ için $f(n) = O(g(n))$ olmak üzere

$$\int_{n_0}^n f(x)dx = O\left(\int_{n_0}^n |g(x)|dx\right), \quad n \geq n_0$$

biçimindedir.

e) $i = 1, 2, 3, \dots, k$ olmak üzere $f_i(n) = O(g_i(n))$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\sum_{i=1}^k f_i(n) = O\left(\sum_{i=1}^k |g_i(n)|\right)$$

biçimindedir.

f) Verilen bir g fonksiyonu için

i) $\frac{1}{1 + O(g(n))} = 1 + O(g(n))$

ii) $\log[1 + O(g(n))] = O(g(n))$

iii) $\exp[O(g(n))] = 1 + O(g(n))$

biçimindedir.

Tanım 1.13 (Küçük o notasyonu) $f(n) \in o(g(n))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

olmasıdır. Bu asimptotik olarak yok sayılabilir anlamına da gelir. " $f(n)$, $g(n)$ 'in küçük o sudur" diye okunur. Sezgisel olarak açıklaması şudur. $n \rightarrow n_0$

iken $g(n)$, $f(n)$ işleminden çok daha hızlı büyür. Küçük o notasyonu için bazı özellikler aşağıdaki gibidir [17, 28, 34].

$$i) \ o(f) + o(f) \in o(f)$$

$$ii) \ o(f) \cdot o(g) \in o(fg)$$

$$iii) \ o(o(f)) \in o(f)$$

$$iv) \ o(f) \in o(f)$$

Örnek 1.2 $f(n) = 8n + 128$ fonksiyonu verilsin. $\forall n \geq 0$ için $f(n)$ fonksiyonunun negatif olmadığı bellidir. $f(n) = O(n^2)$ olduğunu gösterelim.

$f(n) = O(n^2)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq C \cdot g(n)$ olacak biçimde bir n_0 tam sayısı ve $C > 0$ sabitinin var olmasıdır. C sabiti mevcut olduğu takdirde onun ne olduğu önemli değildir. Örneğin $C=1$ halinde

$$f(n) \leq Cn^2 \Rightarrow f(n) \leq n^2$$

$$8n + 128 \leq n^2$$

$$n^2 - 8n - 128 \geq 0$$

$$(n - 16)(n + 8) \geq 0$$

olur. $\forall n \geq 0$ için $(n + 8) > 0$ olduğundan, $(n - 16) \geq 0$ olduğu sonucu çıkar. Yani $n_0 = 16$ dır. Bu nedenle $C = 1$ için $n_0 = 16$ ve $\forall n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cn^2$ olur. Böylece, $f(n) = O(n^2)$ dir. $n = 16$ noktasının sağında $f(n) = O(n^2)$ dir. $n = 16$ noktasının sağında $g(n) = n^2$ fonksiyonu $f(n) = 8n + 128$ fonksiyonundan daha büyüktür. Elbette n_0 ve C nin başka birçok değeri vardır. Örneğin $C = 2$ halinde $n_0 = 10.2$, $C = 4$ halinde $n_0 = 6.7$ elde edilir [17, 28, 34].

Örnek 1.3 $x \rightarrow 0$ iken $x - \sin x = o(x)$ elde edilir. Gerçekten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = 0$$

biçimindedir. Küçük o notasyonunun tanımı gereği $x - \sin x = o(x)$ olarak elde edilir [17, 28, 34].

Tanım 1.14 (Taylor Serisi) [3, 28] $f(x)$ fonksiyonu, x_0 noktası ve civarında $(n + 1)$. mertebeden türeve sahipse,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

serisine Taylor serisi adı verilir.

Eğer f fonksiyonu sonsuz mertebeden türeve sahipse

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

olur.

