

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NANO VE MİKRO YAPILARIN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ
İLE EĞİLME VE TİTREŞİM HESABI

Çiğdem IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

2011

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NANO VE MİKRO YAPILARIN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ
İLE EĞİLME VE TİTREŞİM HESABI

Çiğdem IŞIK

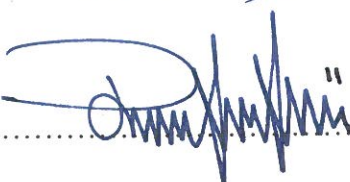
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez 15../12/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (.100.) not takdir edilerek
Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman).....

Yrd. Doç. Dr. Hakan ERSOY.....

Yrd. Doç. Dr. Rifat TÜR

ÖZET

NANO VE MİKRO YAPILARIN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ İLE EĞİLME VE TİTREŞİM HESABI

Çiğdem IŞIK

**Yüksek Lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ömer CİVALEK
Aralık 2011, 143 Sayfa**

Bu tez çalışması kapsamında, yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak nano ve mikro boyuttaki yapıların eğilme ve titreşim analizleri yapılmıştır. Yapı model tipi olarak kiriş seçilmiştir. Kiriş teorisi olarak Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılmıştır. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerinin hareket denklemleri Eringen tarafından önerilen yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak ifade edilmiştir. Mikro/nano yapıların çeşitli sınır koşullarına göre eğilme ve titreşim denklemleri oluşturulmuştur. Daha sonra yerel olmayan davranışın etkisini gözlemleyebilmek için karbon nanotüp ve mikrotüpçüklerin üzerinde analizler yapılarak klasik teori ile karşılaştırılması sağlanmıştır.

Sonuçlara bakıldığında zaman yerel olmayan elastisite teorisi ile çıkarılan denklemler malzeme iç karakteristik uzunluk ifadesine bağlı olmasından dolayı sonuçların klasik elastisite teorisinden farklı olduğu görülmüştür.

ANAHTAR KELİMELER: Yerel olmayan elastisite teorisi, mikrotüpçük ve karbon nanotüp kiriş modeli, eğilme ve titreşim analizi

JÜRİ: Doç. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Hakan ERSOY

Yrd. Doç. Dr. Rıfat TÜR

ABSTRACT

BENDING AND FREE VIBRATION ANALYSIS OF NANO AND MICRO STRUCTURES BASED ON NONLOCAL ELASTICITY THEORY

Çiğdem IŞIK

**M. Sc. in Civil Engineering
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ömer CİVALEK
December 2011, 143 Pages**

In this thesis, the bending and vibration analysis of nano and micro sized structures have been made by using the nonlocal elasticity theory. Beam has been chosen as the structure model type. Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories have been used for (as) beam theories. The motion equations of Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories were expressed by using nonlocal elasticity theory, which was proposed by Eringen. According to different boundary conditions, the bending and vibration equations of micro/nano structures have been generated. Then, in order to observe the effect of nonlocal behavior, analysis have been made over carbon nanotube and microtubules and the results have been compared with the classical theory.

According to the results, the results of the equations generated from nonlocal elasticity theory are different from the results obtained from the classic theory, because of the dependence of the internal characteristic length.

KEYWORDS: Nonlocal elasticity theory, microtubulus and carbon nanotubes beam model, bending and free vibration analysis

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Ömer CİVALEK (Advisor)

Asst. Prof. Dr. Hakan ERSOY

Asst. Prof. Dr. Rifat TÜR

ÖNSÖZ

Teknolojinin gün geçtikçe ilerlemesiyle daha küçük malzemelerle çalışılma gereksinimi duyulmaya başlanmıştır. Nanoteknoloji 1-100 nm boyutlarındaki tüm disiplinleri kendi alanlarında moleküler düzeyde anlayarak yeni ürünler elde etmek için çalışan bir bilim dalıdır. Mikro ve nano membran, plak ve kirişler çoğunlukla Nanoelektromekanik (NEMS) ve Mikroelektromekanik (MEMS) cihazlarının bileşenleri olarak kullanılmaktadır. Deneysel ve atomik simülasyonlar göstermiştir ki bu yapılar küçüldüğü zaman mekanik özelliklerinde önemli boyut etkileri ortaya çıkmaktadır. Son zamanlarda nanoteknolojiye olan ilginin artmasıyla araştırmacılar nano ve mikro yapıların mekanik özelliklerinin incelenmesine büyük ilgi göstermişlerdir. Atomik ve moleküler modeller, bilgisayar kapasitelerinin sınırlı olması nedeniyle mikro ve nano modellerin oluşturulması için uygun değildir. Yerel olmayan elastisite teorisi klasik elastisite teorisinin yeteriz olduğu durumları ortadan kaldırmak için geliştirilmiş bir teoridir. Bu teori sayesinde küçük boyutlu yapıları ve parçaları da modelleme imkanı doğmuştur. Nanoteknolojik çalışmaların artması yerel olmayan elastisite teorisinin önemini ortaya çıkarmış ve uygulama alanları gün geçtikçe artmaya başlamıştır. Elastik dalgalar, kompozit dalga yayılımı, dislokasyon mekaniği, kırılma mekaniği, sıvıların yüzey gerilimi vb. konular mevcut uygulama alanlarına örnek olarak verilebilir.

Bu tez disiplinlerarası çalışmaların önem kazandığı günümüzde biyolojik sistemlerin mekanik modellenmesi sayesinde hücre biyologlarının hücre organelleri, virüsler vb. moleküler düzeydeki sistemlerin mekanik özelliklerini anlamalarına yardımcı olacaktır. Ayrıca görülmüştür ki birçok nano devre unsurları tasarlanırken biyolojiden ilham alınmaktadır.

Bu amaçla bu çalışmada nanoteknolojide kullanılan, bilinen en güçlü ve en sert lifler olan karbon nanotüp ile hücre iskeletinin en önemli yapı taşı olan mikrotüpçüğün yerel olmayan elastisite teorisi ile eğilme ve titreşim analizleri yapılmıştır. Bu yöntemin uygulanabilirliği için gerekli hareket denklemleri elde edilmiş, denklemlere klasik elastisite teorisine ek bir parametre olarak malzeme iç karakteristik uzunluğunun da eklenmesi sağlanmıştır.

Bana bu konuda çalışma imkanı sunan ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Ömer CİVALEK'e ve tezin yürütülmesindeki katkılarından dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan ERSOY'a, maddi-manevi desteklerinden dolayı aileme ve eşim Türev IşIK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI	2
2.1. Nanoteknoloji	2
2.1.1. Karbon elementi ve karbon nanotüpler	5
2.1.1.1. Çok duvarlı karbon nanotüpler	10
2.1.1.2. Tek duvarlı karbon nanotüpler	10
2.1.2. Karbon nanotüplerin işlenmesi	11
2.1.3. Karbon nanotüplerin mekanik özellikleri	12
2.1.4. İnşaat sektöründe nanoteknoloji	15
2.2. Mikrotüpçükler	16
2.2.1. Mikrotüpçüklerin mekanik özellikleri	19
3. MATERYAL VE METOT	24
3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi	24
3.2. Yerel Olmayan Kiriş Teorileri	27
3.2.1. Euler-Bernoulli kirişi	27
3.2.1.1. Yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişinin eğilmesi	35
3.2.1.2. Uygulamalar	42
3.2.1.3. Yerel olmayan çubuk modeli eksenel titreşimi	55
3.2.1.4. Uygulamalar	58
3.2.1.5. Yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişinin titreşimi	60
3.2.1.6. Uygulamalar	69

3.2.2. Timoshenko kirişı	72
3.2.2.1. Yerel olmayan Timoshenko kirişinin eğilmesi	74
3.2.2.2. Uygulamalar	80
3.2.2.3. Yerel olmayan Timoshenko kirişinin titreşimi.....	93
3.2.2.4. Uygulamalar	101
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	107
5. SONUÇ	136
6. KAYNAKLAR.....	137
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

τ_{kl}	Gerilme tansörü
ρ	Kütle yoğunluğu
f_l	Kütle kuvveti yoğunluğu
u_l	Yer değiştirme vektörü
v	Elastik cismin kapladığı hacim
t	Zaman
ε_{kl}	Şekil değiştirme
$\tau_{kl}(x^l)$	x^l noktasındaki yerel gerilme tansörü
$\varepsilon_{kl}(x^l)$	Cismin x^l noktasındaki lineer şekil değiştirme tansörü
$\alpha x - x^l $	Öklidyen formda uzaklık
μ, λ	Lame sabitleri
a	Malzemenin iç ve dış karakteristik uzunluğu
e_0	Her malzeme için deneysel olarak belirlenmiş olan katsayı
u, v, w	Orta düzlemdeki bir noktanın yer değiştirmeleri
ψ	Euler- Bernoulli kiriş teorisinde eğilmeden kaynaklı olan dönme açısı
ε_i	i yönündeki şekil değiştirme
E	Elastisite modülü
A	Kiriş enkesit alanı
σ_{ij}	ij yönündeki normal ve kayma gerilmesi bileşeni
γ_{ij}	ij yönündeki açısal şekil değiştirme
G	Kayma modülü
I	Alan atalet momenti
q_0	Kiriş üzerindeki düzgün yayılı yük
U	Şekil değiştirme enerjisi

W	Dış kuvvetlerin yapmış olduğu potansiyel enerji
π	Toplam potansiyel enerji
δ	Varyasyon
$\delta(x - x_0)$	Dirac- δ fonksiyonu
$H(x - x_0)$	Birim basamak fonksiyonu
P_i	i noktasına etki eden tekil kuvvet
a_i	i noktasına etki eden kuvvetin konumu
V	Kesme kuvveti
M	Eğilme momenti
c_i	İntegral sabitleri
Ω	Boyutsuz frekans parametresi
ϕ	Kayma gerilmesinden dolayı kiriş eksenindeki dönme
K_s	Kayma şekil değiştirmesi uyum katsayısı

Kısaltmalar

ÇDKNT	Çok Duvarlı Karbon Nanotüp
KNT	Karbon Nanotüp
TDKNT	Tek Duvarlı Karbon Nanotüp
MT	Mikrotüpçük
TTM	Taramalı Tünelleme Mikroskobu
AKM	Atomik Kuvvet Mikroskobu
GDP	Guanozin di fosfat
GTP	Guanozin tri fosfat
RNA	Ribonükleik asit
TPa	Terapascal
GPa	Gigapascal
MPa	Megapascal

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Karbon atomlarının birbirleri ile bağlanım geometrileri.....	5
Şekil 3.2. Elmas, grafit, C60 ve nanotüp şekilleri	6
Şekil 3.3. Fullerene yapısı	6
Şekil 3.4. Grafit (A), grafen levha (B) ve karbon nanotüp (C).....	7
Şekil 3.5. KNT türleri (A) koltuk, (B) zigzag ve (C) kiral nanotüpler	9
Şekil 3.6. Çok duvarlı karbon nanotüp	10
Şekil 3.7. Tek duvarlı karbon nanotüp.....	11
Şekil 3.8. AKM ucu	11
Şekil 3.9. Ökaryotik hücrenin yapısı	16
Şekil 3.10. Mikrotüpçük yapısı	17
Şekil 3.11. Yuvarlak solucan (http://tr.wikipedia.org)	18
Şekil 3.12. Euler-Bernoulli kiriş eğilmesi ve koordinat sistemi.....	27
Şekil 3.13. Birim uzama.....	28
Şekil 3.14. Kayma şekil değiştirmesi.....	30
Şekil 3.15. Cisim üzerinden alınan birim küp ve üzerindeki gerilmeler	32
Şekil 3.16. Cisim yüzeyinde oluşan gerilmeler ve kuvvetler	33
Şekil 3.17. dx genişliğindeki sonsuz küçük parçacık	35
Şekil 3.18. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün basit mesnetli kiriş modeli .	42
Şekil 3.19. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün iki tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli.....	43
Şekil 3.20. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün tek tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli.....	45
Şekil 3.21. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün bir tarafı ankastre mesnet diğer tarafı basit mesnetli kiriş modeli.....	46
Şekil 3.22. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün basit mesnetli kiriş modeli.....	48
Şekil 3.23. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün tek tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli	50
Şekil 3.24. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün iki tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli	51
Şekil 3.25. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün bir tarafı ankastre mesnet diğer tarafı basit mesnetli kiriş modeli	53

Şekil 3.26. Eksenel yüklü çubuk modeli.....	55
Şekil 3.27. Euler-Bernoulli kirişinin boyuna titreşimi ile oluşan iç tesirler.....	60
Şekil 3.28. Timoshenko kiriş konum ve koordinatları.....	72
Şekil 3.29. Timoshenko teorisinde diferansiyel parçaya etkiyen iç kuvvetler ve yer değiştirmeler.....	93
Şekil 4.1. İki tarafı basit mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	108
Şekil 4.2. Düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	109
Şekil 4.3. Tek tarafı ankastre mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	111
Şekil 4.4. Tek tarafı ankastre mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe moment değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	112
Şekil 4.5. İki tarafı ankastre mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	113
Şekil 4.6. İki tarafı ankastre mesnetli düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	114
Şekil 4.7. Tek tarafı ankastre mesnetli tek tarafı basit mesnetli düzgün yayılı yük etkisinde q değerleri değişikçe deplasman değerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	115
Şekil 4.8. Tek tarafı ankastre mesnetli tek tarafı basit mesnetli düzgün yayılı yük etkisinde e_0a değerleri değişikçe eğilme momenti değerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	116
Şekil 4.9. İki tarafı basit mesnetli ortasından tekil yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	117
Şekil 4.10. İki tarafı basit mesnetli ortasından tekil yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	118
Şekil 4.11. Tek tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	119
Şekil 4.12. Tek tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	120
Şekil 4.13. İki tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi.....	121

Şekil 4.14. İki tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi	122
Şekil 4.15. İki tarafı basit mesnetli Timoshenko kirişinin düzgün yayılı yük etkisinde kiriş orta noktasının deplasman değerlerinin e_0a değişikçe D/L 'ye bağlı değişimi	124
Şekil 4.16. İki tarafı ankastre mesnetli Timoshenko kirişinin düzgün yayılı yük etkisinde kirişin deplasman değerlerinin x/L değişikçe D/L 'ye bağlı değişimi.....	124
Şekil 4.17. Tek tarafı basit mesnetli Timoshenko kirişinin düzgün yayılı yük etkisinde kiriş orta noktasının deplasman değerlerinin e_0a değişikçe D/L 'ye bağlı değişimi	125
Şekil 4.18. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin 1. mod için L değişikçe boyutsuz frekans değerinin e_0a 'ya bağlı değişimi	126
Şekil 4.19. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin 1. mod için e_0 değişikçe boyutsuz frekans değerinin L 'ye bağlı değişimi	127
Şekil 4.20. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a/L değişikçe boyutsuz frekans değerinin mod sayısına bağlı değişimi	128
Şekil 4.21. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a/L değişikçe boyutsuz frekans değerinin mod sayısına bağlı değişimi	129
Şekil 4.22. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin L değişikçe boyutsuz frekans değerinin mod sayısına bağlı değişimi.....	130
Şekil 4.23. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin L değişikçe boyutsuz frekans değerinin e_0a 'ya bağlı değişimi	131
Şekil 4.24. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a değişikçe boyutsuz frekans değerinin L 'ye bağlı değişimi.....	132
Şekil 4.25. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a/L değişikçe boyutsuz frekans değerinin mod sayısına bağlı değişimi	133
Şekil 4.26. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin mod sayısı değişikçe boyutsuz frekans değerinin e_0a/L 'ye bağlı değişimi.....	134
Şekil 4.27. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin mod sayısı değişikçe boyutsuz frekans değerinin L 'ye bağlı değişimi	135

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1. Karbon nanotüplerin karşılaştırmalı özellikleri.....	14
Çizelge 2. Mikrotüpçüklerin malzeme ve geometri özellikleri.....	107
Çizelge 3. Karbon nanotüplerin malzeme ve geometri özellikleri.....	107

1. GİRİŞ

Günümüzde teknolojik gelişmeler hızla artmakta ve kullanılan malzemelerin boyutları da aksi bir yönde azalmaktadır. Günlük hayatımıza baktığımız zaman bilgisayar, cep telefonu başta olmak üzere birçok eşyamızın işlev ve özellikleri sürekli yenilenme ve gelişmekte iken boyutları küçülmektedir. Bir aygıtta kullanılan malzemenin boyutu küçüldükçe çalışma hızı artmakta ve o malzemenin yeni özellikleri de ortaya çıkmaktadır. Daha da önemlisi malzemeyi oluşturan atom sayıları 100'ler seviyelerine inince atomsal yapının geometrisi, hatta atom sayısının kendisi bile fiziksel özelliklerin belirlenmesinde etken olmaktadır. Yeni teknolojilerin sağlık hizmetlerinde de başarıyla uygulanması, DNA'yla ilgili teknolojilerin gelişmesi bilim insanlarını ve mühendislerini hergün daha küçük boyutlara inmeye, daha az yer kaplayan, daha az enerji harcayarak daha hızlı çalışabilen aygıtlar yapmaya zorlamıştır.

1980'li yıllarda Nobel Fizik ödüllerine konu olan çeşitli bilimsel çalışmalar nano yapıların çeşitli özelliklerini ortaya çıkarması yanı sıra atomları taşıyabilmeye de olanak vermiştir. Önce taramalı tünelleme mikroskopunun (TTM) ve ardından atomik kuvvet mikroskopunun (AKM) keşfi yüzeyde bulunan atomların gözlenmesine ve taşınmasını sağlamıştır.

Ancak nano boyutundaki yapıların tasarlanabilmesi için öncelikle mekanik davranışlarının çok iyi bilinmesi gerekmektedir. Malzeme boyutu küçülünce kuantum davranışlar klasik davranışların önüne geçmiş ve yepyeni fiziksel, kimyasal ve biyolojik özelliklere sahip malzemelerin ortaya çıktığı görülmüştür. Deneysel ve simulasyon yöntemler çok zaman ve yüksek kapasiteli bilgisayarlar gerektirdiğinden sürekli ortam modelleri önem kazanmıştır. Burada da klasik teoriler yardımıyla elde edilen sonuçlar ile deneysel sonuçların farklılık gösterdiği görülmüştür. Yerel olmayan elastisite teorisi bu problemi ortadan kaldırmaya yönelik olarak geliştirmiş bir teoridir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Nanoteknoloji

“Nano” terimi, bir şeyin bir milyarda biri anlamına gelmektedir. “Nanoteknoloji”, “nanobilim” gibi başında “nano” ön eki bulunan terimler, “nanometre” teriminden ortaya çıkmıştır. Temel olarak nanometre, diğer ölçüm skalaları gibi bir ölçüm skalasıdır. Bir metrede 1.000.000.000 nanometre vardır, yani bir nanometre, bir metreden bir milyar kere küçüktür. Bir nanometre, aşağı yukarı orta boyutta bir molekülün, örneğin 60 karbon atomu içeren bir molekülün boyutundadır (Sharifzadeh 2006).

