

NAKANO TEOREMİ

Ahmet DEMİR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2008
ANKARA**

Ahmet DEMİR tarafından hazırlanan NAKANO TEOREMİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN

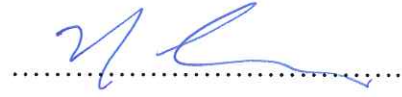
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı



Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Zafer ERCAN

Matematik A. D. , Bolu Abant İzzet Baysal Ü.



Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik A. D. , Gazi Üniversitesi



Doç. Dr. Ayşe UYAR

Matematik A. D. , Gazi Üniversitesi



25/04/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ahmet DEMİR

NAKANO TEOREMİ**(Yüksek Lisans Tezi)****Ahmet DEMİR****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Nisan 2008****ÖZET**

Bu tezde $f, g \in E_n^\sim$ olmak üzere Nakano Teoremi olarak bilinen “ $f \perp g \Leftrightarrow C_f \perp C_g$ ” teoreminin $S, T \in L_n(E, F)$ için genellemesinin hangi şartlarda doğru olabileceği araştırılmıştır. Bunun için W. A. J. Luxemburg ve B. De Pagter’ın “Maharam extensions of positive operators and f-modules” isimli makalesinin ilgili kısmı ayrıntılarıyla incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.095**Anahtar Kelimeler : Nakano Teoremi, Maharam operatör, merkez, orthomorfizma, f -cebiri****Sayfa Adedi : 79****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN**

NAKANO THEOREM

(M.Sc. Thesis)

Ahmet DEMİR

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

April 2008

ABSTRACT

In this thesis, it has been researched that in which circumstances it can be true that for $f, g \in E_n^\sim$, $f \perp g \Leftrightarrow C_f \perp C_g$, which is known as Nakano Theorem, is generalized in $S, T \in L_n(E, F)$. For this reason, the related parts of essay of W. A. J. Luxemburg and B. De Pagter, that is named by “Maharam extensions of positive operators and f-modules”, has examined in a detailed way and it has tried research to some conclusions.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Nakano Theorem, Maharam operator, center, orthomorphism,
f -algebra

Page Number: 79

Adviser : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen ve değerli zamanlarını bana ayıran danışman hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a teşekkür ederim. Çalışmanın çeşitli safhalarında birikim ve önerilerinden faydalandığım Yrd. Doç. Dr. Metin DEMİR'e, Yrd. Doç. Dr. Mehmet ERDEM'e ve Delal KIRMIZITOPRAK'a teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışma süresince maddi manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
2.1. Pozitif Operatörlerin Yapısı	5
2.2. Örnekler.....	20
2.3. Sıra Sınırlı Operatörler	27
2.4. İdeal, Band ve Sıralı Projeksiyonlar.....	34
2.5. Latis (Riesz) Homomorfizması ve Aralık Koruyan Operatörler	40
2.6. Ortomorfizmalar ve f -Cebirleri	50
3. NAKANO TEOREMİ.....	56
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ NAKANO TEOREMİ	63
5. SONUÇ	77
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	79

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
A^d	A kümesinin diki
$B(E)$	E deki tüm bandların kümesi
B_x	x elemanının ürettiği band
C_T	T nin taşıyıcısı
E^+	E nin pozitif kısmı
$E^\sim$	E nin sıra duali
$E_n^\sim$	E nin sıra sürekli duali
I_x	x elemanının ürettiği sıralı ideal
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörlerin kümesi
$L_n(E, F)$	Sıra sürekli operatörlerin kümesi
N_T	T nin null ideali
$Orth(E)$	Ortomorfizmaların kümesi
$P(E)$	E deki tüm projeksiyonların kümesi
$ T $	T nin modülü
$Z(E)$	Merkez operatörlerin kümesi
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin infimumu
x'	x elemanının complementi
x^+	x ve 0 (vektör uzayının sıfırı) ın supremumu
x^-	$-x$ ve 0 ın supremumu

Simgeler**Açıklama**

$|x|$

 $-x$ ve x in supremumu

$x \perp y$

 $|x|$ ve $|y|$ nin infimumu sıfır

$x_\alpha \uparrow x$

 $\{x_\alpha\}$ neti artandır ve supremumu x tir

$x_\alpha \downarrow x$

 $\{x_\alpha\}$ neti azalandır ve infimumu x tir

1. GİRİŞ

E ve F Arşimedyan Riesz uzayı, $L_b(E, F)$ E den F ye sıra sınırlı lineer operatörlerin kümesi olsun. Eğer F Dedekind tam Riesz uzayı ise $L_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır ve her $S, T \in L_b(E, F)$, $x \in E^+$ için

$$(i) \quad (S \vee T)(x) = \sup \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$(ii) \quad (S \wedge T)(x) = \inf \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

eşitlikleri sağlanır [1]. $S, T \in L_b(E, F)$ olmak üzere $|S| \wedge |T| = 0$ ise S, T ye diktir denir ve $S \perp T$ biçiminde gösterilir. $T \in L_b(E, F)$ için $x_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde her $\{x_\alpha\}$ ağı için $\inf \{|Tx_\alpha|\} = 0$ ise T ye sıra sürekli operatör denir ve bunların kümesi $L_n(E, F)$ olarak tanımlanır. Özel olarak $F = \mathbb{R}$ alındığında $L_b(E, F) = E^-$, $L_n(E, F) = E_n^-$ şeklinde gösterilir. $T \in L_b(E, F)$ için $N_T = \{x \in E : |T|(|x|) = 0\}$ kümesine T nin null ideali denir. Eğer T sıra sürekli ise N_T , E içinde banddır. N_T^d kümesine T nin taşıyıcısı denir ve C_T ile gösterilir.

[6]'da Nakano $f, g \in E_n^-$ olmak üzere “ $f \perp g \Leftrightarrow C_f \perp C_g$ ” önermesinin doğru olduğunu göstermiştir. Bu teoremin genel haline bakıldığında “ $C_S \perp C_T \Rightarrow S \perp T$ ” doğru ancak “ $S \perp T \Rightarrow C_S \perp C_T$ ” önermesi doğru değildir [1].

Bu çalışmada amaç Luxemburg ve De Pagter in “Maharam extensions of positive operators and f-modules” isimli çalışmalarında elde ettikleri Nakano Teoremini detaylarıyla inceleyip vermektir.

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olmak üzere, her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa, T operatörüne aralık koruyan operatör denir. F Dedekind tam ile E ve F Arşimedyan Riesz uzayı olsun. $T \in L_b(E, F)$ operatörü, şayet $|T|$ aralık koruyan operatör ise bir Maharam operatördür denir. Yani F de $0 \leq w \leq |T|u$ için $w = |T|v$ olacak şekilde $0 \leq v \leq u$ vardır.

E ve F Arşimedyan Riesz uzayı, F Dedekind tam olsun. Sıra sürekli herhangi bir T Maharam operatörüne bağlı olarak tanımlanan

$$\begin{aligned} \sigma_T: B(F) &\rightarrow B(E) \\ B &\rightarrow \sigma_T(B) = \{x \in E : |T||x| \in B\} \cap C_T \end{aligned}$$

dönüşümü sıra sürekli Boolean halka homomorfizmidir.

Şimdi E ve F nin her ikisini Dedekind tam alırsak $B(E)$ ile E üzerindeki projeksiyonların kümesi $P(E)$ ve $B(F)$ ile de $P(F)$, Boolean cebiri olarak izomorfiktirler. Yani $h_1: B(F) \rightarrow P(F)$, $h_2: B(E) \rightarrow P(E)$ Boolean cebir izomorfizmleri vardır. Bu nedenle σ_T yardımıyla

$$\begin{array}{ccc} B(F) & \xrightarrow{\sigma_T} & B(E) \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ P(F) & \xrightarrow{h_T} & P(E) \end{array}$$

diyagramı göz önüne alınırsa $h_T = h_2 \sigma_T h_1^{-1}: P(F) \rightarrow P(E)$ Boolean halka homomorfizmi bulunabilir. Dahası her $P \in P(F)$ için $h_T(I) = P_T$ (P_T, C_T bandına karşılık gelen projeksiyondur) olmak üzere $PT = Th_T(P)$ ve $h_T(P)P_T = h_T(P)$ dır.

E Riesz uzayı, $T : E \rightarrow E$ operatör olmak üzere, $-\lambda I \leq T \leq \lambda I$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa, T ye merkez operatör denir. Merkez operatörlerin kümesi $Z(E)$ ile gösterilir. Yani

$$Z(E) = \{T \in L_b(E) : -\lambda I \leq T \leq \lambda I\}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi de h_T operatörünün $Z(F)$ den $Z(E)$ ye temsilini oluşturalım.

$$c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+, \quad P_1, P_2, \dots, P_n \in P(F) \quad \text{olmak üzere} \quad h_T \left(\sum_{i=1}^n c_i P_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i h_T(P_i)$$

olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $0 \leq \pi \in Z(F)$ için Freudenthal's Spectral

Teoreminden (Teorem 6.8., [1]) $\pi_n = \sum_{j=1}^m c_j P_j$, $c_j \in \mathbb{R}^+$, $P_j \in P(F)$ ve $\pi_n \uparrow \pi$

olacak şekilde $(\pi_n) \subseteq Z(F)$ dizisi vardır. Bunun yardımıyla

$$H_T : Z(F)_+ \rightarrow Z(E)_+ \\ \pi \rightarrow H_T(\pi) = \sup_n h_T(\pi_n)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Buradan da bir

$$h_T : Z(F) \rightarrow Z(E) \\ \pi \rightarrow h_T(\pi) = H_T(\pi^+) - H_T(\pi^-)$$

dönüşümü elde edilir. T Maharam operatör ise her $\pi \in Z(F)$ için $\pi T = T h_T(\pi)$ ve

$h_T(\pi) P_T = h_T(\pi)$ olacak şekilde bir tek $h_T : Z(F) \rightarrow Z(E)$ f -cebiri homomorfizmi

vardır. Yukarıda tanımlanan H_T bu durumun varlığını kanıtlar. Eğer her $\pi \in Z(F)$

için $\pi T = T h(\pi)$ olacak şekilde bir $h : Z(F) \rightarrow Z(E)$ f -cebiri homomorfizmi

varsa T Maharam operatörüdür. $h: Z(F) \rightarrow Z(E)$ herhangi bir f -cebiri homomorfizmi iken

$$L_n^h = \{T \in L_n(E, F) : \pi T = Th(\pi), \forall \pi \in Z(F)\}$$

biçiminde tanımlanır. $L_n^h, L_n(E, F)$ içinde banddır. Burada gösterilmiştir ki $S, T \in L_n^h$ ise Nakano Teoremi doğrudur. Yani

$$“S \perp T \Leftrightarrow C_S \perp C_T”$$

önermesi doğrudur. Özelde $F = \mathbb{R}$ ve

$$\begin{aligned} h: Z(F) &\rightarrow Z(E) \\ \lambda I_1 &\rightarrow h(\lambda I_1) = \lambda I_2 \end{aligned}$$

(Burada $I_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_2: E \rightarrow E$ birim dönüşümlerdir.) alındığında önceki bilinen Nakano Teoremi elde edilir. Bu nedenle $Z(F)$ den $Z(E)$ ye istenen koşulu sağlayan f -cebiri homomorfizminin ne zaman var olacağı sorgulanmıştır. $T: E \rightarrow F$ sıra sürekli Maharam operatör olduğunda T ye bağlı ve her $\pi \in Z(F)$ için $\pi T = Th_T(\pi)$ eşitliğini sağlayan bir $h_T: Z(F) \rightarrow Z(E)$ f -cebiri homomorfizmi elde edilmeye çalışılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. Pozitif Operatörlerin Yapısı

2.1.1 Tanım (Sıralı küme):

$E \neq \emptyset$ olsun. E üzerinde tanımlı “ $\leq$ ” bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, “ $\leq$ ” bağıntısına *sıralama bağıntısı*, $(E, \leq)$ ikilisine de *(kısmi) sıralı küme* denir.

- i) Her $x \in E$ için $x \leq x$ (*yansıma özelliği*)
- ii) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (*ters simetri özelliği*)
- iii) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*geçişme özelliği*)

2.1.2. Tanım (Supremum ve infimum):

$(A, \leq)$ kısmi sıralı küme $B \subseteq A$ ve $a, b \in A$ olmak üzere;

- i) Her $x \in B$ için $x \leq a$
- ii) Her $x \in B$ için $x \leq b$ iken $a \leq b$

şartlarını sağlayacak şekilde bir a elemanı varsa buna B kümesinin *üst sınırlarının en küçüğü (supremumu)* denir ve $\sup B = a$ biçiminde gösterilir.

- i) Her $x \in B$ için $a \leq x$
- ii) Her $x \in B$ için $b \leq x$ iken $b \leq a$

şartlarını sağlayacak şekilde bir a elemanı varsa buna B kümesinin *alt sınırlarının en büyüğü (infimumu)* denir ve $\inf B = a$ ile gösterilir.

2.1.3. Teorem ($\mathbb{R}$ de infimum):

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\inf A = a$ olması için gerek ve yeter koşul

- i) Her $x \in A$ için $a \leq x$
- ii) Her $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ için $x_\varepsilon - a < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in A$ vardır.

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$: $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ve (i), (ii) şartları sağlanıyor olsun. (i) den dolayı her $x \in A$ için $x \geq a$ olduğu açıktır. Şimdi her $x \in A$ ve $z \leq x$ olacak şekildeki her $z \in \mathbb{R}$ için $z \leq a$ olduğunu da gösterirsek ispat tamamlanır. $z > a$ olduğunu kabul edelim. $z - a > 0$ olacağından $\varepsilon = z - a$ seçebiliriz. O halde (ii) den en az bir $x_\varepsilon \in A$ vardır ve $x_\varepsilon - a < z - a$ sağlanır. Bu ise $x_\varepsilon < z$ çelişmesini verir. Yani kabulümüz yanlıştır. $z \leq a$ olmalıdır. Bu da $\inf A = a$ demektir.

$\Leftarrow$: $\inf A = a$ ise infimumun tanımından (i) sağlanır. Diğer şarta bakalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_\varepsilon - a < \varepsilon$ olacak şekilde A nın hiçbir elemanın olmadığını varsayalım. Bu durumda her $x \in A$ için $x - a \geq \varepsilon$ olur ki buradan her $x \in A$ için $x \geq a + \varepsilon$ demektir. Bu da a nın en büyük alt sınır olmasıyla çelişir.

2.1.4. Teorem ($\mathbb{R}$ de supremum):

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. $\sup A = b$ olması için gerek ve yeter koşul

- i) Her $x \in A$ için $x \leq b$
- ii) Her $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ için $b - x_\varepsilon < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in A$ vardır.

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$: $A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ve (i), (ii) şartları sağlanıyor olsun. (i) den dolayı her $x \in A$ için $x \leq b$ olduğu açıktır. Şimdi her $x \in A$ ve $z \geq x$ olacak şekildeki her $z \in \mathbb{R}$ için $z \geq b$ olduğunu da gösterirsek ispat tamamlanır. $z < b$ olduğunu kabul edelim. $b - z > 0$ olacağından $\varepsilon = b - z$ seçebiliriz. O halde (ii) den en az bir $x_\varepsilon \in A$ vardır ve $b - x_\varepsilon < b - z$ sağlanır. Bu ise $-x_\varepsilon < -z$ yani $x_\varepsilon > z$ çelişkisi çıkar. O halde kabulümüz yanlıştır. $z \geq b$ olmalıdır. Bu da $\sup A = b$ demektir.

$\Leftarrow$: $\sup A = b$ ise supremumun tanımından (i) sağlanır. Diğer şarta bakalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. $b - x_\varepsilon < \varepsilon$ olacak şekilde A nın hiçbir elemanın olmadığını varsayalım. Bu durumda her $x \in A$ için $b - x \geq \varepsilon$ olur ki buradan her $x \in A$ için $b - \varepsilon \geq x$ demektir. Bu da b nin en küçük üst sınır olmasıyla çelişir.

2.1.5. Tanım (Latis):

$(E, \leq)$ bir sıralı küme olsun. E nin iki elemanlı her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa E ye *latis* denir. $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ biçiminde tanımlanır.

Bir latisde her sonlu alt küme bir supremuma ve infimuma sahiptir. Sonlu alt kümedeki elemanlar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ise

$$\sup(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i$$

$$\inf(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$$

şeklinde gösterilir.

2.1.6. Tanım (Dağılmalı latis):

E bir latis olmak üzere her $x, y_1, y_2 \in E$ için $x \wedge (y_1 \vee y_2) = (x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2)$ ise *dağılmalıdır* denir.

2.1.7. Teorem:

X latisi dağılmalıdır. $\Leftrightarrow$ Her $x, y_1, y_2 \in X$ için $x \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \vee y_1) \wedge (x \vee y_2)$ [4].

2.1.8. Teorem:

X latisi dağılmalıdır $\Leftrightarrow x \wedge y_1 \leq z$ ve $x \wedge y_2 \leq z \Rightarrow x \wedge (y_1 \vee y_2) \leq z$ [4].

