

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**NANO BOYUTLU KİRİŞLERİN BOYUT ETKİSİNE BAĞLI EĞİLME
ANALİZİ**

Merve Nur ÇAYIRLI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MART 2020

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**NANO BOYUTLU KİRİŞLERİN BOYUT ETKİSİNE BAĞLI EĞİLME
ANALİZİ**

Merve Nur ÇAYIRLI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MART 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NANO BOYUTLU KİRİŞLERİN BOYUT ETKİSİNE BAĞLI EĞİLME
ANALİZİ

Merve Nur ÇAYIRLI
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 20/03/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Doç. Dr. Mehmet AVCAR

Doç. Dr. İbrahim AYDOĞDU

ÖZET

NANO BOYUTLU KİRİŞLERİN BOYUT ETKİSİNE BAĞLI EĞİLME ANALİZİ

Merve Nur ÇAYIRLI

Yüksek Lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Mart 2020; 61 sayfa

Bu çalışmada nano ölçekli kirişlerin yayılı yük ve tekil yük altında statik eğilmesi araştırılmıştır. Nano ölçekli yapıların mekanik davranışlarında klasik elastisite teorisinin kullanılamayacağı deneysel çalışmaların bir sonucudur. Bu nedenle boyut etkisini içeren yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri kullanılarak statik davranış araştırılmıştır. Kullanılan teoriler yerel olmayan elastisite, değiştirilmiş gerilme çifti, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi ve yüzey enerjisidir. Buna göre, farklı teoriler için kirişlerin çökme denklemleri oluşturulmuştur. Farklı teorilerin etkisi altında deplasman değerleri sunulmuş ve bu sayısal sonuçlar tartışılmıştır.

Çalışmanın sonucu olarak, boyut etkisinin nano ölçekli yapıların statik analizi için göz önünde bulundurulması gereken bir faktör olduğu anlaşılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Boyut etkisi, Değiştirilmiş gerilme çifti, Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi, Deplasman, Nanokiriş, Statik eğilme, Yerel olmayan elastisite teorisi, Yüzey enerjisi

JÜRİ: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Doç. Dr. Mehmet AVCAR

Doç. Dr. İbrahim AYDOĞDU

ABSTRACT

SIZE-DEPENDENT BENDING ANALYSIS OF NANO SCALED BEAMS

Merve Nur ÇAYIRLI

MSc. Thesis in Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

March 2020; 61 pages

In this study, static bending of nano scaled beams under distributed/point load has been investigated. It is the result of the experimental studies in which the classical theory of elasticity cannot be used in the mechanical behavior of nano-scale structures. For this reason, static behavior has been investigated by using higher-order continuum theories involving the size effect. The theories used are non-local elasticity, modified couple stress, modified strain gradient and surface energy. Accordingly, the displacement equations of beams have been obtained for different higher-order continuum theories. Displacement values have been presented under the influence of different theories and these numerical results have been discussed.

As a result of the study, it has been understood that the size effect is a factor to be considered for the static analysis of nano scaled structures.

KEYWORDS: Displacement, Size effect, Static bending, Surface energy, Modified couple stress, Modified strain gradient, Nano beam, Nonlocal elasticity.

COMMITTEE: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Assoc. Prof. Dr. Mehmet AVCAR

Assoc. Prof. Dr. İbrahim AYDOĞDU

ÖNSÖZ

Günümüzde insanların kullanmakta olduğu alet, teçhizat ve ürünlere baktığımız zaman bu ürünlerin oldukça güçlü özelliklere sahip olduğunu görmekteyiz. Teknolojide son nokta olarak nitelendirebileceğimiz bu alet, teçhizat ve ürünler nanoteknoloji denilen küçük ölçekli malzeme teknolojisinin bulguları sonucunda daha güçlü ve donanımlı özelliklerine kavuşmuştur. Örneğin mikroişlemciler, çipler, alan etkili transistörler, kendini temizleyen yüzeyler, nano işlenmiş beton ve çelik, nano katkılı kompozitler atomik ölçek teknolojisinin günümüzdeki uygulamaları olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tabi atomik ölçekli malzemelerin yer aldığı sistemlerin dış etkiler altındaki çalışma düzeni oldukça önemlidir. Bunun için dış etmenleri karşılayacak eksiksiz bir tasarım yapılması şarttır. Uygun ve eksiksiz tasarımın da koşulu, en temelde belirli fiziksel kurallara göre bir hesap yapmaktır. Deneysel yöntemler yardımıyla atomik ölçekteki yapılar için dış etkiler altında hesap yapmanın oldukça fazla dezavantaj içeren bir durum olduğu bilinmektedir. Bu nedenle araştırmacılar analitik yöntemleri, daha teknik bir tabirle elastisite teorilerini kullanarak atomik yapıları ele almışlardır. Ancak deneysel yöntemlerin bir sonucuna göre, klasik elastisite teorisi ile yapılara yaklaşmanın gerçekçi sonuçlar vermemesi gerçeği de göz önünde bulundurulduğundan, elastisite teorileri, malzemenin küçük uzunluk etkisi ve yüzey gerilmelerini kapsayacak şekilde geliştirilmiştir. Bu formülasyonlar kullanılarak atomik ölçekli yapıların mekanik analizlerinde boyut etkisi ve yüzey gerilmelerinin önemi literatürde yoğun bir araştırma konusu olmuştur.

Bu tez çalışmasında nano ölçekli kirişlerin çeşitli yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri kullanılarak statik eğilme analizleri gerçekleştirilmiştir. Farklı parametreler altında kirişlerin deplasman parametreleri hesaplanmıştır ve deplasmanlar üzerinde bu elastisite teorilerinin etkileri araştırılmıştır.

Son olarak, yüksek lisans eğitimim boyunca bilimsel anlamda büyük katkılarını gördüğüm değerli danışman hocam Prof. Dr. Ömer CİVALEK'e teşekkür ederim. Ayrıca bana büyük destek veren anneme, babama ve arkadaşlarıma en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
AKADEMİK BEYAN	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ixx
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Nanoteknoloji	3
2.2. Nanoteknolojinin Kronolojisi.....	4
2.3. Nanoteknolojinin Uygulamaları	6
2.3. Karbon Nanotüpler	7
2.4. Yüksek Mertebeden Sürekli Ortam Teorileri.....	8
3. MATERYAL VE METOT	10
3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi	10
3.2. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi.....	14
3.3. Yüzey Enerjisi Elastisite Teorisi.....	18
3.3.1. Yüzey enerjili Timoshenko kiriş modeli	21
3.3.2. Yüzey enerjili Euler–Bernoulli kiriş modeli.....	23
3.4. Kirişlerin Boyut Etkisine Bağlı Statik Analizi	25
3.4.1. Yerel olmayan elastisite teorisi.....	25
3.4.2. Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi	26
3.4.3. Yüzey enerjili elastisite teorisi	27
3.4.3.1. Euler-Bernoulli kirişi için statik analiz	27
3.4.3.2. Timoshenko kirişi için statik analiz	30
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	38
4.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ile Eğilme Analizi	38
4.2. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi İle Eğilme Analizi ..	48
4.3. Yüzey Enerjili Elastisite Teorisi İle Eğilme Analizi	54
5. SONUÇLAR	59

6. KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	



AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Nano Boyutlu Kirişlerin Boyut Etkisine Bağlı Eğilme Analizi” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

23/03/2020

Merve Nur ÇAYIRLI

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

a	: Malzeme karakteristik iç uzunluğu
A	: Kesit alan
c_i	: Belirsiz integral sabiti ($i=1,2,3,4$)
e_0	: Malzeme sabiti
e_{ijk}	: Permütasyon sembolü
H	: Kiriş yüksekliği
I^*	: Çevresel atalet momenti
l	: Malzeme karakteristik dış uzunluğu
l_i	: İlave malzeme boyut ölçek parametreleri ($i=0,1,2$)
M	: Eğilme momenti
P	: Tekil yük
Q	: İç kayma kuvveti
q	: Yayılı yük
T_x, T_z	: Yüzey çekimleri
U	: İç enerji
$\ddot{u}_i^s$	: Yüzey hızlanması
V	: Kesme kuvveti
W	: Dış enerji
w	: Çökme
x, z	: Koordinat
γ_i	: Dilatasyon değişimi vektörü
δ_{ij}	: Kronecker delta sembolü
ε_{ij}	: Şekil değiştirme tansörü

$\eta_{ijk}^{(1)}$	: Deviatorik uzama değişimi tansörü
θ_i	: Dönme bileřeni
μ_0, λ_0	: Yüzey Lamé Sabitleri
ν	: Poisson oranı
Π	: Toplam potansiyel
ρ	: Kütle yoğunluğu
τ_{ij}	: Yerel olmayan gerilme
σ_{ij}	: Klasik gerilme
$\sigma_{zz}^+, \sigma_{zz}^-$	: Yüzey gerilmeleri
σ_{xx}	: Eksenel gerilme
ϕ	: Açısal yer değiştirme
χ_{ij}^s	: Simetrik dönme değişimi tansörü

Kısaltmalar

ABD	: Amerika Birleşik Devletleri
AFM	: Atomik Kuvvet Mikroskobu
DGÇ	: Değiştirilmiş Gerilme Çifti
DNA	: Deoksiribonükleik asit
DŞDD	: Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi
nm	: Nanometre

Bu tez çalışmasında sayıların ondalık kısmını ayırmak için nokta işareti (.) kullanılmıştır.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Nanoteknoloji biliminin çalışma alanına giren yapı boyutlarının tasvir edilmesi ve makro ölçekle kıyaslanması (Saallah ve Lenggoro, 2017)	3
Şekil 2.2. Nanoteknoloji kullanılarak üretilen yapılarda üretim yaklaşımlar (Pareek vd. 2017)	4
Şekil 2.3. Fullerene molekülünün şematik gösterimi (Anonymous 1)	5
Şekil 2.4. Ksenon atomları ile yazılmış IBM yazısı (Anonymous 2)	5
Şekil 2.5. Alan etkili karbon nanotüp transistörün genel şeması (Jaiswal ve Singh 2015)	6
Şekil 2.6. Nano araba modeli (a) Modelin tasviri (Anonymous 3) (b) Molelökler gösterim (Anonymous 4)	6
Şekil 2.7. (a) Grafen katman (Anonymous 5) (b) Tek duvarlı karbon nanotüp gösterim (Razali vd. 2016) (c) Çok duvarlı karbon nanotüp (Razali vd. 2016).....	7
Şekil 2.8. Karbon nanotüplerin sarılma doğrultusuna bağlı olarak farklı konfigürasyonları (Anonymous 6)	8
Şekil 2.9. Silika karbit nanotüp yapısının atomik şeması (Alam ve Ray 2007)	8
Şekil 3.1. Düzgün olmayan yayılı yüke maruz kiriş ve bu kirişten alınan sonsuz küçük uzunluktaki parçacığın serbest cisim diyagramı	11
Şekil 3.2. Kiriş kesitine ait serbest cisim diyagramı.....	19
Şekil 3.3. Nanotüpe ait gerçek, klasik model ve yüzey enerjisine göre modellenmiş gösterimi.....	21
Şekil 3.4. Üniform yayılı yüke maruz her iki ucu basit mesnetli nanokiriş.....	25
Şekil 4.1. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin maksimum deplasmanlarının kiriş uzunluğuna göre değişimi ($e_0a/L=0$).....	41
Şekil 4.2. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin maksimum deplasmanlarının kiriş uzunluğuna göre değişimi ($e_0a/L=0.2$).....	42
Şekil 4.3. Nanokirişlerin çeşitli e_0a/L değerlerindeki maksimum deplasmanlarının kiriş uzunluğuna göre değişimi ($q=0.1$ nN/nm)	42
Şekil 4.4. Nanokirişlerin çeşitli kiriş uzunluklarında maksimum deplasmanlarının e_0a/L 'ye göre değişimi ($q=0.2$ nN/nm)	43
Şekil 4.5. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin maksimum deplasmanlarının e_0a/L 'ye göre değişimi ($L=50$ nm)	43

Şekil 4.6. Nanokirişlerin çeşitli kiriş uzunluklarında maksimum deplasmanlarının q 'ya göre değişimi ($e_0a/L=0$)	44
Şekil 4.7. Nanokirişlerin çeşitli kiriş uzunluklarında maksimum deplasmanlarının q 'ya göre değişimi ($e_0a/L=0.1$)	44
Şekil 4.8. Nanokirişlerin çeşitli e_0a/L değerlerindeki maksimum deplasmanlarının q 'ya göre değişimi ($L=100\text{ nm}$)	45
Şekil 4.9. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin yapacağı çökme diyagramı ($L=100\text{ nm}$, $e_0a/L=0.1$)	45
Şekil 4.10. Nanokirişlerin çeşitli e_0a/L değerlerinde yapacağı çökme diyagramı ($L=100\text{ nm}$, $q=0.2\text{ nN/nm}$)	46
Şekil 4.11. Çeşitli uzunluklulara sahip nanokirişlerin yapacağı çökme diyagramı ($q=0.2\text{ nN/nm}$, $e_0a/L=0.1$)	46
Şekil 4.12. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin eğilme momenti diyagramı ($L=100\text{ nm}$)	47
Şekil 4.13. Çeşitli uzunluklardaki nanokirişlerin eğilme momenti diyagramı ($q=0.1\text{ nN/nm}$)	47
Şekil 4.14. Düzgün yayılı yük etkisi altındaki silikon karbit nano çubuğun farklı l/D değerleri için deplasman dağılımı ($q = 1\text{ nN/nm}$, $L = 30D$)	50
Şekil 4.15. Sinüzoidal yük etkisi altındaki silikon karbit nano çubuğun farklı l/D değerleri için deplasman dağılımı ($q = 1\text{ nN/nm}$, $L = 30D$)	51
Şekil 4.16. Orta noktasına tekil yük etkileyen silikon karbit nano çubuğun farklı l/D değerleri için deplasman dağılımı ($P = 100\text{ nN}$, $L = 30D$)	51
Şekil 4.17. Düzgün yayılı yük altında meydana gelen en büyük deplasman değerinin l/D oranına göre değişimi ($q = 0.1\text{ nN/nm}$, $L = 25D$)	52
Şekil 4.18. Sinüzoidal yük altında meydana gelen en büyük deplasman değerinin l/D oranına göre değişimi ($q = 0.1\text{ nN/nm}$, $L = 25D$)	53
Şekil 4.19. Orta noktasından tekil yüke maruz nano çubukta meydana gelen en büyük deplasman değerinin l/D oranına göre değişimi ($P = 2.5\text{ nN}$, $L = 25D$)	53
Şekil 4.20. Ankastre mesnetlenmiş, boştaki ucundan tekil 1 nN 'luk yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği	54
Şekil 4.21. Ankastre mesnetlenmiş, 1 nN/nm 'lik düzgün yayılı yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği	55

Şekil 4.22. Basit mesnetlenmiş, açıklık ortasından tekil 1 nN'luk yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği	56
Şekil 4.23. Basit mesnetlenmiş, düzgün yayılı 1 nN/nm'lik yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği	56
Şekil 4.24. Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş, açıklık ortasından 1 nN'lük yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği	57
Şekil 4.25. Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş, düzgün yayılı 1 nN/nm'lik yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Statik analizde kullanılan parametreler	38
Çizelge 4.2. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=50$ nm)	38
Çizelge 4.3. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=75$ nm)	39
Çizelge 4.4. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=100$ nm)	39
Çizelge 4.5. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=125$ nm)	40
Çizelge 4.6. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=150$ nm)	40
Çizelge 4.7. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli L ve q değerlerinde oluşan maksimum momentleri (nN-nm)	41
Çizelge 4.8. Boyutsuz en büyük deplasman değerlerinin ($\bar{w} = 100w \left(\frac{L}{2}\right) EI/(qL^4)$; ve $\bar{w} = 100w \left(\frac{L}{2}\right) EI/(PL^3)$) karşılaştırılması	49
Çizelge 4.9. Çeşitli yükleme durumlarına ait en büyük deplasman değerlerinin (nm) D/l oranına bağlı olarak değişimi ($q = 1$ nN/nm, $L = 20D$).....	49

1. GİRİŞ

Günümüz teknolojisinin hızlı gelişmesine paralel olarak, insanların yaşam standartlarının ve gündelik hayattan beklentilerinin de yükseldiği belirtilebilir. Bu standartları ve beklentileri karşılayabilmek adına, insanların günümüzde kullanmakta olduğu ürünlerin öncekilerine göre daha güçlü özelliklere sahip oldukları belirtilebilir. Örneğin, günümüzde elektronik ortamda bilgi depolanması ve işlenmesine her zamankinden daha çok ihtiyaç duyulmaktadır. Devam etmeden önce eskiye dönelim: Eskiden, bir ev odası büyüklüğünde bilgisayarlarla bilgi depolanmaktaydı. Bilginin işlenmesi ise saatler belki günler sürmekteydi. Özellikle endüstri alanında yazılan bir bilgisayar programından çıktı alabilmek uzun sürmekteydi. Çalışanlar, mesai bitmeden önce programı çalıştırır ve en iyi ihtimalle o program ertesi gün gerekli çıktıları verirdi. Program kodunda yazım aşamasında yapılacak en ufak bir hata, büyük işlem maliyetlerine sebep olabilmekteydi. Günümüzde ise, en son teknoloji ürünü olan mikro işlemciler ve çipler gibi elektronik cihazlar sayesinde, bilgi depolama kabiliyeti yükselmiş, depolanabilecek bilginin yüksekliği artırılmış, işlemci hızları oldukça yükselmiş ve bilgisayar hacimleri çok düşük seviyelere gelmiştir.

Teknolojinin bu derece gelişmesinde, küçük ölçekli malzeme ve sistemlerin teknolojisi olan nanoteknoloji disiplindeki gelişmelerin ana rol oynadığını ifade edebiliriz. 20. Yüzyılda, atomik kuvvet mikroskobunun icadı ile atomik ölçekte gözlemlene teknolojisinde önemli bir gelişme yaşanmıştır. Aynı yüzyılın sonlarına doğru, karbon nanotüp malzemesinin keşfinin ve atomik ölçeğe inildiğinde malzemelerin çok daha güçlü özelliklerinin ortaya çıkması bilim adamlarının ilgisini çekmiştir. Bunlar gibi birçok gelişme ile, teknolojinin zirve yaptığı içinde bulunduğumuz çağın temeli atılmıştır.

Nano malzemelerin bileşen olarak yer aldığı sistemlerin (daha teknik bir ifadeyle nano-elektro-mekanik sistemler veya NEMS) beklentilerimizin karşılanabilmesi adına, stabil ve yüksek performanslı bir şekilde çalışma göstermesi için doğru ve optimum bir tasarımlarının gerçekleştirilmesi yüksek derecede önem taşımaktadır. Bilindiği üzere bir elemanın tasarım problemi, standart bir mühendislik problemidir. Tasarımcı mantığıyla, daha doğrusu mühendislik mantığıyla düşünüldüğünde, tasarımı yapılacak bu sistem elemanlarına elastisite teorisi temelli yaklaşmak gayet mantıklı bir fikirdir. Ancak, bilimsel çalışmaların sonucunda, atomik ölçeğe inildiğinde klasik fizik kurallarının geçersiz olduğu deneysel çalışmalar sayesinde anlaşılmıştır. Dolayısı ile klasik elastisite teorisi ile alınan sonuçların gerçekçi olmayacağı aşıkardır. Bunun sebebinin atomik ölçekli yapının iç karakteristik boyutlarının yapıya gelen dış kuvvetlerle alakası olduğu da deneysel çalışmaların bir diğer sonucudur.

Moleküler dinamik simülasyonu, küçük ölçekli yapıların hareketlerinin Newton denklemleri kullanılarak zaman alanında modellendiği yarı-deneysel bir yöntemdir. Ancak, çok yüksek hesaplama hacmi, yüksek hızda işlemci ve büyük uzmanlık gerektirmesi nedeniyle oldukça dezavantajlıdır. Bu nedenle bilim insanlarının değiştirilmiş elastisite yaklaşımlarına yöneldiği söylenebilir. Bu değiştirilmiş elastisite yaklaşımlarından en yaygınları yerel olmayan elastisite, değiştirilmiş gerilme çifti, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi ve yüzey enerjisidir. Değiştirilmiş elastisite yaklaşımları, nano ve mikro ölçekli malzemelerin, çeşitli dış etkiler altındaki titreşim, eğilme, burkulma, burulma gibi temel mekanik analizlerine uygulanmıştır. Böylece elde

edilen sonuçlar tasarım hakkında önemli bir fikir vermektedir. Bu tez çalışması da, nano ölçekli bir malzeme olan ve geniş bir uygulama alanına sahip silika karbir nanotüplerin yukarıda bahsedilen elastisite yaklaşımları kullanılarak statik eğilme analizini ele alacaktır. Statik eğilme analizi sonuçları farklı boyut etkileri için karşılaştırılacak ve detaylı tartışmalar verilecektir. Böylece atomik ölçekli yapıların statik eğilme davranışı anlaşılacaktır.

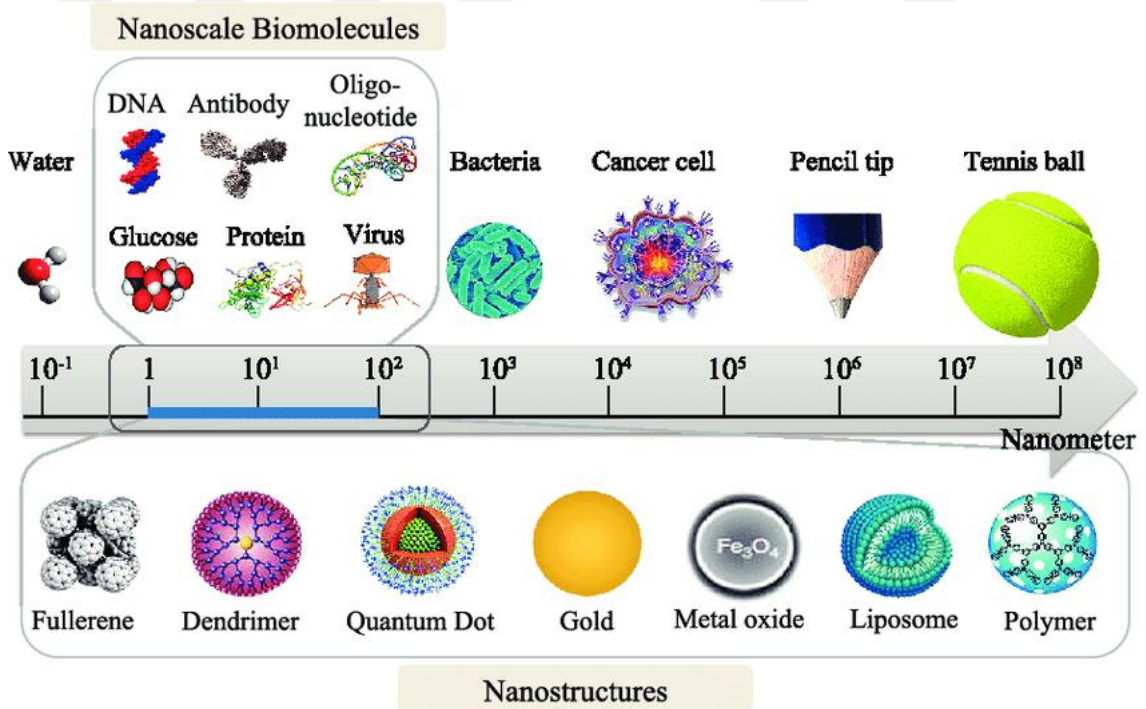


2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Nanoteknoloji

Oldukça küçük boyutlara sahip yapıların uzunlukları nanometre birimi ile ifade edilebilir. Nano kelimesi Yunanca cüce anlamına gelir ve teknik bir uzunluk birimi olan 1 nanometre (nm), metrenin milyarda birine eşittir. Nanoteknoloji ise, nano ve teknoloji kelimelerinin birleşimiyle oluşan ve günümüzde yeni bir bilimsel disiplini tanımlayan bir kavramdır. Bu disiplin ölçüleri 1 ile 100 nm arasında değişen malzeme ve sistemlerin özelliklerinin araştırılmasıyla ilgilenir. Örnek vermek gerekirse, 10 adet dizilmiş su molekülü toplamda 1 nm uzunluğundadır. 1 saç teli kalınlığı 10^5 nm ve karınca başı genişliği 10^6 nm boyutlarındadır. Bir tenis topu ise 10^8 nm çapındadır. Bunlara ek olarak nanoteknoloji biliminin çalışma alanının bir tasviri Şekil 2.1’de verilmiştir.