Nanobilim, nano ölçülerinde yapıların elde ettiği yeni özellikleri kuantum kuramı yardımıyla anlamamızı sağlarken, nanoteknoloji nanoyapılara yeni atom ve moleküller ekleyerek yeni özellikler sentezlemektedir (Çıracı 2006). Yani nanoteknoloji, atom ve moleküllerin bir araya getirilmesi ile nanometre ölçeklerde işlevli yapıların oluşturulması şeklinde özetlenebilir (Erkoç 2008).

Nanoteknolojinin temel prensibi atomlar veya molekülleri tek tek alıp hassas şekilde birleştirerek her istenen ürünü elde etmektir. Bu teknolojinin temeli, doğadaki atomik dizilimi taklit etme ilkesine dayanmaktadır. Bilindiği gibi bütün maddeler atomlardan oluşmuştur. Özelliklerini de atomlarının dizilişlerinden almaktadırlar. Atomları hareket ettirerek doğadaki atomik dizilim taklit edilerek her şey kopyalanabilmektedir. Çünkü; maddeleri farklı kılan, en küçük birim olan atomların dizilişlerindeki çeşitliliktir.

Nanoteknolojiyle ilgili iki kavram daha vardır: mikro montaj ve kendi kendine çoğalma. Mikro montaja olan ihtiyaç moleküler robot sanayisine olan ilgiyi artırmaktadır. Nano makineler en iyi örnek tüm canlıların hücrelerinde bulunan ve hemen hemen her çeşit proteini üretebilen ribozomlardır. Ribozomlar oldukça küçük organellerdir (sadece birkaç mikro metre küp boyutunda) ve amino asitleri hassas çizgisel bir sırayla arka arkaya dizerek proteinleri oluştururlar. Bu işlem için ribozomun belirli bir amino asiti seçebilme tekniği vardır. Bunu özel bir tür transfer RNA molekülünün yardımıyla yapar. Ribozomun bu işlemde izleyeceği sıra ona haberci RNA

(mRNA) tarafından bildirilir. İşte ribozomların bu işleyiş prensibi, mühendislik alanında uygulanabildiğinde nanoteknoloji hayatımızın her yönüne hitap edecektir. (<http://www.nanoteknolojimucizesi.com>)

Nano ölçeklerdeki bir yapıya yeni eklenen her atomun fiziksel özelliklerde neden olduğu değişiklikler, atomun cinsine, nanoyapının türüne ve geometrisine bağlı olarak belirginleşmektedir. Örneğin, nanoyapının iletkenliği, o yapıya tek bir atom eklense bile değişebilmektedir. Benzer şekilde, nanoölçekteki atomlararası bağ yapısı da değişikliğe uğrayabilmekte; mekanik olarak malzeme güçlenirken ya da zayıflarken, elektronik olarak tümüyle değişebilmektedir. Örneğin yarı iletken olarak bilinen ve çağımızın en önemli malzemesi olan silisyumdan yapılan bir telin çapı nanometreye yaklaşırken tel iletken bir karakter sergilemektedir. Diğer ilginç bir malzeme de karbon elementidir. Yapıtaşını karbon atomunun oluşturduğu elmas kristali, bilinen en sert ve yalıtkan malzemedir. Kurşun kalemlerden tanıdığımız, 2 boyutlu, düzlemsel grafit tabakaları karbon atomunun yumuşak ve iletken bir yapısıdır. Bir boyuttaysa, karbon atomları çelikten çok daha yüksek bir çekme mukavemetine sahip olan ve normal koşullarda çok iyi bir iletken olan kararlı sicimleri yaparlar (Çıracı 2006).

Nanobilim ve Nanoteknolojinin Kronolojik Gelişimi

- 1959: Richard Feynman meşhur konuşmasını yaptı; “Eğer moleküler düzeyde malzemeler ve cihazlar yapılabılırsa bu, yeni buluşların kaynağı olacaktır.”
- 1974: Aviram ve Seiden ilk moleküler aygıt için patent aldı.
- 1981: G.K. Binnig ve H. Rohrer atomları tek tek görüntüleyebilmek için TTM’yi icat etti.
- 1985: R. Curl Jr, H. Kroto, R. Smalley C₆₀’ı keşfettiler.
- 1986: G.K. Binnig, C.F. Quate, C. Gerber AFM’yi icat ettiler.
- 1986: K.E. Drexler ‘Engines of Creation’ kitabını yayınladı (moleküler nanoteknoloji fikri).
- 1987: iletkenliğin kuantum özelliği ilk defa gözlemlendi.
- 1987: T.A. Fulton ve G.J. Dolan ilk defa tek elektron transistörü yaptı.
- 1988: W. De Grado ve ekibi ilk defa suni protein yaptılar.

- 1989: IBM (Zurich)'de 35 Xe atomundan IBM yazısı yazıldı.
- 1991: Iijima çok duvarlı karbon nanotüpleri keşfetti.
- 1993: Iijima ve Bethune tek duvarlı karbon nanotüpleri keşfetti.
- 1993: Rice Üniversitesi'nde (ABD) ilk 'nanoteknoloji' laboratuvarı kuruldu.
- 1997: N. Seeman ilk defa DNA molekülü kullanarak nanomekanik aygıt yaptı.
- 1998: C. Dekker ve ekibi TUBEFFET yaptı.
- 1999: M. Reed ve J.M. Tour ilk defa tek organik molekül ile elektronik anahtar yaptı.
- 2000: ABD'de ilk defa nanoteknoloji araştırmaları için 422 Milyon \$ kaynak ayırdı.
- 2001: ilk defa nanotüplerden transistör ve mantık devreleri yapıldı.
- 2001: ZnO nanotel laseri yapıldı.
- 2002: Süperörgü nanoteller yapıldı.
- 2005: ilk dört tekerlekli nano araba modeli hareket ettirildi (Erkoç 2007).

Nanoteknolojinin amaçları kısaca aşağıdaki gibi verilebilir:

- Nanometre ölçekli yapıların analizi
- Nanometre boyutunda yapıların fiziksel özelliklerinin anlaşılması
- Nanometre ölçekli yapıların imalatı
- Nano hassasiyetli cihazların geliştirilmesi
- Nano ölçekli cihazların geliştirilmesi
- Uygun yöntemler ile makroskopik ve nanoskopik bağın kurulabilmesi (Cenger 2006).

Nanoteknolojinin kullanım alanları:

- Malzeme ve imalat
- Nanoelektronik ve bilgisayar teknolojisi
- Havacılık ve uzay çalışmaları
- Tıp ve sağlık
- Çevre ve enerji
- Biyoteknoloji ve tarım

- Bunlardan başka; daha hafif ve daha emniyetli taşıma sistemleri; kirlilik ölçümleri, kontrolü, azaltıcı yöntemleri geliştirmeleri; güvenilir adli araştırmalar, kaliteli baskı işleri, kuantum özellikleri ile bilgisayar uygulamalarında , nanometre boyutunda miknatıslar yapılabilir (Erkoç 2007).

2.1.1. Karbon elementi ve karbon nanotüpler

Biyolojik yapılar nanoteknolojinin gelişmesinde ilham kaynağı olmuştur. Karbon elementi canlıların temel taşıdır. Nanoteknoloji çağının başlamasında en önemli rolü oynayan karbon nano yapılar nano makinelerin, nano robotların vazgeçilmez elemanları olacaktır. Karbon nanoyapılar, bu tür nanosistemlerin yapılmasında şimdilik tek alternatiftir. Nanoteknolojide, uygun malzeme ve bu malzemeyi işleyebilecek teknik düzenek en önemli iki unsurdur. Günümüzde bunu sağlayabilen en uygun element de karbondur.

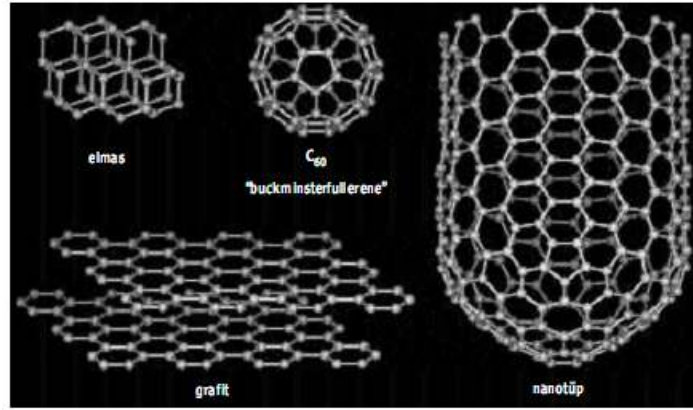
Karbon atomu 6 elektronu ile ($1s^2 2s^2 2p^2$) periyodik tabloda IV. Grup elementlerinin ilk elemanıdır. Karbon atomları kendi aralarında, bağlanmaya karışan elektronların sayısına göre sp^3 , sp^2 ve sp^1 gösterimleriyle ifade edilen üç farklı bağlanma (etkileşme) göstermektedirler. Bu gösterimler aynı zamanda bağlanma geometrisini de temsil etmektedir. Karbon elementi, her üç bağlanma geometrisini gösterebilen tek element olması bakımından istisnai bir özelliğe sahiptir.



Şekil 3.1. Karbon atomlarının birbirleri ile bağlanım geometrileri

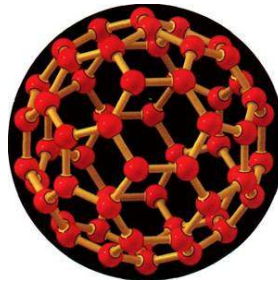
Karbon atomlarından oluşan malzemeler karbon atomlarının kendi aralarındaki etkileşim (bağlanma) geometrisine göre, çok farklı fiziksel ve kimyasal özellikler göstermektedirler. Karbon atomunun bu niteliğiye, 6 adet elektronu olmasından kaynaklanır. Bu elektronlardan ikisinin ($1s^2$) bağlanmaya hiç etkisi yoktur; ayrıca $1s^2$ elektronlarıyla geri kalan (bağlanmaya karışan) elektronların enerjileri arasında da büyük fark vardır. Bu sayede karbon, üç boyutlu (3B) yarıiletken elmas yapıdan, iki

boyutlu (2B) yarımetalik grafitte, bir boyutlu (1B) iletken ve yarıiletken nanotüplere ve sıfır boyutlu (0B) nanotoplara kadar farklı kararlı yapılara ve birçok ilginç özelliğe sahip önemli bir element olmaktadır. Karbonun 1B ve 0B yapıları nanometre düzeyde olması nedeniyle bu sistemlere nanotüpler ve nanotoplar denir diğer bir deyişle karbon nano yapıların aslını toplar ve tüpler oluşturmaktadır (Erkoç 2001, 2008).



Şekil 3.2. Elmas, grafit, C₆₀ ve nanotüp şekilleri

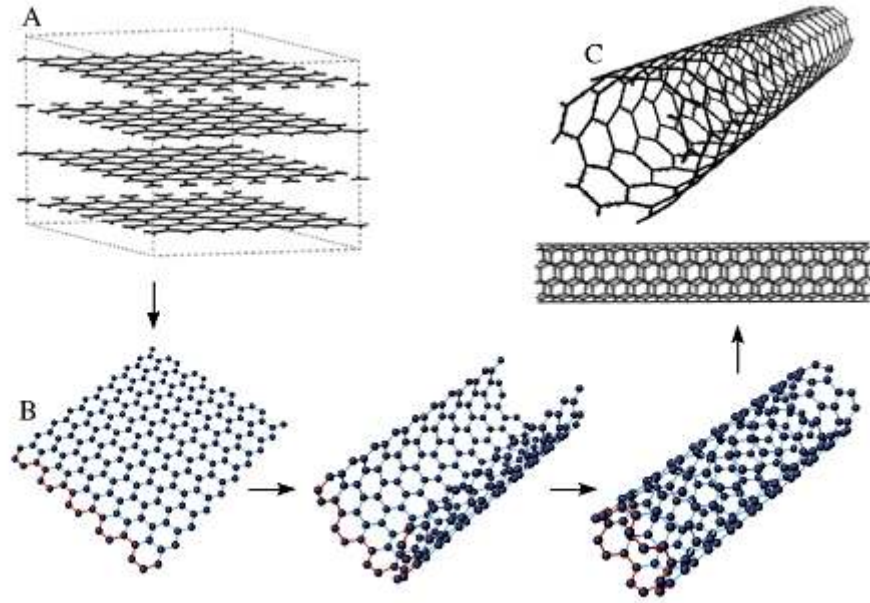
Karbon nanotoplar; karbondan top şeklinde kafes yapısı oluşabileceğini ilk D.E.H. Jones söylemiştir. Daha sonra 1970 yılında E. Osawa kase şeklinde olan 'coranulene' molekülünü sentezlemesiyle bunların birkaçının bir araya gelerek top yapısını oluşturabileceği fikrini öne sürse de zamanında pek ilgi görmemişlerdir. En son 1984 yılında R. E. Smalley vd. grafit kristallerini eritip buharlaştırdıkları sırada farklı büyüklükte top şeklinde kafes yapılar oluştuğunu fark etmişlerdir. Bu toplar içerisinde özellikleri en iyi bilinen ve en sağlamı C₆₀ 'dır. Genel olarak ismine 'fullerene' denmektedir. En küçüğünde 20 tane karbon atomu vardır ve düzgün beşgenden oluşan bir yapıdadır (Erkoç 2008).



Şekil 3.3. Fullerene yapısı

Nanotoplar optik sınırlayıcı olarak kullanılır; malzemeleri aşırı ışıktan korumaya yardımcı olmaktadır. Karbon top içeren polimerler fotoiletkenlik özellik göstermektedirler. Bu özellikleri nedeniyle fotodiyot ve transistör olarak, ayrıca güneş pillerinde de kullanılabilmektedirler. Oksitlenmeye karşı iyi bir koruyucu olmalarından dolayı yüzey kaplama malzemesi olarak da kullanılabirler. Ayrıca elektronik aygıtlarda ve mikro mekanik sistemlerde yüksek sıcaklığa dayanıklı olması nedeniyle kullanılmaktadırlar (Cenger 2006).

Karbon nanotüpler; karbonun tüp şeklinde yapı oluşturabileceği ilk defa 1991 yılında Iijima tarafından deneysel olarak farkedilmiştir. Grafitten "arc-discharge" buharlaştırma yöntemiyle elde edilen tüpler, grafit plakasının kıvrılarak silindir şekline gelmesiyle içi boş boru halini almaktadırlar.



Şekil 3.4. Grafit (A), grafen levha (B) ve karbon nanotüp (C)

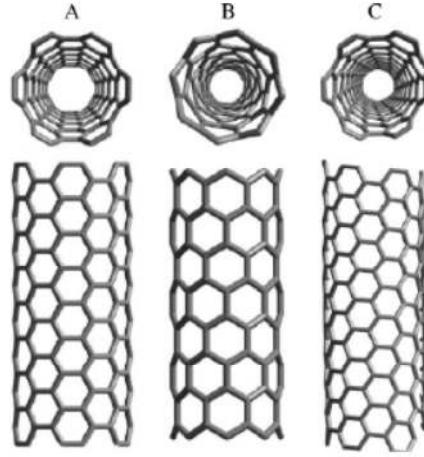
Karbon nanotüp grafitin bal peteğini andıran atom düzleminin bir silindir üzerine hiçbir kusur oluşturmadan kesiksiz olarak sarılmış bir şekli olarak düşünülebilir. Karbon nanotüplerin çapları nanometre, boyları mikrometre düzeyinde olabilmektedir. Nanotüplerin çapları şimdiye kadar üretilebilen en ileri yarıiletken aygıtlarınkinden çok daha küçüktür. Geometrilerine bağlı olarak yarı iletken ve metalik özellik gösterirler.

Nanotüpün sadece geometrik özelliklerinin (çapı, tüp yüzeyinin yönü vs.) değiştirilmesi suretiyle elektronik özellikleri de değiştirilebilmektedir (Erkoç 2008).

Nanotüplerin çok ilginç özelliklerinden dolayı karbon nanotüplerin yarıiletken teknolojisinde kullanılmaya başlanması yarıiletken fiziğinde çok büyük bir atılım vesile olacaktır. Tüpün geometrisine (çapına ve silindir yüzeyinin kıvrılma yönüne) bağlı olarak nanotüpler metal veya yarıiletkenlik özelliği gösterebilmektedir. Tüpün elektronik özellikleri, katkı maddesi olmaksızın yalnızca geometrik parametrelerle ayarlanabilmektedir (Çıracı 2005).

Bunların yanında karbon nanotüpler, bilinen en sağlam malzeme olma özelliğine sahiptir. Hasarsız bir karbon nanotüp, kendi ağırlığının 300 milyon katı bir ağırlığa dayanabilmektedir. Karbon nanotüplerin bir başka ender özelliği de, eksenleri boyunca çelikten bile kat kat dirençli, radyal yöndeysel yüksek elastik özelliklere sahip olmalarıdır (Çıracı 2005). Çok esnek ve sağlam olmaları nedeniyle, tüp eksen yönünde çekilmeye karşı, hasar görmeksizin direnç göstermektedirler. Küçük çaplı (yaklaşık 1–2 nm) tüplerden oluşturulmuş bir demeti koparabilmek için uygulanan çekme kuvvetinin büyüklüğü yaklaşık 36 gigapaskaldır. Buna göre, nanotüp fiberlerin gerilmeye karşı en sağlam malzeme özelliğini taşıdığı sonucuna varılabilir.

Farklı çap ve boyda olabilen bu yapıların uçları da açık veya kapalı olabilir. Duvarlarıysa ya tek, ya da iç içe geçmiş silindirler halindedir. Grafit plakasının kıvrılma yönüne göre nanotüpler değişik mekanik ve elektronik özellikler gösterebilmektedirler. Nanotüp yapıda, grafit plakalarında olduğu gibi sadece altıgen şekiller bulunuyor; yapı, eğer tüpün uç kısmına gelen kısım altıgenin kenarıysa "sandalye kolu", köşesiyse "zikzak" olarak adlandırılmaktadır. Sandalye kolu modeli metal özelliği gösterirken, zik-zak modeli yarıiletken özelliğindedir. Ancak zikzak model, tüpün çevresindeki altıgen sayısının 3'ün katları olması durumunda metal özelliği gösterebilmektedir (Erkoç 2008).