2.1.9. Tanım (Complement):

E bir latis olsun. E nin bir en büyük elemanı varsa buna birim, en küçük elemanı varsa buna sıfır eleman denir ve sırasıyla e ve θ ile gösterilir.

E birimli ve sıfırlı bir latis $x \in E$ olsun. $x \wedge x' = \theta$ ve $x \vee x' = e$ olacak şekilde bir $x' \in E$ varsa buna x elemanının *complementi* denir.

2.1.10. Teorem:

Sıfır ve birimle birlikte X dağılmalı latisindeki x ögesi bir x' complementine sahipse, x' bir tektir (Başka bir deyişle X teki her eleman en çok bir complemente sahiptir.) [4].

2.1.11. Tanım (Boolean cebiri):

$(X, \leq)$ latis olsun. Eğer X dağılmalı latis, X in sıfır ve birim elemanı var ve X in her elemanının complementi varsa X e *Boolean cebiri* denir.

2.1.12. Tanım (Boolean halkası):

$(X, \leq)$ bir latis olsun. Eğer X dağılmalı latis ve sıfır elemana sahip ise X e *Boolean halkası* denir.

2.1.13. Tanım (Boolean cebir homomorfizması):

A ve B Boolean cebiri, $T : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$i) \quad \text{Her } x, y \in A \text{ için } T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \text{ ve } T(x \vee y) = Tx \vee Ty ,$$

$$ii) \quad \text{Her } x \in A \text{ için } T(x') = (Tx)'$$

ise T ye *Boolean cebir homomorfizması* denir. (T birebir ve örten ise T ye *Boolean cebir izomorfizmi* denir.)

2.1.14. Tanım (Boolean halka homomorfizması):

A ve B Boolean halkası, θ_1 A nın sıfır elemanı, θ_2 B nin sıfır elemanı ve $T : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$i) \quad \text{Her } x, y \in A \text{ için } T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \text{ ve } T(x \vee y) = Tx \vee Ty ,$$

$$ii) \quad T(\theta_1) = \theta_2$$

ise T ye *Boolean halka homomorfizması* denir. (T birebir ve örten ise T ye *Boolean halka izomorfizmi* denir.)

2.1.15. Tanım (Sıralı vektör uzayı):

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı " $\leq$ " olmak üzere, her $x, y \in E$ ve $x \leq y$ için;

i) Her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$

ii) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \leq \alpha y$

koşullarını sağlayan E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

$x \in E$ için $x \geq 0$ ise x e *pozitif* denir. E uzayının tüm pozitif elemanlarının kümesi $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ şeklinde tanımlanır.

2.1.16. Tanım (Lineer operatör):

E ve F iki vektör uzayı olmak üzere bir $T : E \rightarrow F$ operatörü her $x, y \in E$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa T ye *lineer operatör* denir. Genel olarak $T(x)$ değeri Tx ile belirtilecek ve lineer operatör kavramını yalnızca operatör olarak kullanacağız.

2.1.17. Tanım (Pozitif operatör):

E ve F iki sıralı vektör uzayı $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T operatörüne *pozitif operatör* denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçiminde gösterilir.

2.1.18. Sonuç:

E ve F sıralı iki vektör uzayları ve $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

T operatörü pozitifdir $\Leftrightarrow T(E^+) \subseteq F^+ \Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow Tx \leq Ty$ [1].

İspat:

($\Rightarrow$) T nin pozitif operatör olduğunu kabul edelim. $x \leq y$ olacak biçimde $x, y \in E$ için

$$\begin{aligned} x - x \leq y - x \Rightarrow 0 \leq y - x \Rightarrow 0 \leq T(y - x) \Rightarrow 0 \leq Ty - Tx \Rightarrow Tx \leq Ty - Tx + Tx \\ \Rightarrow Tx \leq Ty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad 0 \leq x \Rightarrow T0 \leq Tx \\ \Rightarrow 0 \leq Tx \end{aligned}$$

olduğundan T operatörü pozitifdir.

2.1.19. Tanım (Riesz uzayı):

E sıralı vektör uzayı olsun. E deki herhangi iki elemanın supremumu ve infimumu var ve E ye ait ise, E ye *Riesz Uzayı* denir.

$x, y \in E$ için $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ ile göstereceğiz.

2.1.20. Teorem:

Bir Riesz uzayının herhangi üç elemanı x, y, z için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$1) \quad x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ ve } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$$

$$2) \quad x + y = x \vee y + x \wedge y$$

$$3) \quad x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \text{ ve } x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$$

$$4) \quad \text{Her } \alpha \geq 0 \text{ için } \alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y) \text{ ve } \alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y) \text{ [1].}$$

2.1.21. Sonuç:

E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $\sup A$ varsa bu durumda;

- a) $\inf(-A)$ vardır ve $\inf(-A) = -\sup A$
- b) $\sup(x + A) := \sup\{x + a : a \in A\}$ vardır ve $\sup(x + A) = x + \sup A$
- c) Her $\lambda \geq 0$ için $\sup \lambda A := \sup\{\lambda a : a \in A\}$ vardır ve $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$

gerçeklenir [1].

2.1.22. Tanım (Pozitif-negatif kısım ve mutlak değer):

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere; $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x \vee (-x)$ elemanlarına sırasıyla $x \in E$ nin *pozitif kısmı*, *negatif kısmı* ve *modülü (mutlak değeri)* denir.

2.1.23. Teorem:

Bir Riesz uzayının herhangi bir x elemanı için,

- 1) $x = x^+ - x^-$
- 2) $|x| = x^+ + x^-$
- 3) $x^+ \wedge x^- = 0$.

Bununla birlikte (1) deki ayrım aşağıdaki anlamda tektir.

$x = y - z$ ve $y \wedge z = 0 \Rightarrow y = x^+$ ve $z = x^-$ dir [1].

2.1.24. Sonuç:

E, F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. Her $x \in E$ için $|Tx| \leq T|x|$ dir [1].

İspat:

$$\mp x \leq |x| \Rightarrow \mp Tx \leq T|x| \Rightarrow -Tx \vee Tx \leq T|x| \Rightarrow |Tx| \leq T|x|.$$

2.1.25. Teorem:

Bir Riesz uzayının herhangi iki x, y elemanı için,

$$1) \quad x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ ve } x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$2) \quad |x - y| = x \vee y - x \wedge y$$

$$3) \quad |x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$$

$$4) \quad |x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|) \text{ [1].}$$

2.1.26. Sonuç:

E sıralı vektör uzayı olsun. E nin Riesz uzayı olması için aşağıdaki şartlardan birinin gerçekleşmesi yeterlidir.

$$a) \quad \text{Her } x, y \in E \text{ için } x \vee y \in E$$

$$b) \quad \text{Her } x, y \in E \text{ için } x \wedge y \in E$$

$$c) \quad \text{Her } x \in E \text{ için } x^+ \in E$$

d) Her $x \in E$ için $x^- \in E$

e) Her $x \in E$ için $|x| \in E$

2.1.27. Tanım (Diklik 1):

E Riesz uzayının herhangi iki elemanı x, y için $|x| \wedge |y| = 0$ ise, bu elemanlar birbirine *diktir* denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

2.1.28. Tanım (Diklik 2):

Bir Riesz uzayının iki A, B alt uzayı için, “ $\forall a \in A, \forall b \in B$ için $a \perp b$ ” önermesi sağlanırsa, A ve B *diktir* denir ve $A \perp B$ ile gösterilir.

2.1.29. Tanım (Sıra baz):

Eğer A, E Riesz uzayında bir ideal ve $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$, A daki elemanların bir kümesi, $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$ tarafından üretilen ideal A da sıra yoğun (ya da yarı sıra yoğun) olduğunda, bu küme A nın *sıra bazı* (ya da *yarı sıra bazı*) olarak adlandırılır.

2.1.30. Tanım (Dik sistem, maksimal dik sistem):

(i) E Riesz uzayının sıfırdan farklı dik elemanlarının her $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$ kümesi E de bir *dik sistem* olarak adlandırılır.

(ii) E de $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$ dik sistemi; $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$, E nin bir yarı sıra bazı ise *maksimal dik sistem* olarak adlandırılır. (Örneğin her $\sigma \in \{\sigma\}$ için $f \perp f_\sigma$ ise $f = 0$ dır.)

(iii) $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$ dik sistemi aynı zamanda E nin sıra bazı ise $(f_\sigma : \sigma \in \{\sigma\})$ ye E nin *dik sıra bazı* denir.

2.1.31. Teorem:

E Riesz uzayı olmak üzere $A \subseteq E$ maksimal dik sistem olsun. $B \subseteq A \subseteq E$ olmak üzere B nin maksimal dik sistem olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq a \in A^+$ için $0 \neq b \leq a$ olacak şekilde $0 \neq b \in B^+$ vardır.

2.1.32. Tanım (Dik tümleyen):

Bir E Riesz uzayının A ($A \neq \emptyset$) alt uzayının *dik tümleyeni*, A^d ile gösterilir ve $A^d = \{x \in E : \forall a \in A \text{ için } a \perp x\}$ şeklinde tanımlanır. $A^{dd} = (A^d)^d$ dir. A alt uzay ise $A \cap A^d = \{0\}$ dir. ($x \in A \cap A^d \Rightarrow x \in A \vee x \in A^d \Rightarrow |x| \wedge |x| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$)

2.1.33. Tanım:

A ve B bir Riesz uzayının alt kümeleri olmak üzere, aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz.

- i) $|A| = \{|a| : a \in A\}$
- ii) $A^+ = \{a^+ : a \in A\}$
- iii) $A^- = \{a^- : a \in A\}$
- iv) $A \vee B = \{a \vee b : a \in A, b \in B\}$
- v) $A \wedge B = \{a \wedge b : a \in A, b \in B\}$
- vi) $x \vee A = \{x \vee a : a \in A\}$
- vii) $x \wedge A = \{x \wedge a : a \in A\}$

2.1.34. Teorem:

E bir Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Eğer $\sup A$ varsa her $x \in E$ için $\sup(x \wedge A)$ var ve $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ dir. Benzer şekilde, eğer $\inf A$ varsa her $x \in E$ için $\inf(x \vee A)$ var ve $\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$ dir [1].

2.1.35. Teorem:

Bir E Riesz uzayının herhangi üç x, y, z elemanları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

- 1) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
- 2) $|(x \vee z) - (y \vee z)| \leq |x - y|$ ve $|(x \wedge z) - (y \wedge z)| \leq |x - y|$
- 3) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$ [1].

2.1.36. Sonuç:

Riesz uzayının herhangi iki elemanı x, y ise $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ dir [1].

2.1.37. Tanım (Yönlendirilmiş küme):

$\Lambda \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı verilsin. Eğer,

- (i) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \leq \lambda$
- (ii) Her $\lambda, \beta, \alpha \in \Lambda$ için $\lambda \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ iken $\lambda \leq \alpha$
- (iii) Her $\lambda, \beta \in \Lambda$ için $\lambda \leq \alpha$ ve $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Lambda$ vardır.

önergeleri sağlanırsa Λ kümesine “ $\leq$ ” bağıntısıyla (yukarı) yönlendirilmiş küme denir.

2.1.38. Tanım (Ağ(net), artan ve azalan ağ):

$(\Lambda, \leq)$ yönlendirilmiş kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X içinde bir *ağ(net)* denir.

(x_α) Riesz uzayında bir ağ(net) olmak üzere,

(i) Her $\alpha \leq \beta$ için $x_\alpha \leq x_\beta$ ise (x_α) ya “*artan ağ*” denir ve $x_\alpha \uparrow$ yazılır.

(ii) Her $\alpha \leq \beta$ için $x_\alpha \geq x_\beta$ ise (x_α) ya “*azalan ağ*” denir ve $x_\alpha \downarrow$ yazılır.

(iii) $x_\alpha \uparrow x$ ifadesi $x_\alpha \uparrow$ ve $\sup(x_\alpha) = x$; $x_\alpha \downarrow x$ ifadesi $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf(x_\alpha) = x$ anlamındadır. Aynı tanımlar (x_n) dizisi için de verilebilir.

2.1.39. Tanım (Arşimedian Riesz uzayı):

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere; $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E ye *Arşimedian (Archimedian) Riesz uzayı* denir.

Fonksiyonel analizdeki bütün klasik uzaylar özellikle fonksiyon uzayları Arşimediandır.

2.1.40. Lemma:

E nin Arşimedian Riesz uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in E^+$ için $0 \leq ny \leq x$ her $n \in \mathbb{N}$ iken $y = 0$ olmasıdır.

2.1.41. Teorem (Kantorovic):

E Riesz uzayı, F Arşimedian Riesz uzayı ve $T: E^+ \rightarrow F^+$ toplamsal dönüşüm yani her $x, y \in E^+$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ olsun. O zaman T , E den F içine bir tek ve pozitif operatör olarak genişler. Bu genişleme yine T ile gösterilirse,

$$T : E \rightarrow F, \text{ her } x \in E \text{ için } T(x) = T(x^+) - T(x^-)$$

şeklindedir [1].

Sonuç olarak, E Riesz uzayı, F Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere $T : E^+ \rightarrow F^+$ dönüşümünün bir tek pozitif operatöre genişlemesi için gerekli ve yeterli koşul T nin toplamsal dönüşüm olmasıdır.

E ve F Riesz uzayları olmak üzere, E den F içine tanımlanan bütün operatörlerin (reel) vektör uzayı $L(E, F) = \{T \mid T : E \rightarrow F \text{ operatör}\}$ ile gösterilir. Her $S, T \in L(E, F)$ için,

$$“S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0”$$

şeklinde tanımlanan “ $\leq$ ” sıralaması ile $L(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned} T - S \geq 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } (T - S)(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Tx - Sx \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Tx \geq Sx \end{aligned}$$

olduğundan bağıntımızı her $S, T \in L(E, F)$ için,

$$“S \leq T \Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx \leq Tx”$$

olarak da verebiliriz.

Sıralı vektör uzayı olduğunu görmek için; $S \leq T$ olacak biçimde $S, T, Z \in L(E, F)$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$ alalım.

(i) $Sx, Tx, Zx \in F$ ve F nin sıralı vektör uzayı olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}
S \leq T &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx \leq Tx \\
&\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx + Zx \leq Tx + Zx \\
&\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } (S + Z)x \leq (T + Z)x \\
&\Rightarrow S + Z \leq T + Z
\end{aligned}$$

(ii) F Riesz uzayı ve $Sx, Tx \in F$ olduğundan

$$\begin{aligned}
S \leq T &\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } Sx \leq Tx \\
&\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } \lambda Sx \leq \lambda Tx \\
&\Rightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } (\lambda S)x \leq (\lambda T)x \\
&\Rightarrow \lambda S \leq \lambda T
\end{aligned}$$

Bu durumda (i) ve (ii) den $L(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

2.1.42. Tanım (Modül):

E ve F Riesz uzayları olsun. $T: E \rightarrow F$ operatörü için $T \vee (-T)$ varsa, bu supremuma T operatörünün *modülü* denir ve $|T|$ ile gösterilir.

2.1.43. Teorem:

E bir Riesz uzayı, $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in E$ olmak üzere $|x| \leq |y_1 + y_2 + \dots + y_n|$ ise öyle $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları vardır ki $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere her i için $|x_i| \leq |y_i|$ dir. Eğer x elemanı pozitif alınırsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları pozitif seçilebilir [1].

2.1.44. Teorem:

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ operatör olmak üzere; her $x \in E^+$ için $\sup\{|Ty|: |y| \leq x\}$, F içinde varsa o zaman T nin modülü vardır ve her $x \in E^+$ için, $|T|(x) = \sup\{|Ty|: |y| \leq x\}$ biçimindedir [1].

2.1.45. Sonuç:

$T: E \rightarrow F$ lineer bir dönüşüm olsun. T nin modülü var ise her $x \in E$ için $|Tx| \leq |T||x|$ dir [1].

İspat:

Her $x \in E$ için $x = x^+ - x^-$ eşitliğini biliyoruz. $|T| = T \vee (-T)$ olduğu için supremum tanımından $T \leq |T|$, $-T \leq |T|$ dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \pm T \leq |T| &\Rightarrow \pm Tx^+ \leq |T|x^+ \text{ ve } \pm Tx^- \leq |T|x^- \Rightarrow \pm(Tx^+ - Tx^-) \leq |T||x| \\ &\Rightarrow \pm T(x) \leq |T||x| \Rightarrow |Tx| \leq |T||x| \end{aligned}$$

elde edilir.

2.2. Örnekler

2.2.1. Örnek:

$\Omega \neq \emptyset$ ve $\mathbb{R}^\Omega = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyon}\}$ olmak üzere her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ için;

$$"f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)"$$

noktasal sıralaması ile $(\mathbb{R}^\Omega, \leq)$ Riesz uzayıdır.