Örnek 1.4 [28] $f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunu $x = 1$ noktası civarında Taylor serisine açalım.

$$f'(x) = 3e^{3x}, f''(x) = 3^2 e^{3x}, \dots, f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$$

olup $f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki Taylor serisi

$$\begin{aligned} 1 + 3e^3(x-1) + \frac{3^2 e^3}{2!} (x-1)^2 + \frac{3^3 e^3}{3!} (x-1)^3 + \dots + \frac{3^n e^3}{n!} (x-1)^n + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e^3}{n!} (x-1)^n \end{aligned}$$

Tanım 1.15 [4] $\{\phi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ fonksiyonlar cümlesi sonsuz yada sonlu bir $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli olsun. $\forall m \neq n$ için

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \omega(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

ve her n için

$$\int_a^b \omega(x) \phi_n^2(x) dx \neq 0$$

ise, $\{\phi_n(x), n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ cümlesine $[a, b]$ aralığında negatif olmayan $\omega(x)$ fonksiyonuna göre ortogonaldır denir. Böyle bir $\omega(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu adı verilir. Burada $\omega(x)$ in $[a, b]$ aralığında en fazla sonlu sayıda sıfıra sahiptir ve

$$\int_a^b \omega(x) \phi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

integrallerinin mevcut olduğunu kabul edelim. $\forall n$ için $\{\phi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ ortogonal cümlesine

$$\int_a^b \omega(x) \phi_n^2(x) dx = 1$$

ise $[a, b]$ aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal adı verilir.

Tanım 1.16 [26]

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \tag{1.5}$$

denklemini ile

$$\begin{aligned} a_0 y(a) + a_1 y'(a) &= 0, \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

sınır şartlarından oluşan (1.5)-(1.6) problemine Sturm-Liouville problemi denir. (1.5) denkleminde λ bir parametredir; $q, w \in C(I)$, $p \in C^1(I)$ ve $\forall x \in I = [a, b]$ için $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ dir. Bu özellikleri sağlayan (1.5)-(1.6) problemine bir regüler Sturm-Liouville problemi, aksi halde bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir. Böyle bir problemde λ özdeğerine karşılık gelen aşikar olmayan $\phi_\lambda(x)$ çözümlerine ise özfonksiyonlar adı verilir.

Örnek 1.5

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (1.7)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (1.8)$$

probleminin özdeğer ile öz fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm $\lambda = 0$ durumunda (1.7) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

dir. Bu çözüm (1.8) sınır koşullarından

$$c_1 = c_2 = 0$$

olması halinde sağlar. O halde, $y(x) \equiv 0$ (1.7)-(1.8) probleminin tek çözümüdür. Bu nedenle $\lambda=0$, (1.7)-(1.8) problemi için bir özdeğer olamaz.

$\lambda = \mu^2 (\mu > 0)$ olsun. Bu takdirde (1.7)'nin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

dir. (1.8) sınır şartları göz önüne alınırsa $y(0) = c_1 = 0$ ve $y(\pi) = c_2 \sin(\mu \pi) = 0$.

Burada $c_2 \neq 0$ halinde, $\sin(\mu \pi) = 0$ alınırsa

$$\mu = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla

$$y(x) = c_2 \sin(nx)$$

ise

$$\phi_n(x) = \sin(nx) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

öz fonksiyonları bulunur. Bu takdirde denklemin özdeğerleri

$$\lambda = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dir.

Şimdi $\lambda = -\mu^2 (\mu > 0)$ halinde (1.7)'nin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

dir. (1.8) sınır koşulları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ y(\pi) &= c_1 e^{-\mu\pi} + c_2 e^{\mu\pi} = 0\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olduğundan sadece $c_1 = c_2 = 0$ aşıkâr çözümüne sahiptir. O halde $y(x) \equiv 0$ çözümü elde edilir. Bu da bir öz fonksiyon olmaz. Böylece (1.7)-(1.8) probleminin negatif özdeğerleri yoktur.

Teorem 1.2 [26] $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ regüler (1.5)-(1.6) Sturm–Liouville probleminin özdeğerleri ve $\phi_n(x), n = 1, 2, 3, \dots$ karşılık gelen öz fonksiyonları olsun. O halde $\{\phi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ cümlesi $[a, b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

Teorem 1.3 [26] Regüler (1.5)-(1.6) Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerin hepsi reeldir.

Teorem 1.4 [9, 13, 14] Regüler (1.5)-(1.6) Sturm-Liouville probleminin sonsuz sayıda $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ özdeğeri vardır. Bu özdeğerler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

olmak üzere

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

şeklinde monoton artan bir dizi elde edilir. Ayrıca, λ_n özdeğerlerine karşılık gelen $\phi_n(x)$ özfonksiyonları (a, b) aralığında tam $(n - 1)$ tane sifıra sahiptir.