Şekil 3.5. KNT türleri (A) koltuk, (B) zigzag ve (C) kiral nanotüpler

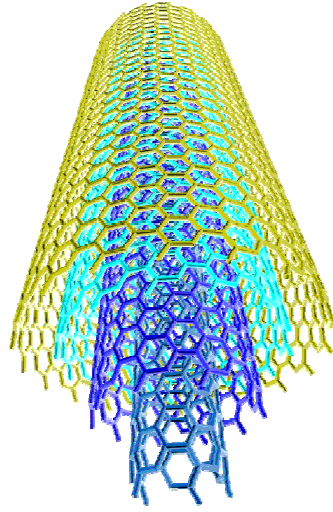
Karbon tüplerin, makroskopik büyüklüklerde oluşmaları mümkünse de bunlar çok kırılğan, nanometre düzeyindeki boyutlara sahip tüplerse çok esnek ve sağlam özelliktedir. Şerit halinde ve helezoni şekilde de üretilebilen nanotüplerin farklı çaplarda olanları birbirine eklenebilmekte; eklem, bükülme veya kıvrılma yerlerinde farklı geometrik şekiller (beşgen, yedigen gibi) oluşmaktadır.

Karbon nanotüplerin bilimsel macerası 1985'te 60 ya da daha fazla karbon atomunun birleştirilmesiyle oluşan 'fulleren'in elde edilmesiyle başlamıştır. Bundan sonra birçok laboratuvar sıcak karbon atomunu yoğunlaştırarak değişik şekil ve boyutta yapılar elde etmişlerdir. 1991 yılında elektron mikroskobu uzmanı Sumia Iijima ark- buharlaştırma sentezi sırasında katotta biriken malzemeyi araştırma sırasında bulmuştur. Daha sonra yine aynı laboratuardan Thomas Ebbeson ve Puclickel Ajayan ark- buharlaştırma ile nanotüp üretilebileceğini göstermiştir. Standart ark- buharlaşma ile yalnız çok katmanlı karbon nanotüpler üretilebilmiştir. Daha sonralarda grafit elektroduna kobalt eklenmesi suretiyle tek duvarlık karbon nanotüpler üretilebilmiştir (Koç 2003).

Karbon nanotüplerin elektronik malzeme olarak kullanılabileceği öngörülmektedir. Bir boyutlu silindir şeklinde teller olarak, hafıza ve anahtar aygıtları olarak, optik ve manyetik malzeme olarak da kullanılabileceği laboratuvar şartlarında gösterilmiştir. Ayrıca kapasitör, transistör, diyot, mantık devresi ve elektronik anahtar yapımında kullanım alanları vardır (Erkoç 2008).

2.1.1.1. Çok duvarlı karbon nanotüpler

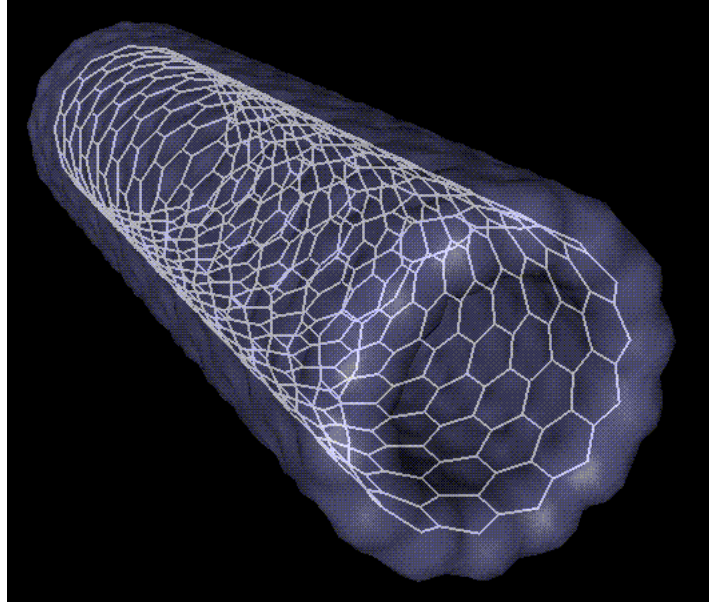
İç içe dizilmiş eş merkezli silindirlerden oluşan çok katmanlı görünüme sahip nanotüpler, çok duvarlı karbon nanotüpler (ÇDKNT) olarak adlandırılır. Çok duvarlı karbon nanotüplerin dış yarıçapları 15 nm'den küçük olan nano yapılarla sınırlıdır. Çok duvarlı karbon nanotüpler çok geniş yapısal oranlarda sentezlendiğinden temel yapı taşlarının özelliklerinin incelenmesi ilgi çekmiştir. Bunlar; geometrilerine bağlı olarak metalik veya yarı iletken olabilirler (Sevi 2006).



Şekil 3.6. Çok duvarlı karbon nanotüp

2.1.1.2. Tek duvarlı karbon nanotüpler

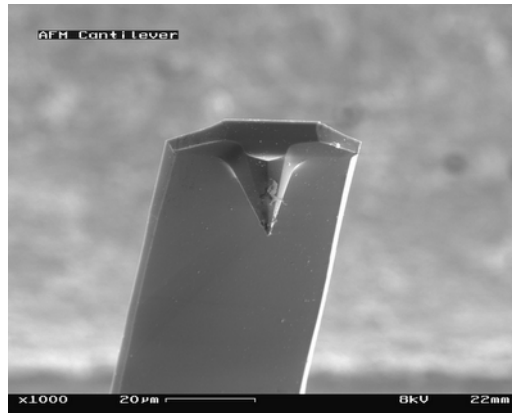
Çok duvarlı karbon nanotüplerin temel yapıtaşı olup, merkez doğrultusunda bir atom kalınlığında olan tek silindirden oluşan yapı tek duvarlı karbon nanotüp (TDKNT) olarak adlandırılır. TDKNT'lerin elektriksel iletkenlikleri, yüksek gerilme kuvvetleri ve cihaz uygulamaları potansiyellerinden dolayı büyük önemi vardır. Bu yüzden nano ölçekli yapılardaki araştırmalarda ilk sırada gelen malzemelerdir. Tek duvarlı karbon nano tüpler silindir şeklinde ek yeri olmaksızın tüp haline getirilmiş tek grafit tabakası (grafin) olarak düşünülebilmektedir. Tüpün eksen boyunda uzunluğu mikro metre, çapı ise nanometre boyutunda olup, tek atom kalınlığındadır ve genellikle çevresi boyunca az sayıda (10-40) karbon atomu içermektedir. Grafin altı tane karbon atomundan oluşan bal peteği örgülerden oluşmaktadır (Sevi 2006).



Şekil 3.7. Tek duvarlı karbon nanotüp

2.1.2. Karbon nanotüplerin işlenmesi

Nanotüplerden devre yapabilmek için, kontrollü bir şekilde nanotüpün işlenmesi önemlidir. Nanotüpün konumunu, şeklini ve yönelimini değiştirebilmek için atomik kuvvet mikroskobu (AKM) kullanılmaktadır. AKM'den ilk kez kontak yapmayan modelde, AKM ucunu tarayarak nanotüp görüntüsünü elde etmek için kullanılmıştır. Sonrasında AKM ucu zemine getirilerek, nanotüpü hareket ettirmek için yararlanılmıştır. Nanotüp ve zemin arasındaki güçlü bağlardan dolayı ilk şekline dönmeyerek bırakıldığı gibi kalmaktadırlar (Koç 2003).



Şekil 3.8. AKM ucu

2.1.3. Karbon nanotüplerin mekanik özellikleri

Nanotüplerin moleküler boyutlu olmasına rağmen atomlarına kadar ulaşım için yüzey ve geometrisinin uygun olması, çapının düzenli ve kendi mikrometre ölçüsü boyunca değişmeyen morfolojisi nanotüpleri benzersiz ve çekici yapmaktadır (Yakobson 2001).

Grafit tabakasındaki karbon atomlarının her biri üç komşu atoma kimyasal bağ ile bağlanmaktadır. Bu bağ doğada bilinen en güçlü bağlardan olduğundan, karbon nanotüplerin çok sağlam ve yüksek elastisite modülüne sahip olmaları beklenmektedir. Ayrıca bu nedenle tek katmanlı karbon nanotüplerin, tıpkı uzay teknolojisi uygulamalarında kullanılan karbon fiber gibi, çok sağlam olması ve büyük kuvvetlere dayanması beklenmektedir. Kuramsal ve deneysel çalışmalar, karbon nanotüpün elastisite modülünün en az grafitinki kadar yüksek, hatta küçük çaplı TDNT'lerin daha yüksek olabileceğini, ÇDNT'lerde ise elastisite modülünün tüp duvarlarının düzen derecesine bağlı olduğunu göstermiştir. Düzensizliğin artmasıyla elastisite modülü azalmaktadır (Salvetat 1999).

KNT'lerin mekanik özelliklerini belirleyen önemli parametreler, elastisite modülü ve poisson oranıdır. Bu parametreler gerilme, eğilme ve burkulmaya karşı dayanıklılık gibi durumları açıklar. Nanotüplerin elastisite modüllerinin ilk ölçümlerinde sabitlenmiş nanotüplerin serbest uçlarının ısısal titreşim genlikleri ile sıcaklık ilişkisi incelenmiştir. Hesaplara göre izole edilmiş TDKNT'lerin elastisite modülleri tüp çapına veya chiral açısına çok fazla bağlı olmayıp, karbon fiberlerin asimptotik limitlerine uygun olarak yaklaşık 1 Terapascal (TPa) değere sahiptir. Bununla birlikte ÇDKNT'ler için elastisite modülü, tüp çapı arttıkça biraz azalmaktadır. Farklı nanotüp örnekleri için gerilmeye dayanıklılığın, farklı türdeki kusur konsantrasyonuna, deneysel esneklik parametrelerine ve sentezleme tekniklerine bağlı olduğu düşünülmektedir.

KNT'ler çok yüksek elastisite modülüne sahip olmalarına rağmen, atomik kuvvet mikroskobu (AFM) ölçümlerine göre, kırılmaksızın halka halinde bükülebilmektedir. Böylece KNT'lerin esnekliği, dayanıklılığı ve geri dönüşümlü şekil değişiklikleri kapasitesi incelenmektedir. Küçük çaplı TDKNT'ler kopmadan yaklaşık %30 uzatılabilmekte ve 55 Gigapascal (GPa) değerinde koptuğu belirlenmiştir. Bu, bilinen

en sağlam malzemelerden daha sağlam bir yapı özelliği gösterir. Nanotüp lifler, gerilmeye karşı en sağlam malzemelerdir.

ÇDKNT'lerle yapılan gerilme kuvveti deneylerine göre en dıştaki tabaka kırılırken iç tabakalar sıyrılarak çıkmaktadır. Burkulma kuvveti etkisinde dış tabakalarda burkulma nedeniyle iç tabakalarda baskı olması sonucu ile ÇDKNT'ler burkulmaktadır. Çapı 12 nm den küçük olan nanotüpler yaklaşık 1 TPa değerinde burkuldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte çap arttıkça bu rakam 100 GPa değerine kadar düşmektedir. Deneyler sonucunda, ÇDKNT'lerin eksenleri boyunca uzamasının zor olmasına rağmen, burkulmalarının kolay olduğu ve şekil değişikliklerine karşı geri dönüşümlü olarak dayanabildikleri ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte simülasyonlarda hesap limitlerinden dolayı, simülasyonlar kırılma deneylerindeki zaman ölçeğini kapsayamayacak kadar kısa sürmektedir. Dolayısıyla simülasyonlarla nanotüplerin gerçek dayanıklılığının belirlenmesi; oldukça değişken ölçeklendirmeler gerektirdiğinden dolayı zahmetli bir iştir (Sevi 2006).

En sağlam çelik alaşımları bile 2 MPa'da koparken laboratuvar deneylerinde tek duvarlı küçük çaplı karbon nanotüplerin gerilme mukavemeti 45.000 MPa olarak belirlenmiştir. Üstelik karbon nanotüpler düğüm yapılabilecek kadar esnektirler. Gelecekte karbon nanotüp demetleriyle yapılan karbon nanotüp lifler, üstün dayanımları ve esneklikleri ile süper malzemeler olacaklardır. Bu liflerle dokunacak süper membranlar çok geniş yüzeylerin, hatta kentlerin üzerini örtebilecektir (Erkoç 2001).

Küçük çaplı karbon nanotüpler yüksek esneklik ve dayanıklılığıyla grafitten ileri mekanik özelliklere sahiptir. Bu özellikler karbon nanotüplerin kompozit malzemeleri güçlendirmek için kullanılabilecek yeni bir malzeme olduğunu göstermiştir. Ayrıca karbon nanotüp lifleri, beton ve yapı plastikleri içerisinde güçlendirme malzemesi olarak kullanılması mümkündür. Karbon nanotüplerin mekanik özellikleri üzerindeki kuramsal çalışmalar, nanotüp üretiminin kolay anlaşılabilmesi ve nanometre boyutundaki malzemelerin kolay işlenememesi nedeniyle deneysel çalışmalardan çok daha ileridedir. Ancak, AKM'deki ilerlemeler daha doğru sonuçlar alınmasına yardımcı olmaktadır (Salvetat 1999).

Çizelge 1’de karbon nanotüplerin diğer malzemelere göre avantaj ve dezavantajları bir tablo ile sunulmaktadır.

Çizelge 1. Karbon nanotüplerin karşılaştırmalı özellikleri

Özellik	Tekduvarlı Karbon nanotüp	Başka Malzemeler
Ebadı:	0,6-1,8 nm çapında	Elektron demeti ile 50 nm x 5nm ebatında çizgiler oluşturulabilir
Yoğunluk:	1,33-1,40 gr/cm ³	Alüminyum: 2,7 gr/cm ³
Gerilme Mukavemeti	45 Gigapascal	En sağlam çelik alaşımları 2 megapascal'da kopar
Esneklik	Düğüm yapabilecek kadar esnek	Metaller ve karbon fiberler kırılır
Akım Taşıma Kapasitesi	1 gigaamper/cm ²	Bakır teller 1 megaamper/cm ² de yanar
Alan Yayma	1 mikro metre uzaklıkta fosfor atomlarını 1-3 Volt civarında uyarabilir	Molibdenum uç 50-100 Volt/mikrometre (kısa ömürlü)
Su İletimi	Oda sıcaklığında 6000 W/Mk	Saf elmas 3320W/Mk
Sıcaklığa Karşı Dayanıklılığı	Havada 750 °C'ye kadar vakumda 2800 °C'ye kadar	Mikroçiplerdeki metal teller 600-1000 °C'de erir.
Maliyet	1500 \$/gr	Altın: 10\$/gr
1nm= 10Å = 10 ⁻⁹ m; 1mikrometre= 10 ⁻⁶ m; 1Gigapascal=10 ⁹ Pascal; 1Pascal= 1N/m ²		

2.1.4. İnşaat sektöründe nanoteknoloji

Nano teknoloji inşaat sektörüne de damgasını vurmaktadır. Nano teknolojiden yararlanılarak uygulanan zemin- beton kaplaması mineral kökenli zeminlerin aşınmalara ve kirlenmelere karşı dirençli olmasını sağlamaktadır.

Bu kaplama çimento, beton veya bina cepheleri gibi gözenekli malzemeler için sızdırmazlık sağlamaktadır. Ürün, ilk tatbikinizden sonra her tür gözenekli yüzeyde görünmez, su sızdırmaz, kir geçirmez ve ultraviyole ışınlarına karşı dayanıklı bir yüzey elde edilmektedir. Bu sektördeki kullanım alanları; lifli çimento, tuğla, kiremit, klinker, kaplama malzemeleri, fayanslar, taş plakalar, mineral zeminler, doğal taşlar, mermerler, mutfak tezgahları kaplamanın kullanılabileceği alanlar olarak göze çarpmaktadır.

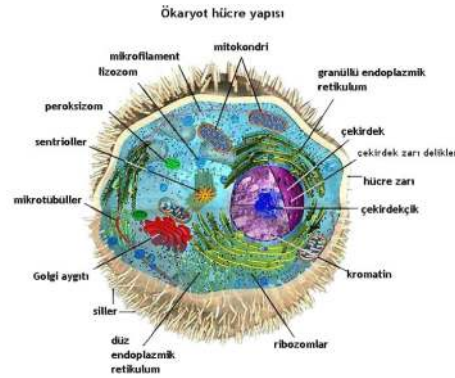
Bunların dışında, mezar taşlarının ve heykellerin kirlenmesi ve renklerinin değişmesi de kaplama sayesinde engellenebilmektedir. Püskürtme yöntemiyle uygulanan bu kaplamanın dayanıklılık süresi ise 15 yıldır. Dış etkenlere bağlı olarak bu süre uzayabilmektedir (Çıracı 2006).

“Nanotechnology in Construction, 2nd Intl. Symposium, Bilbao, 13-17th Nov. 2005” sempozyumuna konu olan “NANOCONEX” yol haritasına göre, Nanoconex projesinde üretilmesi planlanan nano inşaat malzemeleri;

- Çelik: Paslanmaya dayanıklı
- Beton:
 - Düşük enerji çimento
 - Yeni alışılmadık polimerler (Ductile çimento, çok sert beton)
 - Nanokatmanlar, boya
- Seramik, Tuğla, Cam
 - Bio- aktif yüzeyler
 - Güçlü seramik
 - Kendini temizleyen camlar

- Bitum ‘polimer’
 - Nanolifler
 - Moleküler self assembly polimerler
- Kereste: Yoğun ve güçlü modifiye ya da sentetik keresteler (Tepe 2007)

2.2. Mikrotüpçükler



Şekil 3.9. Ökaryotik hücrenin yapısı

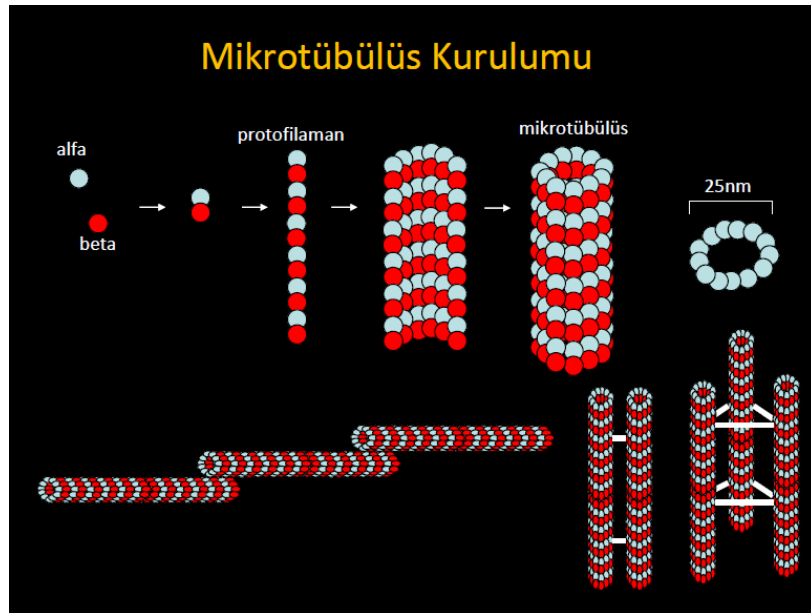
Ökaryotik hücrelerin fonksiyonları ve şekilleri muazzam bir alanı kapsamaktadır. Makrofajlar gibi bazı hücreler hareketli ve daha fazla veya daha az küresel, ancak iyi tanımlanmış bir şekli yoktur. Nöronlar gibi diğerleri hareketsiz ancak tam tanımlı üç boyutlu bir şekle sahiptir. Bir hücrenin şekli hücre iskeleti denen bir çerçeveye bağlıdır (Kasas ve Dietler 2007).