Çözüm:

Her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ için; “ $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)$ ” biçiminde tanımlanan “ $\leq$ ” bir sıralama bağıntısı olduğu için $(\mathbb{R}^\Omega, \leq)$ sıralı bir kümedir. Her $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f + g: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} & \alpha f: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) & x &\rightarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{aligned}$$

biçimindeki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}^\Omega$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$f \leq g$ olacak biçimde $f, g, h \in \mathbb{R}^\Omega$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in \Omega$ için $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f \leq g &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x) \\ &\Rightarrow \mathbb{R}'\text{de } f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } (f+h)(x) \leq (g+h)(x) \\ &\Rightarrow f+h \leq g+h \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f \leq g &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } \lambda f(x) \leq \lambda g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } \lambda f \leq \lambda g \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathbb{R}^\Omega$ sıralı vektör uzayıdır. Şimdi yine $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ olmak üzere her $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} h: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow h(x) = \max \{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $x \in \Omega$ için $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ olur ve $\mathbb{R}$ tam sıralı olduğu için maksimum elemanı vardır. Dolayısıyla $\max \{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ olacağından her $x \in \Omega$ için $h(x) \in \mathbb{R}$ elde edilir. Böylece h dönüşümü anlamlıdır. f ve g iyi tanımlı olduğundan $x, y \in \Omega$ için,

$$\begin{aligned}
x = y &\Rightarrow f(x) = f(y) \text{ ve } g(x) = g(y) \\
&\Rightarrow \{f(x), g(x)\} = \{f(y), g(y)\} \\
&\Rightarrow \max\{f(x), g(x)\} = \max\{f(y), g(y)\} \\
&\Rightarrow h(x) = h(y)
\end{aligned}$$

eşitliği h dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak $h \in \mathbb{R}^\Omega$ elde edilir. $\mathbb{R}^\Omega$ 'nin Riesz uzayı olduğunu tanımı kullanarak görelim.

(i) Her $x \in \Omega$ için

$$f(x) \leq \max\{f(x), g(x)\} = h(x) \text{ ve } g(x) \leq \max\{f(x), g(x)\} = h(x)$$

olması $f \leq h$ ve $g \leq h$ anlamına gelir.

(ii) $f \leq t$ ve $g \leq t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{R}^\Omega$ alalım. Bu durumda her $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
f(x) \leq t(x) \text{ ve } g(x) \leq t(x) &\Rightarrow \max\{f(x), g(x)\} \leq t(x) \\
&\Rightarrow h(x) \leq t(x) \\
&\Rightarrow h \leq t
\end{aligned}$$

supremum tanımı gereği (i) ve (ii) den $f \vee g = h$ olur ki $h \in \mathbb{R}^\Omega$ olduğundan $f \vee g \in \mathbb{R}^\Omega$ bulunur. Sonuç olarak $\mathbb{R}^\Omega$ Riesz uzayıdır.

2.2.2. Örnek:

Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı, gerçel değerli, sürekli fonksiyonların kümesi $C(\Omega)$ için her $f, g \in C(\Omega)$ olmak üzere

$$“f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)”$$

noktasal sıralaması ile Riesz uzayıdır.

Çözüm:

Öncelikle $C(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ uzayının sıralı vektör uzayı olduğunu görelim. $\mathbb{R}^\Omega$ un vektör uzayı olduğu örnek (2.2.1) den bilinmektedir. $C(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ olduğundan $C(\Omega)$ nın alt vektör uzayı olduğunu görebilmek için her $f, g \in C(\Omega)$ için $f + g \in C(\Omega)$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f \in C(\Omega)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için $f, g \in C(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere keyfi $x \in \Omega$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $f, g \in C(\Omega)$ olduğundan f ve g süreklidir. Dolayısıyla f ile g $x \in \Omega$ noktasında sürekli olacağından her $u \in U$ için $|fu - fx| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve her $v \in V$ için $|gv - gx| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $U, V \in \beta(x)$ vardır. $W = U \cap V$ alınırsa $W \in \beta(x)$ ve her $w \in W$ için,

$$|(f + g)w - (f + g)x| = |(fw - fx) + (gw - gx)| \leq |fw - fx| + |gw - gx| < \varepsilon$$

olur ki bu da $f + g$ fonksiyonunun x noktasında sürekli olduğu anlamına gelir. Burada x noktası keyfi seçildiğinden her $x \in \Omega$ için $f + g$ sürekli fonksiyondur yani $f + g \in C(\Omega)$ dır. $f, x \in \Omega$ noktasında sürekli olduğundan her $u \in U$ ve $\lambda \neq 0$ için $|fu - fx| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ olacak şekilde $U \in \beta(x)$ vardır. Ayrıca her $u \in U$ için,

$$|(\lambda f)u - (\lambda f)x| = |\lambda(fu - fx)| = |\lambda| |fu - fx| < \varepsilon$$

olur ki bu $\lambda \neq 0$ iken λf fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir. $\lambda = 0$ için $\lambda f = 0$ sabit fonksiyonu süreklidir. O halde $\lambda f \in C(\Omega)$ dır. Sonuç olarak $C(\Omega)$ vektör uzayı olur ki $C(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ olduğundan aynı zamanda sıralı vektör uzayıdır.

Her $f \in C(\Omega)$ iken $|f| \in C(\Omega)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Bunun için $|f|$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermemiz gerekir. Keyfi bir $x \in \Omega$ seçilsin. f sürekli olduğundan x noktasında da süreklidir. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $u \in \Omega$ için $|fx - fu| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U \in \beta(x)$ vardır. Örnek (2.2.1) den

$$\begin{aligned} |f|: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \max \{fx, -fx\} = |fx| \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $||fx| - |fu|| \leq |fx - fu| < \varepsilon$ olduğundan $|f|$ fonksiyonu sürekli yani $|f| \in C(\Omega)$ dır. Böylece $C(\Omega)$ bir Riesz uzayıdır.

2.2.3. Örnek:

$\Omega \neq \emptyset$, $l_\infty(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ biçimindeki Ω üzerinde tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı olan $l_\infty(\Omega)$, $\mathbb{R}^\Omega$ üzerindeki noktasal sıralamaya göre Riesz uzayıdır.

Çözüm:

$f, g \in l_\infty(\Omega)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f nin sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in \Omega$ için $|f(x)| \leq M$ olacak biçimde $M \geq 0$ sayısının var olmasıdır. $f, g \in l_\infty(\Omega)$ olduğundan her $x \in \Omega$ için $|f(x)| \leq M$ ve $|g(x)| \leq N$ olacak biçimde $0 < M, N \in \mathbb{R}$ vardır.

$$(i) \quad |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N > 0$$

$$(ii) \quad |(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| M > 0$$

(i) ve (ii) den $l_\infty(\Omega)$ uzayı $\mathbb{R}^\Omega$ nin alt vektör uzayıdır. Böylece $l_\infty(\Omega)$, $\mathbb{R}^\Omega$ den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned} f \in l_\infty(\Omega) &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } |f(x)| \leq M \text{ olacak biçimde } M \geq 0 \text{ vardır} \\ &\Rightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } ||f(x)|| \leq M \text{ olacak biçimde } M \geq 0 \text{ vardır} \\ &\Rightarrow |f| \in l_\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Böylece $l_\infty(\Omega)$ Riesz uzayıdır.

2.2.4. Örnek:

$$(1 \leq p \leq \infty \text{ için}) \quad \ell_p = \left\{ (x_n) : (x_n) \text{ reel dizi ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad \text{ve} \quad (x_n), (y_n) \in \ell_p$$

olmak üzere “ $(x_n) \leq (y_n) \Leftrightarrow$ her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ ” sıralaması ile $(\ell_p, \leq)$ sıralı vektör uzayı Riesz uzayıdır.

Çözüm:

$(x_n), (y_n) \in \ell_p$ olsun. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \vee (y_n) = \max\{x_n, y_n\}$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n \vee y_n|^p \leq |x_n|^p + |y_n|^p \text{ ve böylece } \sum_{n=1}^k |x_n \vee y_n|^p \leq \sum_{n=1}^k |x_n|^p + \sum_{n=1}^k |y_n|^p$$

her $k \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan $k \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \vee y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty$$

bulunur. Sonuç olarak $(x_n) \vee (y_n) \in \ell_p$ olduğundan ℓ_p Riesz uzayıdır.

2.2.5. Örnek:

$\mathfrak{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 1. dereceden türevlenebilir fonksiyon}\}$ biçiminde tanımlı $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ alt vektör uzayı $\mathbb{R}^\Omega$ den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. Ancak $\mathfrak{R}$ Riesz uzayı değildir.

Çözüm:

Aşağıdaki gibi tanımlı $f, g \in \mathfrak{R}$ elemanlarını göz önüne alalım.

$$\left. \begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = x & x \rightarrow g(x) = -x \end{array} \right\} \text{ her } x \in \mathbb{R} \text{ için } f'(x) = 1 \text{ ve } g'(x) = -1 \text{ 'dir.}$$

Türevlenebilir her fonksiyon sürekli olduğundan $\mathfrak{R} \subseteq C(\mathbb{R})$ dir. $C(\mathbb{R})$ içinde $(f \vee g)(x) = \max\{fx, gx\} = |x|$ dır. Şimdi $\mathfrak{R}$ içinde $f \vee g$ var olduğunu düşünelim. Alt uzaydaki ve üst uzaydaki supremum eşit olacağından $(f \vee g)(x) = |x| \in \mathfrak{R}$ olur ki bu çelişkidir. $x = 0$ da $f \vee g$ türevlenemez.

2.2.6. Örnek:

$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = m.x, m \in \mathbb{R}\}$ biçiminde tanımlanan doğrusal fonksiyonların uzayı Riesz uzayı değildir. $V \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ alt vektör uzayı $\mathbb{R}^\Omega$ den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. Fakat V Riesz uzayı değildir.

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = -x, m_1 = -1 & x \rightarrow g(x) = x, m_2 = 1 \end{array} \right\} f, g \in V \text{ 'dir.}$$

$f \vee g = h$ diyelim ve kabul edelim ki $h \in V$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = mx$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{R}$ vardır. h üst sınır olduğu için $f \leq h$ ve $g \leq h$

dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için $fx \leq hx$ ve $gx \leq hx$ olur. $f(-1) = 1$, $g(-1) = -1$ olduğundan,

- $m \geq 0 \Rightarrow x = -1$ için $h(-1) = m(-1) \leq 0 \Rightarrow 0 \geq -m = h(-1) < f(-1) = 1$
- $m < 0 \Rightarrow x = 1$ için $h(1) = m(1) = m < 0 \Rightarrow h(1) < g(1) = 1$

her iki durumda h nın supremum olması ile çelişir. Sonuç olarak doğrusal fonksiyonların uzayı Riesz uzayı değildir.

2.2.7. Örnek:

$\mathbb{R}^2$ de “ $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ veya $(x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2)$ ” biçiminde tanımlanan *Lexografik sıralama* ile $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayıdır. Ancak Arşimedyen Riesz uzayı değildir.

Çözüm:

$(x, y) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ olduğunda $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \geq \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$ olduğu için

$\frac{1}{n}(x, y) = \frac{1}{n}(1, 1) \downarrow$ dır. Ancak $\frac{1}{n}(1, 1) \downarrow 0$ değildir. Çünkü $0 = (0, 0) < (0, 1) \leq \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

olduğundan sıfır ile bu dizi arasında bir eleman vardır. Böylece $\inf \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq 0$

olduğu görülür. Sonuç olarak $\mathbb{R}^2$, *Lexografik sıralama* ile Arşimedyen Riesz uzayı değildir.

2.3. Sıra Sınırlı Operatörler

2.3.1. Tanım (Sıra sınırlılık):

A bir Riesz uzayının alt kümesi olsun.

Her $y \in A$ için $y \leq x$ olacak şekilde x varsa A ya “üstten sınırlı”,

Her $y \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde x varsa A ya “alttan sınırlı”,

A alttan ve üstten sınırlı ise, A ya *sıra (order) sınırlı* denir.

Riesz uzayının herhangi iki x ve y elemanı için $(x \leq y)$ $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ şeklinde tanımlanan alt kümesine *sıra aralığı* denir.

2.3.2. Teorem:

A nın sıra sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul bir sıra aralık tarafından kapsanmasıdır.

2.3.3. Tanım ($L_b(E, F)$):

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ operatörü E nin sıra sınırlı alt kümelerini F nin sıra sınırlı alt kümelerine dönüştürüyorsa, T operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir. E den F ye tanımlanan bütün sıra sınırlı operatörlerin uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir. T sıra sınırlı operatör ise $A \subseteq E$ sıra sınırlı kümesi için F içinde $T(A)$ alt kümesi sıra sınırlı olur.

$$L_b(E, F) = \{T \in L(E, F) : A \subseteq E \text{ sıra sınırlı iken } T(A) \subseteq F \text{ sıra sınırlı} \}$$

2.3.4. Örnek:

Pozitif her operatör sıra sınırlıdır.

Çözüm:

$A \subseteq E$ sıra sınırlı küme olsun . Bu durumda $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır. T pozitif operatör dolayısıyla sıra koruyan olduğundan her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ dolayısıyla $T(x) \leq T(a) \leq T(y)$ olur ki bu da $T(A) \subseteq [T(x), T(y)]$ demektir. Böylece T sıra sınırlı operatördür.

2.3.5. Örnek:

$L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ alt uzayı olduğu için $L_b(E, F)$, $L(E, F)$ üzerinde “ $S \leq T \Leftrightarrow$ Her $x \in E^+$ için $Sx \leq Tx$ ” şeklindeki sıralama bağıntısı ile sıralı vektör uzayıdır. Ancak Riesz uzayı olmayabilir.

Çözüm:

Öncelikle $L_b(E, F)$ nin alt vektör uzayı olduğunu görelim

(i) $T, S \in L_b(E, F)$ ve $A \subseteq E$ sıra sınırlı küme olsun. Bu durumda $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır. Yani her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ dir. T ve S sıra sınırlı operatör olduğu için $T(A) \subseteq F$, $S(A) \subseteq F$ sıra sınırlı kümelerdir. Böylece $m \leq T(a) \leq n$, $k \leq S(a) \leq l$ olacak biçimde $m, n, k, l \in F$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} m+k \leq Ta + Sa = (T+S)(a) \leq n+l &\Rightarrow (T+S)(A) \subseteq [m+k, n+l] \subseteq F \\ &\Rightarrow T+S \text{ sıra sınırlıdır.} \\ &\Rightarrow T+S \in L_b(E, F) \end{aligned}$$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \subseteq E$ sıra sınırlı küme olsun. Bu durumda $A \subseteq [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ var ve böylece her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ olduğundan $\lambda \geq 0$ ise her $a \in A$ için $\lambda x \leq \lambda a \leq \lambda y$ dir. $T \in L_b(E, F)$ olduğu için $T(A) \subseteq F$ sıra sınırlı kümedir. Buradan her $a \in A$ için $m \leq T(a) \leq n$, $m, n \in F$;

$$\begin{aligned} \lambda \geq 0 &\Rightarrow \lambda m \leq \lambda T(a) \leq \lambda n \Rightarrow (\lambda T)(A) \subseteq [\lambda m, \lambda n] \\ \lambda \leq 0 &\Rightarrow \lambda n \leq \lambda T(a) \leq \lambda m \Rightarrow (\lambda T)(A) \subseteq [\lambda n, \lambda m] \end{aligned} \Rightarrow \lambda T \in L_b(E, F)$$

(i) ve (ii) den $L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ alt vektör uzayıdır. Sonuç olarak $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

[1]'de Örnek (1.12) den biliyoruz ki c yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere, öyle bir $T : c \rightarrow c$ sıra sınırlı operatörü vardır öyle ki $L_b(c, c)$ içinde $|T|$ modülü yoktur. Yani herhangi bir E, F Riesz uzayları için $L_b(E, F)$ Riesz uzayı olmayabilir.

2.3.6. Tanım (Dedekind, σ – Dedekind tam):

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı (sayılabilir) her alt kümesinin infimumu varsa bu Riesz uzayına *Dedekind tam* (σ – Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

2.3.7. Önerme:

E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ olacak şekilde her ağın E uzayı içinde supremumunun var olmasıdır.

E Riesz uzayının σ – Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ olacak şekilde her dizinin E uzayı içinde supremumunun var olmasıdır [1].

2.3.8. Örnek:

$\Omega \neq \emptyset$, $l_\infty(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ Riesz uzayı Dedekind tamdır.

Çözüm:

$0 \leq f_\alpha \leq f$ olacak şekilde f ile üstten sınırlı $f_\alpha \uparrow$ ağının supremumunun olduğunu göstermek için

$$h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow hx = \sup_{\alpha} \{f_\alpha x\}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Her $x \in \Omega$ için $\mathbb{R}$ Dedekind tam Riesz uzayı ve $0 \leq f_\alpha x \leq fx$ olduğundan $\sup_\alpha \{f_\alpha x\} \in \mathbb{R}$ ve $x_1 = x_2$ için $hx_1 = hx_2$ olur ki böylece h dönüşümü anlamlı ve iyi tanımlı olduğundan fonksiyondur. Ayrıca her $x \in \Omega$ için $0 \leq f_\alpha x \leq fx \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ var olduğundan $0 \leq \sup_\alpha f_\alpha x \leq M$ yani $0 \leq hx \leq M$ ve bu da $h \in l_\infty(\Omega)$ demektir. Her $x \in \Omega$ ve her α için $f_\alpha x \leq \sup_\alpha f_\alpha x = h(x)$ olduğundan h bir üst sınırdır. Şimdi $f_\alpha \leq g$ ve $g \in l_\infty(\Omega)$ alalım. Her $x \in \Omega$ için $f_\alpha x \leq gx$ ise $\sup_\alpha f_\alpha x \leq gx$ yani $hx \leq gx$ olur. O halde $h = \sup_\alpha f_\alpha$ elde edilir ki bu da $l_\infty(\Omega)$ un Dedekind tam Riesz uzayı olduğunu gösterir.