2. DIRICHLET ŞARTLI TERS NODAL PROBLEM

Ters spektral problemler 1929 yılında potansiyel fonksiyonun tek olarak bulunması ile başlayıp sonrasında bu fonksiyonun spektral parametreler yardımıyla bulunması ile ilgili pek çok sonuç sunulmuştur [1,2,15,24,25]. Ters nodal problemler ise ilk olarak 1988 yılında literatüre girip özdeğer probleminden farklı olarak nodal nokta kümesi yardımıyla potansiyel fonksiyonun bulunması olarak ifade edilir. Sonraki yıllarda bu konu ile ilgili pek çok sonuç elde edilmiştir [5, 6, 21, 22, 23, 29, 32].

Çalışmanın bu kısmında aşağıda verilen problem için ters nodal problem ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Bu problem literatürde diferensiyel pencil problemi olarak bilinir [7, 9, 10, 11, 12, 16, 18, 19, 20, 30].

$n > 1$, $q_0(x) \in C[0, \pi]$, $q_k(x) \in C^1[0, \pi]$, $(k = 1, 2, 3, \dots, n-1)$ olmak üzere

$$-y'' + (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \lambda^2 q_2(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))y = \lambda^{2n} y, \quad (2.1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (2.2)$$

problemini göz önüne alalım. Bu kısımda hedeflenen sonuçlara ulaşmak için literatürde Prüfer dönüşümü olarak bilinen

$$\begin{aligned} y &= s(x) \sin(\lambda^n \theta(x)), \\ y' &= \lambda^n s(x) \cos(\lambda^n \theta(x)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dönüşümü gözönüne alınacaktır [11,12,30].

Prüfer dönüşümü dikkate alınırsa

$$\frac{y'}{y} = \lambda^n \cot(\lambda^n \theta(x))$$

ve

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -\frac{\lambda^{2n} \theta'(x)}{\sin^2(\lambda^n \theta(x))} \quad (2.4)$$

olduğundan

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - (y')^2}{(y)^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \quad (2.5)$$

elde edilir. Öte taraftan

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \lambda^{2n} \cot^2(\lambda^n \theta(x)) \quad (2.6)$$

elde edilir. (2.4) ve (2.6), (2.5)'de yerine yazılırsa

$$-\frac{y''}{y} = \frac{\lambda^{2n} (\theta'(x) - \cos^2(\lambda^n \theta(x)))}{\sin^2(\lambda^n \theta(x))} \quad (2.7)$$

olur. (2.7) değeri (2.1)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\frac{y''}{y} - \lambda^{2n} &= -(q_0(x) + \lambda q_1(x) + \lambda^2 q_2(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x)) \\ \lambda^{2n} (\theta'(x) - 1) &= -(q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x)) \sin^2(\lambda^n \theta(x)) \\ \theta'(x) - 1 &= -\frac{(q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x)) \sin^2(\lambda^n \theta(x))}{\lambda^{2n}} \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\theta'(x) = 1 - \frac{(q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x)) \sin^2(\lambda^n \theta(x))}{\lambda^{2n}} \quad (2.8)$$

elde edilir.

Teorem 2.1 [10] (2.1)-(2.2) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_k^n = k + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k}{2\lambda_k^{2n-m}\pi} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{k}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

şeklindedir.

İspat: (2.1) ve (2.2) problemi için sınır şartları yardımıyla $\lambda = \lambda_k$, $\theta(0) = 0$ ve $\theta(\pi) = \frac{k\pi}{\lambda_k^n}$ olmak üzere, (2.8) denkleminin $[0, \pi]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \theta'(x) dx &= \int_0^\pi \left(1 - \frac{(q_0(x) + \lambda_k q_1(x) + \dots + \lambda_k^{n-1} q_{n-1}(x)) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x))}{\lambda_k^{2n}} \right) dx \\ \theta(\pi) - \theta(0) &= \int_0^\pi dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx \quad (2.9) \end{aligned}$$