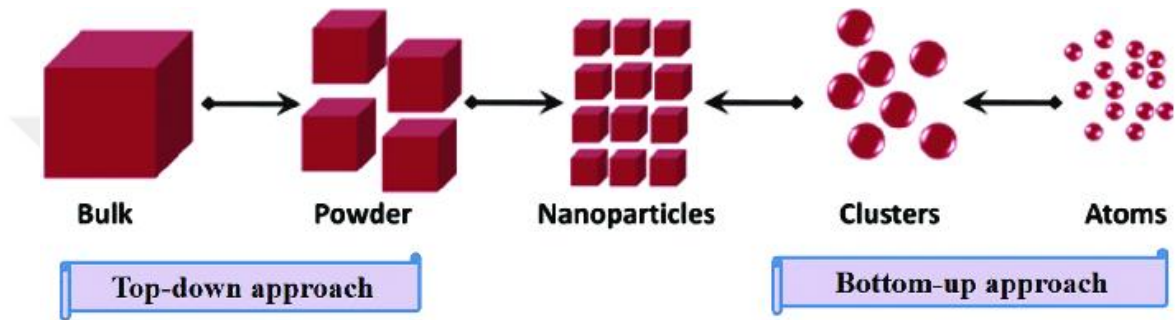
Atomik ölçekte gözlemleme teknolojisinin gelişimine bağlı olarak bu ölçekteki malzemelerin ilgi çektiği ve bu malzemelerin özelliklerinin keşfinin daha da kolaylaştığı belirtilebilir. Atomik ölçekteki malzemelerin bilinen malzemelere göre daha güçlü özelliklere sahip olmaktadır. İşte, nanoteknoloji bilimi, genel olarak nano ölçekli malzemeler ve bunların özellikleri ile ilgili olarak elde ettiği bulguları günümüzün klasik bilim dallarıyla birleştirir ve yenilikçi uygulamalara imza atar. Kendi kendini temizleyen yüzeyler, kanserli hücrelerle savaşan nanorobotlar, hastalık teşhisinde kullanılan biyosensörler, nano işlemciler, taramalı uç mikroskobu, nanoanahtarlar nanoteknoloji biliminin uygulamalarına örnektir.



Şekil 2.1. Nanoteknoloji biliminin çalışma alanına giren yapı boyutlarının tasvir edilmesi ve makro ölçekle kıyaslanması (Saallah ve Lenggoro, 2017)

Nanoteknoloji biliminin öneminin anlaşılması ile dünya genelinde bir çok ülke nanoteknoloji ile ilgili önemli harcamalar yapmış ve Ar-Ge çalışmalarını hızlandırmıştır. Bu açıdan ABD, Almanya, Japonya ve Güney Kore ülkeleri öne çıkmaktadır.

Nano ölçekte iki tür üretim yönteminden söz edilebilir. Bunlar aşağıdan yukarıya (bottom-up) ve yukarıdan aşağıya (top-down) yaklaşımlarıdır. Aşağıdan yukarıya yaklaşımı, nano sistemlerin atomlar ve moleküllerin bir araya getirilmesi ile sentezini tanımlarken yukarıdan aşağıya yaklaşımında makineler, teçhizatlar ve kimyasallar ile nano ölçekli yapıların oluşturulması söz konusudur. Bu üretim yöntemlerinin genel bir şeması Şekil 2.2.'de verilmektedir.

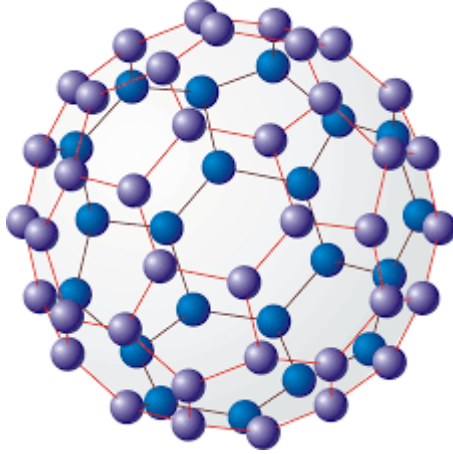


Şekil 2.2. Nanoteknoloji kullanılarak üretilen yapılarda üretim yaklaşımlar (Pareek vd. 2017)

2.2. Nanoteknolojinin Kronolojisi

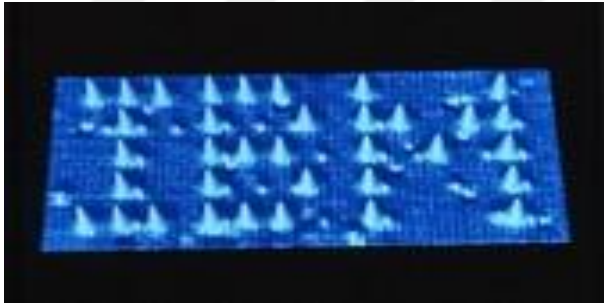
Nanoteknoloji biliminin gelişmesi ve günümüz için önemli bir bilim dalı olması sürecinde aşağıdaki kronolojik sıra sunulabilir.

- 1959: Richard Feynman, bir konferansta moleküler düzeyli makinaların imal edilmesinin yeni keşiflerin önünü açabileceğini belirtti. Bu fikir nanoteknolojinin ortaya çıkışına bir zemin hazırladı.
- 1974: Norio Taniguchi makalesinde nanoteknolojinin tanımını yaptı.
- 1981: Eric Drexler ilk nanoteknoloji makalesini yazdı.
- 1981: Gerd Binnig ve Heinrich Rohrer tarafından taramalı tünelleme mikroskopunu icat edildi.
- 1985: Robert Curl, Harold Kroto ve Richard Smalley karbon atomunun allotropu olan ve şekli futbol topuna benzediği için “buckyball” denilen fullerene molekülünü sentezlediler. Fullerene molekülünün genel bir şeması Şekil 2.3’te sunulmuştur.



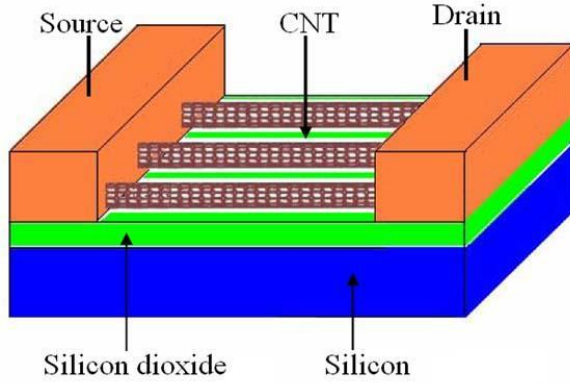
Şekil 2.3. Fullerene molekülünün şematik gösterimi (Anonymous 1)

- 1986: Binnig ve ekibi Atomik Kuvvet Mikroskopunu (AFM) keşfetti.
- 1987: İletkenliğin kuantum özelliği keşfedildi.
- 1988: Drexler, ilk nanoteknoloji dersini verdi.
- 1989: IBM şirketinden bilim adamı Don Eigler, ksenon atomları yardımıyla nikel plakaya “IBM” yazısını yazdı. Yazının genişliği milimetrenin 333 binde biri kadardır. Bu yazı Şekil 2.4’te resmedilmiştir.



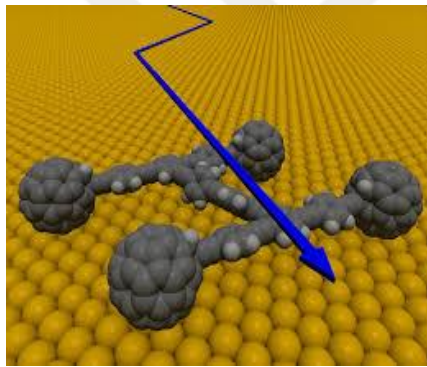
Şekil 2.4. Ksenon atomları ile yazılmış IBM yazısı (Anonymous 2)

- 1991: Japonyalı Sumio Iijima çok duvarlı karbon nanotüpleri keşfetti.
- 1993: Iijima ve Bethune tek duvarlı karbon nanotüpleri keşfetti.
- 1996: Rice Üniversitesinde lazer-buhar tekniği keşfedildi.
- 1997: N. Seedman DNA molekülü yardımıyla nano-mekanik bir cihaz icat etti.
- 1998: C. Dekker ve ekibi alan etkili karbon nanotüp transistörü keşfetti. Bu transistör Şekil 2.5’te resmedilmiştir.

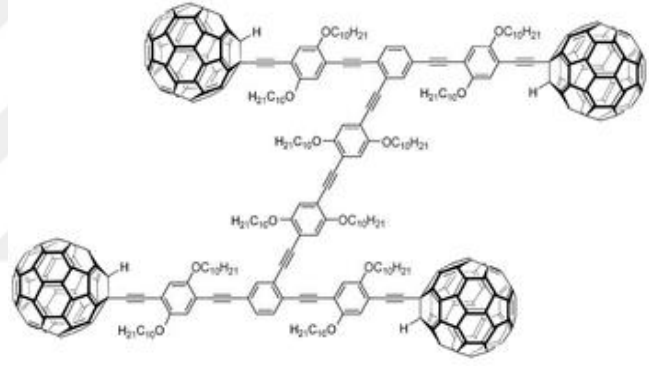


Şekil 2.5. Alan etkili karbon nanotüp transistörün genel şeması (Jaiswal ve Singh 2015)

- 1999: ABD hükümeti Ulusal Nanoteknoloji Adımı Programını başlattı.
- 2005: Rice Üniversitesi'nden araştırmacılar nanoaraba modelini hareket ettirdiler. Bu araba 3×4 nm boyutlarındadır ve Şekil 2.5'te görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 2.6. Nano araba modeli (a) Modelin tasviri (Anonymous 3) (b) Moleküler gösterim (Anonymous 4)

2.3. Nanoteknolojinin Uygulamaları

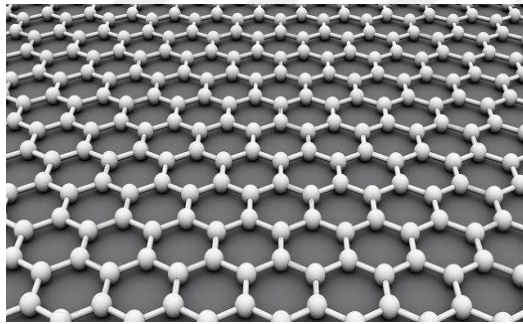
Nanoteknoloji disiplini, küçük ölçekli yapıların geleneksel malzemelere göre üstün olan özelliklerini, fen, matematik ve sosyal bilimler disiplinlerinin birçok uygulamasına entegre etmesiyle günümüzdeki yenilikçi uygulamalar ortaya çıkmaktadır. Aşağıda nanoteknoloji biliminin kendisi ile entegre bilim dallarından söz edilmektedir:

- **Malzeme:** Sistem ve cihazların imalatında daha kullanışlı metotların geliştirilmesine yoğunlaşmaktadır.
- **Havacılık ve Uzay:** Nano ölçekli yapıların daha hafif, daha az hacimli, daha yüksek sıcaklık dayanımı gibi özelliklerinden faydalanılarak yeni roket ve uzay istasyonlarının kurulması hedeflenmektedir.

- Tıp: Kanserle savaşan nanorobotlar, genetik hastalık ve hasarlı DNA zinciri teşhisi elektromekanik sistemlerle ele alınmaktadır.
- Çevre: Nanootomobiller depolanabilir hidrojen ile çalıştırılacaktır. Böylece yakıt tüketimi ve çevre kirliliği azalacaktır. Nano filtreler sayesinde su daha temiz olacaktır. Binalarda ısı ve enerji kaybını oldukça azaltan cephe kaplamaları yapılacaktır.
- Elektronik: Devreler, jeneratörler, transistörler, anahtarlar, işlemciler son teknoloji bilgisayarların temel bileşenlerini teşkil edecektir. Böylece bu bilgisayarların boyutları giderek küçülecek, daha fazla veri depolanabilecek ve daha hızlı çalışılabilecektir.
- Askeri Alan: Nanoteknoloji sayesinde daha hafif, sıcak tutan ve kamufle edici giysiler üretilecektir. Ayrıca nükleer savunma sistemleri üzerinde çalışılmaktadır.

2.4. Karbon Nanotüpler

Karbon atomlarından oluşan ve grafen adı verilen bir veya daha çok sayıdaki iki boyutlu bir atomik örtünün bir doğrultu etrafında rulo hale gelmesiyle oluşan silindirik yapı karbon nanotüp yapısını tanımlar. Eğer grafen katman bir tane ise oluşan karbon nanotüp tek duvarlı, çok sayıda ise nanotüp çok duvarlı olarak nitelendirilir. Grafen katman ve karbon nanotüp yapıları Şekil 2.7’de resmedilmiştir.



(a)



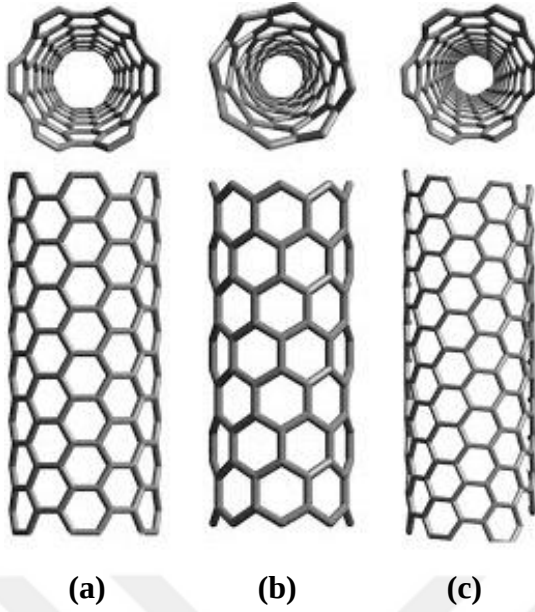
(b)



(c)

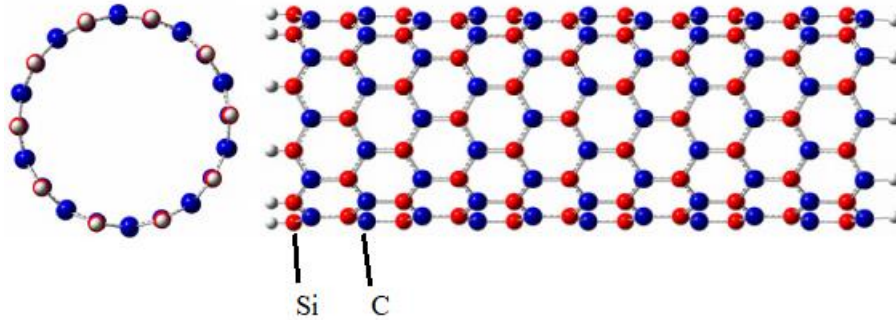
Şekil 2.7. (a) Grafen katman (Anonymous 5) **(b)** Tek duvarlı karbon nanotüp gösterim (Razali vd. 2016) **(c)** Çok duvarlı karbon nanotüp (Razali vd. 2016)

Karbon nanotüplerin geleneksel malzemelerden daha yüksek elektriksel ve ısısal iletkenliğe, daha yüksek rijitliğe, daha düşük ağırlık ve hacime sahip olması nedeniyle nanoteknolojik çalışmaların hız kazandığı belirtilebilir. Bu arada, karbon nanotüplerin sarılma doğrultusuna bağlı olarak üç farklı konfigürasyon gösterdiği belirtilebilir. Bunlar koltuk, zikzak ve bükük kiralite olarak üçe ayrılır. Kiralite, karbon nanotüp yapısının fiziksel, mekanik ve elektriksel özelliklerini etkiler. Karbon nanotüplerin farklı kiraliteleri Şekil 2.8’de gösterilmektedir.



Şekil 2.8. Karbon nanotüplerin sarılma doğrultusuna bağlı olarak farklı konfigürasyonları (Anonymous 6)

Silika karbit nanotüpler, silisyum ve karbon atomlarından oluşan bir örtünün sarılması ile meydana gelmektedir. Şekil bellek sentezi ve nanotel çekirdeği oluşumu yöntemlerine göre sentezlenebilir. Karbon nanotüplere göre daha yüksek ısısal dayanıma sahiptirler. Fiber güçlendirilmiş seramik ve biyokimya uygulamalarında kullanılabilirler. Kiralitelerine bağlı olarak dört farklı çeşitte olabilirler. Silika karbit nanotüp yapısının genel bir tasviri Şekil 2.9’da sunulmaktadır.



Şekil 2.9. Silika karbit nanotüp yapısının atomik şeması (Alam ve Ray 2007)

2.5. Yüksek Mertebeden Sürekli Ortam Teorileri

Nano ölçekli malzemelerin bileşen olarak yer aldığı nano-elektro-mekanik sistemler, nanoteknoloji ürünü olan çeşitli uygulamaları teşkil etmektedir. Mesela basit bir alan etkili karbon nanotüp sistemi, elektrokimyasal bir sistemi ve burada karbon nanotüp yapısı, mekanik elemanı temsil etmektedir. Sistemin hatasız ve optimum bir tasarımı için herşeyden önce doğru bir mekanik modelinin kurulması gerekmektedir. Daha sonra bu mekanik modelin doğru bir matematiksel modeli elde edilebilmeli ve çeşitli mekanik zorlar altında nano yapının analizi yapılabilmelidir.

Atomik yapıların mekanik analizleri hakkındaki deneysel bulgular, klasik elastisite temelli bulgularla uyuşmamaktadır. Bunun altında yatan nedenin, atomik yapının iç karakteristik boyutları olduğu anlaşılmıştır. Deneysel yöntemlerin büyük bir işlemci kapasitesi, yüksek işlem maliyeti ve yüksek uzmanlık gerektirmesi nedeniyle bilim insanları atomik ölçekli yapılar için değiştirilmiş elastisite teorileri ile yaklaşımlar geliştirmiştir. Bu yaklaşımlardan bazıları yerel olmayan elastisite teorisi, değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisi, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi ve yüzey enerjisi elastisite teorisidir. Bilim insanları bu yaklaşımları kullanarak çeşitli nanoyapıların çeşitli mekanik zorlar altındaki analizlerini gerçekleştirmiştir.



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde nano ölçekli kırılgarların farklı yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri kullanılarak statik analizlerinden bahsedilecektir. Yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri olarak Yerel Olmayan elastisite Teorisi, Değiştirilmiş Gerilme Çift Elastisite Teorisi, Yüzey Enerjisi Elastisite Teorisi kullanılacaktır.

3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Klasik elastisite teorisine göre herhangi bir referans noktasındaki gerilmeler sadece o noktanın şekil değiştirmesiyle alakalı olup diğer noktalarla bir bağıntı içerisinde değildir. Makro boyutlarda geçerli olan klasik teori boyutların küçülmesiyle beraber geçerliliğini yitirmeye başlamakta, mikro ve nano ölçeklerdeki yapıların özelliklerini doğru bir şekilde analiz edememektedir. Bunun sebebi mikro ve nano yapılarda boyut etkisinin önemli hale gelmesidir. Eringen (1983) tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisinde herhangi bir referans noktasındaki gerilme, o noktanın şekil değiştirmesiyle beraber diğer noktaların da şekil değiştirme ifadelerinin de hesaba katılmasıyla bulunur.

Yerel olmayan elastisite teorisine göre homojen ve izotropik elastik katılar için genel denklemler aşağıdaki gibi ifade edilir (Eringen 1983)

$$\tau_{ij,i} + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0 \quad (3.1)$$

$$\tau_{ij} = \int_V K(|x' - x|, \phi) \sigma_{ij}(x') dV(x') \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}(x') = \lambda \varepsilon_{rr}(x') \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(x') \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{ij}(x') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x')}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_j(x')}{\partial x'_i} \right) \quad (3.4)$$

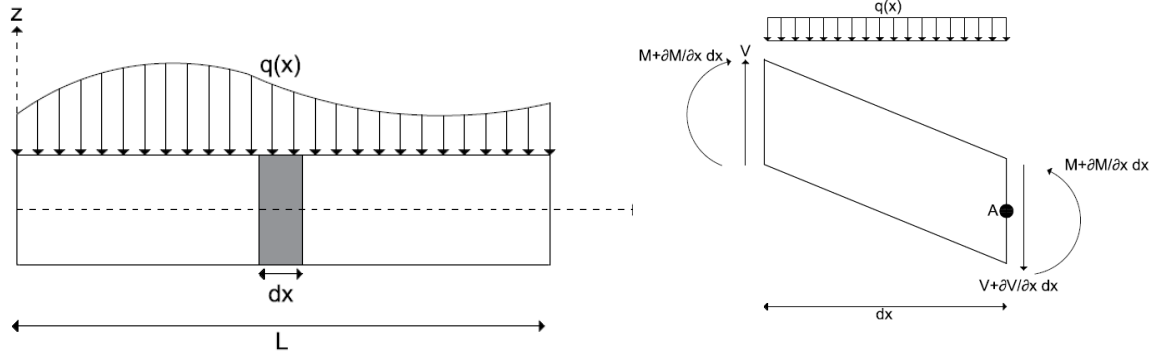
Yukarıdaki denklemlerde $\tau_{ij,i}$ yerel olmayan gerilme ifadesi, ρ kütle yoğunluğu, f_j kütsel kuvvet, u_j x noktasındaki yer değiştirme vektörü, σ_{ij} klasik gerilme tensörü, $K(|x' - x|, \phi)$ yerel olmayan Kernel, $|x' - x|$ öklidyen formda uzaklık, λ ve μ Lamé sabitleridir. e_0 malzemenin türüne bağlı olarak deneysel olarak belirlenen bir katsayı, a malzemenin karakteristik iç uzunluğu ve l malzemenin karakteristik dış uzunluğu olmak üzere denklem (2)'de görülen $\phi = e_0 a / l$ şeklinde tanımlanmıştır ve boyutsuz yerel olmayan parametre olarak adlandırılır.