2.3.9. Teorem (Riesz-Kantorovic):

E Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayı, Dedekind tam Riesz uzayıdır ve her $S, T \in L_b(E, F)$ ve her $x \in E^+$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) \quad (S \vee T)(x) = \sup \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$(ii) \quad (S \wedge T)(x) = \inf \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$(iii) \quad |T|(x) = \sup \{|T(y)| : 0 \leq y \leq x\}$$

$$(iv) \quad T^+(x) = \sup \{T(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$(v) \quad T^-(x) = \sup \{-T(y) : 0 \leq y \leq x\} \quad [1].$$

2.3.10. Teorem:

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olmak üzere $\emptyset \neq D \subseteq L_b(E, F)$ ve $D \uparrow$ olsun. O zaman $\sup D \in L_b(E, F)$ olması için gerekli ve yeterli şart her $x \in E^+$ için $\{Tx : T \in D\} \subset F$ sıra sınırlı olmasıdır. Bu durumda her $x \in E^+$ için $(\sup D)x = \sup \{Tx : T \in D\}$ dir [1].

2.3.11. Teorem:

E ve F Riesz uzayları, F σ -Dedekind tam olsun. $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör ise her $x \in E$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $T(x^+) = \max \{S(x) : S \in L(E, F); 0 \leq S \leq T\}$
- (ii) $T(x^-) = \max \{-S(x) : S \in L(E, F); 0 \leq S \leq T\}$
- (iii) $T(|x|) = \max \{S(x) : S \in L(E, F); -T \leq S \leq T\}$ [1].

2.3.12. Tanım (Alt lineer dönüşüm):

G vektör uzayı, F Riesz uzayı ve $p : G \rightarrow F$ bir fonksiyon olmak üzere eğer;

- (i) Her $x, y \in G$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
- (ii) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

şartları sağlanırsa p ye “*alt lineer dönüşüm*” denir.

2.3.13. Örnek:

$l_\infty = \{(x_n) : (x_n) \text{ reel terimli sınırlı dizi}\}$ olmak üzere Örnek 2.2.3. den $\Omega = \mathbb{N} - \{0\}$ olarak alınırsa “ $(x_n \leq y_n) \Leftrightarrow \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \leq y_n$ ” noktasal sıralaması ile l_∞ Riesz uzayı olur. Reel sayılar kümesi Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $\inf_n \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) \in \mathbb{R}$ olur. O halde,

$$T : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x_n) \rightarrow T(x_n) = \limsup(x_n) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} x_k \right)$$

dönüşümü anlamlı ve iyi tanımlıdır. Şimdi bu fonksiyonun alt lineer olduğunu gösterebilmek için alt toplamsal ve pozitif homojen olduğunu gösterelim; $(x_n), (y_n) \in l_\infty$ olsun. Her $x_k \in (x_n)$, $y_k \in (y_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_k + y_k &\leq \sup_{k \geq n} (x_k) + \sup_{k \geq n} (y_k) \Rightarrow \sup_{k \geq n} (x_k + y_k) \leq \sup_{k \geq n} (x_k) + \sup_{k \geq n} (y_k) \\ &\Rightarrow \inf_n \left(\sup_{k \geq n} (x_k + y_k) \right) \leq \inf_n \left(\sup_{k \geq n} (x_k) + \sup_{k \geq n} (y_k) \right) = \inf_n \sup_{k \geq n} (x_k) + \inf_n \sup_{k \geq n} (y_k) \\ &\Rightarrow \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n) \\ &\Rightarrow T(x_n + y_n) \leq T(x_n) + T(y_n) \end{aligned}$$

olduğundan T alt toplamsaldır. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $(x_n) \in l_\infty^+$ için

$$T(\alpha x_n) = \limsup(\alpha x_n) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} (\alpha x_k) \right) = \inf_n \left(\alpha \sup_{k \geq n} x_k \right) = \alpha \inf_n \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) = \alpha T(x_n)$$

olduğundan T pozitif homojendir. Böylece T alt lineer fonksiyondur.

2.4. İdeal, Band ve Sıralı Projeksiyonlar

2.4.1. Tanım (Riesz alt uzayı, ideal, band, sıra yoğunluk):

E Riesz uzayı ve G alt vektör uzayı olsun.

- Her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ ise G ye E nin Riesz alt vektör uzayı denir.
- Her $y \in E$ ve $x \in G$ olmak üzere $|y| \leq |x|$ iken $y \in G$ oluyorsa G ye (sıra) ideal denir. Her $x \in G$ için $[-|x|, |x|] \subseteq G$ olması için gerekli ve yeterli şart G nin sıra ideal olmasıdır.

I ideal ve herhangi bir $\{x_\alpha\} \subseteq I$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in I$ oluyorsa, I ideale E uzayında band denir. E deki tüm bandların kümesini $B(E)$ ile göstereceğiz.

- $\emptyset \neq A \subseteq E$ altkümesini kapsayan en küçük Riesz alt uzayına (ideale/banda) A kümesinin ürettiği Riesz alt uzayı (ideal/band) denir.

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği ideal;

$$I_A = \left\{ x \in E : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, \text{ olacak şekilde } 0 \leq i \leq n \text{ olmak üzere } \lambda_i \in \mathbb{R}^+, x_i \in A \text{ ve} \right. \\ \left. \text{en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır.} \right\}$$

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanının ürettiği ideal;

$$I_x = \{ y \in E : |y| \leq \lambda |x| \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ vardır} \}$$

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği band;

$$B_A = \{ x \in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq A \text{ var} \}$$

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanının ürettiği band;

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$$

biçiminde elde edilir.

- Her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde $y \in G$ varsa G ye, E de *sıra yoğundur* denir [1].

2.4.2. Teorem:

E Riesz uzayı V , E nin Riesz alt uzayı $A \subseteq V$ olsun. $\sup_V A$ ve $\sup_E A$ var ise bunlar eşittir.

İspat:

$B = \{a \in V : \forall x \in A \text{ için } x \leq a\}$ ve $D = \{b \in E : \forall x \in A \text{ için } x \leq b\}$ olsun. $V \subseteq E$ olduğundan $B \subseteq D$ dir. (Küme büyüdükçe infimum küçülür.) Supremumun tanımından $\sup_E A \leq \sup_V A$ dir. Yine her $x \in A$ için A nın bir üst sınırı $\sup_E A$ dır yani $x \leq \sup_E A$ dır. Supremumun tanımından $\sup_V A \leq \sup_E A$ dır. Dolayısıyla $\sup_V A = \sup_E A$ dir.

2.4.3. Teorem:

Bir E Riesz uzayının bir A ideali için aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. A ideali E de sıra yoğundur $\Leftrightarrow A^d = \{0\}$
2. $A \oplus A^d$ ideali E de sıra yoğundur.
3. A ideali A^{dd} de sıra yoğundur [1].

2.4.4. Teorem:

Bir Archimedian Riesz uzayının, boştan farklı bir A alt kümesi tarafından üretilen band A^{dd} dir (ve bundan dolayı A bir band ise $A = A^{dd}$ dir.) [1].

2.4.5. Sonuç:

Her sıra ideal bir Riesz alt uzayıdır.

İspat:

G bir ideal ve $x \in G$ olsun. $||x|| \leq |x|$ ve G ideal olduğundan $|x| \in G$ olur ki böylece G ideali aynı zamanda Riesz uzayıdır.

2.4.6. Tanım (Projeksiyon band, projeksiyon, pozitif ve band projeksiyon):

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B ye *projeksiyon band* denir. Eğer E Dedekind tam ise $B \subseteq E$ bandı için $E = B \oplus B^d$ sağlanır. $P: E \rightarrow E$ lineer dönüşümü için $P^2 = P$ ise, P ye *projeksiyon* denir. P , E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P ye *pozitif projeksiyon* denir. $B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda

$E = B \oplus B^d$ ve her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$ $P_B: E \rightarrow E$; $P_B(x) = x_1$ biçiminde tanımlayalım.

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(x_1) = P(x_1 + 0) = x_1 = P(x)$$

olduğundan $P^2 = P$ dir.

$x \geq 0$ iken $x = x_1 + x_2$; $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılışı tek türdür. Ayrıca, $P_B(x) = x_1 \geq 0$ olduğunu düşünürsek P_B pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde $P_{B^d}: E \rightarrow E$; $P_{B^d}(x) = x_2$ biçiminde tanımlandığından P_{B^d} projeksiyonu da pozitiftir. P_B pozitif

projeksiyonuna *sıralı projeksiyon* ya da *band projeksiyon* denir. E deki tüm projeksiyonların kümesini $P(E)$ ile göstereceğiz.

2.4.7. Teorem:

E Riesz uzayı, B projeksiyon band olsun. Her $x \in E^+$ için $P_B(x) = \sup\{y \in B : 0 \leq y \leq x\}$ dir [1].

2.4.8. Teorem:

E Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1. T sıralı projeksiyondur.
2. $I : E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$ dir.
3. T ve $I - T$ nin görüntüleri diktir. Yani her $x, y \in E$ için $Tx \perp y - Ty$ dir [1].

2.4.9. Teorem:

- (i) Eğer E Riesz uzayında A ve B projeksiyon bandlar ise $A \cap B$ bir projeksiyon banddır ve $P(E)$ de $A \cap B = \inf(A, B)$ sağlanır.
- (ii) Eğer E Riesz uzayında A ve B projeksiyon bandlar ise $A + B$ cebirsel toplamı bir projeksiyon banddır ve $P(E)$ de $A + B = \sup(A, B)$ sağlanır [4].

2.4.10. Teorem:

E Riesz uzayı olmak üzere $A, B \subseteq E$, projeksiyon band iseler A^d , $A \cap B$, $A + B$ projeksiyon banddır ve

1. $P_{A^d} = I - P_A$

$$2. \quad P_{A \cap B} = P_A P_B = P_B P_A$$

$$3. \quad P_{A+B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$$

eşitlikleri sağlanır [1].

2.4.11. Teorem:

E Riesz uzayı ve $A, B \subseteq E$ projeksiyon band olmak üzere, aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

$$1. \quad A \subseteq B$$

$$2. \quad P_A P_B = P_B P_A = P_A$$

$$3. \quad P_A \leq P_B \text{ [1].}$$

2.4.12. Tanım (Principal projeksiyon):

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x e projeksiyon eleman, ürettiği banda *principal band* denir. Bir Riesz uzayında her eleman projeksiyon eleman ise bu uzaya *principal projeksiyon özelliğine sahiptir* denir. Bu durumda $E = B_x \oplus B_x^d$ olur.

2.4.13. Teorem:

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. Bu durumda, x in projeksiyon eleman olması için gerekli ve yeterli koşul her $y \geq 0$ için $\sup\{y \wedge n|x|\}$ var ve her $y \geq 0$ için $P_x(y) = \sup\{y \wedge n|x|\}$ olmasıdır [1].

2.4.14. Tanım (Yakınsaklık, sıra sürekli):

E Riesz uzayı $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere;

- $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq E$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına *sıra yakınsar* denir ve $x_\alpha \rightarrow 0$ biçiminde gösterilir.
- $0 \leq u \in E$ alındığında, her $\varepsilon \geq 0$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in E$ bulunabiliyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x elemanına *u -düzgün yakınsar* (*düzgün yakınsar*) denir.

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör ve $\{x_\alpha\} \subseteq E$ olmak üzere, $x_\alpha \rightarrow 0$ iken F de $Tx_\alpha \rightarrow 0$ oluyorsa T operatörüne *sıra sürekli operatör* denir.

$\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $T: E \rightarrow F$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması aynı zamanda; $x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olması veya $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ olması anlamına gelir. T sıra sınırlı operatör olarak alınırsa T nin sıra sürekli olması da $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\inf\{|Tx_\alpha|\} = 0$ olmasına denktir. E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E, F)$ ile gösterilir. Bu küme $L_b(E, F)$ nin alt uzayıdır ve $L_n(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$ dir. F Dedekind tam olduğunda $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ içinde band olur. E üzerinde bütün sıra sürekli lineer fonksiyonellerin vektör uzayı $L_n(E, R) = E_n^\sim$ olarak gösterilir.

2.4.15. Tanım (N_T, C_T):

E , F iki Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı. $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatör olsun. T nin null ideali

$$N_T = \{x \in E : |T|(|x|) = 0\}$$

olarak tanımlanır. N_T nin dik tümleyeni T nin taşıyıcısı (carrier) olarak isimlendirilir ve C_T ile tanımlanır ve $C_T = N_T^\perp = \{x \in E : x \perp N_T\}$ dir.

Ayrıca T sıra sürekli ise N_T banddır. Şimdi bunun doğru olduğunu gösterelim.

E , F iki Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı operatörü için $|T|$ varken $N_T = \{x \in E : |T|(|x|) = 0\}$ olsun.

Her $x, y \in E$, $|y| \leq |x|$ ve $x \in N_T$ olsun. Buradan $0 \leq |T|(|y|) \leq |T|(|x|) = 0$ olduğundan $y \in N_T$ dir. Yani N_T idealdir. Her $x, y \in N_T$ için $0 \leq |T|(|x+y|) \leq |T|(|x|) + |T|(|y|) = 0$ olduğundan $x+y \in N_T$ dir. Her $x \in N_T$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|T|(|\lambda x|) = |\lambda| |T|(|x|) = 0$ olduğundan $\lambda x \in N_T$ olur. O halde N_T , E içinde bir idealdir. Diğer yandan $0 \leq \{x_\alpha\} \subseteq N_T$ ve bir $x \in E$ için $x_\alpha \uparrow x$ olsun. $|T|$ sıra sürekli olduğundan $|T|x_\alpha \uparrow |T|x$ olur. $\{x_\alpha\} \subseteq N_T$ olduğundan her α için $|T|x_\alpha = 0$ olmasından $|T|x = 0$ yani $x \in N_T$ bulunur. Dolayısıyla N_T bir banddır.

2.5. Latis (Riesz) Homomorfizması ve Aralık Koruyan Operatörler

2.5.1. Tanım:

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ eşitliği gerçekleniyorsa, T operatörüne *latis (Riesz) homomorfizması* denir.

Herhangi bir $x \in E^+$ alalım. T *latis homomorfizması* ise

$$T(x^+) = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = Tx \vee 0 = (Tx)^+ \geq 0$$

olduğundan her *latis homomorfizması* aynı zamanda pozitif operatördür.

E, F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ latis homomorfizması olsun. $T(E) \subseteq F$ alt vektör uzayı olduğu açıktır ve dolayısıyla $T(E)$ uzayı F den gelen sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. $u, v \in T(E)$ alalım. Bu durumda $T(x) = u$ ve $T(y) = v$ olacak şekilde $x, y \in E$ vardır. T nin latis homomorfizması olması ve E nin Riesz uzayı olması sebebiyle $x \vee y \in E$ olacağından $u \vee v = Tx \vee Ty = T(x \vee y) \in T(E)$ elde edilir. Böylece bir latis homomorfizmasının görüntüsü Riesz alt vektör uzayıdır.

2.5.2. Teorem:

E ve F iki Riesz uzayı, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

- (1) T operatörü Riesz homomorfizmasıdır
- (2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$
- (3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$
- (4) Her $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ ise F uzayı içinde $Tx \wedge Ty = 0$
- (5) Her $x \in E$ için $T(|x|) = |Tx|$ [1].

İspat:

(1 $\Rightarrow$ 2) $x \in E$ olmak üzere T nin latis homomorfizması olması ve Riesz uzayında bir elemanın pozitif kısım tanımını kullanarak,

$$x^+ = x \vee 0 \Rightarrow T(x^+) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = T(x) \vee 0 = [T(x)]^+$$

elde edilir.

(2 $\Rightarrow$ 3) Her $x, y \in E$ olmak üzere Teorem 2.1.20. (1) ve (3) ile Riesz uzayında bir elemanın pozitif kısmının tanımını kullanarak, öncelikle $x \wedge y = x - (x - y)^+$ eşitliğini elde edelim.

$$\begin{aligned}
 x - (x - y)^+ &= x - [(x - y) \vee 0] \\
 &= x - [-(y - x) \vee 0] \\
 &= x + [(y - x) \wedge 0] \\
 &= (x + y - x) \wedge (x + 0) \\
 &= y \wedge x \dots \dots *
 \end{aligned}$$

dir. * eşitliğini, hipotez ve T nin lineerliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
 T(x \wedge y) &= T(x - (x - y)^+) \\
 &= T(x) - T[(x - y)^+] \\
 &= T(x) - [T(x - y)]^+ \\
 &= T(x) - [T(x) - T(y)]^+ \\
 &= T(x) \wedge T(y)
 \end{aligned}$$

$T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ eşitliğini elde ederiz.