olup, (2.9) denkleminin sağ tarafına

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx$$

terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \frac{k\pi}{\lambda_k^n} &= \pi - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) [1 - 2\sin^2(\lambda_k^n \theta(x))] dx \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$1 - 2\sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) = \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) = \frac{1}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))]$$

olup bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{k\pi}{\lambda_k^n} &= \pi - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Son denklemin sağ tarafında son n -tane integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{q_0(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] dx &= \frac{q_0(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \sin(2\lambda_k^n \theta(x)) \Big|_0^\pi \\ &- \frac{1}{2\lambda_k^n} \int_0^\pi \sin(2\lambda_k^n \theta(x)) \frac{d}{dx} \left[\frac{q_0(x)}{\theta'(x)} \right] dx \end{aligned}$$

elde edilir. $\theta(0) = 0$ ve $\theta(\pi) = \frac{k\pi}{\lambda_k^n}$ için $\sin(2\lambda_k^n \theta(x)) = 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi \frac{q_0(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer $(n-1)$ tane integraller için

$$\int_0^\pi \frac{q_1(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right),$$

.

.

.

$$\int_0^\pi \frac{q_{n-1}(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right)$$

bulunur. Bu değerler (2.10) denkleminde dikkate alınırsa yukarıdaki ifadeler

$$\frac{1}{2\lambda_k^{2n}} O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) + \frac{1}{2\lambda_k^{2n-1}} O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) + \cdots + \frac{1}{2\lambda_k^{n+1}} O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

olur. Sonuç olarak (2.10) eşitliğinde

$$\frac{k\pi}{\lambda_k^n} = \pi - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

$$\begin{aligned}\lambda_k^n &= \frac{k\pi}{\pi - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)} \\ &= \frac{k\pi}{\pi \left(1 - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}\pi} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)\right)}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{1 \mp O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

özelliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\lambda_k^n &= k \left(1 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)\right), \\ \lambda_k^n &= k + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k}{2\lambda_k^{2n-m}\pi} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{k}{\lambda_k^{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2 [10] $n \rightarrow \infty$ iken, (2.1)-(2.2) probleminin nodal noktaları

$$x_j^k = \frac{j\pi}{k} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2k^{\frac{2n-m}{n}}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{n}}}\right)$$

biçimindedir.

Teorem 2.3 [10] $n \rightarrow \infty$ iken, (2.1)-(2.2) probleminin nodal uzunlukları

$$\ell_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n+1}}\right)$$

biçimindedir.

Teorem 2.4. [10] (2.1)-(2.2) probleminin potansiyel fonksiyonları

$$\begin{aligned}q_0(x) &= 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lambda_k^2 - \frac{\lambda_k \pi}{\ell_j^k} \right), \\ q_n(x) &= 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lambda_k^{n+2} - \lambda_k^n + \frac{\pi}{\ell_j^k} (1 - \lambda_k) \right) \quad n = 1, 2, \dots, n-1\end{aligned}$$

biçimindedir.

3. AYRILABİLİR SINIR ŞARTLI TERS NODAL PROBLEM

Bu kısımda, ikinci bölümde verilen Dirichlet sınır şartlı problemde bu şartlar yerine ayrılabilir sınır şartları alınarak benzer teoremler verilecektir. Teoremlerin ispatları ikinci bölümdeki teoremler ile benzerdir.

$$-y'' + (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))y = \lambda^{2n}y, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

problemni göz önüne alalım. Bu problem literatürde ayrılabilir sınır şartlı diferensiyel pencil problemi olarak bilinir, burada H keyfi bir sabittir.

$$\begin{aligned} y &= S(x) \sin(\lambda^n \theta(x)), \\ y' &= \lambda^n S(x) \cos(\lambda^n \theta(x)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Prüfer dönüşümünü gözönüne alalım. Sınır şartları yardımıyla

$$\frac{y(\pi)}{y'(\pi)} = -\frac{1}{H} \quad (3.4)$$

olup (3.3) denklemleri (3.4) de yerine yazılırsa

$$\cot(\lambda^n \theta(\pi)) = -\frac{H}{\lambda^n} \quad (3.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan, Prüfer dönüşümü dikkate alınır

$$\frac{y'}{y} = \lambda^n \cot(\lambda^n \theta(x))$$

ve

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{-\lambda^{2n} \theta'(x)}{\sin^2(\lambda^n \theta(x))} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) denkleminin sol tarafı düzenlenirse