Kurucu denklem aşağıdaki bağıntı ile verilmiştir (Eringen 1983)

$$\left[1 - \phi^2 l^2 \nabla^2 \right] \sigma_{ij} = \tau_{ij} \quad (3.5)$$

Bu bağıntıdan tek boyutlu durum için yerel olmayan kurucu ilişki aşağıdaki şekilde yazılır

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (3.6)$$



Şekil 3.1. Düzgün olmayan yayılı yüke maruz kiriş ve bu kirişten alınan sonsuz küçük uzunluktaki parçacığın serbest cisim diyagramı

Şekil 3.1’de düzgün olmayan yayılı yüke maruz L boyutunda bir kiriş ve bu kirişten alınan sonsuz küçük uzunluktaki parçacığın serbest cisim diyagramı görülmektedir. Kirişten dx genişliğinde sonsuz küçük bir parçacık alınıp bu parçaya denge denklemleri uygulanırsa,

$$\sum F_x = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (3.8)$$

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - q dx = 0 \quad (3.9)$$

ifadeleri yazılır. Düşeydeki kuvvetlerin dengesi Denklem (3.9)’daki gibi yazılır. Denklem içindeki düzenlemeler yapıldığında kesme kuvveti ve yayılı yük arasındaki ilişki aşağıdaki gibi çıkar

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -q \quad (3.10)$$

Son olarak A noktasına göre moment dengesini yazdığımızda ise

$$\sum M = 0 \quad (3.11)$$

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + V dx + q dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.12)$$

olur. Burada yayılı yükü ilgilendiren terim mertebesi nedeniyle denklemdeki diğer ifadelerden çok daha küçük olduğu için denklemden düşürülür ve ardından gerekli

düzenlemeler yapılırsa moment ve kesme kuvveti arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'de elde edilen ifadenin bir kez türevi alınıp Denklem (3.10)'da yerine yazıldığında ise moment ile yayılı yük arasındaki ilişki elde edilir.

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q \quad (3.14)$$

Varyasyonel türev yöntemi de yukarıdaki sonuçları elde etmek için kullanılabilecek bir diğer yöntemdir. Hacmi V , uzunluğu L olan kirişin şekil değiştirme enerjisi formülü,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \epsilon dV \quad (3.15)$$

olmak üzere burada σ gerilmeleri, ϵ şekil değiştirmeleri ifade etmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisine ait şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Görüldüğü gibi ϵ_{xx} dışındaki tüm şekil değiştirmeler sıfırdır. Şekil değiştirme ve gerilme arasında da $\sigma = E\epsilon$ şeklinde bir bağıntı olduğuna göre sıfır olmayan tek gerilme ifadesi de σ_{xx} 'tir. Öyleyse Euler-Bernoulli kirişine ait şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \quad (3.17)$$

Denklem (16)'daki ϵ_{xx} ifadesini Denklem (3.17)'de yerine yazarsak,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}) \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy dz \quad (3.18)$$

olur. Denklem (3.18)'de, $\int_A \sigma_{xx} z dA$ moment ifadesidir. Öyleyse denklem yeniden şu şekilde yazılır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[(-M) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \quad (3.19)$$

$q(x)$ yayılı yükü ifade etmek üzere dış kuvvetlerin yaptığı iş,

$$W = \int_0^L q(x)w(x)dx \quad (3.20)$$

formülü ile ifade edilir. Toplam potansiyel enerji Π ile gösterilir ve iç kuvvetlerin yapmış olduğu iş ile dış kuvvetlerin yapmış olduğu işin birbirinden çıkarılması ile bulunur.

$$\Pi = U - W \quad (3.21)$$

Toplam potansiyel enerjinin varyasyonu sıfıra eşittir. O halde,

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[-M \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx - \int_0^L (q \delta w) dx \quad (3.22)$$

elde edilir. Varyasyon ifadesindeki ilk terimin varyasyonu alındığı zaman

$$\begin{aligned} - \int_0^L M \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx &= - \left[M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial M}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\ &= - \left[M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^L - \left[\frac{\partial M}{\partial x} \delta(w) \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta(w) dx \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler Denklem (3.16)'da yerine yazıldığında

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[- \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - q \right] \delta(w) dx - M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \frac{\partial M}{\partial x} \delta(w) \Big|_0^L \quad (3.24)$$

olur. Denklem (3.24)'te birinci bölüm Euler-Langrange denklemidir ve sıfıra eşittir. Öyleyse buradan moment ile yayılı yük arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q \quad (3.25)$$

Görüldüğü üzere denge denklemlerinde elde ettiğimiz bağıntı ile aynıdır. Yerel olmayan elastisite teorisinde ifade edilen gerilme denklemini tekrar yazarsak,

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (3.26)$$

Bu denklemden de moment ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

Bu denklemin iki kez türevi alındığında,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (3.28)$$

olur. Elde edilen bu ifadede (19) denklemi yerine yazıldığında

$$-EI \frac{d^4 w}{dx^4} - (e_0 a)^2 \frac{d^2 q}{dx^2} = -q \quad (3.29)$$

ifadesine yani yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişinin eğilme denklemine ulaşılır. Burada EI eğilme rijitliği, M eğilme momenti, q kiriş üzerindeki yayılı yüküdür. Denklem (3.29)'un integralleri alındığında aşağıdaki ifadelere ulaşılır (Reddy ve Pang 2008).

$$V = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} - (e_0 a)^2 \frac{dq}{dx} = -qx - c_1 \quad (3.30)$$

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - (e_0 a)^2 q = -q \frac{x^2}{2} - c_1 x - c_2 \quad (3.31)$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -(e_0 a)^2 qx + q \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (3.32)$$

$$EIw = -(e_0 a)^2 q \frac{x^2}{2} + q \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (3.33)$$

3.2. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi

Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi (DŞDD), Lam vd. (2003) tarafından geliştirilmiş olup özellikle son on yıldır mikro ve nano boyutlu yapıların statik ve dinamik analizlerinde sıklıkla uygulanmaktadır. Bu yüksek mertebeden elastisite teorisinin yönetici denklemlerinde, homojen doğrusal elastik malzemeler için iki klasik (Lamé) malzeme parametresinin yanında üç ilave malzeme boyut parametresi bulunmaktadır. Bu teoriye göre toplam şekil değiştirme enerjisi U (Lam vd. 2003; Kong vd. 2009)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s \right) dA dx \quad (3.34)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada ε_{ij} , γ_i , $\eta_{ijk}^{(1)}$ ve χ_{ij}^s sırasıyla şekil değiştirme tansörü $\boldsymbol{\varepsilon}$, dilatasyon değişimi vektörü $\boldsymbol{\gamma}$, deviatorik uzama değişimi $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ ve simetrik dönme değişimi tansörleri $\boldsymbol{\chi}^s$ nin bileşenleri olup aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.35)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (3.36)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}[\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \quad (3.37)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3.38)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \quad (3.39)$$

Yukarıda yer alan u_i ve θ_i deplasman ve dönme vektörlerinin bileşenleri; δ_{ij} ve e_{ijk} ise sırasıyla Kronecker delta ve permütasyon sembolleridir.

Denklem (3.34)'deki gerilme tansörlerinin bileşenleri şöyle yazılabilir (Lam vd 2003):

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.40)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (3.41)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (3.42)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (3.43)$$

Denklemler (3.41–43)'teki l_0 , l_1 ve l_2 ilgili mikro/nano yapının deformasyon davranışı üzerindeki boyut etkisinin dikkate alınabilmesini sağlayan ilave malzeme boyut ölçek parametreleridir. λ ve μ Lamé sabitleri olup Young modülü (E) ve Poisson oranı (ν) cinsinden

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.44, 3.45)$$

biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) sıfır alındığında Denklemler (3.41) ve (3.42)'deki yüksek mertebeden gerilmeler sıfır olup DŞDD teorisinin özel bir hali olan değiştirilmiş gerilme çifti teorisine (DGÇ) (Yang vd 2002) ait bağıntılara erişilir.

Homojen düz bir kirişin deplasman bileşenleri Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre şöyle yazılabilir:

$$u_1(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.46)$$

$$u_2(x, z) = 0 \quad (3.47)$$

$$u_3(x, z) = w(x) \quad (3.48)$$

burada u_1 , u_2 ve u_3 sırasıyla deplasman vektörünün x , y ve z bileşenlerini; w ise tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın enine doğrultudaki yer değiştirmesini temsil etmektedir. Denklemler (3.46-48)'in, Denklemler (3.35-3.39)'da kullanılması ile sıfırdan farklı şekil değiştirme bileşenlerine aşağıda görüldüğü gibi ulaşılır:

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.49)$$

$$\gamma_1 = -z \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad \gamma_3 = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5} z \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad \eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{4}{15} \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ \eta_{122}^{(1)} &= \eta_{133}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{5} z \frac{d^3 w}{dx^3}, \\ \eta_{223}^{(1)} &= \eta_{232}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5} \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.52)$$

Yukarıdaki şekil değiştirme bileşenlerinin Denklemler (3.40-3.43)'te yerlerine yazılması sonucunda sıfırdan farklı gerilme bileşenleri (Poisson etkisi ihmal edilerek (Reddy 2011) şöyle yazılabilir:

$$\sigma_{11} = -Ez \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.53)$$

$$p_1 = -2\mu l_0^2 z \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad p_3 = -2\mu l_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \tau_{111}^{(1)} &= -\frac{4}{5} \mu l_1^2 z \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad \tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15} \mu l_1^2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \\ \tau_{122}^{(1)} &= \tau_{133}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{d^3 w}{dx^3}, \\ \tau_{223}^{(1)} &= \tau_{232}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15} \mu l_1^2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5} \mu l_1^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu l_2^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.56)$$

biçiminde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden faydalanarak mikro/nano kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s \right) dA \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \int_A \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + p_1 \delta \gamma_1 + p_3 \delta \gamma_3 + \tau_{111}^{(1)} \delta \eta_{111}^{(1)} + 3 \tau_{113}^{(1)} \delta \eta_{113}^{(1)} \right. \\
&\quad \left. + 6 \tau_{122}^{(1)} \delta \eta_{122}^{(1)} + 3 \tau_{223}^{(1)} \delta \eta_{223}^{(1)} + \tau_{333}^{(1)} \delta \eta_{333}^{(1)} + 2 m_{12}^s \delta \chi_{12}^s \right) dA dx \\
&= \int_0^L \left[\left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{d^4 w}{dx^4} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^6 w}{dx^6} \right) \delta w \right] dx \\
&\quad + \left[\left(- \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{d^3 w}{dx^3} + 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^5 w}{dx^5} \right) \delta w \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^4 w}{dx^4} \right) \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^3 w}{dx^3} \right) \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^L \quad (3.57)
\end{aligned}$$

burada L mikro/nano kiriş uzunluğu, $A = \int_A dA$ kesit alanı ve $I = \int_A z^2 dA$ atalet momentidir.

Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu

$$\delta W = \int_0^L q \delta w dx + \left[V \delta w - M \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) - M^{nc} \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^L \quad (3.58)$$

şeklinde verilebilir. Burada $q(x)$ enine yayılı yük olup V, M ve M^{nc} sırasıyla kiriş uçlarındaki kesme kuvveti, klasik eğilme momenti ve klasik olmayan eğilme momentini temsil etmektedir. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesine göre Denklemler (3.24) ve (3.25)'ten (Reddy 2002)

$$\delta(U - W) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left[\left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{d^4 w}{dx^4} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^6 w}{dx^6} - q \right) \delta w \right] dx \\
&\quad + \left[- \left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{d^3 w}{dx^3} + 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^5 w}{dx^5} - V \right) \delta w \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \right) \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right) \frac{d^3 w}{dx^3} + M^{nc} \right) \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_0^L = 0 \quad (3.59)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. DŞDD teorisine dayalı eğilme problemine ait denge denklemleri ile ilgili sınır koşulları Denklem (3.59)'dan yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2\right)\right) \frac{d^4w}{dx^4} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{d^6w}{dx^6} = q \quad (3.60)$$

$$-\left(EI + \mu A \left(l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2\right)\right) \frac{d^3w}{dx^3} + 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{d^5w}{dx^5} - V = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.61)$$

$$\left(EI + \mu A \left(l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2\right)\right) \frac{d^2w}{dx^2} - 2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{d^4w}{dx^4} + M = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0 \quad (3.62)$$

$$2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5}l_1^2\right) \frac{d^3w}{dx^3} + M^{nc} = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0 \quad (3.63)$$

Ayrıca, yukarıdaki denklemlerde ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinden ilk ikisi (l_0 ve l_1) sıfır alındığında Euler-Bernoulli mikro/nano kiriş modeline ait eğilme için genel yönetici denklemler ve sınır koşullarına DGÇ teorisine göre

$$(EI + \mu A l_2^2) \frac{d^4w}{dx^4} = q \quad (3.64)$$

$$-(EI + \mu A l_2^2) \frac{d^3w}{dx^3} - V = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.65)$$

$$(EI + \mu A l_2^2) \frac{d^2w}{dx^2} + M = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0 \quad (3.66)$$

şeklinde ve ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinin tamamı sıfır alındığında da makro (klasik) elastisite teorisine göre

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q \quad (3.67)$$

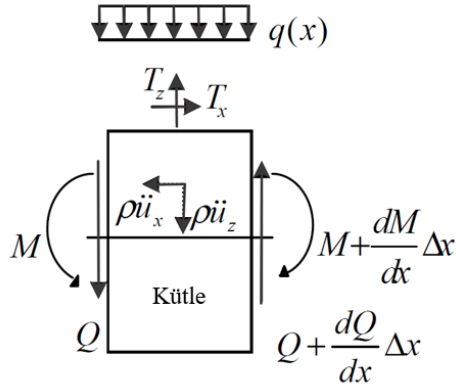
$$-EI \frac{d^3w}{dx^3} - V = 0 \text{ ya da } \delta w = 0 \quad (3.68)$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} + M = 0 \text{ ya da } \delta \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0 \quad (3.69)$$

biçiminde ulaşılır.

3.3. Yüzey Enerjili Elastisite Teorisi

Kiriş yapısından sonsuz küçük bir Δx parçası ele alalım. Bu kesite ait serbest cisim diagramını gösterirsek (Şekil 3.2). Parçanın her iki tarafında bulunan iç kayma kuvvetini Q , momenti M ile gösterirsek, kesitin sağ tarafında sırasıyla Q ve M de artış görülür. İç kuvvetler olan $\rho \ddot{u}_x$ ve $\rho \ddot{u}_z$ de kesitte bulunur. Eğilme davranışını incelemek için kiriş uzunluğu boyunca $q(x)$ düzgün yayılı yük etkisi altında incelenmiştir.



Şekil 3.2. Kiriş kesitine ait serbest cisim diyagramı

Düşey kuvvet ve moment dengesi denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{dQ}{dx} + \int_s T_z ds - q(x) - \int_A \rho \ddot{u}_z dA = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{dM}{dx} + \int_s T_x z ds - Q - \int_A \rho \ddot{u}_x z dA = 0 \quad (3.71)$$

Burada ortaya çıkan kesme kuvveti ve eğilme momenti sırasıyla,

$$Q = \int_A \sigma_{xz} dA \quad (3.72)$$

$$M = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (3.73)$$

Yüzey için denge ifadesi yüzey ve kütle arasındaki gerilme bileşenlerini kullanarak şöyle ifade edilir (Gurtin, 1975)

$$\tau_{i\alpha,\alpha} - T_i = \rho_0 \ddot{u}_i^s \quad (3.74)$$

Burada $i = x, n, t$ ve $\alpha = x, t$; τ yüzey gerilmesini ifade eder. Yüzey katmanının i yönündeki hızlanması ise $\ddot{u}_i^s$ ile gösterilmiştir. Sıfıra eşit olmayan yüzey çekimleri T_x ve T_z yüzey gerilmesi ve ataleti biçiminde yazılırsa Denklem (3.74) şu hale gelir:

$$T_x = \tau_{xx,x} - \rho_0 \ddot{u}_x^s \quad (3.75)$$

$$T_z = T_n n_z = (\tau_{nx,x} - \rho_0 \ddot{u}_n^s) n_z \quad (3.76)$$

Burada $n_z = \cos < n, z >$ yön vektörüdür. Denklemler (3.75-76) sırasıyla Denklemler (3.70-71)'de yerlerine yazılırsa:

$$\frac{dQ}{dx} + \int_S \tau_{nx,x} n_z ds - q(x) = \int_A \rho \ddot{u}_z dA + \int_S \rho_0 \ddot{u}_n^s ds \quad (3.77)$$

$$\frac{dM}{dx} + \int_S \tau_{xx,x} z ds - Q = \int_A \rho \ddot{u}_x z dA + \int_S \rho_0 \ddot{u}_x^s ds \quad (3.78)$$

Yüzey gerilmesi ve ataleti sıfıra eşit alınırsa Denklem (3.77) ve Denklem (3.76) klasik kiriş eğilme momenti ve kayma kuvveti ilişkisi elde edilebilir. Kütle ve yüzey katmanları homojen ve izotropik olarak kabul edildiğinden gerilme tansörleri şöyle ifade edilebilir:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} + \gamma\sigma_{zz}, \sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} \quad (3.79)$$

Burada E elastisite modülü, γ Poisson oranı ve G ise kayma modülüdür. Kiriş eğilme probleminde σ_{zz} gerilme tansörü sıfır değildir ancak eksenel gerilme σ_{xx} 'in yanında çok küçük kaldığı için klasik kiriş teorisinde ihmal edilir. Gurtin-Murdoch modelinde ise yüzey katmanı için bu ihmal geçersizdir. σ_{zz} 'yi hesaplamak için (Lu, 2006) öne sürdüğü teoride σ_{zz} 'nin kiriş kalınlığı boyunca lineer bir değişim içerisinde olduğunu göstermiştir. Bu teoriye göre σ_{zz} şöyle hesaplanabilir:

$$\sigma_{zz} = 0.5(\sigma_{zz}^+ + \sigma_{zz}^-) + \frac{z}{H}(\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) \quad (3.80)$$

Denklem (4.11)'de gösterilen '+' ve '-' ifadeler kiriş kesitinin sırasıyla en üstünde ve en altında bulunan yüzey katmanındaki noktalardır. Ayrıca, σ_{zz}^+ ve σ_{zz}^- ise sırasıyla en üst ve en alttaki gerilmelerdir ve H ise kiriş yüksekliğini ifade etmektedir.

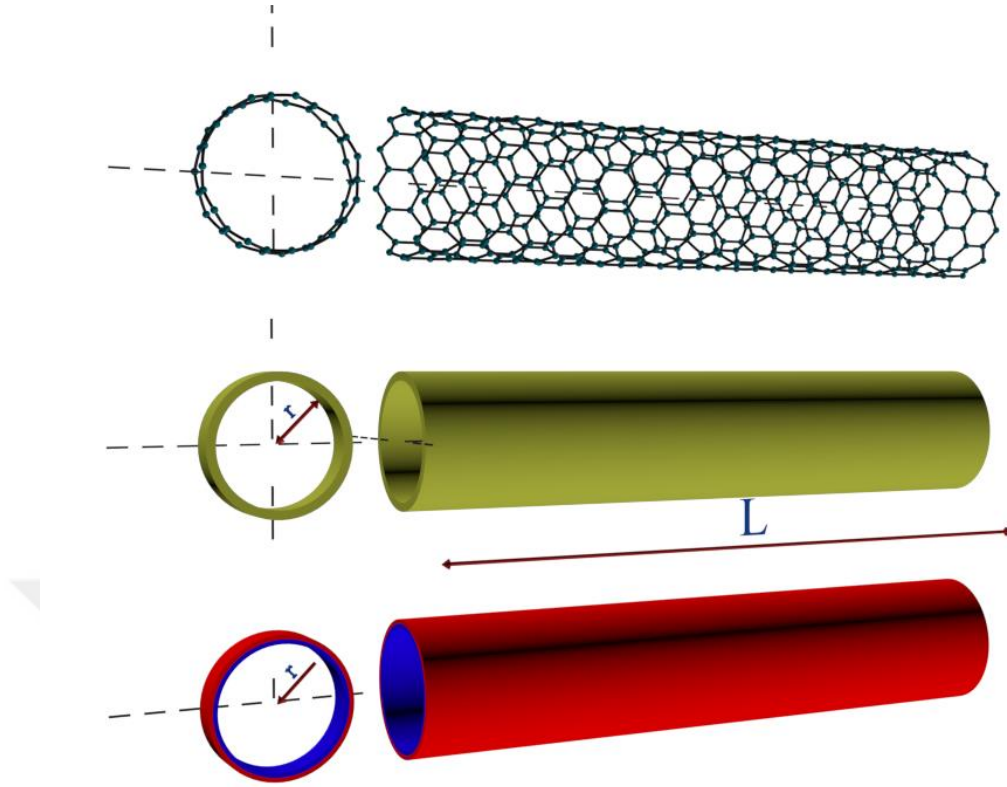
σ_{zz} yüzey gerilmeleri ve ataleti cinsinden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & 0.5(\tau_{zx,x}^+ + \tau_{zx,x}^- - \rho_0 \ddot{u}_z^+ - \rho_0 \ddot{u}_z^-) \\ & + \frac{z}{H}(\tau_{zx,x}^+ - \tau_{zx,x}^- - \rho_0 \ddot{u}_z^+ + \rho_0 \ddot{u}_z^-) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Gurtin ve Murdoch (1978) tarafından verilen yüzey kurucu ilişkileri sadeleştirilirse:

$$\tau_{xx} = \tau_0 + (2\mu_0 + \lambda_0)u_{x,x}, \tau_{nx} = \tau_0 u_{n,x} \quad (3.82)$$

Burada τ_0 serbest haldeki rezidual yüzey gerilmesi, μ_0 ve λ_0 ise yüzey Lamé sabitleridir.



Şekil 3.3. Nanotüpe ait gerçek, klasik model ve yüzey enerjisine göre modellenmiş gösterimi

Şekil 3.3 de nanotüp yapısına ait en üstte gerçek görünümü, onun altında klasik mekanikte (Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modeli) modellendiği hali (sarı), en altta ise yüzey enerjisi teorisine göre modellenmiş halinin gösterimi alt alta sıralanmıştır. Burada kırmızı renkte gösterilen nanotüpün dış yüzeyi yüzey enerjisi teorisine göre nanotüpün iç tarafta kalan çekirdek kısmından farklı karakteristik özelliklere sahip yüzeyini temsil eder.

Timoshenko kiriş modeli, kayma deformasyonlarının ve eylemsizlik ataleti göz ardı edilmeyip hesaba katıldığı kiriş modelidir. Bu teoriye göre yer değiştirme bileşenleri şöyle yazılır (Timoshenko, 1932)

3.3.1. Yüzey enerjili Timoshenko kiriş modeli

Timoshenko kiriş modeli, kayma deformasyonlarının ve eylemsizlik ataleti göz ardı edilmeyip hesaba katıldığı kiriş modelidir. Bu teoriye göre yer değiştirme bileşenleri şöyle yazılır (Timoshenko, 1932)

$$u_x = z\phi(x, t), \quad u_z = w(x, t) \quad (3.83)$$

Burada $\phi(x, t)$ ve $w(x, t)$ sırasıyla açısız yer değiştirme ve enine yer değiştirmelerdir.