(3 $\Rightarrow$ 4) $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ olsun. Bu durumda hipotezden $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ olduğundan $T(0) = T(x) \wedge T(y)$ ve $0 = T(x) \wedge T(y)$ elde edilir.

(4 $\Rightarrow$ 5) $x \in E$ olmak üzere hipotez ve Teorem 2.1.23. (1), ve Teorem 2.1.25. (1) ve (2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
|T(x)| &= |T(x^+ - x^-)| = |T(x^+) - T(x^-)| \\
&= Tx^+ \vee Tx^- - (Tx^+ \wedge Tx^-) \\
&= Tx^+ \vee Tx^- - 0 \\
&= \frac{1}{2} [Tx^+ + Tx^- + |Tx^+ - Tx^-|] \\
&= \frac{1}{2} [T(|x|) + |T(x)|]
\end{aligned}$$

eşitliğinden her $x \in E$ için $|T(x)| = |T(x)|$ elde edilir.

(5 $\Rightarrow$ 1) Teorem 2.1.25. (1) ve hipotez kullanılarak, herhangi $x, y \in E$ için

$$\begin{aligned}
T(x \vee y) &= T\left[\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)\right] \\
&= \frac{1}{2} [Tx + Ty + T(|x - y|)] \\
&= \frac{1}{2} [Tx + Ty + |T(x - y)|] \\
&= \frac{1}{2} [Tx + Ty + |Tx - Ty|] \\
&= Tx \vee Ty
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.5.3. Örnek:

Her sıra (band) projeksiyon latis homomorfizmasıdır.

Çözüm:

E Riesz uzayı, $B \subseteq E$ projeksiyon band ve $P_B : E \rightarrow E$ band projeksiyon olsun. B projeksiyon band olduğundan $E = B \oplus B^d$ olarak yazılabilir. $x \in E$ alalım ve $|x| = x^+ + x^-$ olduğundan $x^+ \in B$, $x^- \in B^d$ ve $x^+, x^- \geq 0$ dır.

$$P_B(|x|) = P_B(x^+ + x^-) = x^+ = |x^+| = |P_B(x^+ + x^-)| = |P_B(x)|$$

olup Teorem 2.5.2. (5) gereği P_B latis homomorfizmasıdır.

Aralık Koruyan Operatörler

Bu kısımda amacımız latis homomorfizmalar ile aralık koruyan operatörler arasındaki ilişkileri incelemek olacaktır. Aralık koruyan operatör kavramı ilk olarak D. Maharam tarafından ortaya çıkarılmıştır.

2.5.4. Tanım:

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olmak üzere, her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa, T operatörüne *aralık koruyan operatör* denir.

Şimdi aralık koruyan operatörler ile ilgili sonuçları verelim.

2.5.5. Sonuç:

Aralık koruyan operatörün görüntüsü idealdir.

İspat:

$T(E)$ nin alt vektör uzayı olduğu açıktır. Şimdi ideal olduğunu gösterelim. $0 \leq |x| \leq |y|$ olmak üzere $y \in T(E)$ iken $x \in T(E)$ olduğunu göstereceğiz. $y \in T(E)$ olduğundan $Tz = y$ olacak şekilde $z \in E$ vardır. $|x| \leq |Tz| \leq |T||z| = T|z|$ olur. Diğer yandan $0 \leq x^+ \leq |x| \leq T|z|$, $0 \leq x^- \leq |x| \leq T|z|$ ve T aralık koruyan operatör olduğundan $Tu = x^+$ ve $Tv = x^-$ olacak şekilde $u, v \in E$ vardır. $T(u - v) = Tu - Tv = x^+ - x^- = x$ ve $u - v \in E$ olduğundan $x \in T(E)$ bulunur.

2.5.6. Sonuç:

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. $T(E)$ nin ideal olması T operatörünün aralık koruyan olmasını gerektirmez.

2.5.7. Örnek:

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \rightarrow T(x, y) = (x + y, y)$ biçiminde tanımlanan operatör için $T(\mathbb{R}^2)$ görüntü kümesi idealdir ancak T operatörü aralık koruyan değildir.

Çözüm:

Öncelikle T nin pozitif operatör olduğunu gösterelim.

Anlamlı olduğunu görmek için $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alalım. Bu durumda $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ vektör uzayı olduğundan $x + y \in \mathbb{R}$ olur ki böylece $(x + y, y) \in \mathbb{R}^2$ olacağından T anlamlıdır.

İyi tanımlılığını görmek için $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$\begin{aligned} a = b &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow (x_1 + y_1, y_1) = (x_2 + y_2, y_2) \Rightarrow T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \Rightarrow Ta = Tb \\ &\Rightarrow T \text{ iyi tanımlıdır.} \end{aligned}$$

Lineerliğini görmek için $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$\begin{aligned} \lambda Ta + Tb &= \lambda T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = \lambda(x_1 + y_1, y_1) + (x_2 + y_2, y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda y_1) + (x_2 + y_2, y_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda y_1 + y_2) \\ &= T(\lambda a + b) \\ &\Rightarrow T \text{ lineerdir.} \end{aligned}$$

Pozitifliğini görmek için $0 \leq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$$0 \leq (x, y) \Rightarrow 0 \leq x \text{ ve } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x + y \text{ ve } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq (x + y, y) \Rightarrow 0 \leq T(x, y) \\ \Rightarrow T \text{ pozitifdir}$$

Örten olduğunu görmek için $b = (m, n) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $m = m - n + n$ yazılabilir ve $m, n \in \mathbb{R}$ olduğundan $m - n, n \in \mathbb{R}$ dir. $a = (m - n, n)$ olacak biçimde $a \in \mathbb{R}^2$ elemanını alalım. Bu durumda $Ta = T(m - n, n) = (m - n + n, n) = (m, n) = b$ olduğu için T operatörü örtendir.

$u, v \in \mathbb{R}^2$ aldığımızda T operatörü örten olduğundan $Tx = u$ ve $Ty = v$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}^2$ vardır. $|u| \leq |v|$ ve $v \in T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ olsun. T operatörü örten olduğundan $u \in \mathbb{R}^2 = T\mathbb{R}^2$ elde edilir. Sonuç olarak T örten olduğunda $T\mathbb{R}^2$ görüntüsü idealdir.

$(0, 1) \in [(0, 0), T(1, 1)]$ alalım. Bu durumda $(0, 0) \leq (0, 1) \leq (2, 1) = T(1, 1)$ olduğundan $T(a, b) = (0, 1)$ olacak şekilde $(0, 0) \leq (a, b) = u \leq (1, 1) = x$ aralığında eleman bulamayız. Böylece T operatörü aralık koruyan değildir.

2.5.8. Sonuç:

E bir Riesz uzayı olmak üzere herhangi bir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif lineer operatörü aralık koruyandır.

İspat:

Herhangi bir $x \in E^+$ olmak üzere her $u \in [0, x]$ için $0 \leq u \leq x$ dir. f pozitif olduğundan $0 \leq f(u) \leq f(x)$ olur ki, bu $f[0, x] \subseteq [0, f(x)]$ anlamına gelir. $y \in [0, fx]$ alalım. Bu durumda $0 \leq y \leq fx$ dir.

$fx = 0$ olsun. Buradan $y = 0$ olur ki $u = 0$ alırsak $u \in [0, x]$ ve $f(u) = y$ dir.

$fx \neq 0$ olsun. $\lambda = \frac{y}{fx}$ olmak üzere $u = \lambda.x$ diyelim. $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğundan

$u \in [0, x]$ ve $f(u) = f(\lambda x) = f\left(\frac{y}{fx}x\right) = \frac{y}{fx}fx = y$ olur. Bu da $[0, fx] \subseteq f[0, x]$

anlamına gelir. Sonuç olarak $f[0, x] = [0, fx]$ eşitliğini elde ederiz.

2.5.9. Sonuç:

Aralık koruyan operatörler ile latis homomorfizmaları birbirinden bağımsızdırlar.

2.5.10. Örnek:

$\phi: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \phi(f) = \int_0^1 f(t) dt$, şeklinde tanımlanan ϕ pozitif operatörü

aralık koruyandır fakat latis homomorfizması değildir.

Çözüm:

İntegral fonksiyonu pozitif olduğu için $f \geq 0$ aldığımızda $\phi(f) \geq 0$ olur. Her pozitif lineer fonksiyonel aralık koruyan olduğu için ϕ operatörü de aralık koruyandır. Latis homomorfizması olmadığını göstermek için,

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow fx = x - \frac{1}{2}$$

biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonu alalım.

$$|\phi f| = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right| = \left| \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 \right| = |0 - 0| = 0 \dots *$$

$$|f|x = |fx| = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & x \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ x - \frac{1}{2}, & x \geq \frac{1}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlanışını kullanarak

$$\begin{aligned}\phi(|f|) &= \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = \int_0^{1/2} \left(-x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right)_0^{1/2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right)_{1/2}^1 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \dots\dots **\end{aligned}$$

buluruz. * ve ** gereğince $|\phi f| < \phi(|f|)$ dir. $|\phi f| \neq \phi(|f|)$ olduğundan Teorem 2.5.2. (5) gereği ϕ Riesz homomorfizması değildir.

2.5.11. Örnek:

$L_1[0,1] = \{g \mid g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ integrallenebilir fonksiyon} \}$ olmak üzere

$$T : C[0,1] \rightarrow L_1[0,1], f(t) \rightarrow T(f(t)) = t.f(t), t \in [0,1]$$

biçiminde tanımlanan T operatörü latis homomorfizmasıdır ancak aralık koruyan değildir.

Çözüm:

$f \in C[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$T|f(t)| = t|f(t)| = |tf(t)| = |Tf(t)|$$

eşitliğinden T Riesz homomorfizmasıdır. $\mathbf{1} \in C[0,1]$ ve her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{1}(t) = 1$ olacak şekildeki sabit fonksiyonu belirtmek üzere; her $t \in [0,1]$ için $0 \leq \sin t \leq 1$ dir ve buradan $0 \leq t \left| \sin \frac{1}{t} \right| \leq t = T\mathbf{1}(t) = t.1$ doğrudur. Şimdi T nin aralık koruyan operatör olmadığını olmayana ergi yöntemini kullanarak ispatlayalım. Bunun için T

nin aralık koruyan operatör olduğunu kabul edelim. Her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{1}(t)=1$ biçiminde tanımlanan sabit fonksiyon $C[0,1]$ in elemanıdır.

$$h:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow h(t) = \begin{cases} t \cdot \left| \sin \frac{1}{t} \right| & : t \neq 0 \\ 0 & : t = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonu integrallenebilirdir ve her $t \in [0,1]$ için $0 \leq h(t) \leq t = T.\mathbf{1}(t)$ sağlanır. T operatörü aralık koruyan olduğundan $0 \leq f \leq \mathbf{1}$ ve $t \in [0,1]$ için $T(f)(t) = h(t)$ olacak şekilde $f \in C[0,1]$ vardır. Bu ve T nin tanımı her $t \in [0,1]$ için $T(f)(t) = t.f(t) = h(t)$ olmasını gerektirir. O halde her $t \in [0,1]$ için $f(t) = \frac{h(t)}{t} = \left| \sin \frac{1}{t} \right|$ olur. f sürekli olduğundan $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ vardır. Bu bize $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \sin \frac{1}{t} \right|$ limitinin var olmasını verir ki bu bir çelişkidir. O halde T operatörü aralık koruyan olamaz.

2.5.12. Sonuç:

İki aralık koruyan operatörün toplamı aralık koruyan olmayabilir.

2.5.13. Örnek:

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow T_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow T_2(x_1, x_2) = (x_2, 0)$$

biçiminde tanımlanan T_1, T_2 lineer operatörlerdir. Ancak toplamı olan $T_1 + T_2$ operatörü aralık koruyan değildir.

Çözüm:

$0 \leq (x_1, x_2) = a \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T_1(a) = (x_1, x_2) \geq (0, 0)$ ve $T_2(a) = T_2(x_1, x_2) = (x_2, 0) \geq (0, 0)$ olduğundan T_1, T_2 pozitif operatörlerdir. $x \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $0 \leq y \leq T_1 x$ olsun. Bu durumda $0 \leq (y_1, y_2) \leq T_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ olduğundan $u = (y_1, y_2)$ seçersek $u \in [0, x]$ iken $T_1 u = T_1(y_1, y_2) = y$ sağlanır. Böylece T_1 aralık koruyan operatördür. $x \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $0 \leq y \leq T_2 x$ olsun. Bu durumda $0 \leq (y_1, y_2) \leq T_2(x_1, x_2) = (x_2, 0)$ olduğundan $y_1 \leq x_2$ ve $y_2 \leq 0$ dolayısıyla $y_2 = 0$ olur. $u = (y_2, y_1) = (0, y_1)$ seçersek $u \in [0, x]$ iken $T_2 u = T_2(y_2, y_1) = T_2(0, y_1) = (y_1, 0)$ sağlanır. Böylece T_2 aralık koruyan operatördür.

$T_1 + T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(T_1 + T_2)(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$ biçimindeki operatörün aralık koruyan olmadığını Örnek 2.5.7. de ispatlamıştık. Sonuç olarak aralık koruyan operatörlerin toplamı aralık koruyan olmayabilir.

Aralık koruyan operatörü pozitif almıştık. Şimdi bu tanımın biraz daha genellemesini göreceğiz.

2.5.14 Tanım (Maharam operatör):

M Dedekind tam ile L ve M Arşimedyan Riesz uzayı olsun. $T \in L_b(L, M)$ operatörü, şayet $|T|$ aralık koruyan operatör ise bir *Maharam operatördür* denir. Yani M de $0 \leq w \leq |T|u$ için $w = |T|v$ olacak şekilde $0 \leq v \leq u$ vardır(s.151, [3]).

2.6. Ortomorfizmalar ve f -Cebirleri

2.6.1. Tanım(Band Koruyan Operatör):

E Riesz uzayı, $T : E \rightarrow E$ operatör olsun. E nin her B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T ye *band koruyan operatör* denir.

2.6.2. Tanım (Ortomorfizma):

Band koruyan sıra sınırlı operatöre *ortomorfizma* denir ve E nin bütün ortomorfizmalarının kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir.

2.6.3. Teorem:

E Arşimedyan Riesz uzayı, $T \in L_b(E)$ iken $T \in Orth(E)$ olması için gerek ve yeterli koşul $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır [1].

2.6.4. Tanım (Merkez):

E Riesz uzayı, $T : E \rightarrow E$ operatör olmak üzere, $-\lambda I \leq T \leq \lambda I$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa, T ye *merkez operatör* denir. Merkez operatörlerin kümesi $Z(E)$ ile gösterilir. Yani

$$Z(E) = \{T \in L_b(E) : -\lambda I \leq T \leq \lambda I\}$$

şeklinde ifade edilir.

2.6.5. Teorem:

Her $\pi_1, \pi_2 \in Z(E)$ için $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1$ ve $|\pi_1 \pi_2| = |\pi_1| |\pi_2|$ dir [5].

2.6.6. Teorem:

Arşimedyan Riesz uzayı üzerinde her ortomorfizma sıra süreklidir [1].

2.6.7. Teorem:

E Dedekind tam Riesz uzayı, B_I , birim ile üretilen band ise $B_I = Orth(E)$ dir [1].

2.6.8. Teorem:

Herhangi bir ortomorfizmanın çekirdeği bandır. Özellikle bir küme üzerinde iki ortomorfizma eşitse, o kümenin ürettiği band üzerinde de eşittir [1].

2.6.9. Teorem:

G , E Dedekind Riesz uzayının Riesz alt uzayı ve $T: G \rightarrow E$, her $x \in G^+$ için $0 \leq Tx \leq x$ eşitsizliği sağlansın. O zaman T , E üzerinde bir pozitif ortomorfizmaya genişler.

Özellikle, E Dedekind tam, $x \in E^+$ ve $0 \leq |y| \leq x$ ise $-I \leq T \leq I$, $Tx = y$ olacak şekilde $T \in Orth(E)$ vardır [1].

2.6.10. Teorem:

E , F Riesz uzayları, F Dedekind tam $T: E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) T Riesz homomorfizmasıdır.
- (ii) Her $S: E \rightarrow F$, $0 \leq S \leq T$ için $\pi T = S$, $0 \leq \pi \leq I$ olacak şekilde $\pi \in Orth(E)$ vardır [1].

2.6.11. Tanım (f -cebiri):

E Riesz uzayı olmak üzere E de olağan cebir özellikleriyle birleşmeli bir çarpım varsa ve her $u, v \in E^+$ için $uv \geq 0$ ise bir *Riesz Cebiri* (*Latis sıralı cebir*) diye isimlendirilir. E Riesz Cebiri her $f, g \in E$ için $fg = gf$ ise değişmelidir. E Riesz Cebiri, şayet ilaveten $u \wedge v = 0$ iken her $w \in E^+$ için $(uw) \wedge v = (wu) \wedge v = 0$ ise f -cebiri olarak isimlendirilir.