Ökaryotik hücrelerin sitoplazmaları büyütüldüğü zaman hücre iskeletini sağlayan ve iç içikliklerinden oluşmuş bir yapı ile karşılaşılacaktır. Hücre iskeleti sitoplazmanın büyük bir bölümünü destekleyerek mekanik bir iskele sağlar ve hücre bütünlüğünü korur (Howard ve Hyman 2003). Hücre iskeleti 3 temel içiklikten meydana gelmiştir. Mikrotüpçükler, mikrofilamentler ve ara filamentler. Bunlar birbirine bağlanmış organize bir şekilde çalışan proteinlerdir. Her protein lifinin hücre içindeki görevine göre fiziksel özelliği ve yapısı bulunmaktadır (Portet 2005).

Bu filamentler üç ana sınıftan oluşmaktadır, aktin filamentler en küçüğüdür ve 6 nm çapındadır, ara filamentler biraz daha kalın 10 nm çapında, mikrotüpçükler en büyüğü ve 25 nm dış çapında ve 15 nm iç çapındadır (Kasas ve Dietler 2007).

Mikrotüpçükler (MT) sitoplazmanın farklılaşması ile oluşan 10-25 nm çapında birbirine temas etmiş silindirik borucuklardır. Yapı taşları ‘tubulin’ adı verilen proteinlerdir. Protein alt birimleri α ve β tubulinlerdir. MT’lerin ana bileşenleri olan alfa ve beta tubulinler 1968 yılında tanımlanmıştır. Her iki protein de 55000 dalton moleküler ağırlığa sahiptir (Kasas ve Dietler 2007).

MT’ler α ve β tubulinlerin yan yana birbirine temas edecek şekilde bir araya gelmesiyle oluşmuş, yan bağları çok kuvvetli bir cisimdir (Portet 2005). Her biri 4-5 nm çapında olan ‘tubulin’ler doğru koşullar altında uzun zincirli protofilamentleri oluşturmak üzere GDP ile bağlanarak dairesel bir düzlem içinde polimerize olmaktadır (Jiang ve Zhang 2008). Protofilamentler yanal olarak bağlanarak bir levha oluşturmaktadırlar, daha sonra MT yapısını oluşturmak için kapanır bir levha formuna gelirler. Her bitişik protofilamentler arasında 0,92 nm kadar aralık vardır. 13 protofilament sonra birikmiş aralık kapanmış olmaktadır. Bu yapılandırma, protofilamentlerin MT eksenine paralel olduğunu göstermektedir. Mikrotübüllerin bu karakteristik özelliği ilk Amos, Klug ve Erickson tarafından tanımlanmıştır. MT’ler genelde demetler halinde bir arada bulunmaktadırlar. MT’leri bir arada tutan demein proteinleridir. Ayrıca MT’lere sağlamlık, güç ve hareket özelliğini de bu proteinler sağlamaktadır.



Şekil 3.10. Mikrotüpçük yapısı

Genelde bir sırada 13 protofilament bulunmasına karşın örneğin yuvarlak solucanda bir sırasında 15 protofilament bulunmaktadır. MT'ler yerleşimine göre bir sırada 9-16 arasında değişebilmektedir (Portet 2005).



Şekil 3.11. Yuvarlak solucan (<http://tr.wikipedia.org>)

MT'ler hücrede çekirdek yanındaki yıldızçiçeğinden hücre çevresine doğru yolu düzenlemektedir. MT'lerin hücre bölünmesinde kromozomların ayrılması sırasında iğ ipçiklerinin oluşmasında ve onların demiryolları gibi vezikül ve mitokondri vb. hücresel bileşenlerin hücre içinde taşınımını sağlamaktadır. Ayrıca hücrenin mekanik iskeletini sağlayıp hücrenin bütünlüğünü koruduğu gibi organel hareketine de yardımcı olmaktadır (Jiang ve Zhang 2008, Shi 2008). MT'ler hücre şekli bakımı, mitoz ve hücre içi ulaşım için önemli bir rol oynamaktadırlar (Portet 2005). Gen ifadesi, hareket, sinyal iletimi, yara iyileşmesi hep hücre iskeleti yardımı ile olmaktadır (Jiang ve Zhang 2008). Bu özelliklerinden dolayı MT'ler antikanser ilaçlar için önemli bir hedeftir (Gao ve Lei 2009). Ayrıca sinir liflerindeki aksonların içinde boydan boya uzanır. Sperm ve içkulak ayağı hücreleri gibi yüksek özel hücreler içinde kirpikler ve kamçı oluşumuna katılırlar. MT'ler ilk defa 1963 yılında Ledbetler ve Porter tarafından tanımlanmıştır (Kasas ve Dietler 2007).

MT'ler bu görevlerini sonlarına hücre yapılarının eklenmesiyle sağlamaktadırlar. Sanki MT'ler uzadıkça ya da kısaldıkça yapılar hücre etrafından çekilmekte ya da itilmektedir. Büyüme ve küçülme modlarındaki değişimin farklı özellikleri MT'leri

moleküler makine gibi düşünmeyi sağlamaktadırlar. Bağlanan proteinler her proteine bağlanan özel uçla ilişkilidir (Howard ve Hyman 2003). Kuyrukta alfa ve beta dimerlerin asimetrik olması nedeniyle MT'ler polar yapılardır (Kasas ve Dietler 2007). MT'lerin sürekli altbirim kazanarak uzayan ucu '+' uç, altbirimler kaybederek kısaldığı uç '-' uç olarak adlandırılmaktadır. Bu uçlar sürekli döngü halinde kazanç ve kayıp göstermektedirler. Bu sayede MT'ler kasılıp gevşeme ve uzama kısalma kabiliyetindedirler (Kirschner ve Mitchison 1986). '-'uçta sentriyoller denen özelleşmiş yapılar oluşmaktadır. Bir tubulin çeşidi olan sentriyoller yeni MT oluşturmak için halka hareketleri oluşturarak çekirdeklenmeyi başlatır. Çekirdeklenmeden sonra MT'ler '+' uçtan başlayarak sitoplazmaya doğru büyümektedir.

MT'ler tubulinlerin alfa beta dimerlerinin polimerizasyonu ile oluşmaktadır. Polimerizasyon tubulin dimerlerin kutupluluğunu yansıtan kutupsal işlemdir ve mikrotübüllerin kutupsallığını belirlemektedir. Mikrotübül yapı blokları yani alfa-beta heterodimerler, protofilament formun kuyruk başı ile ilişkilendirilmektedir. Tubulin dimer topluluğunun birine beta altı birimleri olan ucundan guanozin trifosfat (GTP) bağlıdır. Polimerizasyondan kısa bir süre sonra, beta- tubulin ile ilişkilendirilmiş GTP guanozin difosfat ile hidrolize edilmektedir. Bu nedenle MT içindeki birçok tubulin GDP ile ilişkilidir, sadece en son eklenen alt birimler GTP tutmaktadır. GDP'nin tam boyutu bilinmemektedir fakat mevcut kanıtlar onun küçük ve tek bir halkadan oluştuğunu söylemektedir (Kasas ve Dietler 2007).

2.2.1. Mikrotüpçüklerin mekanik özellikleri

MT'lerin biyolojik işlevlerini iki temel özellik sayesinde yapabildiği düşünülmektedir; dinamiklik ve rijitlik. Fakat 25 nm çapında bir tüpün rijitliğini ölçmek çok da kolay olmamıştır. MT'lerin mekanik özellikleri farklı yaklaşımlar ve tekniklerle 25 yıl kadar odaklanmanın ardından tanımlanabilmiştir (Kasas ve Dietler 2007).

MT'lerin mekanik özellikleri ile ilgili ölçümler çok farklıdır. En büyük tutarsızlıklar elastisite modülünün tahmini ile ilgilidir. Yazarlara göre değerler 7 GPa ile 1 MPa arasında değişen değerler almaktadır.

Bu değerlerin değişmesine değişik faktörlerin etki ettiği düşünölmektedir. Bunlar taxol eklenmesi, MT'lerin büyüme/küçölme hızı ve uzunluğudur. Gerçekten bakıldığı zaman boyu küçük olan MT'lerin daha düşük elastisite modölüne sahip olduğu görölmektedir (Shi vd 2008). Takasone vd'ne (2002) göre eğilme rijitliği MT'nin boyunun karesiyle orantılıdır. MT'lerin kayma modölü yaklaşık 1,4 MPa, poisson oranı 0,3'tür (Kasas ve Dietler 2007).

MT'ler hücre iskeleti içindeki en rijit biyopolimerdir ve elastisite modölü aktin filamentlere göre 100 kat daha fazladır (Jiang ve Zhang 2008). Makroskopik elastik çubuklar gibi MT'ler de çekme kuvveti ile aynı büyüklükteki basınç kuvvetine dayanamaz ancak etrafında sitoplazma ile çevrenmesi sayesinde çok büyük basınç kuvvetleri taşıyabilmektedir (Das vd 2009). Sitoplazma desteği ile 100 pN basınç kuvvetini taşıyabilmektedirler (Jiang ve Zhang 2008).

Janmey vd'ne (1991) göre MT'ler mikrofilament veya ara filamentler ile karşılaştırıldığında küçük gerilmeler için büyük şekil değiştirmeler meydana getirdiği görölmüştür. MT'ler için kopma gerilmesi 0.4-0.5 N/m² gibi çok küçük değerdedir. Kayma ve elastisite modölü sistemin anizotropisine bağlı olarak farklılaşmaktadır (Kis vd 2002). Anizotropik malzemelerde aynı malzemeyi farklı yönlerde ölçümler yapıldığında farklı fiziksel özellik değerlerine sahip olduğu görölmektedir. Örneğin elastisite modölü için 10⁶ ile 10⁹ N/m² arasındaki değerler literatürde bulunmaktadır (Kis vd 2002, Tolomeo ve Holley 1997).

Sirenko vd (1996) MT'lerin titreşim özelliklerini izotropik malzemeler için silindirik geometride bir sürekli ortam yaklaşımı benimseyerek incelemiştir. Filamentleri suya batırılmış çubuk olarak tanımlayıp çeşitli modlarını tespit etmişlerdir. Açısai, burulma ve boylamsal olarak dağılım ilişkileri incelenmiştir. Fonon hızları yaklaşık 200-600 m/sn arasında değişmekte iken başka bir hattında 800-1300 m/sn arasında değişmiştir. Bu deney de MT'lerin anizotropik olduğunu kanıtlamaktadır.

MT'lerin hücre iskeletinde birçok görevi onun eğilme için yeterli dirence sahip olması gerektiğini ve olağanüstü esneklik sağlayacağını göstermektedir. Ancak biyolojik fonksiyonlarını anlamak için bunlar yeterli değildir (Gao ve Lei 2009).

Kis vd (2002) uzunluğun eğilme rijitliğine bağlı olduğunu göstermek için basit bir formül geliştirmiştir. Pampolani vd (2006) bu fikri kompozit kabuk modeli ile açıklamıştır. Diğer taraftan Li vd (2006) ortotropik elastik kabuk modeli kullanarak eğilme rijitliğinin uzunluğa bağımlılığı son derece düşük kayma modülüne ve burulma modülüne dayandırmıştır.

Atomik ve moleküler modeller bilgisayar kapasitelerinin sınırlı olması nedeniyle son derece önemli görevleri olan karbon nanotüp ve mikrotüpçüklerin mekanik davranışlarının yorumlanmasında uygun değildir. Klasik elastisite teorisinin boyut etkisini hesaba katmamasından dolayı yetersiz olduğu sonucuna varılmış ve bu nedenle yerel olmayan elastisite teorisinin malzeme iç karakteristik uzunluğunu da hesaba katabildiği için tercih edilmeye başlanmıştır. Bu teori sayesinde küçük boyutlu parçaları ve yapıları da modelleme imkanı doğmuştur. Bunlar içinde en yaygın olarak kabul göreni Eringen vd.'nin yerel olmayan elastisite teorisidir.

Mikrotüpçük ve karbon nanotüp'lerin mekanik özelliklerini anlamak için yapılan analizlerde MT'lerin sürekli izotropik elastik kiriş modeli (Euler-Bernoulli) genellikle kullanılmaktadır. Deformasyonu için bir boyutlu çubuk, burkulmayı görmek için kolon ve titreşimi için kiriş olarak modellenebilmektedir (Shi vd 2008).

Yerel olmayan elastisite teorisinin kronojik gelişimi;

Eringen, Edelen ve Kunin, yerel olmayan teorisinin esasları ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Daha sonra Eringen, elastisite problemlerini yerel olmayan elastisite teorisi ile inceleyerek yerel olmayan elastisite teorisinin klasik elastisite teorisine göre üstünlüklerini ispatlamıştır.

- Gurtin (1965), yerel olmayan sürekli ortamlar üzerine çalışmıştır.

- Kunin (1968), mikroyapılı elastik ortamlar üzerinde çalışmıştır. Aynı tarihte Körner, sürekli ortamlar mekaniği ile ilgili yaptığı çalışmada yerel olmayan elastisite teorisinin diğer teoriler arasındaki yerini vurgulamış ve yerel olmayan elastisite teorisinin önemini belirtmiştir.
- Edelen (1969), yerel olmayan elastisite teorisinde varyasyon hesabının temellerini bir seri makale ve bir kitapta yayınlamıştır.
- Eringen (1972), yerel olmayan polar elastik ortamlar için yerel olmayan elastisitenin bünye denklemlerini elde etmiştir. Eringen'in aynı yıl yaptığı diğer bir çalışma, yerel olmayan akışkanlar için bünye denklemleri elde etme üzerine olmuştur. Bunların yanı sıra Eringen, yerel olmayan lineer elastisite teorisi için denklemler elde ettiği ve tek boyutlu elastik dalga yayılımı problemleri üzerine yaptığı farklı çalışmalarda klasik yollarla elde edilemeyen sonuçlar elde ederek bilime çok önemli katkılar sağlamıştır. Bundan başka Eringen ve Edelen, mekanik ve varyasyonel olmak üzere iki ayrı yoldan elastik ortamlar için bünye denklemlerini çıkarma üzerine çalışmalar yapmışlardır. Daha sonra Eringen, elde edilen bu bünye denklemlerini lineerleştirmiştir. Ayrıca Demiray, yerel olmayan dielektrik malzemeler için bünye denklemlerini elde etmiştir.
- Eringen (1973), yerel olmayan mikroakışkanlar için bünye denklemlerini elde etmiştir. Yine Eringen, yerel olmayan polar elastik ortamlar için elde ettiği bünye denklemlerini lineerleştirmiştir.
- Eringen (1974), yerel olmayan elastisite üzerine yaptığı çalışmasında korunum yasalarını, bünye denklemlerini ve alan denklemlerini vermiştir. Ayrıca yerel olmayan teori kullanarak dalga yayılımı problemlerini, dislokasyon ve çatlak problemlerini çözdüğü ve önemli sonuçlar elde ettiği bir çok çalışması vardır. Aynı yılda Eringen ve Kim, sonsuzda düzgün dağılı çekme gerilmesine maruz Griffith çatlağını incelemişlerdir. Bunun yanı sıra Eringen termoelastik cisimlerin yerel olmayan teorisi üzerine ve daha sonra viskoelastik malzemelerin yerel olmayan teorisi üzerine çalışmalar yapmıştır ve bu konuda başka çalışma yapılmamıştır.
- Balta ve Şuhubi (1977), genelleştirilmiş termoelastik cisimlerin yerel olmayan teorisi üzerine çalışmışlardır. Bunun yanı sıra Eringen ve çalışma arkadaşları, yerel olmayan elastik katılarda çatlak problemleri ile ilgili çalışmalar

yapmışlardır. Ayrıca Eringen, yerel olmayan elastisite kullanarak kenar dislokasyon problemlerini çözme üzerine çalışmalar yapmıştır.

- Eringen (1978), kaymaya maruz çatlak problemini incelemiştir.
- Eringen (1979), düzlem dışı kaymaya maruz çatlak problemini incelemiştir.
- Eringen (1983), dislokasyon ve çatlak etkileşmesi problemini incelemiş ve yerel olmayan elastisite teorisinin üstünlüğünü göstermiştir. Daha sonra Eringen ve Arı, Griffith çatlak problemini farklı bir etkileşme çekirdeği kullanarak incelemişlerdir.
- Eringen (1984), yerel olmayan elastisite kullanarak dislokasyonların sürekli dağılımı üzerine çalışmalar yapmıştır (Tepe 2007).

Yerel olmayan elastisite teorisinin nanoteknolojiye uygulanması ilk olarak Peddieson vd (2003) tarafından olmuştur. Eringen (1983) tarafından bulunan yerel olmayan modelin basitleştirilmesine dayalı olarak kirişlerin statik deformasyonunun analizi yapılmıştır. Son zamanlarda yerel olmayan kiriş teorisi modeli tek ve çok duvarlı karbon nanotüplerin statik ve titreşim analizinin araştırılmasıyla ilgilidir (Sudak 2003, Zhang vd 2004,2005, Wang 2005, Wang ve Varadan 2006, Wang ve Shindo 2006, Wang vd 2006, Lu vd. 2007, Lu 2007, Reddy 2007, Wang ve Liew 2007, Li vd 2008, Reddy ve Pang 2008, Civalek ve Akgöz 2010, Civalek vd 2010, Hao vd 2010, Civalek ve Demir 2011).

Mikrotüpçüklerin mekanik davranışlarını anlamada yerel olmayan elastisite teorisi ilk defa Gao ve Lei (2009) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada mikrotüpçüklerin burkulmasında küçük boyut etkisinin önemine değinilmiştir. Heirenche vd (2010) etrafı stoplazma ile çevrili mikrotüpçüklerin küçük ölçek etkisinde titreşim davranışlarını ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Kiriş teorisi olarak Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Boyut etkisinin önemli olduğu mikro ve nano ölçekli yapılarda (karbon nanotüp, biyolojik virüslerin ve kanser hücrelerinin matematik modellenmesi, mikrotüpçükler, mikro-elektro aygıtlar, mikro devreler gibi) özellikle Eringen tarafından önerilen lokal olmayan elastisite yaygın olarak kullanılmaktadır (Civalek ve Akgöz 2011).