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \quad (3.7)$$

olup (3.6) ve (3.3) denklemleri (3.7) de yerine yazılırsa

$$-\frac{y''}{y} = \frac{\lambda^{2n} (\theta'(x) - \cos^2(\lambda^n \theta(x)))}{\sin^2(\lambda^n \theta(x))} \quad (3.8)$$

bulunur. (3.8) ifadesi (3.1) de yerine yazılırsa

$$-\frac{y''}{y} - \lambda^{2n} = -\left(\sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x)\right)$$

$$\frac{\lambda^{2n}(\theta'(x) - \cos^2(\lambda^n \theta(x)))}{\sin^2(\lambda^n \theta(x))} - \lambda^{2n} = - \left(\sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x) \right)$$

$$\frac{\lambda^{2n}(\theta'(x) - 1)}{\sin^2(\lambda^n \theta(x))} = - \left(\sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x) \right)$$

olup buradan

$$\theta'(x) = 1 - \frac{(\sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x)) \sin^2(\lambda^n \theta(x))}{\lambda^{2n}} \quad (3.9)$$

elde edilir.

Teorem 3.1 $n \rightarrow \infty$ iken, (3.1)-(3.2) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_k^n = \left(k + \frac{1}{2}\right) + \frac{H}{\pi k^{2n-1}} + \frac{1}{2\pi k^{2n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^\pi \lambda_k^m q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{k^{2n}}\right)$$

biçimindedir.

İspat: $\lambda = \lambda_k$, $\theta(0) = 0$ ve $\theta(\pi) = \frac{k\pi}{\lambda_k^n}$ olup (3.9) denkleminin $[0, \pi]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^\pi \theta'(x) dx = \int_0^\pi \left(1 - \frac{(\sum_{m=0}^{n-1} \lambda_k^m q_m(x)) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x))}{\lambda_k^{2n}} \right) dx \quad (3.10)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (3.5) ifadesi tekrar ele alınırsa ters kotonjant fonksiyonu için Taylor seri açılımı yardımıyla

$$\cot(\lambda^n \theta(\pi)) = -\frac{H}{\lambda_k^n}$$

için

$$\begin{aligned} \theta(\pi) &= \frac{1}{\lambda_k^n} \operatorname{arccot}\left(-\frac{H}{\lambda^n}\right) = \frac{1}{\lambda_k^n} \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi - \frac{H}{\lambda_k^n} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n}}\right) \right) \\ &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi}{\lambda_k^n} - \frac{H}{\lambda_k^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, bu son eşitlik (3.10) denkleminde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \theta(\pi) &= \int_0^\pi dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) \sin^2(\lambda^n \theta(x)) dx \\ \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi}{\lambda_k^n} - \frac{H}{\lambda_k^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n}}\right) &= \pi - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx \end{aligned}$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

elde edilir. Bu ifadenin son n terimi için aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa:

$$\int_0^\pi \sum_{m=0}^{n-1} q_m(x) \lambda_k^m \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

denkleminde $n = 1$ durumunda

$$\int_0^\pi q_0(x) \cos(2\lambda_k \theta(x)) dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$$

$n = 2$ durumunda

$$\int_0^\pi q_0(x) \cos(2\lambda_k^2 \theta(x)) dx + \int_0^\pi q_1(x) \lambda_k \cos(2\lambda_k^2 \theta(x)) dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$$

olup bu şekilde devam edilirse $n=k$ durumunda

$$\int_0^\pi \sum_{m=0}^{n-1} q_m(x) \lambda_k^m \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{n-1}}\right) + \dots + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_k^{2n}} \left[O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{n-1}}\right) + \dots + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \right] &= O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n-1}}\right) + \dots + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

ifadesi yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_k^n} = \pi + \frac{H}{\lambda_k^{2n}} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2 $n \rightarrow \infty$ iken, (3.1)-(3.2) probleminin nodal noktaları

$$x_j^k = \frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

şeklindedir.