Gerilme-yer değiştirme ilişkisinden sıfıra eşit olmayan durum şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{du_x}{dx} = z \frac{d\phi(x, t)}{dx}, \quad \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dx} + \frac{du_z}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dw(x, t)}{dx} + \phi(x, t) \right)\end{aligned}\quad (3.84)$$

Denklem (3.81), Denklem (3.82)'te yerine yazılırsa yüzey gerilmesi şu hale gelir:

$$\tau_{xx} = \tau_0 + z(2\mu_0 + \lambda_0) \frac{d\phi}{dx}, \quad \tau_{nx} = \tau_0 \frac{dw}{dx} n_z \quad (3.85)$$

Ayrıca, yüzey katmanının en üst ve en alt noktasındaki düşey gerilmeler Denklem (3.85)'da n_z yerine 1 yazıldığında şu şekilde elde edilir:

$$\tau_{zx}^+ = \tau_0 \frac{dw}{dx}, \quad \tau_{zx}^- = -\tau_0 \frac{dw}{dx} \quad (3.86)$$

Denklem (3.86) ve Denklem (3.83), Denklem (3.81)'de yerlerine yazılırsa düşey gerilme σ_{zz} şu şekilde elde edilir:

$$\sigma_{zz} = \frac{2z}{H} \left(\tau_0 \frac{d^2w}{dx^2} - \rho_0 \ddot{w} \right) \quad (3.87)$$

Denklem (3.79) kullanılarak sıfıra eşit olmayan kütle gerilmesi şöyle yazılabilir:

$$\sigma_{xx} = E \left(z \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{2vz}{H} \left(\tau_0 \frac{d^2w}{dx^2} - \rho_0 \ddot{w} \right), \quad \sigma_{xz} = GK \left(\frac{dw}{dx} + \phi \right) \quad (3.88)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2z}{H} \left(\tau_0 \frac{d^2w}{dx^2} - \rho_0 \ddot{w} \right)$$

Burada K kayma düzeltme katsayısıdır. Sık kullanılan kesitlere ait kayma düzeltme katsayıları literatürde bulunabilir (Timoshenko, 1932).

Denklem (3.88) ve Denklem (3.85) Timoshenko kiriş modeline ait gerilme alanlarını verir. Bu iki denklemi ve Denklem (3.83)'ü genel kiriş denge denklemleri olan Denklemler (3.77-3.78)'da yerlerine yazılırsa Timoshenko kiriş modelinin yüzey gerilmesi etkisi dahil edilmiş yönetici denklemi şöyle elde edilir:

$$GKA \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \right) + \tau_0 s^* \frac{d^2w}{dx^2} - q(x) = (\rho A + \rho_0 s^*) \frac{d^2w}{dt^2} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned}& (EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2vI\tau_0}{H} \frac{d^3w}{dx^3} - GKA \left(\frac{dw}{dx} + \phi \right) \\ &= (pI + \rho_0 I^*) \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{2vI\rho_0}{H} \frac{d^3w}{dx dt^2}\end{aligned}\quad (3.90)$$

Burada I kiriş kesitine ait atalet momentidir ve $I = \int_A z^2 dA$ ile hesaplanır. Diğer yandan I^* çevresel atalet momentidir ve $I^* = \int_s z^2 ds$ ile hesaplanır. Dairesel kesitli, D çaplı bir kiriş için parametreler şöyle yazılabilir:

$$H = D, s^* = \frac{\pi D}{2}, I = \frac{\pi D^4}{64}, I^* = \frac{\pi D^3}{8} \quad (3.91)$$

Yüzey enerjisi dahil edilmiş nihai kayma kuvveti ve eğilme momenti denklemleri şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} Q^T &= GKA \left(\frac{dw}{dx} + \phi \right) + \tau_0 s^* \frac{dw}{dx} \\ M^T &= (EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \frac{d\phi}{dx} + \frac{2vI\tau_0}{H} \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{2vI\rho_0}{H} \ddot{w} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Burada üstel formda gösterilen T Timoshenko kiriş modeline ait kayma kuvveti ve eğilme momenti ifadeleri olduğunu göstermektedir. Klasik Timoshenko kiriş teorisi ile karşılaştırıldığında Denklem (3.89)'da bulunan rezidüel gerilme τ_0 ek enine yer değiştirmenin ikinci dereceden türevidir. Ayrıca Denklem (3.89)'nin sağ tarafı da yüzey kitle yoğunluğu gelmesi ile klasik Timoshenko kiriş teorisinden ayrılmaktadır. Denklem (4.21)'de görüldüğü gibi eğilme rijitliği yüzey elastisite sabitlerinden dolayı klasik teoriden ayrılmıştır. Eğer yüzey enerjisi tamamen göz ardı edilirse yani $\rho_0 = \mu_0 = \lambda_0 = \tau_0 = 0$ seçilirse Denklem (3.89) ve Denklem (3.90) klasik Timoshenko kiriş modeline ait yönetici denklem haline dönüşür.

3.3.2. Yüzey enerjili Euler–Bernoulli kiriş modeli

Euler-Bernoulli kiriş modeli Timoshenko kiriş modeline göre basitleştirilmiş, kayma etkisini göz ardı eden, basitliği nedeniyle modellemelerde sıklıkla kullanılan bir modeldir. Genellikle kayma etkisinin çok küçük olduğu ince-uzun, narin kirişleri modellemede kullanılır (boyunun enine oranı 20'den büyük olan kirişler için). Bu varsayımlar kullanıldığında Denklem (3.90) şu hale gelir:

$$\begin{aligned} GKA \left(\frac{dw}{dx} + \phi \right) &= (EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2vI\tau_0}{H} \frac{d^3w}{dx^3} - \\ &- \frac{2vI\rho_0}{H} \frac{d^3w}{dxdt^2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Denklem (3.93)'ün x 'e göre türevi alınıp $\phi = -\frac{dw}{dx}$ yer değiştirme varsayımı ile beraber Denklem (3.89)'de yerine yazılırsa Euler-Bernoulli modeline yüzey enerjisi etkisi dahil edilmiş yönetici denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left[(EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) - \frac{2vI\tau_0}{H} \right] \frac{d^4w}{dx^4} - \tau_0 s^* \frac{d^2w}{dx^2} + q(x) \\
& = -(\rho A + \rho_0 s^*) \frac{d^2w}{dt^2} - \frac{2vI\rho_0}{H} \frac{d^4w}{dx^2 dt^2}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Nihai kayma kuvveti ve eğilme momenti de şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
Q^E &= - \left[EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^* - \frac{2vI\tau_0}{H} \right] \frac{d^3w}{dx^3} + \tau_0 s^* \frac{dw}{dx} \\
&\quad - \frac{2vI\rho_0}{H} \frac{d\ddot{w}}{dx} \\
M^E &= - \left[EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^* - \frac{2vI\tau_0}{H} \right] \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{2vI\rho_0}{H} \ddot{w}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Burada üstel formda gösterilen E Euler-Bernoulli kiriş modeline ait kayma kuvveti ve eğilme momenti ifadeleri olduğunu göstermektedir. Denklem (3.94)'ten Euler-Bernoulli kirişine ait yüzey enerjisi dahil edilmiş değiştirilmiş eğilme rijitliği şöyle yazılabilir:

$$K_b = \left[EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^* - \frac{2vI\tau_0}{H} \right] \tag{3.96}$$

Yüzey rezidüel gerilmesi τ_0 sadece σ_{zz} dikkate alındığında eğilme rijitliğine etki eder. Eğer σ_{zz} ihmal edilirse Denklem (3.96)'nın son teriminde bulunan τ_0 sıfıra eşit olacağından son terim denklemden silinir. Eğer yüzey enerjisi tamamen göz ardı edilirse yani $\rho_0 = \mu_0 = \lambda_0 = \tau_0 = 0$ seçilirse yönetici denklem olan Denklem (3.94) klasik Euler-Bernoulli yönetici denkleminde sadeleşir.

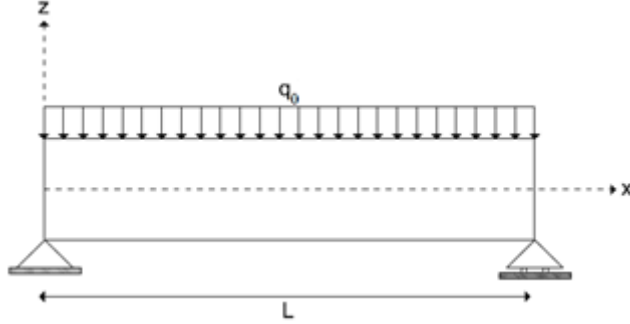
Yüzey enerjisi etkisinden dolayı eğilme rijitliği değişimi ile klasik eğilme rijitliğinin oranı şöyle ifade edilebilir:

$$\frac{K_b - EI}{EI} = \frac{(2\mu_0 + \lambda_0) - 2v\tau_0/\alpha}{E} \frac{\alpha}{H} = \alpha \frac{H_0}{H} \tag{3.97}$$

Burada $\alpha = I^*H/I$ kesitin geometrisine göre değişen boyutsuz bir sabittir. Ele alınan problem için, dairesel kesitte, α 'nın değeri 8 olarak hesaplanmıştır. Bu değer dikdörtgen kesitler için de aynıdır. (Liu, 2010). $H_0 = ((2\mu_0 + \lambda_0) - 2v\tau_0/\alpha)/E$ esas uzunluk parametresidir. Elastisite modülünü E 'nin değeri pozitifdir. Diğer yandan yüzey enerjisi sabiti ve yüzey gerilmesi malzemeye ve modele bağlı olarak hem pozitif hem de negatif olabilir. Bu yüzden H_0 'ın değeri buna bağlı olarak hem pozitif hem de negatif olabilir. Eğer H 'ın değeri H_0 'ın değerinden büyük olursa kütle malzemesi incelenen modelin yüzey enerjisi katkısını çok küçük hale getirir, bu gibi durumlarda yüzey enerjisi katkısı ihmal edilebilir küçüklüktedir.

3.4. Uygulamalar

3.4.1. Yerel olnayan elastisite teorisi



Şekil 3.4. Üniform yayılı yüke maruz her iki ucu basit mesnetli nanokiriş

Bu bölümde iki ucu basit mesnetli üniform yayılı yüke maruz nanokirişin denklemleri çıkarılmıştır. Aşağıdaki denklemlerde q_0 düzgün yayılı yükü ifade etmektedir. Basit mesnette çökme ve moment oluşmayacağı için iki ucu basit mesnetli bir nanokiriş için sınır şartları şu şekildedir:

$x=0$ noktasındaki mesnet için;

$$w(x=0) = 0 \quad (3.98)$$

$$EIw = -\left(e_0 a\right)^2 q_0 \frac{0^2}{2} + q_0 \frac{0^4}{24} + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 = 0 \quad (3.99)$$

$$c_4 = 0 \quad (3.100)$$

$$M(x=0) = 0 \quad (3.101)$$

$$M = -q_0 \frac{0^2}{2} - c_1 0 - c_2 = 0 \quad (3.102)$$

$$c_2 = 0 \quad (3.103)$$

$x=L$ noktasındaki mesnet için;

$$M(x=L) = 0 \quad (3.104)$$

$$M = -q_0 \frac{L^2}{2} - c_1 L - 0 = 0 \quad (3.105)$$

$$c_1 = -q_0 \frac{L}{2} \quad (3.106)$$

$$w(x=L)=0 \quad (3.107)$$

$$EIw = -(e_0a)^2 q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + \left(-q_0 \frac{L}{2}\right) \frac{L^3}{6} + 0 \frac{L^2}{2} + c_3 L + 0 = 0 \quad (3.108)$$

$$c_3 = (e_0a)^2 q_0 \frac{L}{2} + q_0 \frac{L^3}{24} \quad (3.109)$$

Sınır şartlarının yerlerine yazılmasıyla elde edilen sonuçlardan c_2 ve c_4 katsayılarının sıfır olduğu, c_1 ve c_3 katsayılarının ise $(e_0a)^2$, q_0 ve L parametrelerine bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Elde edilen tüm katsayılar Denklem (3.95) ve (3.97)'de yerlerine yazıldığında iki ucu basit mesnetli nanokirişe ait moment ve çökme ifadeleri aşağıdaki gibi olur (Reddy ve Pang 2008).

$$M = -q_0 \frac{x^2}{2} - \left(-q_0 \frac{L}{2}\right)x - 0 = 0 \quad (3.110)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{2} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L} \right] \quad (3.111)$$

$$EIw = -(e_0a)^2 q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left(-q_0 \frac{L}{2}\right) \frac{x^3}{6} + 0 \frac{x^2}{2} + \left((e_0a)^2 q_0 \frac{L}{2} + q_0 \frac{L^3}{24}\right)x + 0 = 0 \quad (3.112)$$

$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} \right] + \frac{(e_0a)^2 q_0 L^2}{2EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (3.113)$$

Maksimum moment ve çökme kirişin orta noktasında olacağı için yukarıdaki denklemlerde $x=L/2$ yazılırsa maksimum moment ve çökme denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_{\max} = \frac{q_0 L^2}{8} \quad (3.114)$$

$$w_{\max} = \frac{q_0 L^4}{384EI} \left[5 + 48 \left(\frac{e_0a}{L} \right)^2 \right] \quad (3.115)$$

3.4.2. Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi

Buradan itibaren silikon karbit nano çubukların çeşitli yüklemeler altında eğilme analizi gerçekleştirilmiştir. Bir önceki kısımda elde edilen yönetici denklemlerin iki ucu mafsallı sınır koşullarına ait çözümü için Navier çözüm tekniği kullanılmıştır. Bu çözüm tekniğine göre x 'e bağlı deplasman bağıntısının Fourier katsayısı ve belirli trigonometrik fonksiyon şeklinde açılımı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.116)$$

Burada, W_n bilinmeyen Fourier katsayısıdır. Enine dış yük q , Fourier serisine

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.117)$$

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (3.118)$$

şeklinde açılabilir. Q_n Fourier katsayısı olup düzgün yayılı, sinüzoidal ve orta noktaya etkiyen tekil yükler için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.119)$$

$$Q_n = q_0 \quad (n = 1) \quad (3.120)$$

$$Q_n = \frac{2}{L} Q_0 \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.121)$$

Yukarıdaki bağıntıların Denklemler (3.27, 4.2 ve 4.3)'te kullanılmasıyla

$$W_n = \frac{Q_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \left(EI + \mu A \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2\right)\right) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^6 \left(2\mu I \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2\right)\right)} \quad (3.122)$$

bağıntısına ulaşılır. Bu ifadenin de yükleme tipine bağlı olarak farklı Q_n değerleri için Denklem (3.116)'da kullanılmasıyla mikro/nano çubuk için DŞDD teorisine göre yer değiştirme bağıntısı elde edilir. Ayrıca, Denklem (3.104)'te ilave malzeme boyut ölçek parametrelerinin ilk ikisi (l_0 ve l_1) ve tamamı sıfır seçildiğinde ilgili bağıntı sırasıyla DGÇ ve klasik (KT) elastisite teorilerine dayalı hale aşağıdaki gibi dönüşür:

$$W_n^{DGÇ} = \frac{Q_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 (EI + \mu A l_2^2)} \quad (3.123)$$

$$W_n^{KT} = \frac{Q_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 (EI)} \quad (3.124)$$

3.4.3. Yüzey enerjili elastisite teorisi

3.4.3.1. Euler-Bernoulli kirişi için statik analiz

Statik çözüm yapılacağı için Denklem (3.94)'ün sağ tarafı sıfıra eşitlenerek şöyle sadeleştirilebilir:

$$\left[(EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) - \frac{2\nu l \tau_0}{H} \right] \frac{d^4 w}{dx^4} - \tau_0 s^* \frac{d^2 w}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (3.125)$$

Boyutsuz parametreler şöyle elde edilir:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{L}, \quad \varepsilon = \frac{\tau_0 S^*}{K_b} L^2 \quad (3.126)$$

Denklem (3.98) boyutsuz parametreler kullanılarak şöyle yeniden düzenlenebilir:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} - \varepsilon \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} + \frac{qL^3}{K_b} = 0 \quad (3.127)$$

Benzer şekilde Denklem (3.95)'da verilen kayma kuvveti ve moment de boyutsuz parametreler kullanılarak şöyle yeniden düzenlenebilir:

$$M^E = \frac{-K_b}{L} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}, \quad Q^E = \frac{-K_b}{L^2} \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} + \tau_0 S^* \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \quad (3.128)$$

Negatif değere sahip yüzey enerjisi sabiti küçük boyutlarda K_b 'nin de negatif olmasına yol açar. Negatif değere sahip K_b ise modelde yanlış sonuçlar elde etmeye sebep olur. Bu yüzden sonraki çözümler sadece K_b 'nin pozitif değer aldığı durumlar için yapılacaktır. Denklem (3.95)'te verilen dördüncü dereceden diferansiyel denklemi çözerek düzgün yayılı yük etkisi q_0 altında şöyle düzenlenebilir:

$$\bar{w} = c_1 e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + c_2 e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + c_3 + c_4 \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2K_b \varepsilon} \bar{x}^2 \quad (3.129)$$

Denklem (3.97)'te görülen c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayılardır ve mesnetlenme durumuna göre oluşacak olan sınır değerlerle hesaplanacaktır. Bu tez çalışmasında aşağıda belirtilen üç farklı mesnetlenme ve yükleme koşulu için çözüm yapılacaktır.

1. Her iki tarafı basit mesnetli kiriş: Basit mesnetlenmiş, düzgün yayılı yük etkisi altındaki kiriş için sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}(1) = 0, \quad M^E(0) = M^E(1) = 0 \quad (3.130)$$

Denklem (3.130), Denklemler (3.128-130)'da verilen sınır koşulları kullanılarak basit mesnetlenmiş, düzgün yayılı yük etkisi altındaki kiriş için normalize edilmiş deplasman şöyle elde edilir:

$$\bar{w} = -\frac{q_0 L^3}{K_b \varepsilon^2} \left(\frac{e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-\sqrt{\varepsilon}}} - \frac{\varepsilon}{2} \bar{x}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{x} - 1 \right) \quad (3.131)$$

Düzgün yayılı yük etkisi altındaki basit mesnetlenmiş kiriş için normalize edilmiş deplasman elde edildikten sonra, sadece ortadan P düşey kuvvetin etkisi altındaki basit mesnetlenmiş kiriş için çözüm yapılacaktır. Kiriş, yükleme ve mesnet koşulları simetrik olduğu için kirişin yarısında çözüm yapılacaktır. Bu durumda mesnet koşulları şöyle yazılabilir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad M^E(0) = 0, \quad Q^E(1/2) = -P/2 \quad (3.132)$$

Denklem (3.128) ve Denklem (3.129) kullanılarak yayılı yükün değeri sıfır alındığında ve sınır koşulları yerlerine yazıldığı zaman c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayıları şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{PL^2}{2K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}/2} + e^{-\sqrt{\varepsilon}/2})}, \quad c_2 = -\frac{PL^2}{2K_b \varepsilon^2 \left(e^{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} \right)}, \\ c_3 &= 0, \quad c_4 = -\frac{PL^2}{2K_b \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.133)$$

2. Bir tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş: Tek tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş için sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad M^E(1) = Q^E(1) = 0 \quad (3.134)$$

Denklem (3.134)'de verilen sınır koşulları Denklem (3.128) ve Denklem (3.129)'da yerlerine yazılırsa c sabitleri şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{q_0 L^3 (1 - e^{-\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon})}{K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}})}, \quad c_2 = -\frac{q_0 L^3 (1 + e^{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon})}{K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}})}, \\ c_3 &= \frac{q_0 L^3 (2 + e^{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} - e^{-\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon})}{K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}})}, \quad c_4 = -\frac{q_0 L^3}{K_b \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.135)$$

Tek tarafı ankastre mesnetlenmiş, boştaki ucundan tekil P düşey yük olan kiriş için sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad M^E(1) = 0, \quad Q^E(1) = -P \quad (3.136)$$

Denklem (3.136)'da verilen sınır koşulları Denklem (3.128) ve Denklem (3.129)'da yerlerine yazılırsa c sabitleri şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{PL^2}{K_b \varepsilon^2 (e^{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)}, \quad c_2 = -\frac{PL^2 e^{2\sqrt{\varepsilon}}}{K_b \varepsilon^2 (e^{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)}, \\ c_3 &= \frac{PL^2 (e^{2\sqrt{\varepsilon}} - 1)}{K_b \varepsilon^2 (e^{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)}, \quad c_4 = -\frac{PL^2}{K_b \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.137)$$

3. Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş: Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş için düzgün yayılı yük altında sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad \bar{w}(1) = \bar{w}'(1) = 0 \quad (3.138)$$

Denklem (3.138)'de verilen sınır koşulları Denklem (3.129)'da yerlerine yazılırsa c sabitleri şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{q_0 L^3}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}}(e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)}, \quad c_2 = -\frac{q_0 L^3 e^{\sqrt{\varepsilon}}}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}}(e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)} \\ c_3 &= \frac{q_0 L^3 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + 1)}{2K_b \varepsilon^{3/2}(e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)}, \quad c_4 = -\frac{q_0 L^3}{K_b \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.139)$$

Tekil yük dikkate alındığında kiriş, yükleme ve mesnet koşulları simetrik olduğu için kirişin yarısında çözüm yapılacaktır. Bu durumda mesnet koşulları şöyle yazılabilir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = \bar{w}'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad Q^E(1/2) = -P/2 \quad (3.140)$$

Denklem (3.140)'da verilen sınır koşulları yerlerine yazıldığı zaman c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayıları şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{PL^2 e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}}}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} + 1 \right)}, \quad c_2 = -\frac{PL^2}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} + 1 \right)} \\ c_3 &= \frac{PL^2 (1 - e^{-\sqrt{\varepsilon}/2})}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{-\sqrt{\varepsilon}/2} + 1)}, \quad c_4 = -\frac{PL^2}{2K_b \varepsilon} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Elde edilen kapalı form analitik sonuçlarda görülen değiştirilmiş eğilme rijitliği K_b ve boyutsuz malzeme sabiti olan ε yüzey enerjisinin Euler-Bernoulli kirişi üzerindeki etkisini göz ardı edilemeyecek kadar önemli olduğunu göstermektedir.