Klasik fizik teorilerine göre denge denklemleri maddenin her bir noktası için geçerli olmaktadır. Bu durum madde boyutu büyük olan cisimler için geçerlidir. Fakat boyutlar küçüldükçe maddenin iç yapısını da dikkate alarak referans noktası dışındaki yerlerin de etkileşimini göz önünde bulundurmamak yerinde olacaktır. Yerel olmayan elastisite teorisi bir noktadaki gerilmeyi hesap ederken sadece o noktadaki şekil değiştirmelerin bilinmesinin yeterli olmadığına aynı zamanda diğer tüm noktaların şekil değiştirmelerinin bir fonksiyonuna bağlı olması gerektiğine dayanmaktadır.

Cisimler yerdeğiştirdiklerinde cismin şeklinde düzensizlikler meydana gelmektedir. Bu düzensizlikler de cismin içinde gerilmeler meydana getirmektedir. Buna örnek; bazı malzemelerin şekil değiştirdiğinde iç gerilme ve şekil değiştirme enerjilerinin sonsuza gitmesidir. Yerel olmayan elastisite teorisi ile çözüm yapıldığında bu sorun ortadan kalkmaktadır (Tepe 2007).

Homojen ve izotrop elastik bir katının yerel olmayan cauchy hareket denklemi

$$\tau_{kl,l} + \rho(f_l - \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2}) = 0 \quad (3.1)$$

Bünye denklemi;

$$\tau_{kl}(x) = \int_v \varepsilon_{klmn}(x - x') \varepsilon_{mn} dv(x') \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada τ_{kl} gerilme tansörünü, ρ kütle yoğunluğunu, f_l kütle kuvveti yoğunluğunu, u_l yer değiştirme vektörünü, v elastik cismin kapladığı hacmi, t zamanı, ε_{kl} şekil değiştirmeyi ifade etmektedir.

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (3.3)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. ε_{klmn} , $(x - x')$ vektörünün bir fonksiyonu olmak üzere buradan da anlaşılabacağı gibi x noktasındaki gerilme x' noktasındaki şekil değiştirmeye de bağlıdır.

$$\tau_{kl}(x') = \lambda \varepsilon_{mm}(x') \delta_{kl} + 2\mu \varepsilon_{kl}(x') \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{kl}(x') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k(x')}{\partial x'_l} + \frac{\partial u_l(x')}{\partial x'_k} \right) \quad (3.5)$$

Bu denklemlerde, $\tau_{kl}(x')$ cismin x' noktasındaki klasik (Cauchy) ya da lokal gerilme tansörü, $\varepsilon_{kl}(x')$ cismin x' noktasındaki lineer şekil değiştirme tansörü, $\alpha|x - x'|$ öklidyen formda uzaklık λ ve μ ise Lamé sabitleridir. Lokal olmayan kernel $\alpha|x - x'|$ ise elastik cismin x noktasındaki gerilme değerinin x' noktasındaki şekil değiştirme etkisini tanımlar. Yine denklemlerdeki χ , $(e_0 a/l)$ oranına bağlı olup malzeme sabitidir. Buradaki a değeri malzemenin iç (granüler mesafe, latik parametre C-C karbon molekülleri çapları arasındaki uzaklık) ve dış karakteristik uzunluğudur (kırılma veya dalga uzunluğu) ve e_0 ise her bir malzeme için deneysel olarak belirlenmiş ve önerilmiş olan katsayıdır.

Eringen tarafından kurucu denklem aşağıdaki bağıntı ile verilmiştir.

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{kl} = \tau_{kl} \quad (3.6)$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \tau_{kl} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + \mu \varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

Burada a iç karakteristik uzunluğu ve e_0 ise sabit bir katsayıyı ifade etmektedir.
Buradan;

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (3.8)$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \tau_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2. Yerel Olmayan Kiriş Teorileri

3.2.1. Euler-Bernoulli kirişi

Euler-Bernoulli kiriş teorisi için bütün kaynaklardan rahatlıkla bulunabilecek temel elastisite bağıntıları bu bölümde açıklanacaktır.

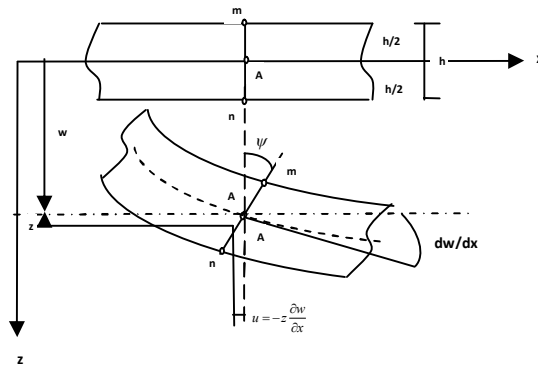
En basit klasik kiriş teorisi olan Euler-Bernoulli kiriş teorisi,

- Şekil değişiminden önce kirişin orta düzlemine (tarafsız eksene) dik olan doğrular, şekil değişiminden sonra da dik kalırlar,
- Eğilmeye maruz kirişteki bir lifin şekil değiştirmesi o lifin kiriş orta düzleminden uzaklığına lineer olarak bağlıdır,
- Euler-Bernoulli kiriş teorisi y ekseninden bağımsızdır (Reddy vd 1997). Bu nedenle y eksen yönündeki gerilmeler ihmal edilebilirler,
- Kiriş düz bir eksene sahiptir,

varsayımları üzerine kurulmuştur.

Euler-Bernoulli kiriş teorisi ince ve izotropik yapıların mekanik özelliklerini açıklamada iyi sonuçlar alınacak bir teoridir. Ayrıca Euler-Bernoulli teorisi birinci mertebe teorisine göre çalışmaktadır. Yani dönme eylemsizlikleri ve kayma deformasyonları ihmal edilmektedir.

Aşağıda seçilen koordinatlara göre, x eksen kiriş uzunluğunu, y eksen kiriş genişliğini ve z eksen kiriş yüksekliğini göstermektedir. Burada u,v,w orta düzlemdeki bir noktanın yer değiştirmesini temsil etmektedir.



Şekil 3.12. Euler-Bernoulli kiriş eğilmesi ve koordinat sistemi

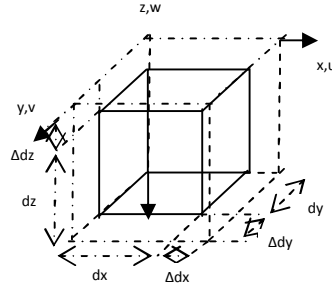
$$u(x, z) = \sin(\psi) = \tan(\psi) = u(x) - z\psi \quad (3.10)$$

$$u(x, z) = u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.11)$$

$$v(x, z) = 0 \quad (3.12)$$

$$w(x, z) = w(x, t) \quad (3.13)$$

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde birim şekil değıştirmesi, kirişten alınan bir parçacık üzerinde şekil 3.13'teki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.13. Birim uzama

Burada Δdx boydaki değışimi ve dx ilk boyu göstermek üzere birim şekil değıştirme boy uzamasındaki farkın ilk boy oranı ile bulunur.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (3.14)$$

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \quad (3.16)$$

Denklem (3.11)'in (3.16) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.17)$$

elde edilmiş olur. y yönünde herhangi bir değişme olmadığı için denklem (3.12),

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.18)$$

halini alır. Denklem (3.13) yardımıyla,

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial z} dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.19)$$

olur. Şekil (3.13)'te bütün yönlerdeki şekil değiştirmeleri bir arada gösterebilmek açısından cisim her yönde uzuyor gibi gösterilmiştir. Yalnız hooke kanununa göre cisim bir yönde uzarken diğer yönde kısalmaktadır. Örneğin bir birim küpe σ_{xx} şiddetinde bir gerilme uygulanırsa kuvvete paralel olan kenarları ε_{xx} kadar uzarken kuvvete dik kenarları $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$ kadar kısılır. Deneyler $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx}$ şeklinde bir bağıntının var olduğunu göstermiştir. Buradaki ν ifadesine poisson oranı denmektedir.

Superpozisyon ilkesine göre üç eksenli gerilme hali üç tek eksenli gerilmenin birleşmesi şeklinde düşünülürse, E elastisite modülünü ifade etmek üzere,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \quad (3.20)$$

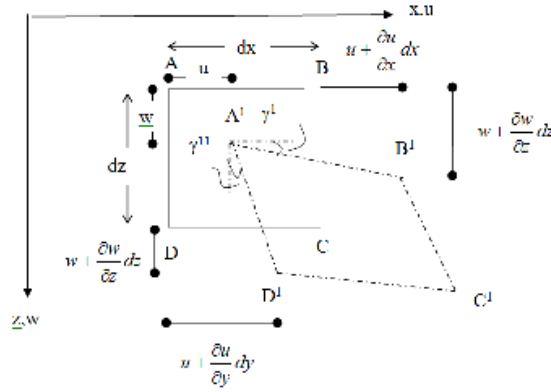
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right) \quad (3.22)$$

elde edilir (İnan 2001). $\sigma_{xx} \gg \sigma_{zz}$ ve de $\sigma_{yy} = 0$ olduğundan ihmal edildiğinde,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (3.23)$$

olur.



Şekil 3.14. Kayma şekil değiştirmesi

$$\gamma_{xz} = \gamma^1 + \gamma^{11} \quad (3.24)$$

$$\tan \gamma^1 = \gamma^1 = \frac{w + \frac{\partial w}{\partial x} dx - w}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.26)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.27)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.28)$$

elde edilir. Deneylerden elde edilen sonuçlara göre kayma gerilmesi ile kayma açısı arasında,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.29)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.30)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3.31)$$

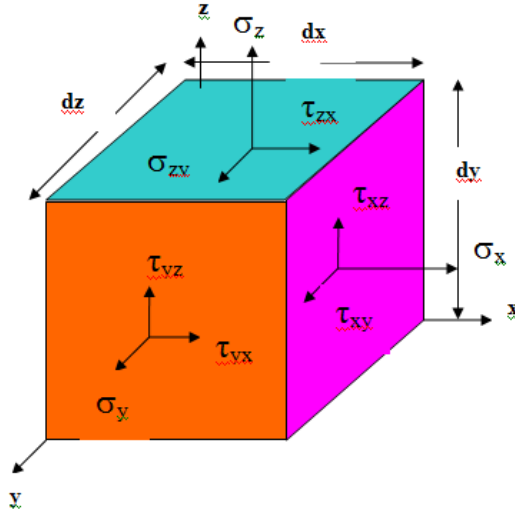
şeklinde bir bağıntı vardır. Burada G kayma modülünü ifade etmektedir. O halde denklem (3.26)- (3.27) -(3.28) , denklem (3.29)- (3.30) - (3.31)'de yerlerine yazılırsa,

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.32)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.33)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.34)$$

halini alır. Bu sonuçlar kayma gerilmesinin meydana gelmediğini göstermektedir. Yani kesitler eğilmeden sonra düzlem ve dik kalmaktadır. Denge denklemleri kullanılarak (kütle kuvvetleri=0);



Şekil 3.15. Cisim üzerinden alınan birim küp ve üzerindeki gerilmeler

$$\sum F_x = 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - (\sigma_{xx}) dydz - (\tau_{yx} dx dz) - (\tau_{zx} dx dy) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (3.37)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (3.38)$$

$$\sum F_z = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

sonuçlarına ulaşılabilir. Denklem (3.37)-(3.38) ve (3.39)'da y yönündeki gerilmeler '0' olarak alındığında,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

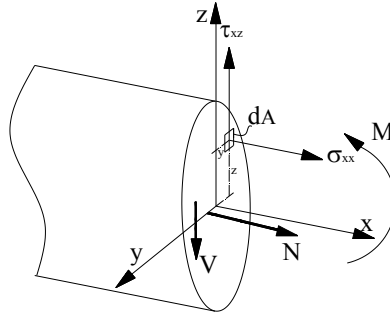
sonuçları elde edilir. Şekil (3.15)'teki doğrultulara göre moment ifadeleri yazıldığında

$$\sum M_x = 0, \quad (-\tau_{zy} dz dx) dy + (\tau_{yz} dy dx) dz = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.41)$$

$$\sum M_y = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (3.42)$$

$$\sum M_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.43)$$

elde edilir. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre çözüm yapabilmek için bilinmesi gerekenler $w(x,z)$, $u(x,z)$, ε_{xx} , σ_{xx} ve τ_{xz} ifadeleridir.



Şekil 3.16. Cisim yüzeyinde oluşan gerilmeler ve kuvvetler

Şekil (3.16)'ya göre denge denklemleri yazıldığında,

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (3.44)$$

$$V = \int_A \tau_{xz} dA \quad (3.45)$$

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA \quad (3.46)$$

bağıntıları elde edilir. Denklem (3.23)'te denklem (3.17)'de yerine yazıldığında,

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.47)$$

sonucuna ulaşılır. Denklem (3.44)'te yerine denklem (3.47)'deki σ_{xx} 'e karşılık gelen bağıntı yerine yazılırsa,

$$N = \int_A E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dA \quad (3.48)$$

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} - E \frac{d^2 w}{dx^2} \int_A z dA \quad (3.49)$$

elde edilir. $\int_A z dA$ değeri statik moment (S_x) olarak isimlendirilip sistemin ağırlık merkezi eksenenden geçtiği zaman 0'dır. Burada 'z' değişkeni y eksenine olan uzaklıktır. Eksenel kuvvet ile normal gerilme arasındaki ilişki

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = \sigma_{xx} A \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanabilir. Denklem (3.47)'deki σ_{xx} ifadesi (3.46)'da yerine yazılırsa,

$$M = -E \frac{d^2 w}{dx^2} \int_A z^2 dA \quad (3.51)$$

elde edilir. Buradaki $\int_A z^2 dA$ alan atalet momenti (I) olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda (3.51) denklemi,

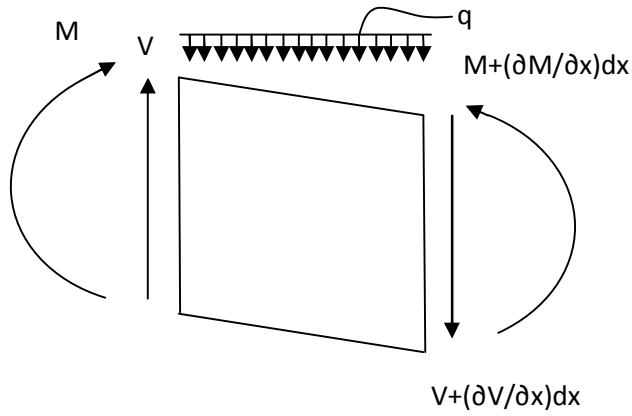
$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.52)$$

şeklinde son halini alır. Denklem (3.52) , denklem (3.47)'de yerine yazılırsa,

$$\sigma_{xx} = -Ez \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -Ez \left(-\frac{M}{EI} \right) = \frac{Mz}{I} \quad (3.53)$$

olur.

3.2.1.1. Yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişinin eğilmesi



Şekil 3.17. dx genişliğindeki sonsuz küçük parçacık

Sistemin statik denge denklemleri yazılırsa,

$$\sum F_x = 0 \quad (3.54)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (3.55)$$

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - q(x, t) dx = 0 \quad (3.56)$$

Bu denklem dx'e bölünüp dx sıfıra giderken limiti alınır,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -q(x, t) \quad (3.57)$$

elde edilir.

$$\sum M = 0 \quad (3.58)$$

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + V dx + q(x, t) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.59)$$

$q(x, t) dx \frac{dx}{2}$ merteye itibariyle denklemdeki diğer ifadelerden daha küçük mertebede olduğu için ihmal edilirse,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \quad (3.60)$$

şeklinde son halini alır. Denklem (3.60)'ta elde ettiğimiz ifadenin bir kere türevi alınıp 3.57'de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q(x, t) \quad (3.61)$$

elde edilir (Wang ve Varadan 2006, Peddieson vd 2003).

Aynı sonuca varyasyonel türev yöntemiyle de ulaşılması mümkündür. Varyasyonel türev yöntemiyle eğilme denkleminin elde edilebilmesi için şekil değiştirme enerjisinin ve dış kuvvetlerin yapmış olduğu potansiyel enerjinin bilinmesi gerekmektedir. Kiriş'e ait genel şekil değiştirme enerjisi formülü,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (3.62)$$

olmak üzere burada $\{\sigma\}$ bütün gerilme bileşenlerini, $\{\varepsilon\}$ bütün şekil değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. Fakat Euler-Bernoulli kiriş teorisinde yalnız eksenel gerilme mevcut olması nedeniyle,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.63)$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V E \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.64)$$

Denklem (3.17)'deki ε_{xx} değeri denklem (3.64)'te yerine yazılırsa,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}) \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy dz \quad (3.65)$$

olur. (3.46) denklemi, (3.65) denkleminde yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[(-M) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \quad (3.66)$$

ifadesi elde edilir. $q(x)$ yayılı yükü ifade etmek üzere dış kuvvetlerin yapmış olduğu potansiyel enerji,

$$W = \int_0^L q(x) w(x) dx \quad (3.67)$$

formülü yardımıyla bulunur. Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlerin yapmış olduğu iş ile dış kuvvetlerin yapmış olduğu işin birbirinden çıkarılması suretiyle bulunmaktadır ve varyasyonu sıfıra eşittir. O halde,

$$\Pi = U - W \quad (3.68)$$

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[-M \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx - \int_0^L (q \delta w) dx \quad (3.69)$$

elde edilir. Birinci terimin varyasyonu alındığı zaman

$$-\int_0^L M \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx = - \left[M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial M}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

$$= - \left[M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L - \left(\frac{\partial M}{\partial x} \delta(w) \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta(w) dx \right] \quad (3.70)$$

elde edilmiş olur. (3.70) denkleminde elde edilen ifadeler (3.69) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[- \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - q \right] \delta(w) dx - M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \frac{\partial M}{\partial x} \delta(w) \Big|_0^L \quad (3.71)$$

sonucuna varılır. Bu denkleminde her bölüm 0'a eşit olmak zorundadır. Birinci bölüm Euler-Langrange denklemi olup denklemin 0'a eşitlenmesiyle,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q(x) \quad (3.72)$$

şeklinde denge denklemlerinden elde ettiğimiz sonuca ulaşabiliriz. Yerel olmayan elastisite teorisinde ifade edilen denklem (3.8)'in her iki tarafı z ile çarpılıp alan üzerinden integrali alınırsa,

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.73)$$

elde edilmiş olur. Bu denklemin iki kere integrali alınırsa,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (3.74)$$

sonucuna ulaşılır. Elde ettiğimiz bu son ifadede (3.72) denklemini yerine yazılırsa

$$-EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} = -q \quad (3.75)$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişinin eğilme denklemidir. Burada EI eğilme rijitliği, M eğilme momenti, q kiriş üzerindeki yayılı yükü ve $\mu = (e_0 a)^2$ 'ni tanımlamaktadır (Reddy 2007).