İspat: $\lambda = \lambda_k$ için, (3.9) denkleminin her iki tarafının 0 dan x_j^k ya integrali alınırsa yani

$$\int_0^{x_j^k} \theta'(x) dx = \int_0^{x_j^k} \left(1 - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) \right) dx$$

$$\theta(x_j^k) - \theta(0) = x_j^k - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx \quad (3.12)$$

olur. (3.3) deki Prüfer dönüşümünün ilk eşitliliğinde $x = x_j^k$ olduğu dikkate alınırsa

$$y(x_j^k) = S(x_j^k) \sin(\lambda_k^n \theta(x_j^k))$$

elde edilir. $y(x_j^k) = 0$ sınır koşulundan

$$0 = S(x_j^k) \sin(\lambda_k^n \theta(x_j^k))$$

olup $S(x_j^k) \neq 0$ olmak üzere

$$\sin(\lambda_k^n \theta(x_j^k)) = 0 = \sin(j\pi),$$

$$\lambda_k^n \theta(x_j^k) = j\pi \Rightarrow \theta(x_j^k) = \frac{j\pi}{\lambda_k^n}$$

bulunur. Bu son ifade (3.12) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{j\pi}{\lambda_k^n} &= x_j^k - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx, \\ x_j^k &= \frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

trigonometrik dönüşümü yardımıyla (3.13) eşitliğinin sağ tarafı

$$\frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) dx \quad (3.14)$$

biçiminde yazılıp bu ifadenin son n terimi yukarıda yapılan benzer hesaplamalar ile

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) dx = O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

olup

$$\frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

elde edilir ki, bu son ifade (3.13) denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Şimdi de $k \rightarrow \infty$ halinde nodal uzunluk $\ell_j^k = x_{j+1}^k - x_j^k$ değerini bulalım.

Teorem 3.3 $k \rightarrow \infty$ iken, (3.1)-(3.2) probleminin nodal uzunlukları

$$\ell_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

biçimindedir.

İspat: $\lambda = \lambda_k$ için, (3.9) denkleminin x_j^k den x_{j+1}^k e integrali alınır

$$\int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} \theta'(x) dx = \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} \left(1 - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) \right) dx$$

$$\theta(x_{j+1}^k) - \theta(x_j^k) = \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

$$\frac{(j+1)\pi}{\lambda_k^n} - \frac{j\pi}{\lambda_k^n} = x_{j+1}^k - x_j^k - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) (1 - \cos(2\lambda_k^n \theta(x))) dx$$

$$\frac{\pi}{\lambda_k^n} = \ell_j^k - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

$$\frac{\pi}{\lambda_k^n} = \ell_j^k - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\ell_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \quad (3.15)$$

sonucu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.4: (3.1)-(3.2) probleminin potansiyel fonksiyonları

$$q_{n-1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2\lambda_k^{n+1} - 2\lambda_k^{n-1} + \frac{2\pi}{\ell_j^k} - \frac{2\lambda_k \pi}{\ell_j^k} \right)$$

şeklindedir.

İspat: Teoremin ispatı için nodal uzunluk tanımı kullanılacaktır.

$n = 1$ durumunda, (3.15) formülünden

$$\ell_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k} + \frac{1}{2\lambda_k^2} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_0(x) dx + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıda yazılan eşitliğe integral için ortalama değer teoremi uygulanırsa $x \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\ell_j^k &= \frac{\pi}{\lambda_k} + \frac{1}{2\lambda_k^2} q_0(x) \ell_j^k + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
\frac{1}{2\lambda_k^2} q_0(x) \ell_j^k &= \ell_j^k - \frac{\pi}{\lambda_k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
q_0(x) &= \frac{2\lambda_k^2}{\ell_j^k} \left(\ell_j^k - \frac{\pi}{\lambda_k} \right) + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
&= \left(2\lambda_k^2 - \frac{2\lambda_k \pi}{\ell_j^k} \right) + O\left(\frac{1}{k^3}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $k \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$q_0(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2\lambda_k^2 - \frac{2\lambda_k \pi}{\ell_j^k} \right)$$

elde edilir.