3.4.3.2. Timoshenko kirişi için statik analiz

Daha önce belirtildiği gibi kiriş boyunun kiriş yüksekliğine oranı küçük olan kirişler için kayma gerilmelerinin etkisi göz ardı edilemeyecek kadar büyük olduğundan bu tip kirişlerde Timoshenko kiriş modelini kullanmak daha doğru sonuçlar elde etmemize yarayacaktır. Denklem (3.94) ve Denklem (3.95)'te verilen yönetici denklemler statik çözüm için sağ tarafı sıfıra eşitlenirse:

$$GKA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} \right) + \tau_0 s^* \frac{d^2 w}{dx^2} - q(x) = 0 \quad (3.142)$$

$$(EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{2vI\tau_0}{H} \frac{d^3 w}{dx^3} - GKA \left(\frac{dw}{dx} + \phi \right) = 0 \quad (3.143)$$

Euler-Bernoulli kiriş için yapılan çözümde olduğu gibi Denklem (3.142) ve Denklem (3.143)'e Denklem (3.126)'da verilen boyutsuz parametreler yerleştirilirse:

$$GKA \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} + \frac{d\phi}{d\bar{x}} \right) + \tau_0 s^* \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - q(x)L = 0 \quad (3.144)$$

$$(EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \frac{d^2 \phi}{d\bar{x}^2} + \frac{2vI\tau_0}{H} \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} - GKAL^2 \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \phi \right) = 0 \quad (3.145)$$

Düzgün yayılı yük altındaki kiriş için Denklem (3.144) kullanılarak açısıl yer değiştirme ϕ , $\bar{w}$ kullanılarak şöyle hesaplanabilir:

$$\phi = -\frac{1}{GKA} (GKA + \tau_0 s^*) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - q_0 L \bar{x} + c_4 \quad (3.146)$$

Burada c_4 integral sabitidir. Denklem (3.146) Denklem (3.145)'da yerine yazılırsa:

$$\frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} - \xi \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{q_0 L^3}{K_s} \bar{x} - \frac{c_4 L^2}{K_s} = 0 \quad (3.147)$$

Burada:

$$K_s = (EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{GKA} \right) - \frac{2vI\tau_0}{H} \quad (3.148)$$

$$\xi = \frac{\tau_0 s^*}{K_s} L^2 \quad (3.149)$$

Denklem (3.147)'in genel çözümü şu şekildedir

$$\bar{w} = c_1 e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} + c_2 e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} + c_3 - \frac{c_4 L^2}{K_s \xi} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2K_s \xi} \bar{x}^2 \quad (3.150)$$

Denklem (3.146) ve Denklem (4.150) kullanılarak açısıl yer değiştirmenin çözümü şöyle elde edilir:

$$\phi = -\left(1 + \frac{\tau_0 s^*}{GKA} \right) \sqrt{\xi} (c_1 e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} - c_2 e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}}) - \frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \bar{x} + \frac{c_4 L^2}{K_s \xi} \quad (3.151)$$

Denklem (3.146)'te görülen c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayılardır ve mesnetlenme durumuna göre oluşacak olan sınır değerlerle hesaplanacaktır. Denklem (3.128)'de verilen eğilme momenti ve kayma kuvveti bu durum için şöyle yazılabilir:

$$Q^T = GKA \left(\frac{dw}{dx} + \phi \right) + \tau_0 s^* \frac{dw}{dx}$$

$$M^T = (EI + (2\mu_0 + \lambda_0)I^*) \frac{d\phi}{dx} + \frac{2vI\tau_0}{H} \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.152)$$

1. Her iki tarafı basit mesnetlenmiş kiriş: Her iki taraftan basit mesnetlenmiş, düzgün yayılı yük etkisi altındaki kiriş için sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}(1) = 0, \quad M^E(0) = M^E(1) = 0 \quad (3.153)$$

Denklem (3.150) ve Denklem (3.151)'de Denklem (3.153)'te verilen sınır koşulları uygulandığında ve Denklem (3.152)'de verilen eğilme momenti ve kayma kuvveti yerlerine yazıldığında:

$$c_1 = -\frac{K_b q_0 L^3 (1 - e^{-\sqrt{\xi}})}{K_s^2 \xi^2 (e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})}, \quad c_2 = -\frac{K_b q_0 L^3 (e^{\sqrt{\xi}} - 1)}{K_s^2 \xi^2 (e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})}$$

$$c_3 = \frac{K_b q_0 L^3}{K_s^2 \xi^2}, \quad c_4 = \frac{q_0 L}{2} \quad (3.154)$$

Basit mesnetlenmiş, ortasında tekil P düşey yük bulunan kiriş simetriktir. Yükleme ve mesnet koşulları simetrik olduğu için kirişin yarısında çözüm yapılacaktır. Bu durumda mesnet koşulları şöyle yazılabilir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad M^E(0) = 0, \quad Q^E(1/2) = -P/2 \quad (3.155)$$

Denklem (3.150) ve Denklem (3.151)'de yayılı yükün değerini sıfır alırsak ve Denklem (3.155)'te verilen sınır koşulları yerleştirilirse:

$$c_1 = \frac{PL^2}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) \left(e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{2}}\right)}$$

$$c_2 = -\frac{PL^2}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) \left(e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{2}}\right)}$$

$$c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{P}{2} \quad (3.156)$$

2. Bir tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş: Düzgün yayılı yük etkisi altında, bir tarafı ankastre mesnetlenmiş diğer tarafı boşta olan kiriş için sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad M^E(1) = Q^E(1) = 0 \quad (3.157)$$

Bu sınır koşulları kullanılarak c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayıları şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \frac{\frac{e^{-\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi}(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA})} - \frac{K_b}{K_s \xi}}{(e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} \\
c_2 &= -\frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \frac{\frac{e^{\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi}(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA})} + \frac{K_b}{K_s \xi}}{(e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} \\
c_3 &= \frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \frac{\frac{e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi}(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA})} + \frac{2K_b}{K_s \xi}}{(e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} \\
c_4 &= q_0 L
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Tek tarafı ankastre mesnetlenmiş, boştaki ucundan tekil P düşey yük etkisi bulunan kiriş için sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad M^E(1) = 0, \quad Q^E(1) = -P \tag{3.159}$$

Denklem (3.159)'da verilen sınır koşulları kullanılarak c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayıları şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{PL^2 e^{-\sqrt{\xi}}}{K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}} + e^{-\sqrt{\xi}})} \\
c_2 &= -\frac{PL^2 e^{\sqrt{\xi}}}{K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}} + e^{-\sqrt{\xi}})} \\
c_3 &= \frac{PL^2 (e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})}{K_b \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}} + e^{-\sqrt{\xi}})} \\
c_4 &= P
\end{aligned} \tag{3.160}$$

3. Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş: Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş kiriş için düzgün yayılı yük altında sınır koşulları şöyledir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad \bar{w}(1) = \bar{w}'(1) = 0 \tag{3.161}$$

Denklem (3.161)'de verilen sınır koşulları kullanılarak c sabitleri şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{q_0 L^3}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}} - 1)} \\
c_2 &= -\frac{q_0 L^3 e^{\sqrt{\xi}}}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}} - 1)} \\
c_3 &= \frac{q_0 L^3 (e^{\sqrt{\xi}} + 1)}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}} - 1)} \\
c_4 &= \frac{q_0 L}{2}
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Tekil yük dikkate alındığında kiriş, yükleme ve mesnet koşulları simetrik olduğu için kirişin yarısında çözüm yapılacaktır. Bu durumda mesnet koşulları şöyle yazılabilir:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = \bar{w}'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad Q^E(1/2) = -P/2 \tag{3.163}$$

Denklem (3.164)'te verilen sınır koşulları yerlerine yazıldığı zaman c_1, c_2, c_3, c_4 sabit sayıları şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{PL^2(1 - e^{-\sqrt{\xi}/2})}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}/2} - e^{-\sqrt{\xi}/2})} \\
c_2 &= -\frac{PL^2(1 - e^{\sqrt{\xi}/2})}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}/2} - e^{-\sqrt{\xi}/2})} \\
c_3 &= \frac{PL^2(e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} + e^{-\sqrt{\xi}/2} - 2)}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) (e^{\sqrt{\xi}/2} - e^{-\sqrt{\xi}/2})} \\
c_4 &= \frac{P}{2}
\end{aligned} \tag{3.164}$$

Bütün mesnetlenme ve yükleme durumları için hesaplanan c_1, c_2, c_3, c_4 sabitleri denklem (3.129)'da yerlerine yazılırsa ayrı ayrı her durum için nihai denklemler şöyle elde edilir:

Düzgün yayılı yük etkisi altında her iki tarafı basit mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\bar{w} = -\frac{q_0 L^3}{K_b \varepsilon^2} \left(\frac{e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}}}{1 + e^{-\sqrt{\varepsilon}}} - \frac{\varepsilon}{2} \bar{x}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{x} - 1 \right) \tag{3.165}$$

Ortadan düşey P yük etkisi altında her iki tarafı basit mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\bar{w} = \frac{PL^2}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} \right)} e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} - \frac{PL^2}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}} \right)} e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + -\frac{PL^2}{2K_b \varepsilon} \bar{x} \quad (3.166)$$

Düzgün yayılı yük etkisi altında bir tarafı ankastre mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\bar{w} = -\frac{q_0 L^3 (1 - e^{-\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon})}{K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}})} e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} - \frac{q_0 L^3 (1 + e^{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon})}{K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}})} e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + \frac{q_0 L^3 (2 + e^{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} - e^{-\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon})}{K_b \varepsilon^2 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}})} - \frac{q_0 L^3}{K_b \varepsilon} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2K_b \varepsilon} \bar{x}^2 \quad (3.167)$$

Ortadan düşey P yük etkisi altında bir tarafı ankastre mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\bar{w} = \frac{PL^2}{K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)} e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} - \frac{PL^2 e^{2\sqrt{\varepsilon}}}{K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)} e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + \frac{PL^2 (e^{2\sqrt{\varepsilon}} - 1)}{K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{2\sqrt{\varepsilon}} + 1)} - \frac{PL^2}{K_b \varepsilon} \bar{x} \quad (3.168)$$

Düzgün yayılı yük etkisi altında her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\bar{w} = -\frac{q_0 L^3}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)} e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} - \frac{q_0 L^3 e^{\sqrt{\varepsilon}}}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)} e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + \frac{q_0 L^3 (e^{\sqrt{\varepsilon}} + 1)}{2K_b \varepsilon^{3/2} (e^{\sqrt{\varepsilon}} - 1)} - \frac{q_0 L^3}{K_b \varepsilon} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2K_b \varepsilon} \bar{x}^2 \quad (3.169)$$

Ortadan düşey P yük etkisi altında her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş Euler-Bernoulli kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\bar{w} = \frac{PL^2 e^{-\sqrt{\varepsilon}/2}}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{-\sqrt{\varepsilon}/2} + 1)} e^{\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} - \frac{PL^2}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{-\sqrt{\varepsilon}/2} + 1)} e^{-\bar{x}\sqrt{\varepsilon}} + \frac{PL^2 (1 - e^{-\sqrt{\varepsilon}/2})}{2K_b \varepsilon^{\frac{3}{2}} (e^{-\sqrt{\varepsilon}/2} + 1)} - \frac{PL^2}{2K_b \varepsilon} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2K_b \varepsilon} \bar{x}^2 \quad (3.170)$$

Düzgün yayılı yük etkisi altında her iki tarafı basit mesnetlenmiş Timoshenko kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\begin{aligned}\bar{w} = & -\frac{K_b q_0 L^3 (1 - e^{-\sqrt{\xi}})}{K_s^2 \xi^2 (e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} - \frac{K_b q_0 L^3 (e^{\sqrt{\xi}} - 1)}{K_s^2 \xi^2 (e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} \\ & + \frac{K_b q_0 L^3}{K_s^2 \xi^2} - \frac{\frac{q_0 L}{2} L^2}{K_s \xi} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2 K_s \xi} \bar{x}^2\end{aligned}\quad (3.171)$$

Ortadan düşey P yük etkisi altında her iki tarafı basit mesnetlenmiş Timoshenko kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\begin{aligned}\bar{w} = & \frac{PL^2}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) \left(e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{2}}\right)} e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} \\ & - \frac{PL^2}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right) \left(e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{2}}\right)} e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} - \frac{P}{2} \frac{L^2}{K_s \xi} \bar{x}\end{aligned}\quad (3.172)$$

Düzgün yayılı yük etkisi altında bir tarafı ankastre mesnetlenmiş Timoshenko kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\begin{aligned}\bar{w} = & \frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \frac{\frac{e^{-\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right)} - \frac{K_b}{K_s \xi}}{(e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} \\ & - \frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \frac{\frac{e^{\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right)} + \frac{K_b}{K_s \xi}}{(e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} \\ & + \frac{q_0 L^3}{K_s \xi} \frac{\frac{e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}}}{\sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}\right)} + \frac{2K_b}{K_s \xi}}{(e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})} - \frac{q_0 L}{K_s \xi} \frac{L^2}{2} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2 K_s \xi} \bar{x}^2\end{aligned}\quad (3.173)$$

Ortadan düşey P yük etkisi altında bir tarafı ankastre mesnetlenmiş Timoshenko kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\begin{aligned}
\bar{w} = & \frac{PL^2 e^{-\sqrt{\xi}}}{K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}} + e^{-\sqrt{\xi}})} e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{PL^2 e^{\sqrt{\xi}}}{K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}} + e^{-\sqrt{\xi}})} e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{PL^2 (e^{\sqrt{\xi}} - e^{-\sqrt{\xi}})}{K_b \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}} + e^{-\sqrt{\xi}})} - \frac{PL^2}{K_s \xi} \bar{x}
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Düzgün yayılı yük etkisi altında her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş Timoshenko kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\begin{aligned}
\bar{w} = & - \frac{q_0 L^3}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}} - 1)} e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{q_0 L^3 e^{\sqrt{\xi}}}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}} - 1)} e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{q_0 L^3 (e^{\sqrt{\xi}} + 1)}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}} - 1)} - \frac{q_0 L}{2} \frac{L^2}{K_s \xi} \bar{x} + \frac{q_0 L^3}{2K_s \xi} \bar{x}^2
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Ortadan düşey P yük etkisi altında her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş Timoshenko kirişi için normalize edilmiş deplasman:

$$\begin{aligned}
\bar{w} = & \frac{PL^2 (1 - e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{2}})}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{\xi}}{2}})} e^{\bar{x}\sqrt{\xi}} \\
& - \frac{PL^2 (1 - e^{\sqrt{\xi}/2})}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}/2} - e^{-\sqrt{\xi}/2})} e^{-\bar{x}\sqrt{\xi}} \\
& + \frac{PL^2 (e^{\frac{\sqrt{\xi}}{2}} + e^{-\sqrt{\xi}/2} - 2)}{2K_s \xi^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{\tau_0 S^*}{GKA}) (e^{\sqrt{\xi}/2} - e^{-\sqrt{\xi}/2})} - \frac{P}{2} \frac{L^2}{K_s \xi} \bar{x}
\end{aligned} \tag{3.176}$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ile Eğilme Analizi

Bu bölümde iki ucu basit mesnetli üniform yayılı yüke maruz dairesel kesitli bor nitrür nanotüplerin (BNNT) statik analizinden elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Analizlerde kullanılan nanokirişin mekanik ve geometrik özellikleri Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Statik analizde kullanılan parametreler

Geometrik Özellikler	
Kiriş uzunluğu, L	50 – 150 nm
Kesit çapı, D	5 nm
Boyutsuz yerel olmayan parametre, e_0a/L	0 – 0.25
Mekanik Özellikler	
Elastisite Modülü, E	1800 GPa

Çizelge 4.2. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=50$ nm)

e_0a/L	q (nN/nm)					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.1474	0.2947	0.4421	0.5895	0.7368	0.8842
0.05	0.1509	0.3018	0.4527	0.6036	0.7545	0.9054
0.1	0.1615	0.3230	0.4845	0.6461	0.8076	0.9691
0.15	0.1792	0.3584	0.5376	0.7168	0.8960	1.0752
0.2	0.2040	0.4079	0.6119	0.8158	1.0198	1.2237
0.25	0.2358	0.4716	0.7074	0.9431	1.1789	1.4147

Çizelge 4.3. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=75$ nm)

e_0a/L	q (nN/nm)					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.7460	1.4921	2.2381	2.9842	3.7302	4.4762
0.05	0.7639	1.5279	2.2918	3.0558	3.8197	4.5837
0.1	0.8177	1.6353	2.4530	3.2706	4.0883	4.9060
0.15	0.9072	1.8144	2.7215	3.6287	4.5359	5.4431
0.2	1.0325	2.0650	3.0976	4.1301	5.1626	6.1951
0.25	1.1937	2.3873	3.5810	4.7746	5.9683	7.1620

Çizelge 4.4. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=100$ nm)

e_0a/L	q (nN/nm)					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	2.3579	4.7157	7.0736	9.4314	11.7893	14.1471
0.05	2.4144	4.8289	7.2433	9.6578	12.0722	14.4866
0.1	2.5842	5.1684	7.7526	10.3368	12.9210	15.5052
0.15	2.8671	5.7343	8.6014	11.4686	14.3357	17.2029
0.2	3.2633	6.5265	9.7898	13.0531	16.3163	19.5796
0.25	3.7726	7.5451	11.3177	15.0902	18.8628	22.6354

Çizelge 4.5. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=125$ nm)

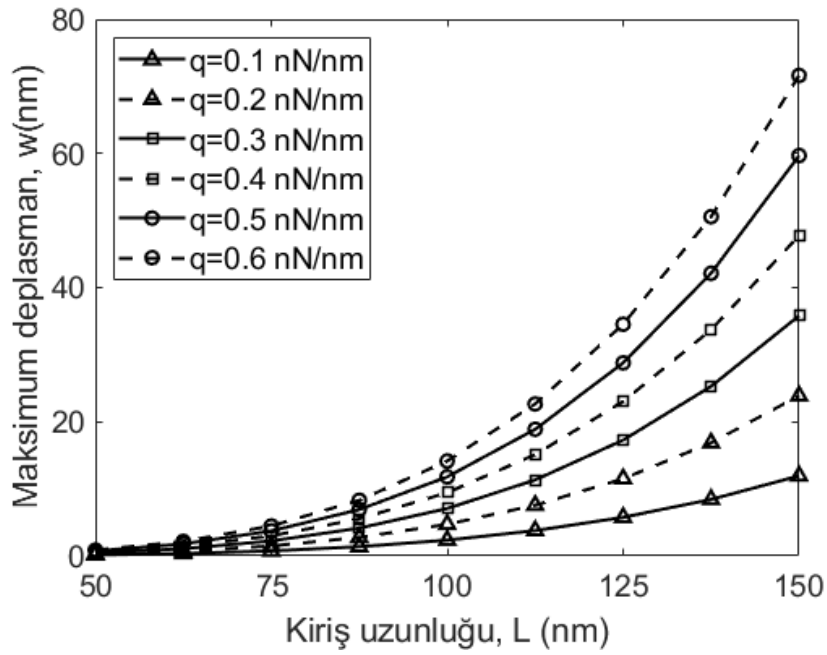
e_0a/L	q (nN/nm)					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	5.7565	11.5129	17.2694	23.0259	28.7824	34.5388
0.05	5.8946	11.7893	17.6839	23.5785	29.4731	35.3678
0.1	6.3091	12.6182	18.9273	25.2364	31.5455	37.8546
0.15	6.9999	13.9997	20.9996	27.9995	34.9994	41.9992
0.2	7.9670	15.9339	23.9009	31.8678	39.8348	47.8017
0.25	9.2104	18.4207	27.6311	36.8414	46.0518	55.2621

Çizelge 4.6. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli e_0a/L ve q değerlerinde meydana gelen maksimum deplasmanları (nm) ($L=150$ nm)

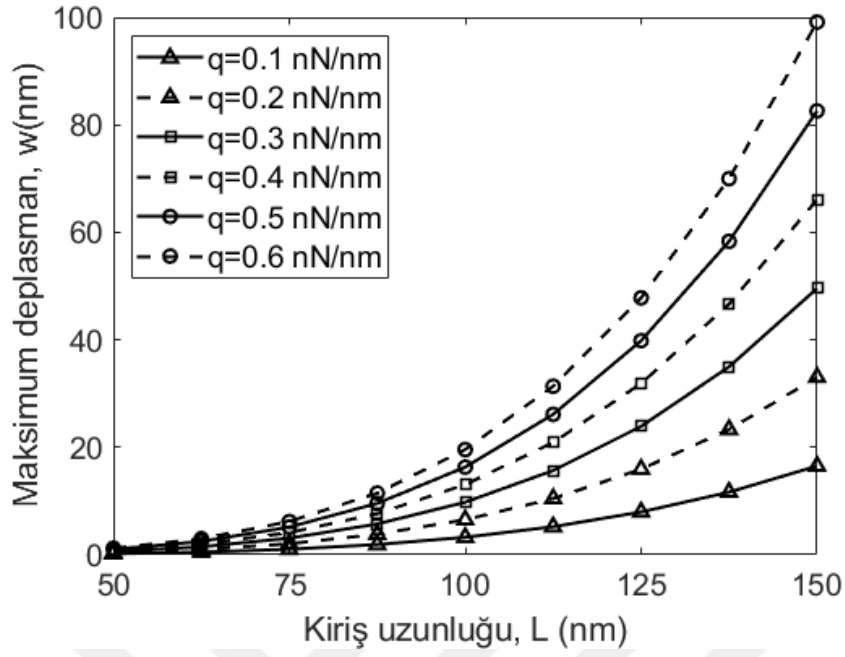
e_0a/L	q (nN/nm)					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	11.9366	23.8732	35.8099	47.7465	59.6831	71.6197
0.05	12.2231	24.4462	36.6693	48.8924	61.1155	73.3386
0.1	13.0825	26.1651	39.2476	52.3301	65.4127	78.4952
0.15	14.5149	29.0299	43.5448	58.0597	72.5747	87.0896
0.2	16.5203	33.0406	49.5608	66.0811	82.6014	99.1217
0.25	19.0986	38.1972	57.2958	76.3944	95.4930	114.5916

Çizelge 4.7. Bor nitrür nanotüplerin çeşitli L ve q değerlerinde oluşan maksimum momentleri (nN-nm)

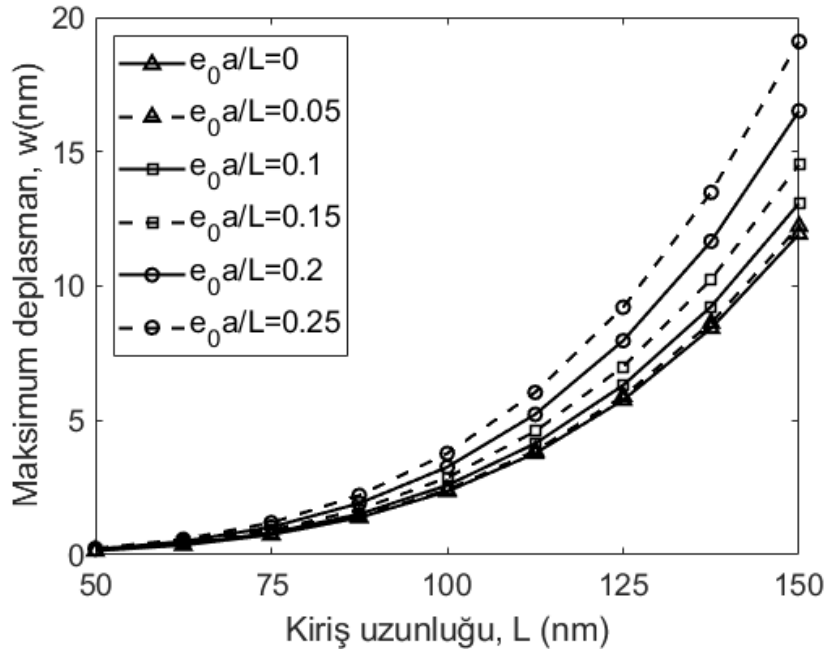
L	q (nN/nm)					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
50	31.2500	62.5000	93.7500	125.0000	156.2500	187.5000
75	70.3125	140.6250	210.9375	281.2500	351.5625	421.8750
100	125.0000	250.0000	375.0000	500.0000	625.0000	750.0000
125	195.3125	390.6250	585.9375	781.2500	976.5625	1171.8750
150	281.2500	562.5000	843.7500	1125.0000	1406.2500	1687.5000