Düzgün yayılı yük durumunda $q=q_0$ olarak ifade edilip, (3.74) denkleminin integralleri alındığında,

$$V = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} - \mu \frac{dq_0}{dx} = -q_0 x - c_1 \quad (3.76)$$

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu q_0 = -q_0 \frac{x^2}{2} - c_1 x - c_2 \quad (3.77)$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -\mu q_0 x + q_0 \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (3.78)$$

$$EI w = -\mu q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (3.79)$$

denklemleri elde edilir (Reddy ve Pang 2008).

Eğer denklemde tekil eğilme momenti ve tekil kuvvet var ise bu durumda Dirac- δ fonksiyonun kullanılması gerekir. Dirac- δ fonksiyonu çok kısa süre etkiyen kuvvetleri matematiksel modellemek için kullanılmaktadır ve anlık bir etkiyi belirtmektedir. Birim basamak fonksiyonu ise herhangi bir anda etki etmeye başlayıp etkisini devam ettiren yükleri ifade etmek için kullanılmaktadır ve Dirac- δ fonksiyonu ile aralarında türevsel bir ilişki mevcuttur (Luş ve Yerlici 2007).

$$\delta(x - x_0) = \frac{dH(x - x_0)}{dx} \quad (3.80)$$

Dirac- δ fonksiyonunun ve birim basamak fonksiyonunun belirli değer aralıkları için tanımları aşağıdaki gibidir (Wang ve Liew 2007).

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad H(x-x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \quad (3.81)$$

Bu durumda denklem (3.74)'de elde edilen ifadeye tekil kuvvet etki ederse,

$$-EI \frac{d^4 w}{dx^4} + q - \mu \frac{d^2 q}{dx^2} + \sum_{i=1}^m P_i (\delta(x-a_i) - \mu \delta''(x-a_i)) = 0 \quad (3.82)$$

$$-EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \mu \left[\frac{d^2 q}{dx^2} + \sum_{i=1}^m P_i \delta''(x-a_i) \right] = -q - \sum_{i=1}^m P_i \delta(x-a_i) \quad (3.83)$$

Burada P_i i noktasına etki eden tekil kuvveti , a_i i noktasına etki eden kuvvetin konumunu belirtmektedir. Denge denklemlerinden bilindiği üzere moment, kesme kuvveti ve yük arasında türevsel bir ilişkinin mevcut olması nedeniyle yukarıdaki denklemin integrali alınırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned} V &= -EI \frac{d^3 w}{dx^3} - \mu \left[\frac{dq}{dx} + \sum_{i=1}^m P_i \delta'(x-a_i) \right] \\ &= -\int^x xq(x)dx - c_1 - \sum_{i=1}^m P_i H(x-a_i) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} M &= -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu \left[q + \sum_{i=1}^m P_i \delta(x-a_i) \right] \\ &= -\int^x \frac{x^2}{2} q(x)dx - c_1 x - c_2 - \sum_{i=1}^m P_i (x-a_i) H(x-a_i) \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -\mu \left[\int^x xq(x)dx + \sum_{i=1}^m P_i H(x-a_i) \right]$$

$$+ \int \frac{x^3}{6} q(x) dx + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 + \sum_{i=1}^m P_i \frac{(x-a_i)^2}{2} H(x-a_i) \quad (3.86)$$

$$EIw = -\mu \left[\int \frac{x^2}{2} q(x) dx + \sum_{i=1}^m P_i (x-a_i) H(x-a_i) \right] + \int \frac{x^4}{24} q(x) dx + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 + \sum_{i=1}^m P_i \frac{(x-a_i)^3}{6} H(x-a_i) \quad (3.87)$$

bulunur. Kiriş üzerinde herhangi bir l noktasında tekil P yükü etkisindeki kirişin deplasmanları (3.84)-(3.87) arasındaki denklemlerde $q=0$ alınır ise,

$$EIw = -\mu P(x-l)H(x-l) + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 + P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l) \quad (3.88)$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -\mu P H(x-l) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 + P \frac{(x-l)^2}{2} H(x-l) \quad (3.89)$$

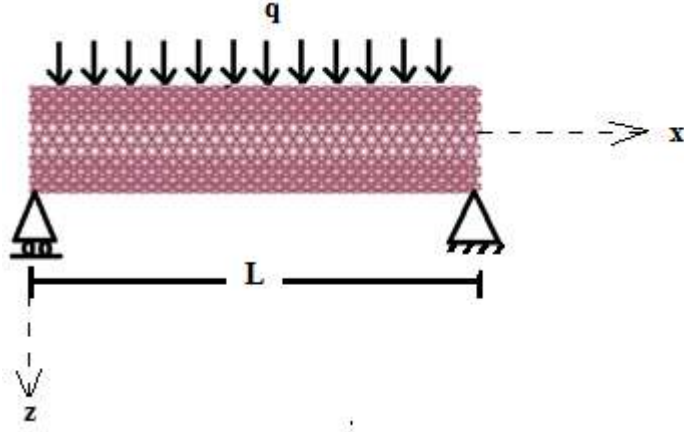
$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu P \delta(x-l) = -c_1 x - c_2 - P(x-l)H(x-l) \quad (3.90)$$

$$V = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} - \mu P \delta'(x-l) = -c_1 - P H(x-l) \quad (3.91)$$

şeklinde son halini alır (Wang ve Shindo 2006).

3.2.1.2. Uygulamalar

Şekil 3.18’de q düzgün yayılı yük etkisindeki iki tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.18. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün basit mesnetli kiriş modeli

Kiriş için sınır koşulları; $x=0$ ve $x=L$ noktalarında w ve M ifadeleri 0’a eşit olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.79) ve (3.77)’de x yerine sıfır yazılmasıyla

$$EIw = -\mu q_0 \frac{0^2}{2} + q_0 \frac{0^4}{24} + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 = 0 \quad (3.92)$$

$$c_4 = 0 \quad (3.93)$$

$$M = -q_0 \frac{0^2}{2} - c_1 0 - c_2 = 0 \quad (3.94)$$

$$c_2 = 0 \quad (3.95)$$

olur. $x=L$ noktasında denklem (3.79) ve (3.77)’de x yerine L yazılmasıyla

$$M = -q_0 \frac{L^2}{2} - c_1 L - 0 = 0 \quad (3.96)$$

$$c_1 = -q_0 \frac{L}{2} \quad (3.97)$$

$$EIw = -\mu q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + \left(-q_0 \frac{L}{2}\right) \frac{L^3}{6} + 0 \frac{L^2}{2} + c_3 L + 0 = 0 \quad (3.98)$$

$$\mu q_0 \frac{L}{2} + q_0 \frac{L^3}{24} = c_3 \quad (3.99)$$

olur. Deplasman ve eğilme moment denklemleri; denklem (3.79) ve (3.77)'ye bulunan c_1 , c_2 , c_3 ve c_4 katsayılarının yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left(-q_0 \frac{L}{2}\right) \frac{x^3}{6} + 0 \frac{x^2}{2} + \left(\mu q_0 \frac{L}{2} + q_0 \frac{L^3}{24}\right)x + 0 = 0 \quad (3.100)$$

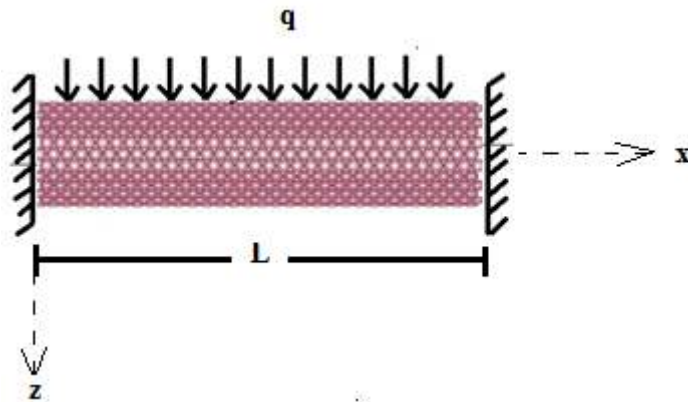
$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L} \right] + \frac{\mu q_0 L^2}{2EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (3.101)$$

$$M = -q_0 \frac{x^2}{2} - \left(-q_0 \frac{L}{2}\right)x - 0 = 0 \quad (3.102)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{2} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L} \right] \quad (3.103)$$

elde edilir (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.19'da görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki iki tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.19. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün iki tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli

Sınır koşulları; $x=0$ ve $x=L$ noktalarında w ve $\frac{dw}{dx}$ ifadeleri 0'a eşit olmalıdır.

$x=0$ noktasında; denklem (3.79) ve (3.78)'de x yerine sıfır yazılmasıyla

$$EIw = -\mu q_0 \frac{0^2}{2} + q_0 \frac{0^4}{24} + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 \cdot 0 + c_4 = 0 \quad (3.104)$$

$$c_4 = 0 \quad (3.105)$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -\mu q_0 \cdot 0 + q_0 \frac{0^3}{6} + c_1 \frac{0^2}{2} + c_2 \cdot 0 + c_3 + 0 = 0 \quad (3.106)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.107)$$

olur. $x=L$ noktasında; denklem (3.79) ve (3.78)'de x yerine L yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + 0 + 0 = 0 \quad (3.108)$$

$$EI \frac{dw}{dx} = -\mu q_0 L + q_0 \frac{L^3}{6} + c_1 \frac{L^2}{2} + c_2 L + 0 = 0 \quad (3.109)$$

Denklem (3.108) ve (3.109) birlikte çözülürse;

$$c_1 = -\frac{q_0 L}{2} \text{ ve } c_2 = \frac{q_0 L^2}{12} + q_0 \mu \quad (3.110)$$

şeklinde bulunur. Deplasman ve eğilme momenti denklemleri; Denklem (3.79) ve (3.77)'ye yukarıda bulunan c_1 , c_2 , c_3 , c_4 integral sabitlerinin yerine yazılmasıyla,

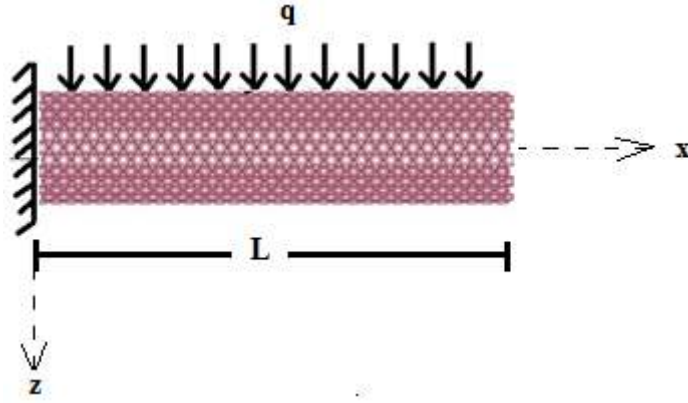
$$EIw = -\mu q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left(-\frac{q_0 L}{2}\right) \frac{x^3}{6} + \left(\frac{q_0 L^2}{12} + q_0 \mu\right) \frac{x^2}{2} \quad (3.111)$$

$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (3.112)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{12} \left[1 - 6\frac{x}{L} + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] - \mu q_0 \quad (3.113)$$

olur (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.20’de görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki tek tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.20. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün tek tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli

Sınır koşulları ; $x=0$ da $w = \frac{dw}{dx} = 0$ ve $x=L$ noktasında $M = V = 0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.78) ve (3.79)’da x yerine sıfır yazılmasıyla

$$c_4 = 0 \quad (3.114)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.115)$$

olur. $x=L$ noktasında; denklem (3.76)’da x yerine L yazılmasıyla

$$V = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -q_0 L - c_1 = 0 \quad (3.116)$$

$$c_1 = -q_0 L \quad (3.117)$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.77)’de x yerine L yazıldığında

$$M = -q_0 \frac{L^2}{2} - (-q_0 L)L - c_2 = 0 \quad (3.118)$$

$$c_2 = q_0 \frac{L^2}{2} \quad (3.119)$$

olur. Deplasman ve eğilme momenti denklemleri; Yukarıda bulunan integral katsayılarının denklem (3.79) ve (3.77)'de yerlerine yazılırsa,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + (-q_0 L) \frac{x^3}{6} + (q_0 \frac{L^2}{2}) \frac{x^2}{2} + 0x + 0 \quad (3.120)$$

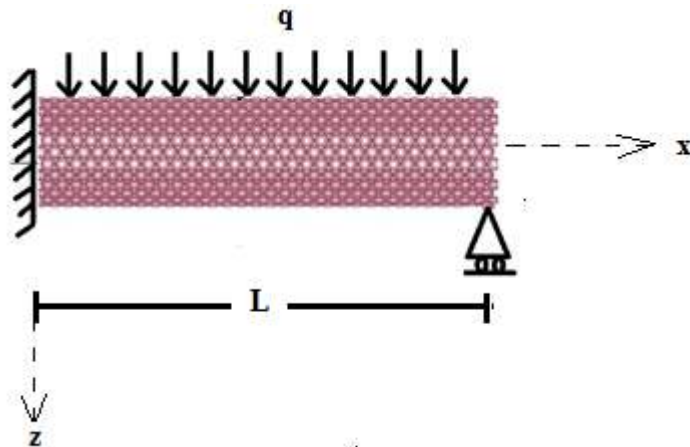
$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - \frac{\mu q_0 L^2}{2EI} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (3.121)$$

$$M = -q_0 \frac{x^2}{2} - (-q_0 L)x - q_0 \frac{L^2}{2} \quad (3.122)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{2} \left[1 - \frac{x}{L} \right]^2 \quad (3.123)$$

olur (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.21'de görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki bir tarafı ankastre diğer tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.21. Düzgün yayılı yük etkisindeki mikrotüpçüğün bir tarafı ankastre mesnet diğer tarafı basit mesnetli kiriş modeli

Sınır koşulları: $x=0$ da $w = \frac{dw}{dx} = 0$; $x=L$ noktasında $w = M = 0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.78) ve (3.79)'da x yerine sıfır yazılmasıyla,

$$c_4 = 0 \quad (3.124)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.125)$$

olur. $x=L$ noktasında (3.79) ve (3.77) denklemlerine x yerine L yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + 0L + 0 = 0 \quad (3.126)$$

$$M = -q_0 \frac{L^2}{2} - c_1 L - c_2 = 0 \quad (3.127)$$

Denklem (3.126) ve (3.127) birlikte çözüldüğü zaman,

$$c_1 = -\frac{q_0 L}{8} \left(5 + \mu \frac{12}{L^2}\right) \quad (3.128)$$

$$c_2 = \frac{q_0 L^2}{8} \left(1 + \mu \frac{12}{L^2}\right) \quad (3.129)$$

elde edilir. Bulunan integral sabitleri denklem (3.77) ve (3.79)'da yerleştirildiği zaman deplasman ve eğilme momenti denklemleri,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left(-\frac{q_0 L}{8} \left(5 + \mu \frac{12}{L^2}\right)\right) \frac{x^3}{6} + \left(\frac{q_0 L^2}{8} \left(1 + \mu \frac{12}{L^2}\right)\right) \frac{x^2}{2} + 0x + 0 \quad (3.130)$$

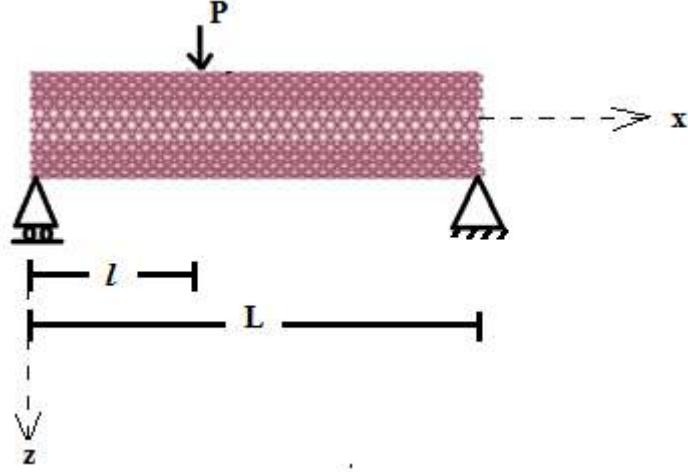
$$w = \frac{q_0 L^4}{48EI} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] - \frac{\mu q_0 L^2}{4EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (3.131)$$

$$M = -q_0 \frac{x^2}{2} - \left(-\frac{q_0 L}{8} \left(5 + \mu \frac{12}{L^2}\right)\right)x - \left(\frac{q_0 L^2}{8} \left(1 + \mu \frac{12}{L^2}\right)\right) \quad (3.132)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{24} \left[3 - 15 \frac{x}{L} + 12 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - \frac{3\mu q_0}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (3.133)$$

olur.

Şekil 3.22’de görülen P tekil yük etkisindeki iki tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.22. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün basit mesnetli kiriş modeli

Sınır koşulları : $x=0$ ve $x=L$ noktalarında w ve M değerleri 0’a eşit olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.88) ve (3.90)’da x yerine sıfır yazılmasıyla,

$$EIw(0) = 0 = -\mu P(0-l)H(0-l) + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 + P \frac{(0-l)^3}{6} H(0-l) \quad (3.134)$$

$$c_4 = 0 \quad (3.135)$$

$$M(0) = 0 = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu P \delta(0-l) = -c_1 0 - c_2 - P(0-l)H(0-l) \quad (3.136)$$

$$c_2 = 0 \quad (3.137)$$

bulunur. $x=L$ noktasında denklem (3.88) ve (3.90)’da x yerine L yazılmasıyla,

$$M(L) = 0 = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} - \mu P \delta(L-l) = -c_1 L - 0 - P(L-l)H(L-l) \quad (3.138)$$

$$c_1 = -\frac{P(L-l)}{L} \quad (3.139)$$

$$EIw(L) = 0 = -\mu P(L-l)H(L-l) - \frac{P(L-l)}{L} \frac{L^3}{6} + 0 \frac{L^2}{2} + c_3 L + P \frac{(L-l)^3}{6} H(L-l)$$

$$c_3 = \frac{\mu P(L-l)}{L} + \frac{P(L-l)(2Ll-l^2)}{6L} \quad (3.140)$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.88) ve (3.90)'da elde edilen integral sabitlerinin yazılmasıyla deplasman ve eğilme momenti denklemleri,

$$EIw(x) = -\mu P(x-l)H(x-l) + P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l)$$

$$- \frac{P(L-l)x^3}{6L} + \frac{\mu P(L-l)x}{L} + \frac{P(L-l)(2Ll-l^2)x}{6L} \quad (3.141)$$

$$M(x) = \frac{P(L-l)}{L} x - P(x-l)H(x-l) \quad (3.142)$$

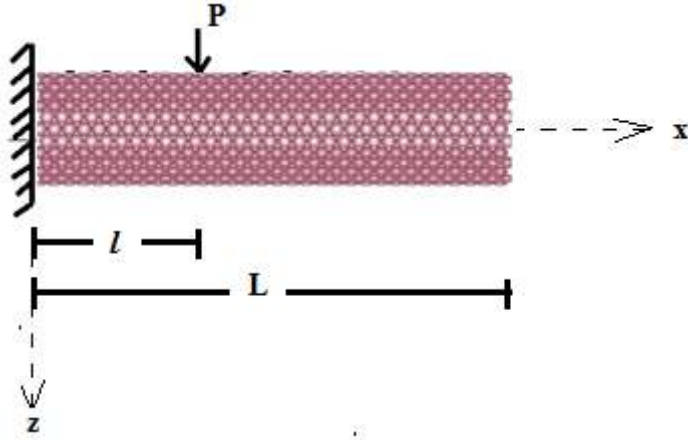
Kuvvet uygulanan noktadaki eğilme momenti ve deplasman değerleri denklem (3.141) ve (3.142)'de x yerine l yazılmasıyla,

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P(L-l)l^3}{6L} + \frac{\mu P(L-l)l}{L} + \frac{P(L-l)(2Ll-l^2)l}{6L} \right) \quad (3.143)$$

$$M(x) = \frac{P(L-l)l}{L} \quad (3.144)$$

olur (Wang ve Shindo 2006).