Şimdi $n=2$ durumunda

$$\begin{aligned}
\ell_j^k &= \frac{\pi}{\lambda_k^2} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^1 \frac{1}{\lambda_k^{4-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right) \\
\ell_j^k - \frac{\pi}{\lambda_k^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_0(x)}{\lambda_k^4} + \frac{q_1(x)}{\lambda_k^3} \right) \ell_j^k + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right) \\
\ell_j^k - \frac{\pi}{\lambda_k^2} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_0(x)}{\lambda_k^4} + \frac{q_1(x)}{\lambda_k^3} \right) \ell_j^k \\
\frac{2}{\ell_j^k} \left(\ell_j^k - \frac{\pi}{\lambda_k^2} \right) + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right) &= \frac{q_0(x)}{\lambda_k^4} + \frac{q_1(x)}{\lambda_k^3}
\end{aligned}$$

olup $q_0(x)$ değeri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\ell_j^k} \left(\ell_j^k - \frac{\pi}{\lambda_k^2} \right) + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right) &= \frac{2}{\lambda_k^2} - \frac{2\pi}{\ell_j^k \lambda_k^3} + \frac{q_1(x)}{\lambda_k^3} \\
\frac{q_1(x)}{\lambda_k^3} &= 2 - \frac{2\pi}{\lambda_k^2 \ell_j^k} - \frac{2}{\lambda_k^2} + \frac{2\pi}{\ell_j^k \lambda_k^3} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
q_1(x) &= 2\lambda_k^3 - \frac{2\lambda_k \pi}{\ell_j^k} - 2\lambda_k + \frac{2\pi}{\ell_j^k} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right) \\
&= 2\lambda_k^3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_k^2} \right) + 2\lambda_k \pi \left(\frac{1}{\ell_j^k \lambda_k} - \frac{1}{\ell_j^k} \right) + O\left(\frac{1}{k^{\frac{5}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $k \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$q_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[2\lambda_k^3 \left(1 - \frac{1}{\lambda_k^2} \right) + 2\lambda_k \pi \left(\frac{1}{\ell_j^k \lambda_k} - \frac{1}{\ell_j^k} \right) \right]$$

elde edilir.

Şimdi $n = 3$ durumunda benzer işlemler ile

$$q_2(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2\lambda_k^4 - \frac{2\lambda_k \pi}{\ell_j^k} - 2\lambda_k^2 + \frac{2\pi}{\ell_j^k} \right)$$

formülü elde edilir. Böylece en genel halde

$$q_{n-1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2\lambda_k^{n+1} - 2\lambda_k^{n-1} + \frac{2\pi}{\ell_j^k} - \frac{2\lambda_k \pi}{\ell_j^k} \right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.



KAYNAKLAR

- [1] **Agranovich, Z. S. and Marchenko, V. A.**, 1964. The inverse problem of scattering theory: Gordon and Breach.
- [2] **Ambartsumyan, V. A.**, 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, *Zeitschrift für Physik*, **53**, 690-695
- [3] **Balcı, M.**, 2011. Reel Analiz, Balcı Yayınları
- [4] **Bayraktar, M.**, 2006. Fonksiyonel Analiz, Fersa Matbaacılık.
- [5] **Browne, P. J. and Sleeman, B. D.**, 1996. Inverse nodal problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, *Inverse Problems*, **12**, 377-381.
- [6] **Browne, P. J. and Sleeman, B. D.**, 1997. A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems, *Inverse Problems*, **13**, 1453-1462.
- [7] **Buterin, S. A. and Shieh, C. T.**, 2009. Inverse nodal problem for differential pencils, *Applied Mathematical Letters*, **22**, 1240-1247
- [8] **Chadan, K., Colton, D., Paivarinta, L. and Rundell, W.**, 1997. An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems, *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- [9] **Gasymov, M. G. and Guseinov, G. Sh.**, 1981. Determination of a diffusion operator from the spectral data, *Doklady Akademii Nauk Azerbaijan SSSR*, **37**, 2 19-23.
- [10] **Goktas S., Koyunbakan H. ve Gulsen T.**, 2018. Inverse nodal problem for polynomial pencil of Sturm-Liouville operator, *Mathematical Methods in applied Sciences*, **41**: 7576– 7582. <https://doi.org/10.1002/mma.5220>
- [11] **Guseinov I.M., Nabiev A.A., Pashaev R.T.**, 2000, Transformation operators and asymptotic formulas for the eigenvalues of a polynomial pencil of Sturm-Liouville operators. *Sibirsk Mat Zh.* **41**:554-566.
- [12] **Guseinov I.M., Nabiev I.M.**, 2000. On a class of inverse problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators. *DifferUravn.*;36:418-420
- [13] **Hald, O. H. and McLaughlin, J. R.**, 1989. Solutions of inverse nodal problems, *Inverse problems*, **5**, 307-347.