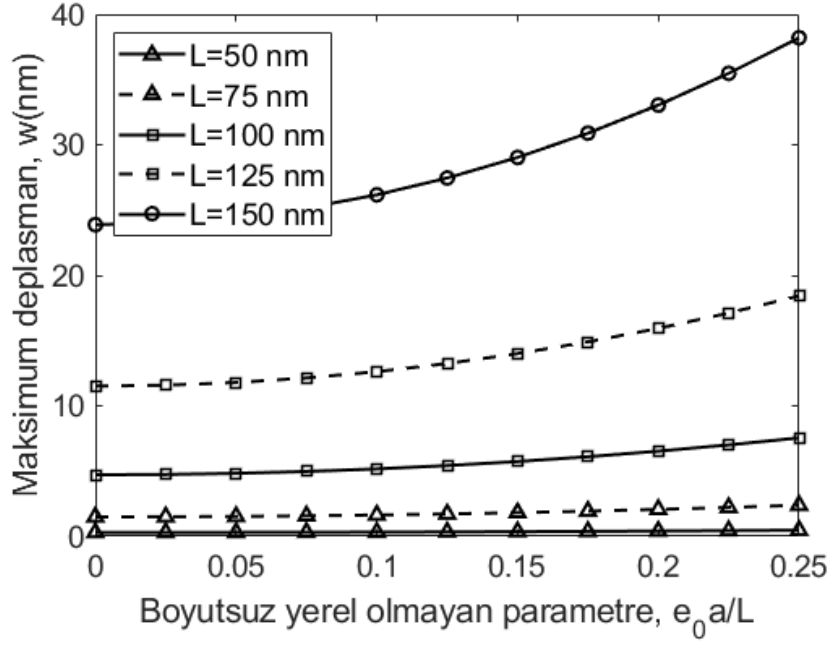
Şekil 4.1. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin maksimum deplasmanlarının kiriş uzunluğuna göre değişimi ($e_0a/L=0$)



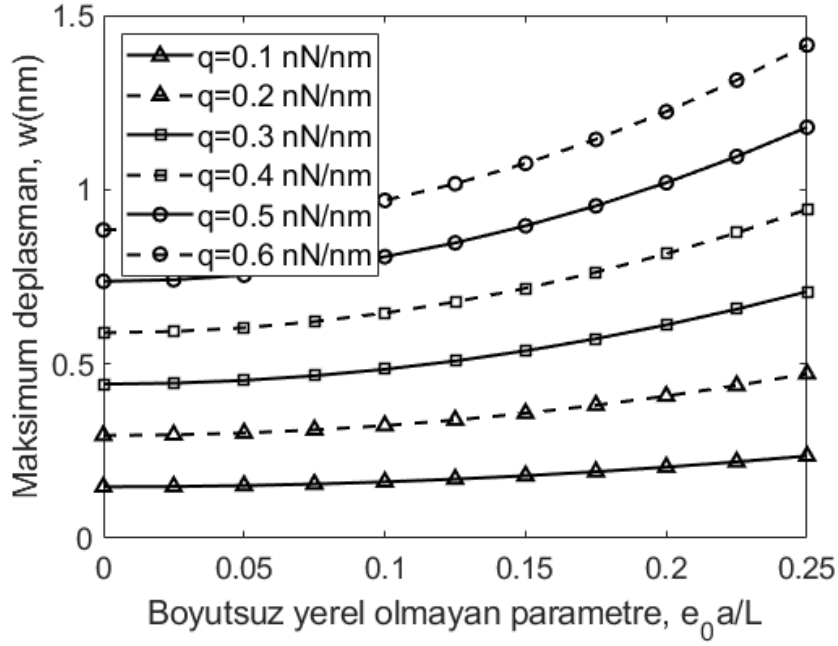
Şekil 4.2. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin maksimum deplasmanlarının kiriş uzunluğuna göre değişimi ($e_0a/L=0.2$)



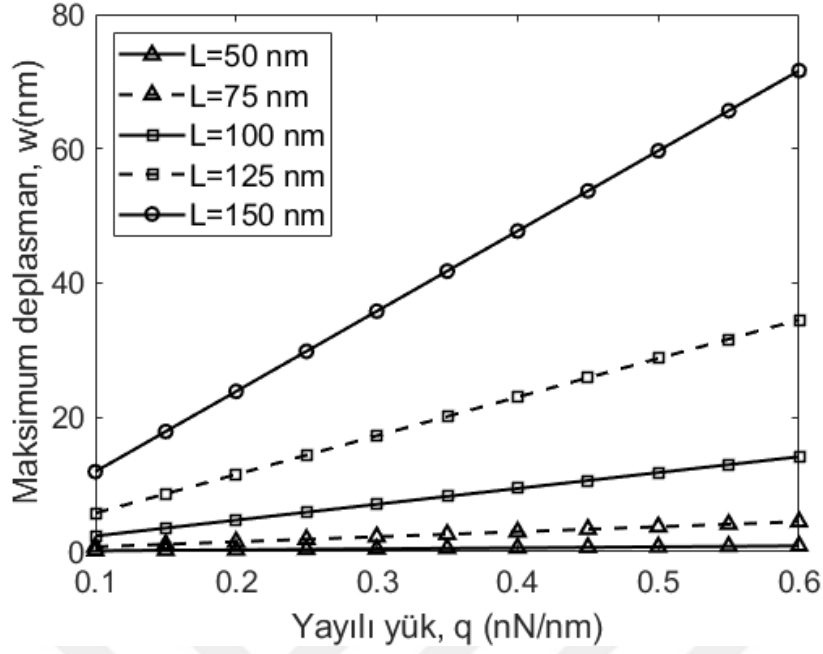
Şekil 4.3. Nanokirişlerin çeşitli e_0a/L değerlerindeki maksimum deplasmanlarının kiriş uzunluğuna göre değişimi ($q=0.1$ nN/nm)



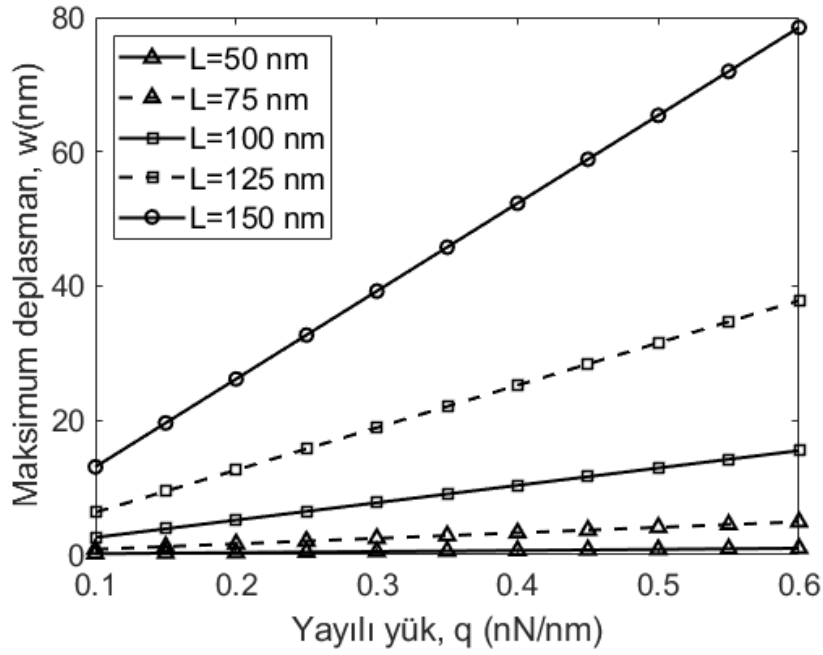
Şekil 4.4. Nanokirişlerin çeşitli kiriş uzunluklarında maksimum deplasmanlarının e_0a/L 'ye göre değişimi ($q=0.2$ nN/nm)



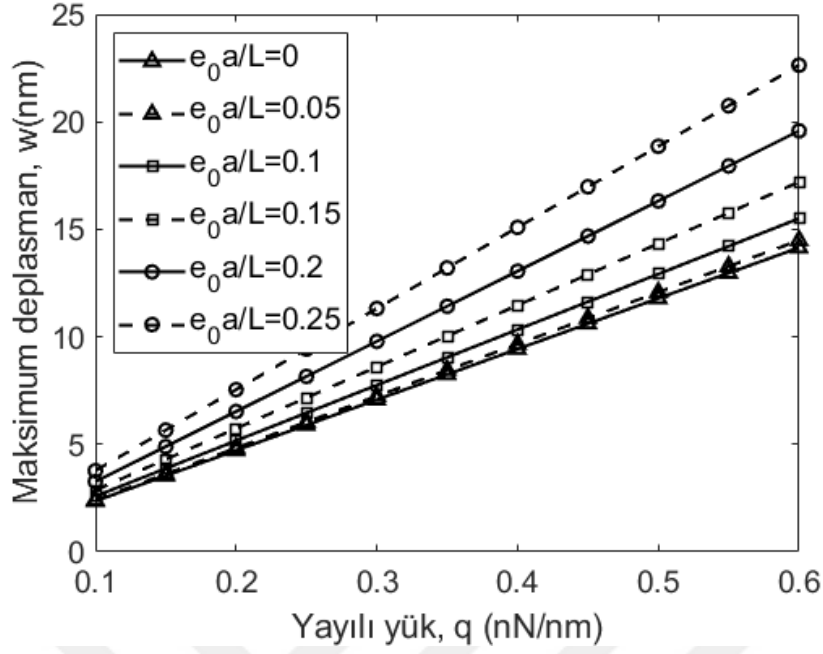
Şekil 4.5. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin maksimum deplasmanlarının e_0a/L 'ye göre değişimi ($L=50$ nm)



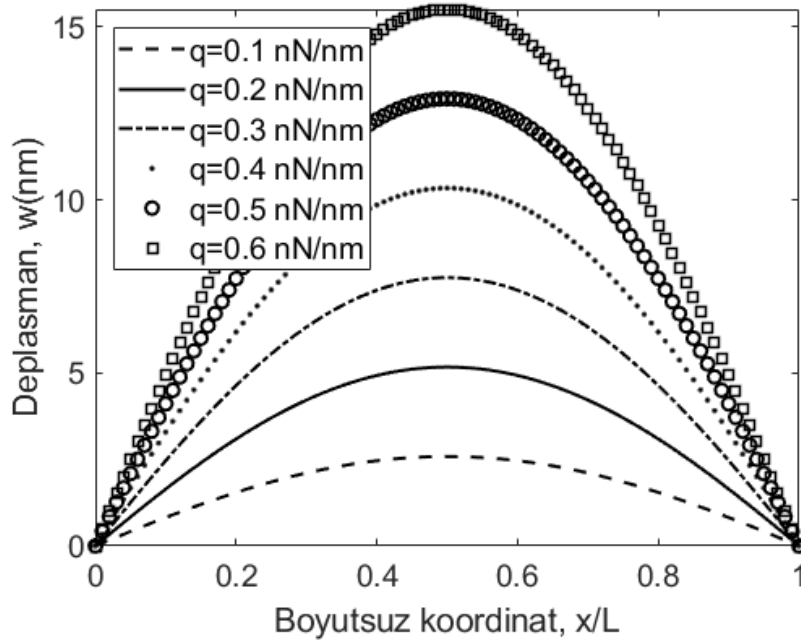
Şekil 4.6. Nanokirişlerin çeşitli kiriş uzunluklarında maksimum deplasmanlarının q 'ya göre değişimi ($e_0a/L=0$)



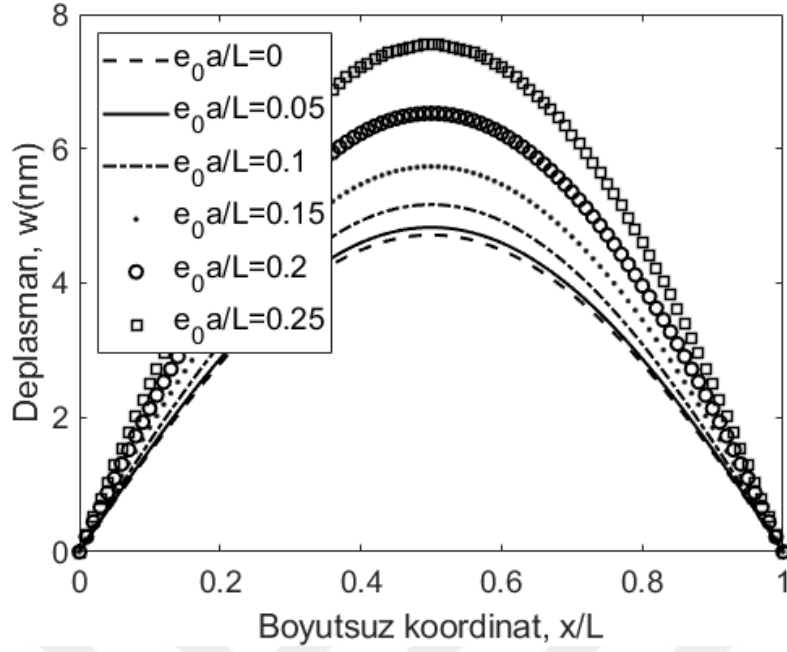
Şekil 4.7. Nanokirişlerin çeşitli kiriş uzunluklarında maksimum deplasmanlarının q 'ya göre değişimi ($e_0a/L=0.1$)



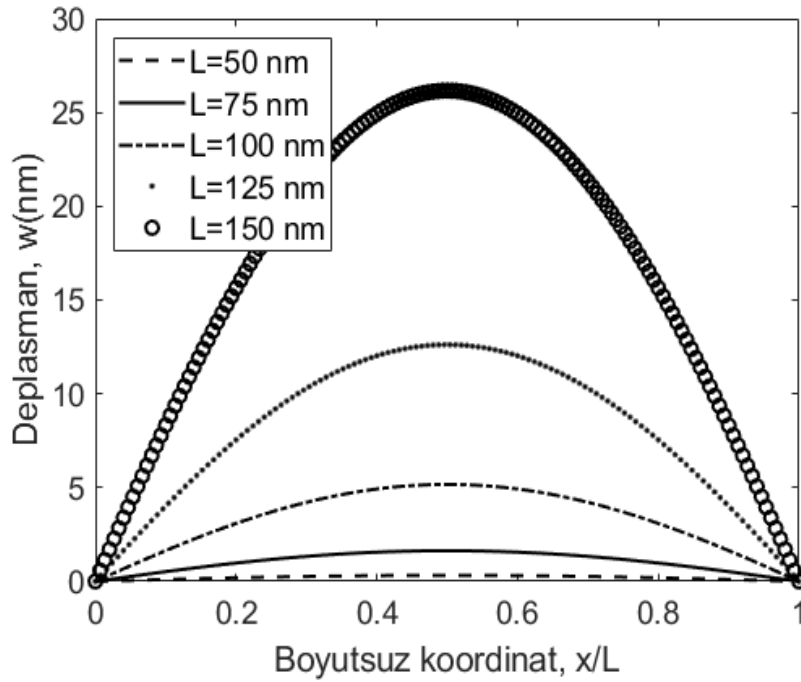
Şekil 4.8. Nanokirişlerin çeşitli e_0a/L değerlerindeki maksimum deplasmanlarının q 'ya göre değişimi ($L=100$ nm)



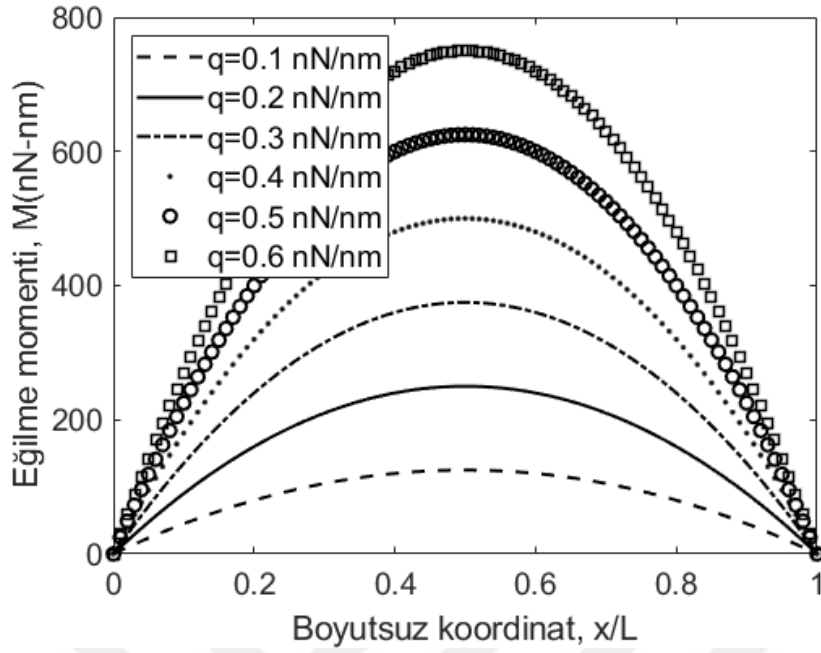
Şekil 4.9. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin yapacağı çökme diyagramı ($L=100$ nm, $e_0a/L=0.1$)



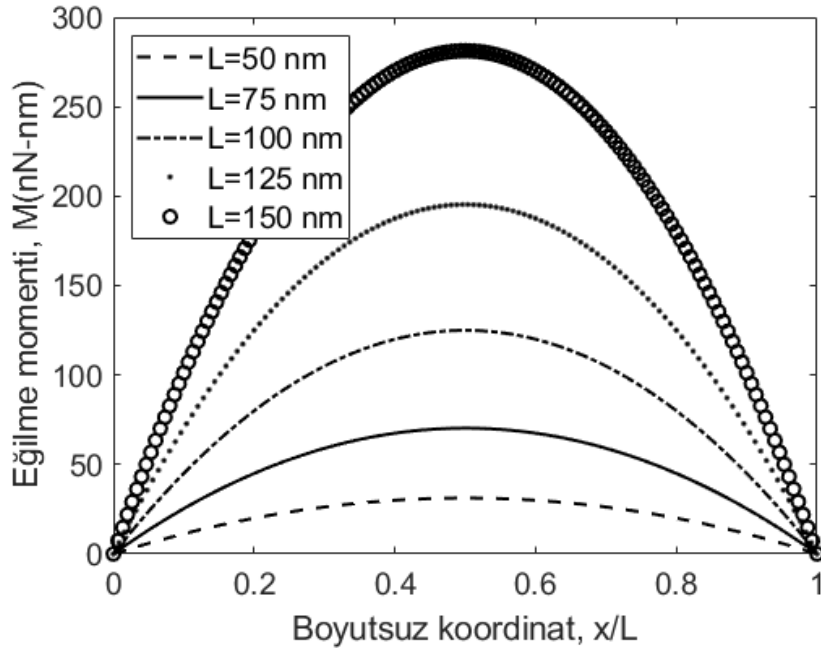
Şekil 4.10. Nanokirişlerin çeşitli e_0a/L değerlerinde yapacağı çökme diyagramı ($L=100$ nm, $q=0.2$ nN/nm)



Şekil 4.11. Çeşitli uzunluklu nanokirişlerin yapacağı çökme diyagramı ($q=0.2$ nN/nm, $e_0a/L=0.1$)



Şekil 4.12. Çeşitli düzgün yayılı yük etkisindeki nanokirişlerin eğilme momenti diyagramı ($L=100$ nm)



Şekil 4.13. Çeşitli uzunluklardaki nanokirişlerin eğilme momenti diyagramı ($q=0.1$ nN/nm)

Bu kısımda, bor nitrür nanotüp daire kesitli ve iki ucu basit mesnetli nanokiriş gibi modellenmiş ve eğilme analizi yapılmıştır. Nanokirişe ait deplasmanlar elde edilirken Euler- Bernoulli kiriş teorisi ve Eringen tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisi

kullanılmıştır. Boyutsuz yerel olmayan parametre ($e0a/L$), düzgün yayılı yük (q) ve kiriş uzunluğunun (L) nanokirişin eğilmesi üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlar şu şekildedir: Kiriş uzunluğunun artması nanokirişin deplasmanlarında artışa neden olmaktadır. Aynı şekilde yayılı yük ve yerel olmayan parametre değerlerinin artması da nanokirişin deplasmanlarını artırmaktadır. Denklemlerden de anlaşılacağı üzere yerel olmayan parametre nanokirişin momentleri üzerinde bir etkiye sahip değildir. Yayılı yük ve uzunluk artışı ise moment değerlerini artırmaktadır.

4.2. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi İle Eğilme Analizi

Bu kısımda öncelikle bu çalışmada oluşturulan boyut etkili çubuk modelinin ve gerçekleştirilen analizin doğruluğunu ve hassasiyetini kanıtlamak amacıyla literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırma yapılmıştır. Çizelge 1’de üç farklı yükleme durumu altında basit mesnetli homojen mikro kirişe ait en büyük boyutsuz deplasman değerleri Reddy (2011) çalışmasında ulaşılan değerlerle karşılaştırmalı biçimde verilmiştir. Burada dikkate alınan malzeme ve geometrik özellikler şu şekildedir: $E = 1.44 \text{ GPa}$, $\nu = 0.38$, $h = 5 \times 17.6 \mu\text{m}$, $b = 2h$ ve $L = 20h$.

Düzgün yayılı ve sinüzoidal yüklemeler için boyutsuz deplasman değerleri $\bar{w} = 100w \left(\frac{L}{2}\right) EI/(qL^4)$; orta noktadan etkiyen tekil yük için ise $\bar{w} = 100w \left(\frac{L}{2}\right) EI/(PL^3)$ şeklinde hesaplanmıştır. İlgili sonuçlara bakıldığında karşılaştırılan deplasman değerlerinin tüm yükleme durumu ve l/h oranı için mükemmel uyum içerisinde oldukları açıkça görülmektedir.

Sonraki çizelge ve şekillerde silikon karbit (SiC) nano çubukların farklı yükleme durumlarına ait deplasman değerleri incelenmiştir. Hesaplamalarda SiC için kullanılan malzeme ve geometrik özellikler şöyledir (Schulz vd. 2013; Mercan vd. 2017): Young modülü $E = 610 \text{ GPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.37$ ve çap $D = 2 \text{ nm}$.

Değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi (DŞDD) teorisinde üç malzeme boyut ölçek parametresi birbirine eşit alınırken ($l_0 = l_1 = l_2 = l$) değiştirilmiş gerilme çifti (DGÇ) teorisinde ise ilk iki malzeme boyut ölçek parametresi (l_0 ve l_1) sıfır olup $l_2 = l$ seçilmiştir.

Çizelge 4.8. Boyutsuz en büyük deplasman değerlerinin ($\bar{w} = 100w \left(\frac{L}{2}\right) EI/(qL^4)$; ve $\bar{w} = 100w \left(\frac{L}{2}\right) EI/(PL^3)$) karşılaştırılması

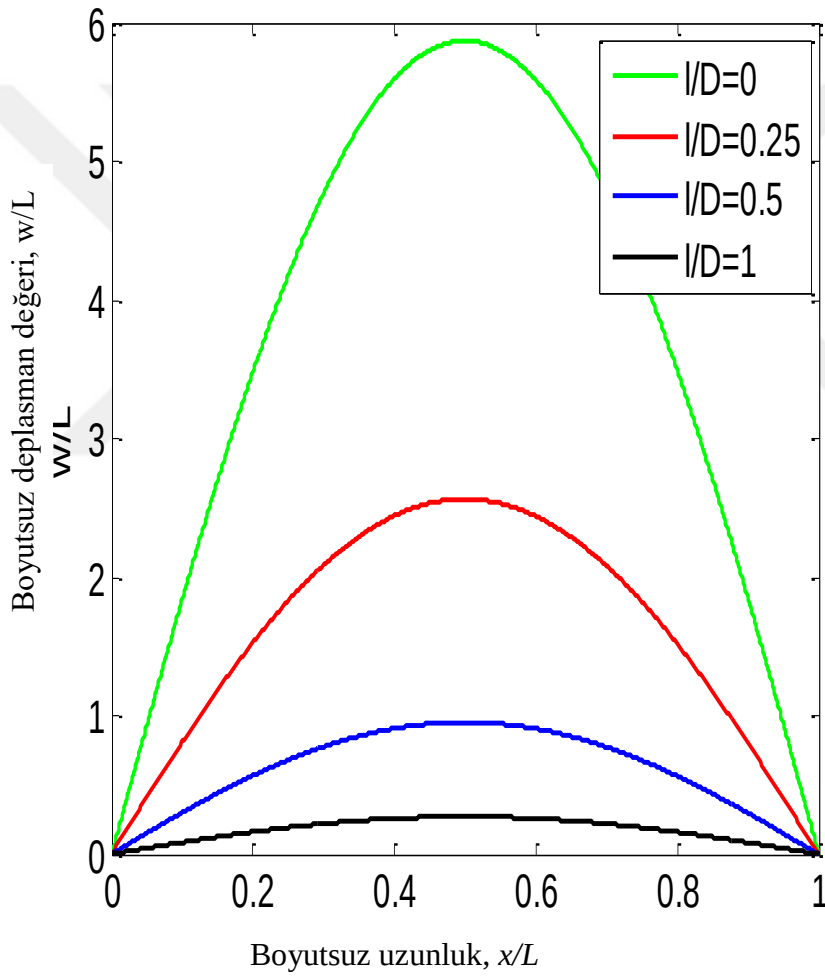
l/h	Düzgün yayılı yük		Sinüzoidal yük		Tekil yük	
	Bu çalışma	Reddy	Bu çalışma	Reddy	Bu çalışma	Reddy
0	1.30208	1.3021	1.02660	1.0266	2.08333	2.0833
0.2	1.10918	1.1092	0.87451	0.8745	1.77469	1.7747
0.4	0.76790	0.7679	0.60543	0.6054	1.22863	1.2286
0.6	0.50759	0.5076	0.40020	0.4002	0.81215	0.8121
0.8	0.34423	0.3442	0.27140	0.2714	0.55077	0.5508
1.0	0.24348	0.2435	0.19197	0.1920	0.38957	0.3896

Çizelge 4.9. Çeşitli yükleme durumlarına ait en büyük deplasman değerlerinin (nm) D/l oranına bağlı olarak değişimi ($q = 1 \text{ nN/nm}$, $L = 20D$)

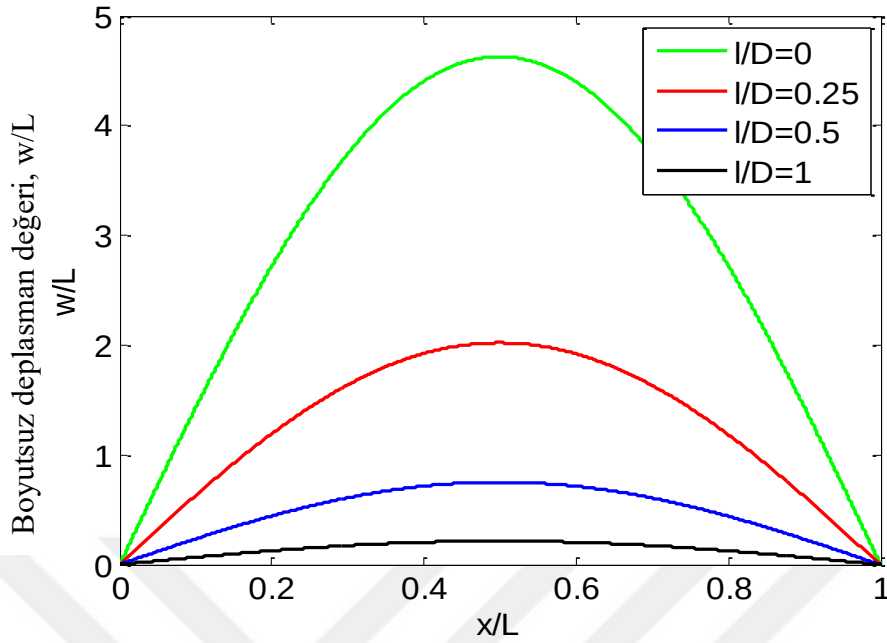
D/l	Düzgün yayılı yük (q)		Sinüzoidal yük (q)		Tekil yük ($P = qL/2$)	
	DGÇ	DŞDD	DGÇ	DŞDD	DGÇ	DŞDD
1	10.1728	3.2126	8.0205	2.5328	8.1382	2.5694
2	28.2846	11.2869	22.3003	8.8987	22.6277	9.0275
4	50.9727	30.3683	40.1883	23.9428	40.7782	24.2909
6	59.8654	44.2086	47.1995	34.8549	47.8923	35.3633
8	63.7585	52.5987	50.2690	41.4700	51.0068	42.0761
10	65.7373	57.6642	51.8291	45.4638	52.5898	46.1291
15	67.8159	63.7253	53.4679	50.2427	54.2527	50.9790
30	69.1274	68.0148	54.5019	53.6247	55.3019	54.4115
Klasik	69.5759		54.8556		55.6607	

Enine doğrultuda farklı yüklemelere maruz nano çubuğun orta noktasında meydana gelen deplasman değerlerinin çap/malzeme boyut ölçek parametresi oranına bağlı olarak değişimi Çizelge 2’de sunulmuştur. Elde edilen sonuçlara bakıldığında D/l oranı arttıkça boyut etkili deplasman değerlerinin giderek artmakta olduğu ve bütün yükleme durumları için klasik değerlere çok yaklaştığı açıkça görülmektedir.

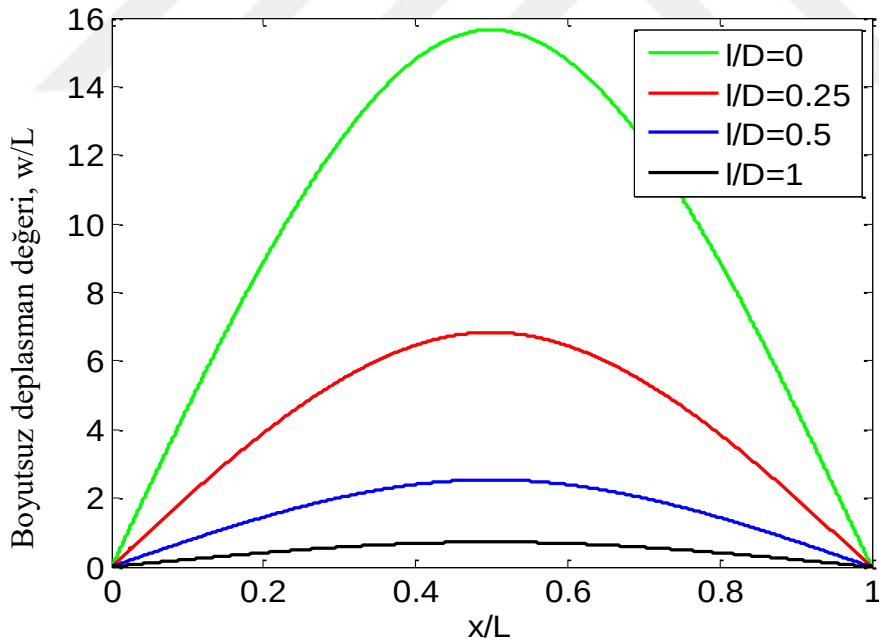
Bunun nedeninin göz önüne alınan nano yapının karakteristik boyutlarının (çap ve boy) artmasıyla boyut etkisinin öneminin azalıp ihmal edilebilecek düzeye gelmesi olduğu belirtilebilir. Ayrıca, en düşük deplasman değerleri DŞDD teorisinde ortaya çıkmış olup D/l oranının küçük olduğu durumlarda deplasman değerleri arasındaki fark çok belirgin olmaktadır.



Şekil 4.14. Düzgün yayılı yük etkisi altındaki silikon karbit nano çubuğun farklı l/D değerleri için deplasman dağılımı ($q = 1 \text{ nN/nm}$, $L = 30D$)



Şekil 4.15. Sinüzoidal yük etkisi altındaki silikon karbit nano çubuğun farklı l/D değerleri için deplasman dağılımı ($q = 1 \text{ nN/nm}$, $L = 30D$)

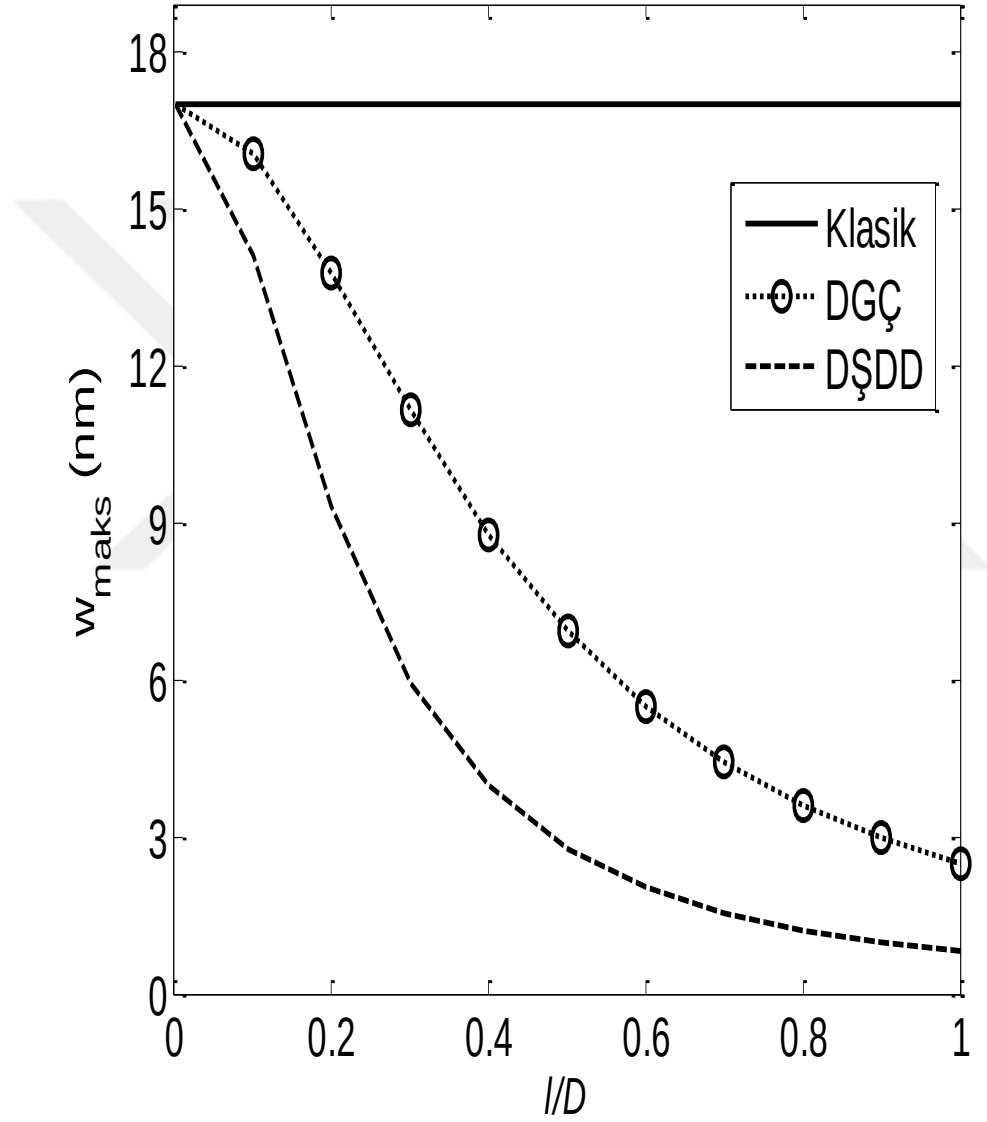


Şekil 4.16. Orta noktasına tekil yük etkileyen silikon karbit nano çubuğun farklı l/D değerleri için deplasman dağılımı ($P = 100 \text{ nN}$, $L = 30D$)

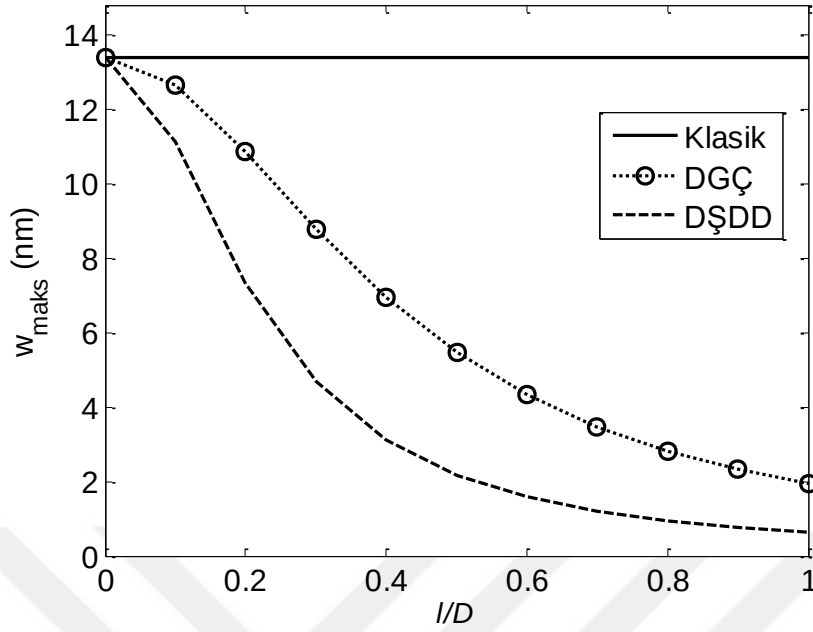
Şekil 4.14-16'da sırasıyla düzgün yayılı, sinüzoidal ve tekil yük etkisi altında altındaki basit mesnetli silikon karbit nano çubuğun farklı malzeme boyut ölçek parametresi/çap değerleri için uzunluk boyunca boyutsuz olarak deplasman dağılımları çizdirilmiştir. Tahmin edilebileceği gibi uç noktalarda deplasman sıfır iken çubuğun orta

noktasında en büyük değerine ulaştığı görülmektedir. $l/D = 0$ için boyut etkisinin hesaba katılmadığı klasik duruma ait deplasman değerleri elde edilmiş olup l/D oranının sıfırdan farklı değerleri için DŞDD teorisine dayalı boyut etkili deplasman değerlerine ulaşılmıştır.

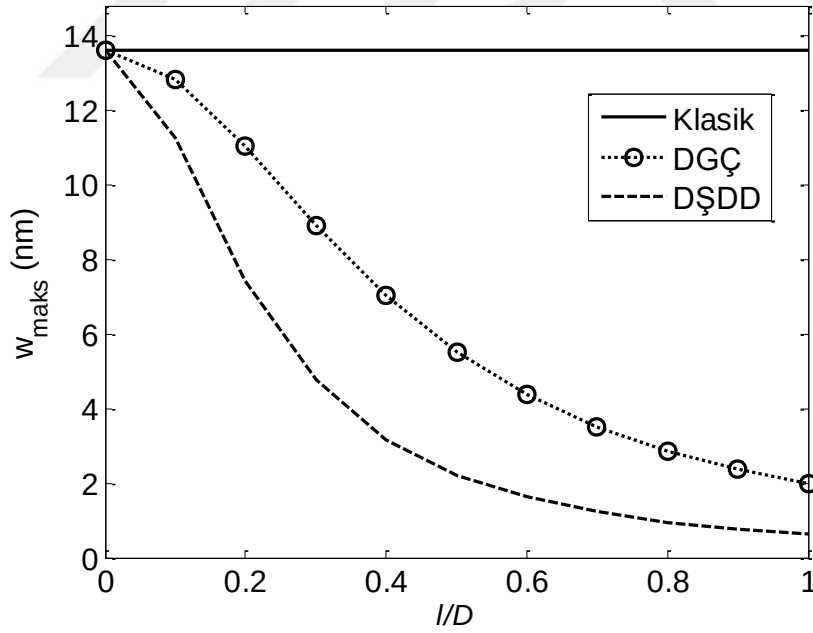
Bu oranın artmasıyla üç farklı yükleme durumu için de deplasman değerlerinde önemli ölçüde bir azalma olduğu vurgulanabilir.



Şekil 4.17. Düzgün yayılı yük altında meydana gelen en büyük deplasman değerinin l/D oranına göre değişimi ($q = 0.1 \text{ nN/nm}$, $L = 25D$)



Şekil 4.18. Sinüzoidal yük altında meydana gelen en büyük deplasman değerinin l/D oranına göre değişimi ($q = 0.1 \text{ nN/nm}$, $L = 25D$)

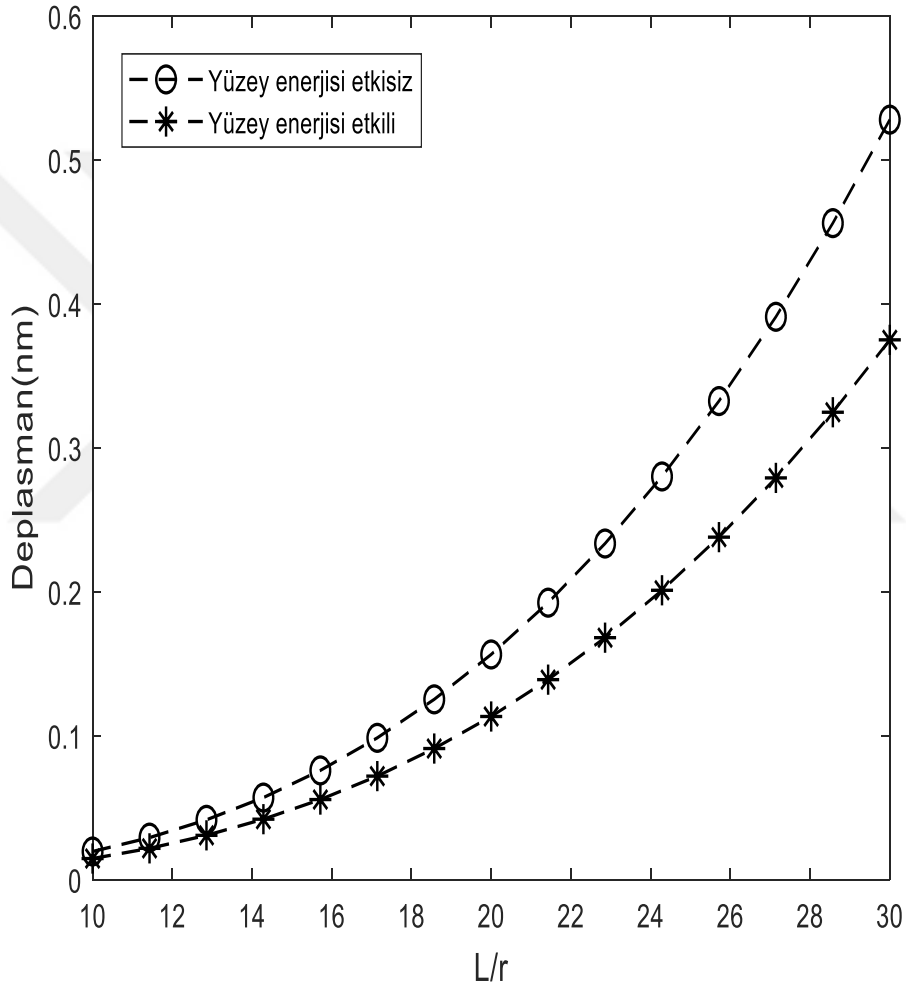


Şekil 4.19. Orta noktasından tekil yüke maruz nano çubukta meydana gelen en büyük deplasman değerinin l/D oranına göre değişimi ($P = 2.5 \text{ nN}$, $L = 25D$)

Nano çubukta meydana gelen en büyük deplasman değerlerinin malzeme boyut ölçek parametresi/çap oranına bağlı farklı teorilere dayalı olarak değişimi Şekil 4.17-19'da sunulmuştur. Bu şekillerden klasik deplasman değerlerinin daima DGÇ ve DŞDD teorilerinden elde edilenlerden daha büyük ve l/D oranından bağımsız olduğu rahatça

görülebilmektedir. Diğer bir deyişle, l/D oranının sıfır olması durumunda klasik, DGÇ ve DŞDD teorilerine ait deplasman değerleri birbirine eşitken bu oranın yükselmesiyle klasik değerler sabit kalırken yüksek mertebeden sürekli ortam teorilerine dayalı deplasman değerleri giderek azalmaktadır. Buradan çap ile malzeme boyut ölçek parametresinin birbirine yakın olduğu durumlarda boyut etkisinin nano çubuğun eğilme davranışı üzerinde çok önemli ve ihmal edilemez bir etkiye sahip olduğu sonucuna varılabilir.