2.6.12. Teorem:

E Arşimedyan Riesz uzayı olsun. $Orth(E)$ bileşke işlemine göre birimli f -cebiri [5].

2.6.13. Teorem:

Her hangi bir Arşimedyan f -cebiri değişmelidir [5].

2.6.14. Teorem:

E birimli, Arşimedyan f -cebiri olsun. Eğer $\pi \in Orth(E)$ ise her $x \in E$ için $\pi(x) = px$ olacak şekilde $p \in E$ vardır. Tersine her $p \in E$ için $\pi : E \rightarrow E ; x \rightarrow px$ ile tanımlanırsa $\pi \in Orth(E)$ dir.

π nin pozitif ortomorfizma olması için gerek ve yeter koşul π ile uyuşan p elemanın pozitif olmasıdır.

$\pi \in Z(E)$ olması için gerek ve yeter koşul E içinde birim ile üretilen ideal I_e olmak üzere, $p \in I_e$ dir [5].

2.6.15. Teorem:

E, f -cebiri olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Bir pozitif eleman ile çarpımı bir Riesz homomorfizmidir. Örneğin herhangi $u \in E^+$ ve her $f, g \in E$ için $u(f \wedge g) = (uf) \wedge (ug)$ ve $(f \wedge g)u = (fu) \wedge (gu)$ dir.

Benzer şekilde $f \vee g$ içinde. Ayrıca $uf^+ = (uf)^+$ ve $f^+u = (fu)^+$ dir.

(ii) Her $f, g \in E$ için $|fg| = |f||g|$ dir. Üstelik $(fg)^+ = f^+g^+ + f^-g^-$ ve $(fg)^- = f^+g^- + f^-g^+$ dir.

(iii) Her $f, g, h \in E$ $f \perp g$ ise $fh \perp g$ ve $hf \perp g$ dir. Böylece E içindeki dik tümleyen iki-yanlı halka idealdir.

(iv) Eğer E içinde $f \perp g$ ise $fg = 0$ dır. Özellikle, $f^+ f^- = f^- f^+ = 0$ dır.

(v) Her $x \in E$ için $x^2 \geq 0$ $xx^+ = x^+x = (x^+)^2 \geq 0$ dır [5].

2.6.16. Teorem:

E Arşimedyan Riesz uzayı F Dedekind tam Riesz uzayı olsun.

(a) Sabit bir $\pi \in Orth(E)$ için

$$\begin{aligned} R_\pi : L_n(E, F) &\rightarrow L_n(E, F) \\ T &\rightarrow R_\pi(T) = T\pi \end{aligned}$$

(b) Sabit bir $\pi \in Orth(F)$ için

$$\begin{aligned} L_\pi : L_n(E, F) &\rightarrow L_n(E, F) \\ T &\rightarrow L_\pi(T) = \pi T \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dönüşümler için $R_\pi, L_\pi \in Orth(L_n(E, F))$ dir.

İspat:

R_π ve L_π dönüşümlerinin lineer ve sıra sınırlı olduklarını görmek kolaydır. Önce $\pi \in Z(E)$ olsun. Bu durumda $|\pi| \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. Her $T \in L_n(E, F)$ için $|R_\pi(T)| = |T\pi| \leq |T||\pi| \leq |T|(\lambda I) = \lambda|T|$ olduğundan $R_\pi \in Z(L_n(E, F))$ dir. Şimdi $\pi \in Orth(E)_+$ olsun. $Orth(E)$ birimin ürettiği ideal olduğundan $\pi \wedge nI \uparrow \pi$ dir. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\pi \wedge nI \leq nI$ olduğundan $\pi \wedge nI \in Z(E)$ dir. $\pi_n = \pi \wedge nI$ alırsak $R_{\pi_n} \in Z(L_n(E, F))$ dir. T sıra sürekli olduğundan

$T\pi_n \uparrow T\pi$ yani $R\pi_n \uparrow R\pi$ dir. $Z(L_n(E, F))$ 'nin ürettiği band $Orth(L_n(E, F))$ olduğundan $R_\pi \in Orth(L_n(E, F))$ olur. $\pi \in Orth(E)$ keyfi ise $\pi = \pi_1 - \pi_2$ ve $\pi_1, \pi_2 \geq 0$ olmasından istenen çıkar. L_π için de benzer ispat yapılır.

Bunun yardımıyla

$$\begin{array}{ccc} Orth(E) \rightarrow Orth(L_n(E, F)) & & Orth(F) \rightarrow Orth(L_n(E, F)) \\ \pi \rightarrow R_\pi & \text{ve} & \pi \rightarrow L_\pi \end{array}$$

lineer sıra sınırlı dönüşümleri tanımlanabilir.

3. NAKANO TEOREMİ

E bir Riesz uzayı olsun. Bir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu her $x \in E^+$ için $f(x) \geq 0$ olduğu zaman *pozitif* olarak adlandırılır. Aynı zamanda bir f lineer fonksiyonu, E nin sıra sınırlı alt kümelerini, $\mathbb{R}$ nin sınırlı alt kümelerine resmederse (götürürse) *sıra sınırlı* diye adlandırılır. (Her pozitif operatör sıra sınırlıdır. f burada pozitif operatördür.) E üzerindeki tüm sıra sınırlı pozitif fonksiyonların $E^\sim$ vektör uzayı, E nin *sıra duali* olarak isimlendirilir. Örneğin $L_b(E, \mathbb{R}) = E^\sim$.

$\mathbb{R}$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğu için, aynı zamanda Riesz-Kantorovic teoreminden $E^\sim$ bir vektör uzayıdır. Dahası $E^\sim$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır. E de $f \geq g$ nin her $x \in E^+$ için $f(x) \geq g(x)$ anlamında olduğunu anımsayalım. Her $x \in E^+$ ve $f, g \in E^\sim$ için Riesz-Kantorovic teoreminden;

$$(1) \quad f^+(x) = \sup \{f(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$(2) \quad f^-(x) = \sup \{-f(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$(3) \quad |f|(x) = \sup \{|f(y)| : |y| \leq x\} = \sup \{f(y) : |y| \leq x\}$$

$$(4) \quad (f \vee g)(x) = \sup \{f(y) + g(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$(5) \quad (f \wedge g)(x) = \inf \{f(y) + g(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

elde edilir.

(5) formülü yardımıyla $E^\sim$ deki dikliği Teorem 2.1.27. göz önüne alınarak şöyle verilebilir.

$f, g \in E^\sim$ için $f \perp g$ dir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \geq 0, \forall x \in E^+$ için $y+z=x, |f|(y) \leq \varepsilon$ ve $|g|(z) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $y, z \in E^+$ vardır.

$E^\sim$ (sıralı) duali sıfır uzayı olabilir. Örneğin: $0 < p < 1$ için, $E = L_p[0,1]$ alınırsa $E^\sim = \{0\}$ dir [1]. Her $0 \neq x \in E$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde $f \in E^\sim$ varsa, $E^\sim$ ya E uzayının *noktalarını ayıran (sıra) duali* denir. $E^\sim, E$ nin noktalarını ayıran sıra duali ise her $f \in E^\sim$ için $f(x) = 0$ iken $x = 0$ dir.

3.1. Teorem:

$E^\sim, E$ nin noktalarını ayırsın ve $x \in E$ olsun. “ $x \geq 0 \Leftrightarrow \forall 0 \leq f \in E^\sim$ için $f(x) \geq 0$ ” dir [1].

İspat:

Her $0 \leq f \in E^\sim$ ve $x \geq 0$ olsun. Buradan $f(x) \geq 0$ dir. Tersine kabul edelim. Her $0 \leq f \in E^\sim$ ve en az bir $x \in E$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Eğer $0 \leq f \in E^\sim$ sabit ise Teorem 2.3.11. den $f(x^-) = -g(x)$ olacak şekilde $0 \leq g \leq f$ vardır. Hipotezden $g(x) \geq 0$ sağlanır. Buradan $0 \leq f(x^-) = -g(x) \leq 0$ dir. Dolayısıyla her $0 \leq f \in E^\sim$ için $f(x^-) = 0$ sağlanır. $E^\sim, E$ nin noktalarını ayırdığından $x^- = 0$ dir. Buradan da $x = x^+ - x^- = x^+ \geq 0$ bulunur ve ispat tamamlanır.

3.2. Tanım($E_n^\sim, E_c^\sim$):

E bir Riesz uzayı olsun. E üzerindeki tüm sıra sürekli lineer fonksiyonların $L_n(E, \mathbb{R})$ vektör uzayı, $E_n^\sim$ ile gösterilecek. Benzer şekilde E üzerindeki tüm σ -sıra sürekli lineer fonksiyonların $L_c(E, \mathbb{R})$ vektör uzayı, $E_c^\sim$ ile gösterilecek. Bu $L_n(E, \mathbb{R}) = E_n^\sim$ ve $L_c(E, \mathbb{R}) = E_c^\sim$ dir.

3.3. Teorem(Nakano):

Eğer E Archimedian Riesz uzayı ise bir çift $f, g \in E_n^\sim$ için aşağıdaki önermeler denktir.

$$(1) \quad f \perp g$$

$$(2) \quad C_f \subseteq N_g$$

$$(3) \quad C_g \subseteq N_f$$

$$(4) \quad C_f \perp C_g \text{ [1].}$$

İspat:

$C_f = C_{|f|}$ ve $N_f = N_{|f|}$ olduğundan f ve g yi pozitif olarak alabiliriz.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$0 \leq x \in C_f = N_f^d$ olsun. Hipotezden her $x \in E^+$ için $0 = (f \wedge g)(x) = \inf \{f(y) + g(x - y) : y \in E^+ \text{ ve } 0 \leq y \leq x\}$ olduğundan her $\varepsilon \geq 0$ için $f(y_\varepsilon) + g(x - y_\varepsilon) \leq \varepsilon$ ve $0 \leq y_\varepsilon \leq x$ olacak şekilde $y_\varepsilon \in E$ vardır. Seçilen $0 \leq x \in C_f$ ve

$$\frac{\varepsilon}{2} \text{ için } f(x_1) + g(x - x_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } 0 \leq x_1 \leq x \text{ olacak şekilde } x_1 \in E,$$

$$\frac{\varepsilon}{2^2} \text{ için } f(x_2) + g(x - x_2) \leq \frac{\varepsilon}{2^2} \text{ ve } 0 \leq x_2 \leq x \text{ olacak şekilde } x_2 \in E,$$

.....

$\frac{\varepsilon}{2^n}$ için $f(x_n) + g(x - x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ ve $0 \leq x_n \leq x$ olacak şekilde $x_n \in E$

vardır. Bu şekilde oluşturulan bir $(x_n) \subseteq E$ bulabiliriz. Şimdi $y_n = \bigwedge_{i=1}^n x_i$ olarak

tanımlayalım. $y_n \downarrow 0$ dır. (y_n) dizisinin azalan olduğu infimumun tanımından açıktır.

Şimdi infimumunun sıfır olduğunu gösterelim. Bunun için her n için $0 \leq z \leq y_n$ iken

$z = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $0 \leq z \leq y_n$ ve f pozitif olduğundan

$0 \leq f(z) \leq f(y_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ ifadesi her n için doğrudur. Buradan $f(z) = 0$ yani $z \in N_f$

elde edilir. Ayrıca $0 \leq z \leq y_n \leq x_n \leq x$ ve $x \in C_f$ olması göz önüne alındığında C_f

band olduğundan $z \in C_f$ olur. Sonuç olarak $z \in C_f \cap N_f = \{0\}$ yani $z = 0$ bulunur.

$y_n \downarrow 0$ olduğundan $-y_n \uparrow 0$ ve böylece $x + (-y_n) = x - y_n \uparrow x + 0 = x$ dir. g sıra

sürekli olduğundan $g(x - y_n) \uparrow g(x)$ bulunur. Diğer yandan $0 \leq x - y_n$ ve g pozitif

oldüğünden $0 \leq g(x - y_n), y_n = \bigwedge_{i=1}^n x_i$ ve $\bigvee_{i=1}^n (x - x_i) \leq \sum_{i=1}^n (x - x_i)$ olduğundan da

$g\left(\bigvee_{i=1}^n (x - x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n g(x - x_i)$ olur. Ayrıca $f(x_i) + g(x - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$ ve $f(x_i) \geq 0$

olduğu düşünülürse $g(x - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$ elde edilir. Bütün bunlardan

$$0 \leq g(x - y_n) = g\left(\bigvee_{i=1}^n (x - x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n g(x - x_i) \leq \varepsilon$$

bulunur. Buradan $0 \leq \sup(x - y_n) = g(x) \leq \varepsilon$ elde edilir ki bu $g(x) = 0$ olmasını

gerektirir. Böylece $x \in N_g$ yani $C_f \subseteq N_g$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3)

N_f bir band olduğundan $C_f \subseteq N_g$ ve Teorem 2.4.4. den $C_g = N_g^d \subseteq N_f^{dd} = N_f$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (4)

$C_g \subseteq N_f$ ve $N_f \perp C_f$ doğru olduğu için, bizim hipotezimizden $C_g \perp C_f$ olduğunu görürüz.

(4) $\Rightarrow$ (1)

$C_g \perp C_f$ den $C_g \subseteq C_f^d = N_f^{dd} = N_f$ dir. Şimdi eğer $0 \leq x = y + z \in N_g \oplus C_g$ ise

$$\begin{aligned} 0 \leq f \wedge g(x) &= f \wedge g(y) + f \wedge g(z) \\ &\leq g(y) + f(z) = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece $N_g \oplus C_g$ sıra yoğun ideali üzerinde $f \wedge g = 0$ sağlanır. $f \wedge g \in E_n^\sim$ olduğundan $f \wedge g(x) = 0$, her $x \in E$ için sağlanır ve teorem ispatı biter.

3.4. Sonuç:

E Arşimedyan Riesz uzayı F Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $S, T \in L_n(E, F)$ olsun. Eğer $C_S \perp C_T$ ise yukarıdaki (4) $\Rightarrow$ (1) ispatı aynen tekrar edilerek $S \perp T$ olduğu görülür.

Ne var ki aşağıda verilen örnek bu sonucun tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

3.8. Örnek:

$S, T : L_1[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ ve $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $B = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olmak üzere

$$S(f) = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \chi_A$$

$$T(f) = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \chi_B$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\begin{aligned} \chi_A : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} & \chi_B : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \chi_A(x) &= \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases} & \text{ve} & x \rightarrow \chi_B(x) = \begin{cases} 1; & x \in B \\ 0; & x \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

dır.

İntegral özelliklerinden S ve T nin lineer olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $0 \leq f$ iken $\int f dx \geq 0$ olduğundan S ve T pozitif operatörlerdir. [2] deki Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden S ve T sıra süreklidir. Herhangi bir $0 \leq f \in L_1[0,1]$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq (S \wedge T)(f) &\leq S(f) \wedge T(f) = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \chi_A \wedge \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \chi_B \\ &= \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \chi_A \wedge \chi_B \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece $L_b(L_1[0,1])$ içinde $S \perp T$ bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} N_T &= \{f \in L_1[0,1] : |T(|f|)| = 0\} \\ &= \{f \in L_1[0,1] : T(|f|) = 0\} \\ &= \left\{ f \in L_1[0,1] : \left(\int_0^1 |f| dx \right) \chi_B = 0 \right\} \end{aligned}$$

dır. $\{0\} \subseteq N_T$ bilinmektedir. $f \in N_T$ iken $\left(\int_0^1 |f| dx \right) \chi_B = 0$ olacağından her hangi bir

$x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right]$ için $\left(\int_0^1 |f| dx \right) \chi_B(x) = 0$ olur. $\chi_B(x) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$\int_0^1 |f| dx = 0$, buradan da $f = 0$ bulunur. Bu da $N_T \subseteq \{0\}$ demektir. Benzer şekilde $N_S = \{0\}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $C_T = N_T^d = L_1[0,1]$ ve $C_S = N_S^d = L_1[0,1]$ bulunur ki bu C_T ve C_S kümelerinin ayrık olmadığını gösterir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ NAKANO TEOREMİ

Önceki bölümün son örneğinde görüldüğü gibi görüntü uzayına her hangi bir Dedekind tam Riesz uzayı alındığında Nakano Teoremi $S, T \in L_n(E, F)$ için doğru değildir. Bu durumda S ve T nin üzerine hangi hipotezler yüklendiğinde teorem doğru olur sorusu anlamlıdır. Her lineer fonksiyonel aralık koruyan olduğundan ilk akla gelen S ve T nin aralık koruyan alınmasıdır. Bu bölümde [3] teki makalede verilen genelleştirilmiş Nakano Teoremi'ni vereceğiz.

4.1. Lemma:

L ve M Arşimedyan Riesz uzayı, M Dedekind tam olsun. Sıra sürekli herhangi bir T Maharam operatörüne bağlı olarak tanımlanan

$$\sigma_T : B(M) \rightarrow B(L)$$

$$B \rightarrow \sigma_T(B) = \{x \in L : |T||x| \in B\} \cap C_T$$

dönüşümü sıra sürekli Boolean halka homomorfizmidir [3].