Şekil 3.23’de görülen P tekil yük etkisindeki tek tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.23. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün tek tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli

Sınır koşulları; $x=0$ noktasında $w = \frac{dw}{dx} = 0$ ve $x=L$ noktalarında $V = M = 0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında; denklem (3.88) ve (3.89)’da x yerine 0 yazıldığında,

$$EIw(0) = 0 = -\mu P(0-l)H(0-l) + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 + P \frac{(0-l)^3}{6} H(0-l) \quad (3.145)$$

$$c_4 = 0 \quad (3.146)$$

$$EI \frac{dw}{dx}(0) = 0 = -\mu PH(0-l) + c_1 \frac{0^2}{2} + c_2 0 + c_3 + P \frac{(0-l)^2}{2} H(0-l) \quad (3.147)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.148)$$

elde edilir. $x=L$ noktasında; denklem (3.90) ve (3.91)’de x yerine L yazıldığında,

$$V(L) = 0 = -c_1 - PH(L-l) \quad (3.149)$$

$$c_1 = -P \quad (3.150)$$

$$M(L) = 0 = PL - c_2 - P(L-l)H(L-l) \quad (3.151)$$

$$c_2 = Pl \quad (3.152)$$

Deplasman ve eğilme momenti denklemleri denklem (3.88) ve (3.90)'a integral sabitlerinin yazılmasıyla,

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\mu P(x-l)H(x-l) + P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l) - \frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} \right) \quad (3.153)$$

$$M(x) = Px - Pl - P(x-l)H(x-l) \quad (3.154)$$

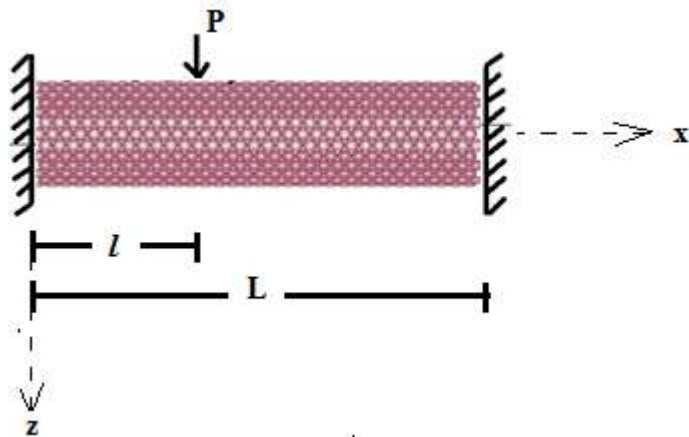
Kuvvet uygulanan noktadaki deplasman ve moment değeri denklem (3.153) ve (3.154)'te x yerine l yazılmasıyla,

$$w(l) = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (3.155)$$

$$M(l) = 0 \quad (3.156)$$

olur (Wang ve Shindo 2006).

Şekil 3.24'de görülen P tekil yük etkisindeki iki tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.24. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün iki tarafı ankastre mesnetli kiriş modeli

$x=0$ ve $x=L$ noktasında $w = \frac{dw}{dx} = 0$ olmalıdır. $x=0$ noktasında; denklem (3.88) ve (3.89)'da x yerine sıfır yazılmasıyla

$$c_4 = 0 \quad (3.157)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.158)$$

elde edilmiş olur. $x=L$ noktasında; denklem (3.88) ve (3.89)'da x yerine L yazılırsa

$$EI \frac{dw(L)}{dx} = -\mu PH(L-l) + c_1 \frac{L^2}{2} + c_2 L + 0 + P \frac{(L-l)^2}{2} H(L-l) \quad (3.159)$$

$$EIw(L) = -\mu P(L-l)H(L-l) + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + 0 + P \frac{(L-l)^3}{6} H(L-l) \quad (3.160)$$

(3.159) ve (3.160) denklemleri birlikte çözüldüğü zaman,

$$c_1 = \frac{6P\mu}{L^2} \left(\frac{2l}{L} - 1 \right) - \frac{P(L-l)^2}{L^2} \left(1 + \frac{2l}{L} \right) \quad (3.161)$$

$$c_2 = \frac{2P\mu}{L^2} (2L - 3l) + \frac{P(L-l)^2 l}{L^2} \quad (3.162)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen integral sabitleri denklem (3.88) ve (3.90)'da yerlerine yazıldığı zaman deplasman ve eğilme momenti denklemleri,

$$EIw(x) = -\mu P(x-l)H(x-l) + P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l) + \left[\frac{6P\mu}{L^2} \left(\frac{2l}{L} - 1 \right) - \frac{P(L-l)^2}{L^2} \left(1 + \frac{2l}{L} \right) \right] \frac{x^3}{6} + \left[\frac{2P\mu}{L^2} (2L - 3l) + \frac{P(L-l)^2 l}{L^2} \right] \frac{x^2}{2} \quad (3.163)$$

$$M = - \left[\frac{6P\mu}{L^2} \left(\frac{2l}{L} - 1 \right) - \frac{P(L-l)^2}{L^2} \left(1 + \frac{2l}{L} \right) \right] x$$

$$-\left[\frac{2P\mu}{L^2}(2L-3l)+\frac{P(L-l)^2l}{L^2}\right]-P(x-l)H(x-l) \quad (3.164)$$

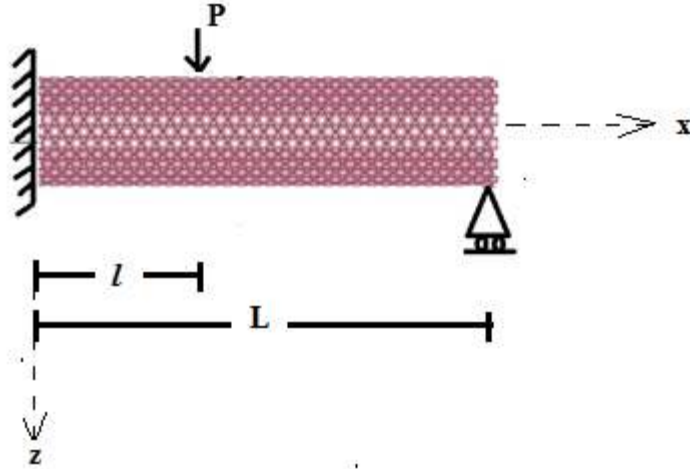
Kuvvet uygulanan noktadaki deplasman ve moment değeri denklem (3.163) ve (3.164)'te x yerine l yazılmasıyla,

$$w(l) = \left[\frac{P\mu}{L^2}\left(\frac{2l}{L}-1\right) - \frac{P(L-l)^2}{6L^2}\left(1+\frac{2l}{L}\right)\right]l^3 + \left[\frac{P\mu}{L^2}(2L-3l) + \frac{P(L-l)^2l}{2L^2}\right]l^2 \quad (3.165)$$

$$M(l) = -\left[-\frac{6P\mu}{L^2}\left(\frac{2l}{L}-1\right) - \frac{P(L-l)^2}{L^2}\left(1+\frac{2l}{L}\right)\right]l - \left[\frac{2P\mu}{L^2}(2L-3l) + \frac{P(L-l)^2l}{L^2}\right] \quad (3.166)$$

olur (Wang ve Shindo 2006).

Şekil 3.25'de görülen P tekil yük etkisindeki bir tarafı ankastre diğer tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemleri Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,



Şekil 3.25. Tekil yük etkisindeki mikrotüpçüğün bir tarafı ankastre mesnet diğer tarafı basit mesnetli kiriş modeli

Sınır koşulları; $x=0$ da $w = \frac{dw}{dx} = 0$; $x=L$ noktasında $w = M=0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında; denklem (3.88) ve (3.89)'da x yerine 0 yazılmasıyla,

$$c_4 = 0 \quad (3.167)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.168)$$

olarak bulunur. $x=L$ noktasında; denklem (3.88) ve (3.90)'da x yerine L yazılmasıyla,

$$EIw(L) = -\mu P(L-l)H(L-l) + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + 0 + 0 + P \frac{(L-l)^3}{6} H(L-l) \quad (3.169)$$

$$M(L) = -c_1 L - c_2 - P(L-l)H(L-l) \quad (3.170)$$

(3.169) ve (3.170) denklemleri birlikte çözüldüğü zaman,

$$c_2 = \frac{3P\mu}{L^2}(L-l) - \frac{P(L-l)}{2L^2}(-2lL + l^2) \quad (3.171)$$

$$c_1 = -\frac{3P\mu}{L^3}(L-l) - \frac{P}{2L^3}(-3Ll^2 + l^3 + 2L^3) \quad (3.172)$$

olur. Elde edilen integral sabitleri denklem (3.88) ve (3.90)'da yerlerine yazıldığı takdirde,

$$\begin{aligned} EIw(x) = & -\mu P(x-l)H(x-l) + P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l) \\ & + \left[-\frac{3P\mu}{L^3}(L-l) - \frac{P}{2L^3}(-3Ll^2 + l^3 + 2L^3) \right] \frac{x^3}{6} \\ & + \left[\frac{3P\mu}{L^2}(L-l) - \frac{P(L-l)}{2L^2}(-2lL + l^2) \right] \frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} M = & -\left[-\frac{3P\mu}{L^3}(L-l) - \frac{P}{2L^3}(-3Ll^2 + l^3 + 2L^3) \right] x \\ & - \left[\frac{3P\mu}{L^2}(L-l) - \frac{P(L-l)}{2L^2}(-2lL + l^2) \right] - P(x-l)H(x-l) \end{aligned} \quad (3.174)$$

şeklinde bulunur. Kuvvet uygulanan noktadaki deplasman ve moment değerleri (3.173) ve (3.174) denklemlerinde x noktası yerine l yazılarak,

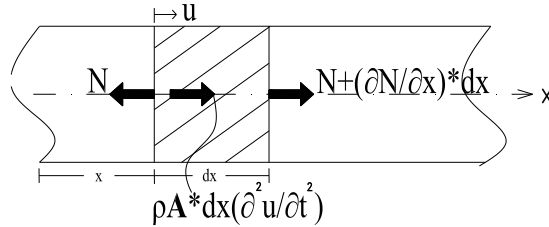
$$w(l) = \left[-\frac{3P\mu}{L^3}(L-l) - \frac{P}{2L^3}(-3Ll^2 + l^3 + 2L^3) \right] \frac{l^3}{6} + \left[\frac{3P\mu}{L^2}(L-l) - \frac{P(L-l)}{2L^2}(-2lL + l^2) \right] \frac{l^2}{2} \quad (3.175)$$

$$M(l) = \left[-\frac{3P\mu}{L^3}(L-l) - \frac{P}{2L^3}(-3Ll^2 + l^3 + 2L^3) \right] l - \left[\frac{3P\mu}{L^2}(L-l) - \frac{P(L-l)}{2L^2}(-2lL + l^2) \right] \quad (3.176)$$

olur.

3.2.1.3. Yerel olmayan çubuk modeli aksel titreşimi

Eksenel titreşim probleminde çubuk enkesiti çubuk eksenine diktir.



Şekil 3.26. Eksenel yüklü çubuk modeli

Kiriş kesitinde herhangi bir x noktasında ve herhangi bir t anındaki deplasmanı u olsun. dx uzunluğundaki çubuk elemanın x yönündeki dinamik dengesini göz önüne alınırsa,

$$\sum F_x = ma_x \quad (3.177)$$

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) - N = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.178)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.179)$$

olur. Burada $\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ eylemsizlik kuvveti olup cisme hareketin tersi yönünde etki eder. A çubuğun alanı, σ_{xx} x yönündeki gerilme bileşenini, $\rho A = m_0$ cismin ağırlığını ifade etmektedir.

Denklem (3.8) bir kez alana göre integre edilirse,

$$N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} N = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.180)$$

N birim uzunluk başına düşen eksenel yükü ifade etmektedir. Denklemin bir kez konuma göre türevi alınıp değerler (3.179) bu denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) m_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.181)$$

ifadesi elde edilir. $\mu = (e_0 a)^2$ denilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(m_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.182)$$

denkleminde ulaşılır. Denklemdaki $u(x, t)$ eksenel deplasmanı, m_0 birim kütle ağırlığını, N birim uzunluk başına düşen eksenel kuvveti ifade etmektedir. Yukarıdaki denklem ince çubukların eksenel titreşimi için ana denklemdir. $e_0 a$ değeri 0'a eşitlendiğinde klasik çubuk modeli elde edilir.

Nanoçubukların yerel olmayan eksenel titreşimleri için aşağıdaki dönüşüm uygulanacaktır.

$$u(x, t) = W(x) \sin(\omega t - \alpha) \quad (3.183)$$

Bu denklemin türevlerini alınıp (3.182) denkleminde yerine yazılır ve denklem boyutsuzlaştırılırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \sin(\omega t - \alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sin(\omega t - \alpha) \quad (3.184)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = W\omega \cos(\omega t - \alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -W\omega^2 \sin(\omega t - \alpha) \quad (3.185)$$

$$EA \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} m_0 \omega^2 \right) = -m_0 \omega^2 W \quad (3.186)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{m_0 \omega^2}{EA - \mu m_0 \omega^2} \right) W = 0 \quad (3.187)$$

denklemini elde edilmiş olur.

$$\Omega^2 = \frac{m_0 \omega^2 L^2}{EA} \quad \lambda^2 = \frac{\Omega^2}{\left[1 - \frac{\mu}{L^2} \Omega^2 \right]} \quad (3.188)$$

Ω boyutsuz frekans parametresi olmak üzere (3.188) denklemleriyle (3.187) denkleminde sadeleştirme yapıldığında,

$$W'' + \lambda^2 W = 0 \quad (3.189)$$

ifadesine ulaşılır. Denkleminde e^{mx} dönüşümü yapılırsa,

$$m^2 e^{mx} + \lambda^2 e^{mx} = 0 \quad (3.190)$$

$$m^2 + \lambda^2 = 0 \quad (3.191)$$

$$m_1 = i\lambda \text{ ve } m_2 = -i\lambda \quad (3.192)$$

$$W = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x} \quad (3.193)$$

$$W = c_1 (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) + c_2 (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) \quad (3.194)$$

denklemin çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$W(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (3.195)$$

Bu denklemlerle çubuğun mod şekli ve frekansı belirlenebilir (Aydoğdu, 2009). Denklem bir kere türevi alındığında,

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x} = -A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x \quad (3.196)$$

elde edilir.

3.2.1.4. Uygulamalar

Bir tarafı ankastre mesnetli çubuğun aksel titreşimi:

Sınır koşulları : $x=0$ 'da $W(x) = 0$ ve $x=L$ noktalarında $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ olmalıdır.

Denklem (3.195) 'te x yerine 0 ve (3.196) denkleminde x yerine L yazılırsa,

$$A = 0 \quad (3.197)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -0\lambda \sin \lambda + B\lambda \cos \lambda = 0 \quad (3.198)$$

Denklemlerde λ veya B 'nin 0 olması demek cismin titreşime uğramamış olması demektir (aşıkâr çözüm). O nedenle,

$$\cos \lambda = 0; \quad \lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2}; \quad n=1,2,\dots \quad (3.199)$$

burada n mode sayısını göstermektedir. Sistemin boyutuz frekans denklemi,

$$\Omega^2 = \frac{[(2n-1)(\pi/2)]^2}{1 + (e_0 a / L)^2 [(2n-1)(\pi/2)]^2} \quad (3.200)$$

denklemiyle bulunur (Aydoğdu, 2009).

İki tarafı ankastre mesnetli çubuğun aksenal titreşimi için çözüm:

Sınır koşulları : $x=0$ 'da $W(x) = 0$ ve $x=L$ noktalarında $W(x) = 0$ olmalıdır.

Denklem (3.195) 'te x yerine 0 ve L yazılırsa,

$$W(0) = A \cos \lambda 0 + B \sin \lambda 0 = 0 \quad (3.201)$$

$$A = 0 \quad (3.202)$$

$$W(L) = B \sin \lambda = 0 \quad (3.203)$$

Denklemde B'nin '0' olması demek cismin titreşime uğramamış olması demektir (aşıkâr çözüm). O nedenle,

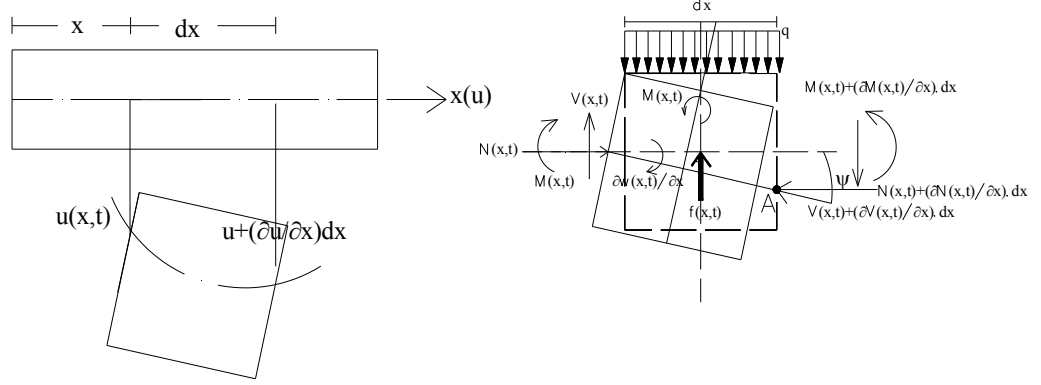
$$\sin \lambda = 0, \lambda = n\pi \quad n=1,2,\dots \quad (3.204)$$

olur. Sistemin boyutsuz frekans denklemi,

$$\Omega^2 = \frac{(n\pi)^2}{1 + (e_0 a / L)^2 (n\pi)^2} \quad (3.205)$$

şeklinde bulunur (Aydoğdu, 2009).