- [14] **Hoschtadt, H.**, 1973. The inverse Sturm-Liouville Problem, *Communications Pure and Applied Mathematics*, **26**, 715-729.
- [15] **Hoschtadt, H. and Lieberman, B.**, 1978. An Inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **34**, 4 676-680.
- [16] **Jaulent, M. and Jean, C.**, 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics*, **28**, 3 177-220.
- [17] **Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V.**, 1961. Elements of the Theory of functions and Functional Analysis Volume 2 Measure, The Lebesgue integral, Hilbert Space, Graylock Press, Albany N. Y.
- [18] **Koyunbakan, H.**, 2006. A new inverse problem for Diffusion operator, *Applied Mathematics Letters*, **19**, 10 995-999.
- [19] **Koyunbakan, H.**, 2011. Inverse problem for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **378**, 549-554.
- [20] **Koyunbakan, H. and Yilmaz, E.**, 2008. Reconstruction of the potential function and its derivatives for the Diffusion operator, *Verlag der Zeitschrift für Naturforsch.*, **63a**, 127-130.
- [21] **Law, C. K., Shen, C. L. and Yang, C. F.**, 1999. The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems*, **15**, 1 253-263 (Erratum 2001, **17**, 361-364).
- [22] **Law, C. K. and Tsay, J.**, 2001. On the well-posedness of the inverse nodal problem, *Inverse Problems*, **17**, 5 1493-1512.
- [23] **Law, C. K. and Yang, C. F.**, 1998. Reconstruction the potential function and its derivatives using nodal data, *Inverse Problems*, **14**, 299-312.
- [24] **Levinson, N.**, 1949. The Inverse Sturm-Liouville Problem, *Mat. Tideskr. B.*, **25**, 25-30.
- [25] **Levitan, B. M.**, 1978. On the determination of the Sturm-Liouville operator from one and two spectra, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, **42**, 1 185-199.
- [26] **Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S.**, 1975. Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

- [27] **Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S.**, 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators (Russian), *Nauka, Moscow*; English Translate, 1991. Kluwer, Dordrecht.
- [28] **Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J.**, 1968. Elements of Functional Analysis, Gordon and Breach, Science Publishers.
- [29] **McLaughlin, J. R.**, 1988a. Inverse spectral theory using nodal points as data-a uniqueness result, *Journal of Differential Equations*, **73**, 2 354-362.
- [30] **Nabiev A.A.**, 2010. On a fundamental system of solutions of the matrix schrödinger equation with a polynomial energy-dependent potential. *Math. Methods Appl Sci.*;33(11):1372-1383.
- [31] **Pöschel, J. and Trubowitz, E.**, 1987. Inverse Spectral Theory, volume 130 of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc, Boston, MA.
- [32] **Shen, C. L.**, 1988. On the nodal sets of the eigenfunctions of the string equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **19**, 1419-1424.
- [33] **Soykan, Y.**, 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara
- [34] **Şuhubi, E. S.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [35] **Yang, C. F.**, 2010b. Reconstruction of the Diffusion operator from nodal data, *Verlag der Zeitschrift für Naturforsch.*, **65a**, 100-106.

ÖZGEÇMİŞ

Adı : Mehmet
Soyad : KAPLAN
Doğum Tarihi : 10/09/1991
Doğum Yeri : Elazığ/Maden

İletişim Numarası : 05345622536
E-posta adresi : mhmt.kaplan.23@gmail.com
Eğitim Durumu : Yüksek Lisans
İlkokul : Yücel ilköğretim okulu (1997-2002)
Ortaokul : Yücel ilköğretim okulu (2002-2005)
Lise : Gazi Lisesi (2005-2009)
Üniversite : Fırat Üniversitesi (2010-2015)