İspat:

Önce anlamlı olduğunu gösterelim. $A = \{x \in L : |T||x| \in B\}$ olarak tanımlayıp bunun bir band olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ için $|T||x|, |T||y| \in B$ dir. $|T||x+y| \leq |T|(|x|+|y|) \in B$ ve B band olduğundan $|T||x+y| \in B$ olur. Her $x \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|T||\lambda x| = |\lambda|(|T||x|)$ ve $|T||x| \in B$ olmasından $\lambda x \in A$ olur. O halde A bir alt vektör uzayıdır. Şimdi $x, y \in L$, $|y| \leq |x|$ ve $x \in A$ olsun. Buradan $|T||y| \leq |T||x|$ olur ki buda $|T||y| \in B$ yani $y \in A$ olmasını gerektirir. Diğer yandan $0 \leq \{x_\alpha\} \subseteq A$ ve bir $x \in L$ için $x_\alpha \uparrow x$ olsun. $|T|$ sıra sürekli olduğundan $|T|x_\alpha \uparrow |T|x$ olur. $\{x_\alpha\} \subseteq A$ olduğundan her α için $|T|x_\alpha \in B$ olması ve B 'nin band olmasından $|T|x \in B$ yani

$x \in A$ bulunur. Sonuç olarak A bir banddır. C_T nin band olduğu ve iki bandın ara kesitinin band olduğu düşünülürse $\sigma_T(B)$ band olur. İyi tanımlı olduğunu görmek kolaydır. Böylece σ_T bir fonksiyon olur.

$\sigma_T = \sigma_{|T|}$ olduğundan $T \geq 0$ varsayabiliriz.

$\sigma_T(\{0\}) = \{x \in L : |T||x| \in \{0\}\} \cap C_T$ olur. $\{0\} \subseteq \sigma_T(\{0\})$ dır. Şimdi $N_T \cap C_T = \{0\}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$x \in \sigma_T(\{0\}) \Rightarrow |T||x| = 0 \text{ ve } x \in C_T$$

$$\Rightarrow x \in N_T \text{ ve } x \in C_T$$

$$\Rightarrow x = 0$$

elde edilir. Bu da $\sigma(\{0\}) \subseteq \{0\}$ demektir. O halde $\sigma_T(\{0\}) = 0$ bulunur.

Şimdi her $B_1, B_2 \in B(M)$ için $\sigma_T(B_1 \cap B_2) = \sigma_T(B_1) \cap \sigma_T(B_2)$ olduğunu(yani $\sigma_T(B_1 \wedge B_2) = \sigma_T(B_1) \wedge \sigma_T(B_2)$) gösterelim.

$$\begin{aligned} \sigma_T(B_1 \cap B_2) &= \{x \in L : |T||x| \in B_1 \cap B_2\} \cap C_T \\ &= \{x \in L : |T||x| \in B_1 \wedge |T||x| \in B_2\} \cap C_T \\ &= [\{x \in L : |T||x| \in B_1\} \cap \{x \in L : |T||x| \in B_2\}] \cap C_T \\ &= [\{x \in L : |T||x| \in B_1\} \cap C_T] \cap [\{x \in L : |T||x| \in B_2\} \cap C_T] \\ &= \sigma_T(B_1) \cap \sigma_T(B_2) \end{aligned}$$

olur. $B_1 \subseteq B_2$ ise her x için

$$\begin{aligned}
x \in \sigma_T(B_1) &\Rightarrow |T||x| \in B_1 \wedge x \in C_T \\
&\Rightarrow |T||x| \in B_2 \wedge x \in C_T \\
&\Rightarrow x \in \sigma_T(B_2)
\end{aligned}$$

olduğundan $\sigma_T(B_1) \subseteq \sigma_T(B_2)$ olur. Buradan $B_1 \subseteq B_1 \vee B_2$ ve $B_2 \subseteq B_1 \vee B_2$ olduğundan $\sigma_T(B_1) \subseteq \sigma_T(B_1 \vee B_2)$ ve $\sigma_T(B_2) \subseteq \sigma_T(B_1 \vee B_2)$ olur ki bu $\sigma_T(B_1) \vee \sigma_T(B_2) \subseteq \sigma_T(B_1 \vee B_2)$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan $0 \leq x \in \sigma_T(B_1 \vee B_2)$ olsun. $0 \leq x \in C_T$ ve $Tx \in B_1 \vee B_2$ demektir. M Dedekind tam olduğundan $B_1 \vee B_2 = B_1 + B_2$ dir [Teorem 2.4.9.]. O zaman $Tx = w_1 + w_2$ olacak şekilde $w_1 \in B_1^+$ ve $w_2 \in B_2^+$ vardır. T Maharam operatör olduğundan $Tu_1 = w_1$ ve $0 \leq u_1 \leq x$ olacak şekilde u_1 vardır. $u_2 = x - u_1$ alalım. $Tu_1 = w_1 \in B_1$ ve $T(u_2) = T(x - u_1) = Tx - T(u_1) = w_2 \in B_2$ ayrıca $0 \leq u_1 \leq x$ ve $x \in C_T$, $0 \leq u_2 \leq x \in C_T$ olması ve C_T nin band olduğu düşünülürse $u_1, u_2 \in C_T$ olur. Buradan $u_1 \in \sigma_T(B_1)$ ve $u_2 \in \sigma_T(B_2)$ elde edilir. Bu da $x \in \sigma_T(B_1) + \sigma_T(B_2) \subseteq \sigma_T(B_1) \vee \sigma_T(B_2)$ olması demektir ($\sigma_T(B_1) \vee \sigma_T(B_2)$, $\sigma_T(B_1) + \sigma_T(B_2)$ nin ürettiği band olduğundan). Böylece $\sigma_T(B_1) \vee \sigma_T(B_2) = \sigma(B_1 \vee B_2)$ elde edilir. Son olarak sıra sürekli olduğunu gösterelim. $B(M)$ içinde $B_\alpha \downarrow 0$ olsun. Herhangi bir $B_\alpha \downarrow$ ve $B_\alpha \subseteq B_\beta$ iken $\sigma_T(B_\alpha) \subseteq \sigma_T(B_\beta)$ olduğu düşünülürse $\sigma_T(B_\alpha) \downarrow$ olduğunu görmek kolaydır. Her α için $A \subseteq \sigma_T(B_\alpha)$ olacak şekilde $A \in B(L)$ alalım. $A \subseteq \{0\}$ olduğunu göstereceğiz. $B_\alpha \downarrow 0$ olmasından

$$\begin{aligned}
0 \leq x \in A &\Rightarrow \text{Her } \alpha \text{ için } x \in \sigma_T(B_\alpha) \\
&\Rightarrow \text{Her } \alpha \text{ için } |T||x| = Tx \in B_\alpha \text{ ve } x \in C_T \\
&\Rightarrow Tx = 0 \text{ ve } x \in C_T \\
&\Rightarrow x \in N_T \text{ ve } x \in C_T \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\sigma_T(B_\alpha) \downarrow 0$ olduğunu gösterir.

Şimdi L ve M nin her ikisini Dedekind tam alırsak $B(L)$ ile L üzerindeki projeksiyonların kümesi $P(L)$ ve $B(M)$ ile de $P(M)$, Boolean cebiri olarak izomorfiktirler. Yani $h_1: B(M) \rightarrow P(M)$, $h_2: B(L) \rightarrow P(L)$ Boolean cebir izomorfizmleri vardır. Bu nedenle σ_T yardımıyla

$$\begin{array}{ccc} B(M) & \xrightarrow{\sigma_T} & B(L) \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ P(M) & \xrightarrow{h_T} & P(L) \end{array}$$

diyagramı göz önüne alınırsa $h_T = h_2 \sigma_T h_1^{-1}: P(M) \rightarrow P(L)$ Boolean halka homomorfizmi bulunabilir. Dahası $h_T(I) = h_2 \sigma_T h_1^{-1}(I) = h_2 \sigma_T(M) = h_2(C_T) = P_T$ (P_T , C_T bandına karşılık gelen projeksiyondur) olur. $L = N_T \oplus C_T$ ve $P_T(N_T) = \{0\}$ olduğundan her $x \in L$ için $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in N_T$ ve $x_2 \in C_T$ olacağından

$$\begin{aligned} Th_T(I)(x) &= TP_T(x) = T(P_T(x_1 + x_2)) = T(P_T(x_2)) = T(x_2) \\ &= 0 + Tx_2 = Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2) = Tx \end{aligned}$$

olur. Bu $Th_T(I) = T$ olması demektir.

Ayrıca her $B \in B(M)$ ve her y için

$$\begin{aligned} y \in T(\sigma_T(B)) &\Rightarrow \exists x \in L, x \in \sigma_T(B) \text{ ve } Tx = y \\ &\Rightarrow \exists x \in L, |T||x| = T|x| \in B \text{ ve } Tx = y \end{aligned}$$

dır. $|y| = |Tx| \leq |T||x| \in B$ olacağından $y \in B$ olur. O halde her $B \in B(M)$ için $T(\sigma_T(B)) \subseteq B$ dir. Her $P \in P(M)$ için P ye karşılıklı gelen band B olmak üzere

$(h^{-1}(P)=B)$ $h_T(P)=P_{\sigma_T(B)}$ dir (burada $P_{\sigma_T(B)}$, $\sigma_T(B)$ bandına karşılık gelen projeksiyondur). Herhangi bir $x \in L$ için $TP_{\sigma_T(B)}(x)=T(y)$ ise $y \in \sigma_T(B)$ vardır. $Ty \in T(\sigma_T(B)) \subseteq B$ olduğundan $Ty \in B$ dir. P , B ye karşılık gelen projeksiyon olduğundan $P(Ty)=Ty$ olur. Buradan her $x \in L$ için $PTh_T(P)(x)=Th_T(P)(x)$ elde edilir ki bu $PTh_T(P)=Th_T(P)$ demektir. Son elde edilen eşitlikte P yerine $I-P$ konulursa

$$\begin{aligned} (I-P)Th_T(I-P) &= Th_T(I-P) \Rightarrow ITh_T(I-P) - PTh_T(I-P) = Th_T(I-P) \\ &\Rightarrow PTh_T(I) = PTh_T(P) \end{aligned}$$

olur. $Th_T(I)=T$ ve $PTh_T(P)=Th_T(P)$ olduğu düşünülürse her $P \in P(M)$ için $PT=Th_T(P)$ ve $P \leq I$ olduğundan $h_T(P) \leq h_T(I)=P_T$ bulunur. Sonuç olarak şu Lemma'yı verebiliriz.

4.2. Lemma:

L ve M Dedekind tam Riesz uzayları olmak üzere her sıra sürekli Maharam operatörü T için $P(M)$ den $P(L)$ ye bir h_T Boolean halka homomorfizması vardır öyle ki her $P \in P(M)$ için $h_T(I)=P_T$ olmak üzere $PT=Th_T(P)$ ve $h_T(P)P_T=h_T(P)$ dır [3].

Şimdi de bu operatörün $Z(M)$ den $Z(L)$ temsilini oluşturalım.

4.3. Önerme:

L ve M Dedekind tam Riesz uzayları $T \in L_n(L, M)$ olsun.

(i) T Maharam operatörü ise her $\pi \in Z(M)$ için $\pi T = Th_T(\pi)$ ve $h_T(\pi)P_T = h_T(\pi)$ olacak şekilde bir tek $h_T : Z(M) \rightarrow Z(L)$ f -cebiri homomorfizmi vardır.

(ii) Eğer her $\pi \in Z(M)$ için $\pi T = Th(\pi)$ olacak şekilde bir $h : Z(M) \rightarrow Z(L)$ f -cebiri homomorfizmi varsa T Maharam operatörüdür [3].

İspat:

(i) Lemma 4.2. den $h_T : P(M) \rightarrow P(L)$ dönüşümü vardır ve her $P \in P(M)$ için $PT = Th_T(P)$ ve $h_T(P)P_T = h_T(P)$ dir. $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+$, $P_1, P_2, \dots, P_n \in P(M)$ olmak üzere $h_T\left(\sum_{i=1}^n c_i P_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i h_T(P_i)$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $0 \leq \pi \in Z(M)$

için Freudenthal's Spectral Teoreminden ([1], Teorem 6.8.) $\pi_n = \sum_{j=1}^m c_j P_j$, $c_j \in \mathbb{R}^+$,

$P_j \in P(M)$ ve $\pi_n \uparrow \pi$ olacak şekilde $(\pi_n) \subseteq Z(M)$ dizisi vardır. Bunun yardımıyla

$$H_T : Z(M)_+ \rightarrow Z(L)_+ \\ \pi \rightarrow H_T(\pi) = \sup_n h_T(\pi_n)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Her n için $0 \leq \pi_n \leq \pi \leq \lambda I$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Buradan $0 \leq h_T(\pi_n) \leq \lambda h_T(I)$ ve $Z(L)$ Dedekind tam olduğundan $\sup h_T(\pi_n)$,

$Z(L)$ de vardır. Yani H_T anlamlıdır. İyi tanımlı olduğu kolay görülür. Diğer yandan

Lemma 4.2. den her $P \in P(M)$ için $PT = Th_T(P)$ olduğundan her n için

$\pi_n T = Th_T(\pi_n)$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan $\sup_n (\pi_n T) = \sup_n (Th_T(\pi_n))$

olacağından ve T ile h_T nin sıra sürekliliği göz önüne alınırsa $\pi T = Th_T(\pi)$ elde

edilir. Şimdi f -cebiri homomorfizmi olduğunu gösterelim. Keyfi $P_1, P_2 \in P(M)$ için

P_1 ve P_2 ye karşılık gelen bandlar B_1, B_2 ise Teorem 2.4.10. dan $P_1 P_2$ ye karşılık

gelen band $B_1 \cap B_2$ dir. $\sigma_T(B_1 \cap B_2) = \sigma_T(B_1) \cap \sigma_T(B_2)$ olması ve $\sigma_T(B_1) \cap \sigma_T(B_2)$ bandına karşılık gelen projeksiyon $P_{\sigma_T(B_1)} \cdot P_{\sigma_T(B_2)}$ olacağından $h_T(P_1 \cdot P_2) = h_T(P_1) \cdot h_T(P_2)$ olacağı görülür. Her hangi $0 \leq \pi_1, \pi_2 \in Z(M)$ için $\pi_n = \sum_{j=1}^k c_j P_j$, $u_m = \sum_{t=1}^l b_t P_t$, $c_j, b_t \in \mathbb{R}^+$, $P_j, P_t \in P(M)$ ve $\pi_n \uparrow \pi_1$, $u_m \uparrow \pi_2$ olacak şekilde $(\pi_n), (u_m) \subseteq Z(M)$ dizileri vardır.

$$\pi_n u_m = \left(\sum_{j=1}^k c_j P_j \right) \left(\sum_{t=1}^l b_t P_t \right) = \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^l (c_j b_t) (P_j P_t)$$

olmasından

$$\begin{aligned} h_t(\pi_n u_m) &= \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^l (c_j b_t) h_t(P_j P_t) = \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^l (c_j b_t) h_T(P_j) \cdot h_T(P_t) \\ &= \left(\sum_{j=1}^k c_j h_T(P_j) \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^l b_t h_T(P_t) \right) = h_T(\pi_n) \cdot h_T(u_m) \end{aligned}$$

olur. h_T nin sıra sürekliliği düşünülürse $H_T(\pi_1 \cdot \pi_2) = H_T(\pi_1) \cdot H_T(\pi_2)$ olur. (Her f - cebiri Riesz homomorfizmi olduğundan H_T bir Riesz homomorfizmidir.) Son olarak tek olduğunu gösterelim. $H_T : Z(M) \rightarrow Z(L)$, her $\pi \in Z(M)$ için $\pi T = TH_T(\pi)$ ve $H_T(\pi) P_T = H_T(\pi)$ ve $H'_T : Z(M) \rightarrow Z(L)$, her $\pi \in Z(M)$ için $\pi T = TH'_T(\pi)$ ve $H'_T(\pi) P_T = H'_T(\pi)$ olsun. Her $\pi \in Z(M)$ için

$$|H_T(\pi) - H'_T(\pi)| = |H_T(\pi) P_T - H'_T(\pi) P_T| = |H_T(\pi) - H'_T(\pi)| \cdot P_T = P_T |H_T(\pi) - H'_T(\pi)|$$

dır.

Ayrıca $|TH_T(\pi) - TH'_T(\pi)| = |\pi T - \pi T| = 0$ olduğundan $|T| |H_T(\pi) - H'_T(\pi)| = 0$ yani $|H_T(\pi) - H'_T(\pi)|(L) \subseteq N_T$ olur. P_T , C_T ye karşılık gelen projeksiyon

olduğundan $P_T |H_T(\pi) - H'_T(\pi)| = 0$ elde edilir. Böylece $|H_T(\pi) - H'_T(\pi)| = 0$ elde edilirki bu $H_T(\pi) = H'_T(\pi)$ demektir.