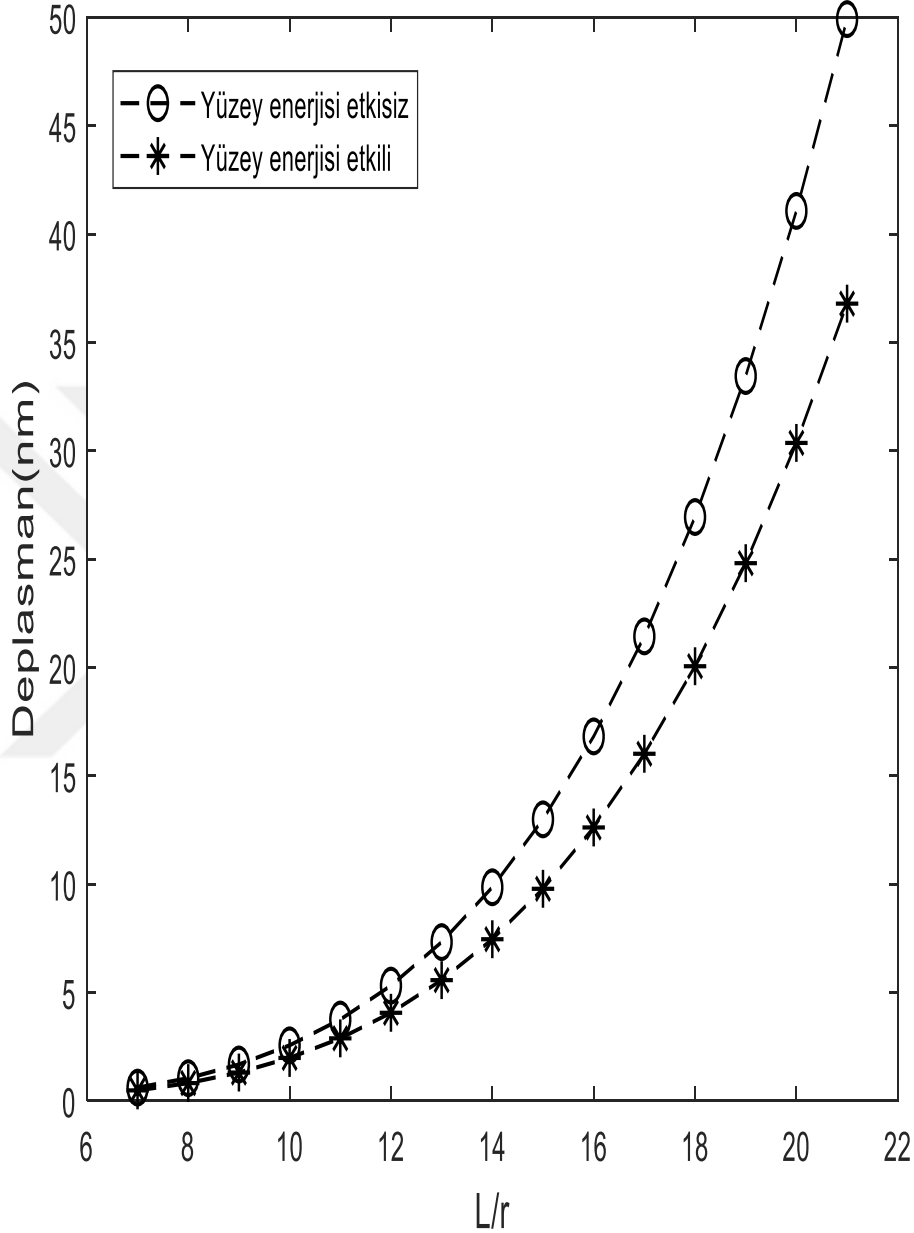
4.3. Yüzey Enerjili Elastisite Teorisi İle Eğilme Analizi



Şekil 4.20. Ankastr mesnetlenmiş, boşdaki ucundan tekil 1 nN'luk yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği

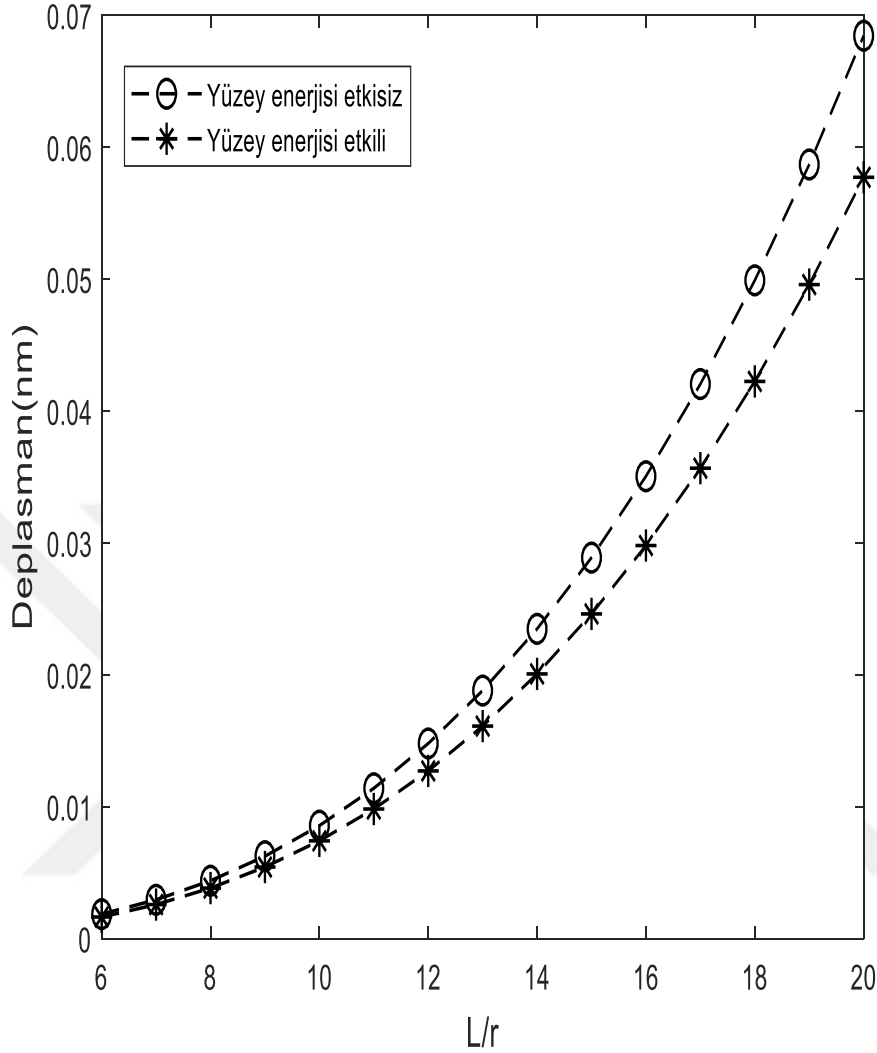
Şekil 4.20 de bir tarafı ankastr mesnet diğer tarafı boşta olan silikon karbür nanotüp için boşdaki ucundan tekil 1 nanonewton yük etkisi altındayken oluşacak maksimum deplasmanlar incelenmiştir. Farklı uzunlukların çaplara oranı dikkate alınarak çizilen bu grafikte görülen maksimum deplasman kirişin boşdaki ucunda oluşur. Aynı grafikte hem Yüzey enerjisinin etkisi olan çizgi hem de yüzey enerjisi etkisi olmayan çizgi çizdirip bunların arasındaki fark gösterilmiştir. Görüldüğü gibi uzunluk çap oranının

küçük olduğu durumlarda yüzey enerjisi etkisi küçükken bu oranın artmasıyla yüzey enerjisinin etkisi büyümektedir.



Şekil 4.21. Ankastre mesnetlenmiş, 1 nN/nm’lik düzgün yayılı yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği

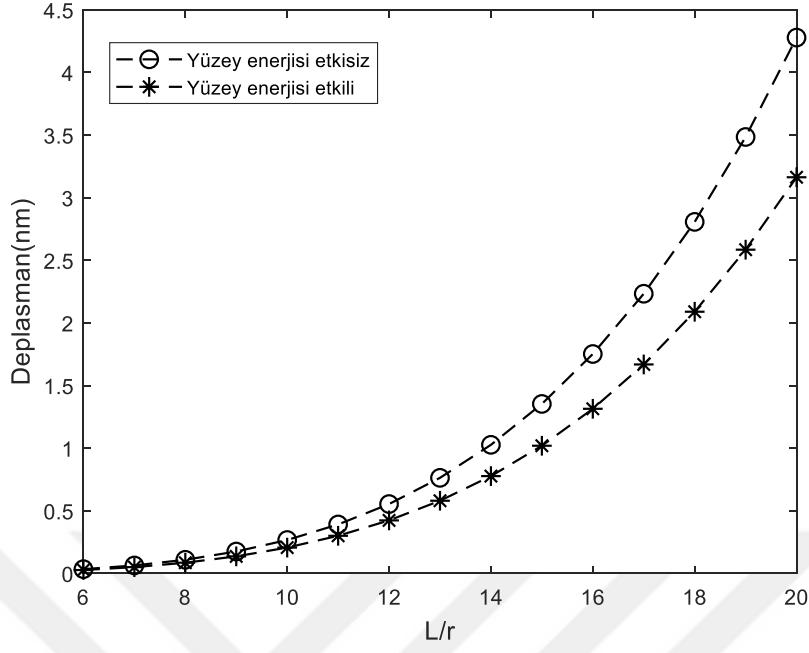
Şekil 4.21 de yine bir tarafı ankastre mesnet diğer tarafı boşta olan silikon karbür nanotüp için bu kez kiriş açıklığı tamamında 1 nN/nm’lik düzgün yayılı yük etkisi altında olan durum incelenmiştir. Grafikte gösterilen maksimum deplasmanlar yine kirişin boştaki ucunda oluşur. Önceki grafiğe benzer olarak yüzey enerjisinin etkisi küçük uzunluk yarıçap oranları için çok az iken bu oran büyüdükçe aradaki fark büyümektedir.



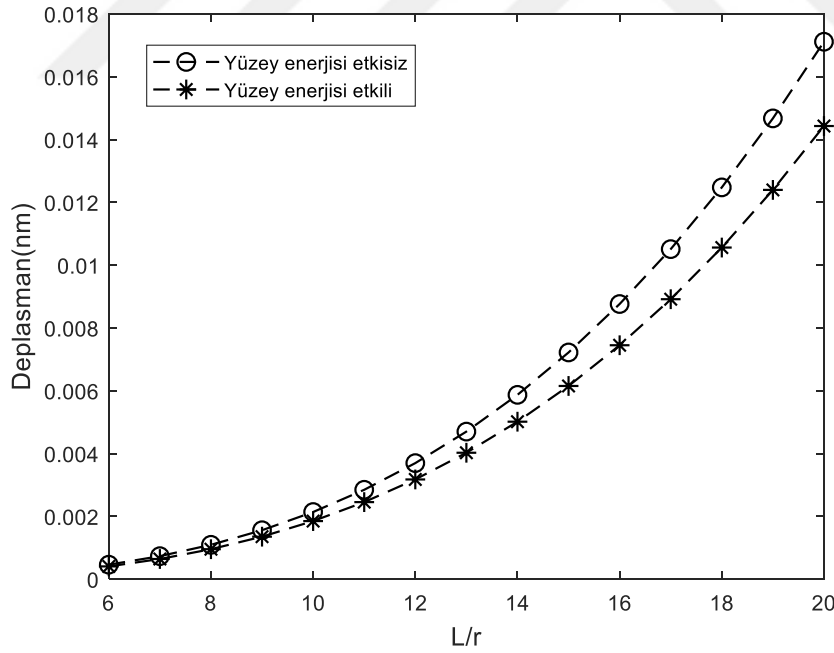
Şekil 4.22. Basit mesnetlenmiş, açıklık ortasından tekil 1 nN'luk yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği

Şekil 4.22 de her iki tarafından basit mesnetlenmiş ve kiriş açıklığı ortasından tekil 1 nanonewtonluk yük etkisi altında bulunan silikon Karbür nanotüpün farklı uzunluk Yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği çizilmiştir. Bu durum için maksimum deplasman kirişin tam ortasında oluşacaktır. Grafikten açıkça görüldüğü gibi uzunluk Yarıçap oranının küçük olduğu grafiğin sol tarafında Yüzey enerjisinin etkisi çok az iken, Uzunluk Yarıçap oranının büyüdüğü grafiğin sağ tarafı için yüzey enerjisi etkisi giderek artmaktadır.

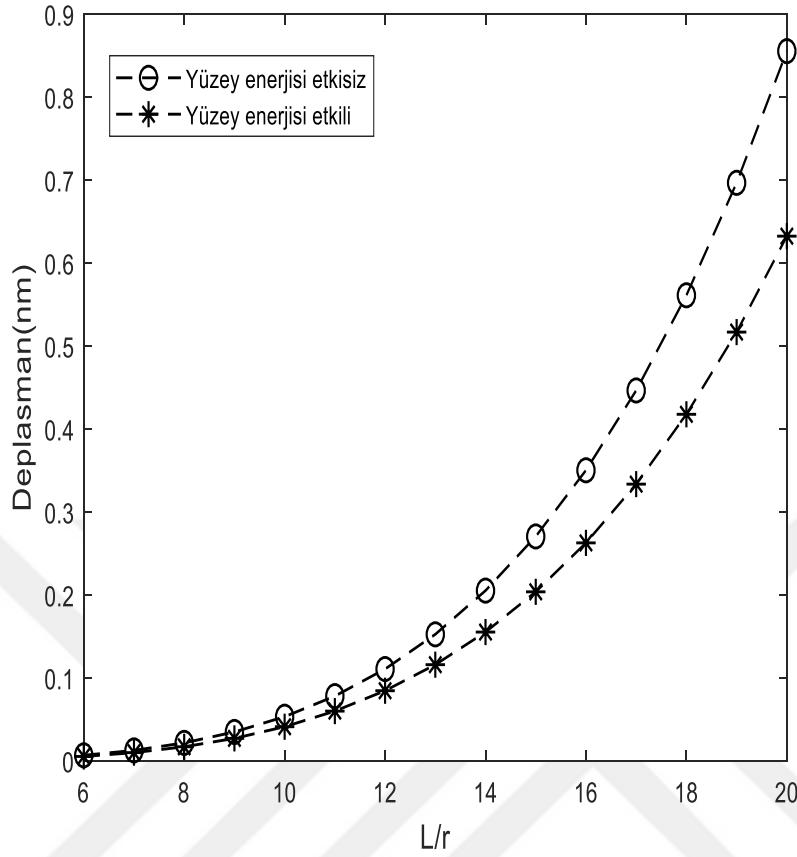
Şekil 4.23 te yine her iki tarafı basit mesnetlenmiş ancak tekil yük yerine Kiriş açıklığı boyunca düzgün yayılı yük etkisi altında olan silikon Karbür nanotüp için maksimum deplasman analizi yapılmıştır. Bu durum için maksimum deplasman yine Kiriş açıklığı tam ortasında oluşacaktır. Yüzey enerjisinin etkisi uzunluk Yarıçap oranının artmasıyla arttığı açıkça görülmektedir.



Şekil 4.23. Basit mesnetlenmiş, düzgün yayılı 1 nN/nm'lik yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği



Şekil 4.24. Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş, açıklık ortasından 1 nN'lük yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği



Şekil 4.25. Her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş, düzgün yayılı 1 nN/nm'lik yük etkisi altında silikon karbür nanotüpün farklı uzunluk-yarıçap oranları için maksimum eğilme grafiği

Şekil 4.24 ve 25 te her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş silikon karbür nanotüpler için farklı uzunluk Yarıçap oranları dikkate alınarak maksimum eğilme grafikleri çizilmiştir. Bu durum için maksimum deplasmanlar giriş açıklığının tam ortasında oluşur. Her iki grafikten de açıkça görüldüğü gibi yüzey enerjisi ne etkisi yine küçük uzunluk yarıçap oranları için az iken, uzunluk/ yarıçap oranının artmasıyla yüzey enerjisinin etkisi açıkça görülmektedir.

Şekiller 4.20-25'ten görüldüğü üzere en büyük deplasmanlar silikon karbür nanotüpün bir ucunun ankastre mesnetlenip diğer ucunun boşta olduğu durumda düzgün yayılı yük etkisi altındayken görülmektedir. En küçük deplasmanlar ise her iki tarafı ankastre mesnetlenmiş durumda iken açıklık ortasından tekil yük etkisi altında olduğu durumda görülmüştür.

5. SONUÇLAR

Teknolojinin gelişmesi nedeniyle, nano ölçekli malzeme ve sistemlerin teknolojisi olan nanoteknoloji bilimine olan ilgi de giderek artmaktadır. Bu nedenle nano ölçekli malzemelerin kullanıldığı ve çağımızın modern uygulamalarını teşkil eden nano-elektro-mekanik sistemlerin tasarım esasları ve mekanik davranışları iyi bilinmelidir. Deneysel yöntemlerin dezavantajlarından dolayı nano ölçekli yapıların mekanik analizlerinde yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri yıllardır kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında farklı yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri kullanılarak nano ölçekli kırıların statik eğilme analizleri gerçekleştirilmiştir. Kullanılan teoriler yerel olmayan elastisite, değiştirilmiş gerilme çifti, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi ve yüzey enerjisidir.

Sayısal sonuçlar kapsamında, bütün yüksek mertebeden elastisite teorileri için geliştirilmiş olan eğilme yönetici denklemleri farklı mesnet koşulları ve yükleme durumları için çözülmüştür. Genel olarak, yerel olmayan elastisite teorisinde uzunluk, yük ve atomik parametrenin şiddeti arttıkça deplasmanların arttığı anlaşılmaktadır. Tam tersine, değiştirilmiş gerilme çifti, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi ve yüzey enerjisinde ise malzeme parametrelerinin artışı ile deplasman parametrelerinin azaldığı bilgisine ulaşılabilir. O halde farklı yüksek mertebeden elastisite teorilerinin etkileri atomik ölçekli sistemlerin tasarımında mutlaka göz önüne alınmalıdır. Sadece klasik elastisite teorisi ile yapılan çözümler hatalı sonuçlara ve dolayısı ile hatalı tasarımlara yol açabilir.

Bu çalışmada yapılan statik eğilme analizi elastik zemin, viskoelastik zemin, elektrik alan, optik etkiler altında gerçekleştirilebilir. Kiriş malzemesi literatürde yaygın bir modelleme çeşidi olan fonksiyonel dereceli veya kompozit tabakalı olarak düşünülebilir. Malzeme davranışlarında nonlinearity göz önüne alınabilir. Kısaca, nano ölçekli kırıların statik eğilme analizinde boyut etkisi ile beraber çok farklı etkilerin göz önüne alınması ile bu tip elemanların statik eğilme davranışının araştırılmasına yönelik farklı araştırmalar gerçekleştirilebilir.

Her bir sonuçtan açıkça görüldüğü gibi yarıçap oranları için az iken yüzey enerji etkisi az olmakta, uzunluk/ yarıçap oranının artmasıyla yüzey enerjisinin etkisi daha belirgin olarak ortaya çıkmaktadır.

Her üç yöntemine kendine has teorik ve uygulamaya dönük avantajları ve dezavantajları olup yerel olmayan elastisite teorisi kısmen daha basit ve temel problemlerde uygulaması ve bilgisayar kodlaması daha kolaydır.

6. KAYNAKLAR

- Akgöz, B. and Civalek, Ö. 2011. Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams. *International Journal of Engineering Science*, 49 (11): 1268-1280.
- Alam, K.M. and Ray A.K. 2007. A hybrid density functional study of zigzag SiC nanotubes. *Nanotechnology*, 18: 495706.
- Anonymous 1: <https://glossary.periodni.com/glossary.php?en=fullerene> [Son erişim tarihi: 24.12.2019].
- Anonymous 2: “IBM” atoms. https://www.ibm.com/ibm/history/exhibits/vintage/vintage_4506VV1003.html [Son erişim tarihi: 26.12.2019].
- Anonymous 3: Nanocars. https://www.jmtour.com/about/photos_graphics/nanocars/ [Son erişim tarihi: 26.12.2019].
- Anonymous 4: Nanocar. <https://en.wikipedia.org/wiki/Nanocar> [Son erişim tarihi: 26.12.2019].
- Anonymous 5: Grafen. <https://tr.wikipedia.org/wiki/Grafen> [Son erişim tarihi: 25.01.2020].
- Anonymous 6: Structure of CNTs. <https://sites.google.com/site/cntcomposites/structure-of-cnts> [Son erişim tarihi: 27.01.2020].
- Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9), 4703-4710.
- Fleck, N.A., Müller, G.M., Ashby, M.F. and Hutchinson, J.W. 1994. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall. Mater.*, 42 (2): 475-487.
- Gurtin, M. E. and Murdoch, A. I., 1975, A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57(4): 291-323.
- Gurtin, M. E. and Murdoch, A. I., 1978. Surface Stress in Solids, *International Journal of Solids and Structures*, 14(6), pp. 431–440
- Iijima, S. 1991. Helical Microtubules of Graphitic Carbon. *Nature*, 354: 56-58.
- Jaiswal, M. and Singh, A. 2015. Design and Analysis of CNTFET-Based SRAM. *International Research Journal of Engineering and Technology*, 2 : 11-15.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. 2008. The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*, 46 (5): 427-437.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. 2009. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47 (4): 487-498.
- Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. 2003. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 51 (8): 1477-1508.

- Liu, C., 2010, "Surface elasticity models for static and dynamic response of nanoscale beams", MsC thesis, The University Of British Columbia, Vancouver.
- Lu, P., He, L. H., Lee, H. P., 2006. Thin Plate Theory Including Surface Effects, *International Journal of Solids and Structures*, 43(16): 4631-4647.
- Ma, H.M., Gao, X.-L. and Reddy, J.N. 2008. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 56 (12): 3379-3391.
- Mercan, K., Numanoglu, H.M., Akgöz, B., Demir, Ç. and Civalek, Ö. 2017. Higher-order continuum theories for buckling response of silicon carbide nanowires (SiCNWs) on elastic matrix. *Archive of Applied Mechanics*, 87 (11): 1797–1814.
- Pareek, V., Bhargava, A., Gupta, R., Jain, R. and Panwar J. 2017. Synthesis and Applications of Noble Metal Nanoparticles: A Review. *Advanced Science, Engineering and Medicine*, 9 (7):527-544.
- Park, S.K. and Gao, X.-L. 2006. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *J. Micromech. Microeng.*, 16 (11): 2355-2359.
- Razali, M., Ahmad, A., Azaman, M.A., Anuar, K. and Mat Amin, K.A. 2016. Physicochemical Properties of Carbon Nanotubes (CNT's) Synthesized at Low Temperature using Simple Hydrothermal Method. *International Journal of Applied Chemistry*. 12: 273-280.
- Reddy, J.N. 2002. Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York.
- Reddy, J.N. 2011. Microstructure-dependent couples stress theories of functionally graded beams. *J. Mech. Phys. Solids*, 59: 2382-2399.
- Reddy, J.N. and Pang, S.D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2): 023511.
- Saallah, S. and Lenggoro, I.W. 2017. Nanoparticles Carrying Biological Molecules: Recent Advances and Applications. *KONA Powder and Particle Journal*, 35:89-111.
- Schulz, M., Shanov, V. and Yin, Z. 2013. Nanotube Superfiber Materials: Changing Engineering Design. William Andrew, Norwich.
- Timoshenko, S. P., 1932, "Schwingungsprobleme der technik," Verlag von Julius, Springer, Berlin, Germany.
- Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. 2002. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39 (10): 2731-2743.

ÖZGEÇMİŞ

Merve Nur ÇAYIRLI

mervecayirli@gmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2017–2020	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2010–2015	Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Matematik Öğretmeni 2016–Devam Ediyor	İş Adresi Antalya
--	----------------------