Herhangi bir $\pi \in Z(M)$ için $\pi = \pi_1 - \pi_2$, $\pi_1, \pi_2 \geq 0$ olarak yazılabileceğinden

$$H_T : Z(M) \rightarrow Z(L)$$

$$\pi \rightarrow H_T(\pi) = H_T(\pi_1) - H_T(\pi_2)$$

biçiminde tanımlı H_T operatörü isteneni sağlar.

(ii) Her $\pi \in Z(M)$ için

$$L_\pi : L_n(L, M) \rightarrow L_n(L, M) \quad \text{ve} \quad R_{h(\pi)} : L_n(L, M) \rightarrow L_n(L, M)$$

$$T \rightarrow L_\pi(T) = \pi.T \quad T \rightarrow R_{h(\pi)}(T) = T.h(\pi)$$

biçiminde tanımlı operatörlerin $Orth(L_n(L, M))$ de olduğu bilinmektedir

Teorem 2.6.6. gereği her ortomorfizma sıra sürekli olduğundan ve

$$\{T \in L_n(L, M) : \pi T = Th(\pi), \text{ her } \pi \in Z(M)\} = Ker(L_\pi - R_{h(\pi)})$$

olacağından $\{T \in L_n(L, M) : \pi T = Th(\pi), \text{ her } \pi \in Z(M)\}$ kümesi $L_n(L, M)$ içinde banddır. Hipotezden her $\pi \in Z(M)$ için $\pi|T| = |T|h(\pi)$ olur. Şimdi $0 \leq u \in L$ ve $0 \leq w \leq |T|(u)$ alalım. Teorem 2.6.9. gereği M Dedekind tam olduğundan $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi(|T|(u)) = w$ olacak şekilde $\pi \in Z(M)$ vardır. $\pi|T| = |T|h(\pi)$ ve $0 \leq h(\pi) \leq h(I) \leq I$ olmasından $0 \leq h(\pi)(u) \leq u$ ve $|T|(h(\pi)(u)) = w$ olur ki bu $|T|$ nin aralık koruyan olması demektir.

L ve M Arşimedyan Riesz uzayları M Dedekind tam ve $h : Z(M) \rightarrow Z(L)$ bir f -cebir homomorfizmi olsun.

$$L_n^h(L, M) = \{T \in L_n(L, M) : \pi T = Th(\pi), \forall \pi \in Z(M)\}$$

olarak tanımlayalım.

4.4. Lemma:

$L_n^h(L, M)$, $L_n(L, M)$ içinde banddır [3].

İspat:

$\pi \in Orth(M)$ ve $\sigma \in Orth(L)$ için $L_\pi, R_\sigma \in Orth(L_n(L, M))$ operatörlerini $L_\pi(T) = \pi T$ ve $R_\sigma(T) = T\sigma$ ile sırasıyla tüm $T \in L_n(L, M)$ için tanımlayalım. Sonra $L_n^h(L, M) = \cap \left\{ \ker(L_\pi - R_{h(\pi)}) : \pi \in Orth(M) \right\}$ dir.

Her hangi ortomorfizmanın çekirdeği bir band olduğundan, Teorem 2.6.8. gereği $L_n^h(L, M)$ nin $L_n(L, M)$ de bir band olduğunu görebiliriz. Şimdi bunu gösterelim.

$$A = \{T \in L_n(L, M) : \pi T = Th(\pi), \forall \pi \in Z(M)\}$$

$$B = \cap \left\{ \ker(L_\pi - R_{h(\pi)}) : \pi \in Orth(M) \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. $T \in A$ olsun. Bu durumda her $\pi \in Orth(M)$ için $\pi T = Th(\pi)$ dir.

$$\begin{aligned}
\pi T = Th(\pi) &\Leftrightarrow \pi T - Th(\pi) = 0 \\
&\Leftrightarrow (L_\pi - R_\sigma)(T) = 0 \\
&\Leftrightarrow T \in \ker(L_\pi - R_{h(\pi)}) \\
&\Leftrightarrow T \in \cap \left\{ \ker(L_\pi - R_{h(\pi)}) \right\} \\
&\Leftrightarrow T \in B
\end{aligned}$$

olduğundan ispat biter.

4.5. Sonuç:

L ve M Dedekind tam Riesz uzayları $T \in L_n(L, M)$ bir Maharam operatör ise, tüm $S \in \{T\}^{dd}$ operatörleri Maharam'dır [3].

İspat:

Önerme 4.3. (i) deki T ilişkisi ile $h = h_T$ f -cebir homomorfizmasını alalım. Buradan $T \in L_n^h(L, M)$ dir. $L_n^h(L, M)$ Lemma 4.4. den bir band olduğu için, $\{T\}^{dd} \subseteq L_n^h(L, M)$ dir. Buradan Önerme 4.3. (ii) den $L_n^h(L, M)$ deki tüm operatörler Maharamdır.

4.6. Lemma:

L ve M Dedekind tam Riesz uzayı $h: Z(M) \rightarrow Z(L)$ bir f -cebir homomorfizmi, $S, T \in L_n^h(L, M)$ ve $S \wedge T = 0$ olsun $0 \leq u \in L$, $0 \leq w \in M$ ve $Tu \in \{w\}^{dd}$ iken $0 \leq v \leq u$ ve $Tv + S(u - v) \leq w$ olacak şekilde $v \in L$ vardır [3].

İspat:

$$A = \{Q \in P(M) : Q[Tv + S(u - v)] \leq w \text{ ve } 0 \leq v \leq u \text{ olacak şekilde } v \in L \text{ var dır}\}$$

olarak tanımlayalım. $I \in A$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Önce herhangi bir $0 \neq P \in P(M)$ için $Q \leq P$ olacak şekilde $Q \in A$ nin var olduğunu gösterelim.

$Pw = 0$ ise $Tu \in \{w\}^{dd}$ olduğundan $PTu = 0$ olur. $v = u$ alırsak $P \in A$ bulunur. Yani aranan Q , P nin kendisidir. Şimdi $Pw > 0$ olsun. Hipotezden $0 = (S \wedge T)(u) = \inf \{Tv + S(u - v) : 0 \leq v \leq u, v \in L\} < Pw$ olur. Buradan $0 \leq v \leq u$ ve $z = \{Pw - [Tv + S(u - v)]\}^+ > 0$ olacak şekilde $v \in L$ vardır. Olmadığını varsayalım. Yani $0 \leq v \leq u$ için $\{Pw - [Tv + S(u - v)]\}^+ = 0$ olsun. ($x^+ \geq 0$ olduğundan ya $x^+ = 0$ ya da $x^+ > 0$ dır.) Böylece

$$\begin{aligned} (Pw - [Tv + S(u - v)]) \vee 0 = 0 &\Rightarrow Pw - [Tv + S(u - v)] \leq 0 \\ &\Rightarrow Pw \leq Tv + S(u - v) \\ &\Rightarrow Pw \leq \inf \{Tv + S(u - v) : 0 \leq v \leq u\} \\ &\Rightarrow Pw \leq 0 \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Q , $\{z\}^{dd}$ nin üzerine band projeksiyon olsun. $z \neq 0$ olduğundan $Q \neq 0$ dır. Ayrıca $Pw - [Tv + S(u - v)] \leq Pw$ ve $0 < Pw$ olduğundan $\{Pw - [Tv + S(u - v)]\}^+ \leq Pw$ yani $z \leq Pw$ olur. Öyleyse z nin ürettiği band projeksiyon Pw nin ürettiği band projeksiyondan küçük eşittir (Teorem 2.4.11.). Buradan $Q \leq P_{P(w)} \leq P$ bulunur.

$$\begin{aligned}
Q(Pw - [Tv + S(u - v)]^-) = 0 &\Rightarrow Q[-(Pw - [Tv + S(u - v)]) \vee 0] = 0 \\
&\Rightarrow Q[Tv + S(u - v) - (Pw)] \vee Q(0) = 0 \\
&\Rightarrow [Q(Tv + S(u - v)) - Q(Pw)] \vee 0 = 0 \\
&\Rightarrow Q(Tv + S(u - v)) \leq Q(Pw) \leq Pw \leq w
\end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $Q \in A$ dır.

Eğer $\{Q_\alpha : \alpha \in \wedge\} \subseteq A$ dik sistem ise $\bigvee_\alpha Q_\alpha \in A$ olduğunu gösterelim. $Q_\alpha \in A$ ise $0 \leq v_\alpha \leq v$ ve $Q_\alpha[Tv_\alpha + S(u - v_\alpha)] \leq w$ olacak şekilde $(v_\alpha) \subseteq L$ vardır. $v_\alpha \leq v$ ve $h(Q_\alpha) \leq I$ olmasından $h(Q_\alpha)v_\alpha \leq v$ olur. L Dedekind tam olduğundan $v = \bigvee_\alpha h(Q_\alpha)v_\alpha$ vardır. h f -cebir homomorfizmi olduğundan dikliği korur. Dolayısıyla $\{h(Q_\alpha) : \alpha \in \wedge\}$, $P(L)$ içinde bir dik sistemdir. Herhangi bir $\beta \in \wedge$ için

$$\begin{aligned}
h(Q_\beta)v &= h(Q_\beta)\left(\bigvee_\alpha h(Q_\alpha)v_\alpha\right) \\
&= \bigvee_\alpha h(Q_\beta)h(Q_\alpha)v_\alpha
\end{aligned}$$

dır. $\alpha \neq \beta$ için $h(Q_\beta)h(Q_\alpha) = 0$ olacağından $h(Q_\beta)v = h(Q_\alpha)v_\alpha$ olur. Buradan her $\alpha \in \wedge$ için

$$\begin{aligned}
Q_\alpha[Tv + S(u - v)] &= Th(Q_\alpha)v + S[h(Q_\alpha)u - h(Q_\alpha)v_\alpha] \\
&= Q_\alpha[Tv_\alpha + S(u - v_\alpha)] \leq w
\end{aligned}$$

bulunur. α üzerinden supremum alınırsa $\bigvee_\alpha Q_\alpha \in A$ olduğu görülür. Şimdi $\{Q_\alpha\}$, A da maksimal dik sistem ise ispatın ilk kısmı da göz önüne alınırsa $\{Q_\alpha\}$, $P(M)$ içinde maksimal dik sistemdir. $\bigvee_\alpha Q_\alpha = I$ ve $\bigvee_\alpha Q_\alpha \in A$ olduğu düşünülürse $I \in A$ elde edilir.

4.7. Önerme (Genelleştirilmiş Nakano Teoremi):

L ve M Arşimedyan Riesz uzayı M Dedekind tam, $h : Z(M) \rightarrow Z(L)$ bir f -cebir homomorfizmi olsun. $S, T \in L_n^h(L, M)$ için $S \perp T$ olması için gerek ve yeter koşul $C_S \perp C_T$ olmasıdır [3].

İspat:

($\Leftarrow$) Herhangi iki sıra sürekli operatörler için sağlanır. Gerçekten $C_S \perp C_T$, $C_S \subseteq N_T$ olmasını gerektirir. Ve böylece $|S| \wedge |T|$ sıra sürekli operatörü $C_S \oplus N_S$ sıra yoğun ideali üzerinde kaybolur. Böylece $|S| \wedge |T| = 0$ dır. Dolayısıyla $S \perp T$ dir.

($\Rightarrow$) $S \perp T$ olduğunu varsayalım. $C_S = C_{|S|}$ olduğundan $S, T \geq 0$ alınabilir. Önce L nin Dedekind tam olduğunu varsayalım. $0 \leq u \in C_T$ ve $Tu = w$ alalım.

$$Tu \in \left\{ \frac{w}{2} \right\}^{dd} \Rightarrow \exists v_1 \in L : 0 \leq v_1 \leq u \text{ ve } Tv_1 + S(u - v_1) \leq \frac{w}{2}$$

$$Tu \in \left\{ \frac{w}{2^2} \right\}^{dd} \Rightarrow \exists v_2 \in L : 0 \leq v_2 \leq u \text{ ve } Tv_2 + S(u - v_2) \leq \frac{w}{2^2}$$

.....

$$Tu \in \left\{ \frac{w}{2^n} \right\}^{dd} \Rightarrow \exists v_n \in L : 0 \leq v_n \leq u \text{ ve } Tv_n + S(u - v_n) \leq \frac{w}{2^n}$$

olacak şekilde $(v_n) \subseteq L$ dizisi vardır. $z_n = \sup\{v_k : k \geq n\}$ diyelim ($v_k \leq u$ ve L Dedekind tam olduğundan $z_n \in L$ vardır.). T sıra sürekli ve

$Tv_n \leq Tv_n + S(u - v_n) \leq 2^{-n} w$ olduğu düşünülürse $0 \leq Tz_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} w = 2^{-n+1} w$ elde

edilir. Şimdi $z = \inf_n z_n$ alalım. $z_n \downarrow z$ olduğu ve T sıra sürekli olduğundan $Tz_n \downarrow Tz$

ve böylece $Tz = 0$ bulunur. $0 \leq z \leq u$ olması $z \in C_T$ olmasını gerektirir ki C_T nin tanımından $z = 0$ yani $z_n \downarrow 0$ elde edilir. Bu ise $0 \leq u - z_n \uparrow u$ demektir. S sıra sürekli olduğundan $S(u - z_n) \uparrow Su$ dur. $0 \leq S(u - z_n) \leq S(u - v_n) \leq 2^{-n}w$ olduğu göz önüne alınırsa $Su = 0$ yani $u \in N_S$ bulunur. Öyleyse $C_T \subseteq N_S$ dir. Bu da isteneni verir.

L nin genel durumu için bakalım. $\hat{L}$, L nin Dedekind tamlaması olsun(s.96, [1]). $L_n(L, M)$ nin her bir R operatörü $L_n(\hat{L}, M)$ içine düşecek şekilde bir tek $\hat{R}$ genişlemesine sahiptir(s.7, [1]). Bunun yardımıyla $L_n(L, M)$ den $L_n(\hat{L}, M)$ içine bir Riesz homomorfizmi tanımlanabilir. Benzer şekilde $\pi \in Z(L)$ için bir tek $\hat{\pi} \in Z(\hat{L})$ genişlemesi vardır(s.112, [1]). Yani $Z(L)$ den $Z(\hat{L})$ içine f -cebir homomorfizması tanımlanabilir. Böylece $h: Z(M) \rightarrow Z(\hat{L})$ f -cebir homomorfizmi vardır. $R \in L_n(L, M)$ için $N_R = N_{\hat{R}} \cap L$ ve $C_R = C_{\hat{R}} \cap L$ olduğunu görmek kolaydır. O halde $S, T \in L_n^h(L, M)$ ve $S \perp T$ alırsak $\hat{S} \perp \hat{T}$ olması ve ispatın ilk kısmından $C_{\hat{S}} \perp C_{\hat{T}}$ olacağından $C_S \perp C_T$ elde edilir.

4.8. Sonuç:

Önerme 4.7. den $M = \mathbb{R}$ alınırsa $Z(M) = Z(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ dir(s.119, [1], s.682. [5]).

$$\begin{aligned} h: Z(M) &\rightarrow Z(L) \\ \lambda &\rightarrow h(\lambda) = \lambda I \end{aligned}$$

alınırsa h f -cebir homomorfizmidir. $L_n^h(L, M) = L_n^-$ olduğu göz önüne alınırsa daha önceden verilen Nakano Teoremi elde edilir. Yani Önerme 4.7. Nakano Teoremi'nin bir genellemesidir.

5. SONUÇ

H. Nakano pozitif lineer fonksiyonellerde Nakano Teoremi'ni ispatlamıştır. Biz ise bu çalışmada herhangi iki operatör için Nakano Teoremi'nin niye sağlanmadığına örnek verip, hangi koşullar altında herhangi iki operatör için sağlandığını makale yardımıyla inceleyip elde ettik.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D. Burkhinshaw, O., “*Positive Operators*”, **Academic Press**, Orlando, 2–13, 17, 29–35, 55–57, 88, 96, 106, 112–114, 119 (1985).
2. Aliprantis, C.D. Burkhinshaw, O., “*Principles of Real Analysis*”, **Academic Press**, London, 135, (1990)
3. Luxemburg, W.A.J and De Pagter, B., “*Maharam extensions of positive operators and f -modules*”, **2002 Kluwer Academic Publishers.**, Printed in the Netherlands, 147–190, positivity 6: 147–155 (2002).
4. Zaanen, A.C., “*Riesz Spaces I*”, **North-Holland Publ. Co.**, Amsterdam, 4, 171 (1971).
5. Zaanen, A.C., “*Riesz Spaces II*”, **North-Holland Pub. Co.**, Amsterdam, 658, 663, 667, 682 (1983).
6. Nakano, H., “*Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*”, **Maruzen Publ. Co.**, 74 (1950)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DEMİR, Ahmet
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 29.09.1982 Kütahya
 Medeni hali : Bekar
 e-mail : ahmetdemir43@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Tezsiz Y. Lisans	Dumlupınar Üniv. / Matematik Öğr.	2005
Lisans	Dumlupınar Üniv. / Matematik Bölümü	2004
Lise	Kütahya Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003–2005	Tavşanlı Boğaziçi Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2005–2006	Kütahya Kavram Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2006–2007	Kocaeli Çağdaş Eğitim Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2007–	Kütahya Ahmet ÖZTÜRK Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Müzik