3.2.1.5. Yerel olmayan Euler-Bernoulli kirişinin titreşimi



Şekil 3.27. Euler-Bernoulli kirişinin boyuna titreşimi ile oluşan iç tesirler

Dinamik denge şartlarını uygulanırsa,

$$\sum F_x = ma_x \quad (3.206)$$

$$\left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) - N = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.207)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.208)$$

$$\sum M = I_0 \alpha \quad (3.209)$$

Burada I_0 kütle ataleti olup çubuk kesitler için $I_0 = \frac{m_0 I}{A}$ ile ifade edilmektedir. α ise

cismin açısal ivmesi anlamına gelmektedir ve $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$ şeklinde yazılabilmektedir.

Kütle atalet momentleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dA \quad (3.210)$$

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx - q dx \frac{dx}{2} + \left(\bar{N} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} dx \right) \frac{\partial w}{\partial x} dx = m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx \quad (3.211)$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} - \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} + m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (3.212)$$

olarak bulunur.

$$\sum F_y = ma_y \quad (3.213)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + V \right) dx - V dx + q dx = (A dx \rho) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.214)$$

Bu ifade dx'e bölünüp $dx \rightarrow 0$ sınırına götürülürse,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.215)$$

Denklem (3.212)'nin bir kere konuma göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.216)$$

elde edilmiş olur. Denklem (3.216)'daki ifade denklem (3.215)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.217)$$

ifadesine ulaşılmış olur. Aynı ifadeye Hamilton prensibiyle de ulaşabilir. Kirişe ait genel şekil değiştirme enerjisi formülü,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (3.218)$$

olmak üzere burada $\{\sigma\}$ bütün gerilme bileşenlerini, $\{\varepsilon\}$ bütün şekil değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. Fakat Euler-Bernoulli kiriş teorisinde yalnız aksenal gerilme mevcut olması nedeniyle,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.219)$$

(3.17) ve (3.23) denklemleri (3.219) denklemindeki yerine yazılırsa,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy dz \quad (3.220)$$

elde edilmiş olur. Denklem (3.44) ve (3.46), (3.213)'teki yerlerine yazıldığında kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu,

$$\delta \int_0^T U dt = \int_0^T \int_0^L \left[N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx dt \quad (3.221)$$

şeklinde elde edilir. Fonksiyonun varyasyonu alınır,

$$\int_0^T \int_0^L N \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \left[N \delta u \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx \right] dt \quad (3.222)$$

$$- \int_0^T \int_0^L M \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dt = - \int_0^T \left[\left(M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \Big|_0^L - \frac{\partial M}{\partial x} \delta(w) \Big|_0^L \right] dt + \left(\int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta(w) dx \right) dt \quad (3.223)$$

olur. $q(x)$ yayılı yükü ifade etmek üzere dış kuvvetlerin yapmış olduğu potansiyel enerjinin birinci varyasyonu,

$$\delta \int_0^T W = \int_0^T \int_0^L \left(q \delta w + \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.224)$$

$$\delta \int_0^T W = \int_0^T \int_0^L \left(q \delta w - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right) dx dt + \int_0^T \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L dt \quad (3.225)$$

formülü yardımıyla bulunur. Kirişin kinetik enerji ifadesi,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \\ T &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV \\ T &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \right] dV \\ T &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \right] dx \\ \delta \int_0^T T dt &= \int_0^T \int_0^L \left[m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dx dt \quad (3.226) \end{aligned}$$

İfadelerin varyasyonu alınırsa,

$$\int_0^T \int_0^L m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = \int_0^L m_0 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \delta u dx \right]_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx dt \quad (3.227)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^L m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) dx dt \\ &= \int_0^L m_2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right]_0^T - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T + \int_0^T \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w dx dt \quad (3.228) \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_0^L m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt = \int_0^L m_0 \left[\frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \right]_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \quad (3.229)$$

Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlerin yapmış olduğu iş ile dış kuvvetlerin yapmış olduğu işin birbirinden çıkarılması suretiyle bulunmaktadır. O halde,

$$\delta \int_0^T [T - (U - W)] dt = 0 \quad (3.230)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L \left[-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \delta u + \left(m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx dt \\ & + \int_0^L \left[m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta u dx \right]_0^T + \left(-m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right)_0^T + m_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_0^T \delta w dx + m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T \\ & + \int_0^T \left(M \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) \right)_0^L - \frac{\partial M}{\partial x} \delta(w) \Big|_0^L - N \delta u \Big|_0^L + \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L dt \end{aligned} \quad (3.231)$$

Birinci kısım Euler-Langrange denklemi olup,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.232)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.233)$$

şeklinde denge denklemleriyle çıkarılan ifadenin aynısı elde edilmiş olur. Denklem (3.74)'te (3.233) ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-q + \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right] + q - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (3.234)$$

elde edilmiş olur. Denklem (3.233), denklem (3.73)'te yerine yazılırsa,

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \left(-q + \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \quad (3.235)$$

olur. Denge denklemlerinden elde ettiğimiz (3.212) denklemine (3.234)'ün bir kere kısmi türevi alınıp yazılırsa,

$$\begin{aligned} & -V + m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.236)$$

elde edilir. (3.232)'de elde ettiğimiz ifadenin bir kere kısmi türevi alınıp (3.180) denkleminde yerine yazıldığında,

$$-N + EA \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left(m_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) = 0 \quad (3.237)$$

ifadelerine ulaşılır. Serbest titreşim için (3.234) denklemini çözmemiz gerekmektedir.

Burada q ve $\bar{N}$ ifadeleri sıfıra eşit ise ve de Euler-Bernoulli kiriş teorisi dönmeden dolayı oluşan atalet momentlerini ihmal etmesinden dolayı m_2 sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.238)$$

denkleminde ulaşılabilir (Reddy 2007). Kullanacağımız dönüşüm aşağıdaki gibidir.

$$w = W \sin(\omega t + \theta) \quad (3.239)$$

Burada w kirişin yer değiştirme fonksiyonunu, W şekil fonksiyonunu ω doğal açısal frekansı θ açısal frekansı ifade etmektedir. Dönüşüm (3.238) denklemine uygulandığı zaman,

$$(EI) \frac{d^4 W}{dx^4} + (\mu m_0 \omega^2) \frac{d^2 W}{dx^2} - (m_0 \omega^2) W = 0 \quad (3.240)$$

Denklemini boyutsuz hale getirirsek,

$$(EI) \frac{d^4 W}{dx^4} + (\mu m_0 \omega^2) L^2 \frac{d^2 W}{dx^2} - (m_0 \omega^2) L^4 W = 0$$

$$p \frac{d^4 W}{dx^4} + q \frac{d^2 W}{dx^2} - r W = 0 \quad (3.241)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Burada

$$W = B.e^{kx} \quad (3.242)$$

olsun. Denklem (3.241)'de bu ifade yerine yazılır ve $k^2 = K$ denilirse,

$$pK^2 + qK - r = 0 \quad (3.243)$$

elde edilir. Denklemin kökleri $K = k^2$ olduğundan,

$$\beta = \sqrt{\Delta_1} \quad \varsigma = \sqrt{-\Delta_1} \quad \xi = \sqrt{\Delta_2} \quad \alpha = \sqrt{-\Delta_2} \quad (3.244)$$

$$\Delta_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - (-4pr)}}{2p} \quad , \quad 4h = q^2 + 4pr \quad (3.245)$$

dediğimiz takdirde,

$$h = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + pr \quad h > 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{-q + \sqrt{4h}}{2p} = \frac{-q}{2p} + \frac{\sqrt{h}}{p} & \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 &= \frac{-q - \sqrt{4h}}{2p} = -\frac{q}{2p} - \frac{\sqrt{h}}{p} & \Delta_2 < 0\end{aligned}\quad (3.246)$$

olduğundan sistemin çözümü,

$$W = B_1 \cdot e^{\beta x} + B_2 \cdot e^{i\beta x} + B_3 \cdot e^{i\alpha x} + B_4 \cdot e^{\alpha x} \quad (3.247)$$

halini alır. Aşağıdaki dönüşümler denklem (3.247)'ye uygulandığında denklemin genel çözümü,

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \\ e^{\theta} &= \cosh \theta + \sinh \theta, e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta\end{aligned}\quad (3.248)$$

$$W = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x + c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x \quad (3.249)$$

olur. Burada denklem (3.245)'ten,

$$\alpha^2 = \frac{1}{2p} \left(q + \sqrt{q^2 + 4pr} \right), \beta^2 = \frac{1}{2p} \left(-q + \sqrt{q^2 + 4pr} \right) \quad (3.250)$$

şeklinde elde edilebilir. Birinci denklemin her iki tarafının karesi alıp p,q,r ifadelerini yerine yazdığımız takdirde ve ifadesinin sıfır olması durumunda,

$$\begin{aligned}p\alpha^4 - q\alpha^2 - r &= 0 \\ \alpha^4 - (\mu A^4 L^2)\alpha^2 - A^4 L^4 &= 0 \\ \frac{m_0 \omega^2}{EI} &= A^4, \quad \Omega = AL\end{aligned}\quad (3.251)$$

denklemine ulaşmak mümkündür. Bu durumda (3.250) denkleminde,

$$\alpha, \beta = AL \sqrt{\frac{1}{2} \left(\pm \left(\frac{e_0 a}{L} \right)^2 (AL)^2 + \sqrt{\left(\frac{e_0 a}{L} \right)^4 (AL)^4 + 4} \right)} \quad (3.252)$$

elde edilmiş olur. Ω boyutsuz frekans değeri olmak üzere,

$$\Omega = \frac{\alpha}{\sqrt[1/4]{\left(\frac{e_0 a}{L} \right)^2 \alpha^2 + 1}} \quad \Omega = \frac{\beta}{\sqrt[1/4]{1 - \left(\frac{e_0 a}{L} \right)^2 \beta^2}} \quad (3.253)$$

şeklinde son halini alır. Denklem (3.249)'un konuma göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \alpha (c_1 \cos \alpha x - c_2 \sin \alpha x) + \beta (c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x) \\ \frac{d^2 W}{dx^2} &= \alpha^2 (-c_1 \sin \alpha x - c_2 \cos \alpha x) + \beta^2 (c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x) \end{aligned} \quad (3.254)$$

elde edilir. Denklem (3.235) ve (3.236)'da $q=0$, $\bar{N}=0$ ve $m_2=0$ alınır ve de $w = W \sin(\omega t + \theta)$ dönüşümü denkleme uygulanıp (3.249) denklemi bu denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} M &= -p \frac{d^2 W}{dx^2} - qW \\ M &= (p\alpha^2 - q)(c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x) - (p\beta^2 + q)(c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x) \end{aligned} \quad (3.255)$$

$$\begin{aligned} V &= -p \frac{d^3 W}{dx^3} - q \frac{dW}{dx} \\ V &= \alpha(p\alpha^2 - q)(c_1 \cos \alpha x - c_2 \sin \alpha x) - \beta(p\beta^2 + q)(c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x) \end{aligned} \quad (3.256)$$

şeklinde bulunur.

3.2.1.6. Uygulamalar

İki tarafı basit mesnetli kirişin serbest titreşimi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre:

Sınır koşulları: $x=0$ ve $x=L$ noktasında

$$W = 0, \quad M = -EI \frac{d^2 W}{dx^2} - \mu m_0 \omega^2 L^2 W = 0 \quad (3.257)$$

olmalıdır. Denklem (3.249)'da x yerine 0 yazıldığında,

$$W = c_1 \sin \alpha 0 + c_2 \cos \alpha 0 + c_3 \sinh \beta 0 + c_4 \cosh \beta 0 = 0$$
$$c_2 + c_4 = 0 \quad (3.258)$$

elde edilir. Denklem (3.255)'de $W = 0$ olduğundan $-EI \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$ olması gerekmektedir.

$$-p \frac{d^2 W}{dx^2} = p \alpha^2 (c_1 \sin \alpha 0 + c_2 \cos \alpha 0) + \beta^2 (c_3 \sinh \beta 0 + c_4 \cosh \beta 0) = 0$$
$$p \alpha^2 c_2 + \beta^2 c_4 = 0 \quad (3.259)$$

Denklem (3.258) ve (3.259)'un ortak çözümünde $p \neq 0$ ve $\alpha^2 \neq \beta^2$ olduğundan,

$$c_2 = 0, \quad c_4 = 0 \quad (3.260)$$

olarak bulunur. Denklem (3.249) ve (3.255)'de x yerine L ve de bulunan katsayılar yerine yazıldığında,

$$W = c_1 \sin \alpha L + c_3 \sinh \beta L = 0 \quad (3.261)$$

$$M = c_1 \sin \alpha L (p \alpha^2 - q) - c_3 \sinh \beta L (p \beta^2 + q) = 0 \quad (3.262)$$

elde edilir. İki denklemin çözümü için,

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L & \sinh \beta L \\ \sin \alpha L(p\alpha^2 - q) & -\sin \beta L(p\beta^2 + q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.263)$$

Bu denklemin c_1 ve c_3 'ün sıfır olması dışında bir çözümünün olabilmesi için matris determinantın sıfır olması gerekir. Buradan yola çıkarak,

$$\sin \alpha L = 0 \quad , \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.264)$$

olur. Eksenel yükün sıfır olması durumunda boyutsuz frekans,

$$\Omega = \frac{\left(\frac{n\pi}{L} \right)}{\sqrt[1/4]{\frac{\mu}{(L)^2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + 1}} \quad (3.265)$$

şeklinde hesaplanabilir (Reddy ve Pang 2008).

İki tarafı ankastre mesnetli kirişin serbest titreşimi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: $x=0$ ve $x=L$ noktalarında

$$W = 0 \quad , \quad \frac{dW}{dx} = 0 \quad (3.266)$$

olmalıdır. Denklem (3.249) ve (3.254)'te x yerine sıfır yazıldığı takdirde,

$$\begin{aligned} W &= c_1 \sin \alpha 0 + c_2 \cos \alpha 0 + c_3 \sinh \beta 0 + c_4 \cosh \beta 0 = 0 \\ c_2 + c_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.267)$$

$$\frac{dW}{dx} = \alpha(c_1 \cos \alpha 0 - c_2 \sin \alpha 0) + \beta(c_3 \cosh \beta 0 + c_4 \sinh \beta 0) = 0$$

$$\alpha c_1 + \beta c_3 = 0 \quad (3.268)$$

elde edilir. Denklem (3.249) ve (3.254)'te x yerine L yazılır ve (3.267) ve (3.268)'de elde edilen değerler yerlerine yazıldığı takdirde,

$$W = c_1 \left(\sin \alpha L - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta L \right) + c_2 (\cos \alpha L - \cosh \beta L) = 0$$

$$\frac{dW}{dx} = c_1 (\alpha \cos \alpha L - \alpha \cosh \beta L) - c_2 (\alpha \sin \alpha L + \beta \sinh \beta L) = 0 \quad (3.269)$$

Yukarıdaki iki denklemin çözümü için,

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta L & \cos \alpha L - \cosh \beta L \\ \alpha \cos \alpha L - \alpha \cosh \beta L & -(\alpha \sin \alpha L + \beta \sinh \beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.270)$$

Bu denklemin c_1 ve c_2 'nin sıfır olması dışında bir çözümünün olabilmesi için matris determinantın sıfır olması gerekir.

$$-(\sin^2 \alpha L + \cos^2 \alpha L) + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \sinh \beta L \sin \alpha L + (\sinh^2 \beta L - \cosh^2 \beta L) + 2 \cosh \beta L \cos \alpha L$$

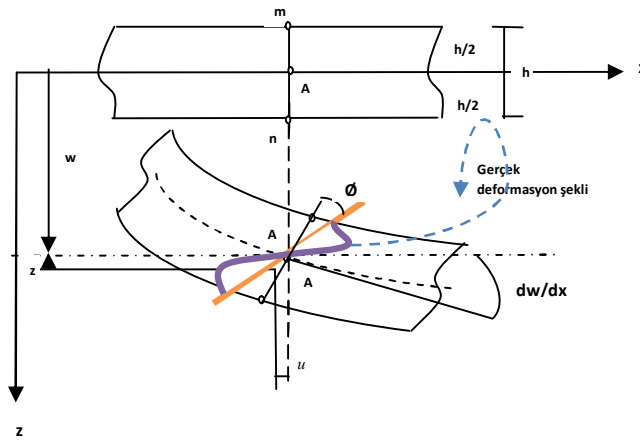
$$\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \sinh \beta L \sin \alpha L + 2 \cosh \beta L \cos \alpha L - 2 = 0 \quad (3.271)$$

$$\alpha \beta (e0a)^2 \sinh \beta L \sin \alpha L + 2 \cosh \beta L \cos \alpha L - 2 = 0$$

α 'nın kökleri (3.253) denkleminde yerine yazıldığı zaman iki tarafı ankastre mesnetli kirişin boyutsuz frekansları bulunmuş olur (Reddy ve Pang 2008).

3.2.2. Timoshenko kirişı

Titreşimler sırasında elastik eğrinin yer değiştirmesi büyük ölçüde eğilme nedeniyle olsa da, bazı durumlarda kayma şekil değiştirmelerinin katkısını da hesaba katmak gerekebilir. Bu katkıları, kesitteki kesme kuvveti V ve ortalama bir kayma şekil değiştirmesi cinsinden ifade eden modele, timoshenko kirişı denir. (Yerlici ve Luş, 2001). Timoshenko kiriş teorisi için bütün kaynaklardan rahatlıkla bulunabilecek temel elastisite bağıntıları aşağıda açıklanmıştır.



Şekil 3.28. Timoshenko kiriş konum ve koordinatları

Kesme kuvveti, eğilme momenti ve yayılı yüke maruz bir kiriş göz önüne alalım. Kirişin kütle merkezinin eğimi θ ile verilmektedir. Bunun iki bileşeninin olduğu göz önünde tutulmaktadır. İlki eğilme etkisinden kaynaklanan dönme, ikincisi ise kayma etkisinden kaynaklanan dönmedir.

$$u(x, z) = u(x, t) + z \tan(\phi) = u(x, t) + z \phi \quad (\text{küçük açı kabulünden}) \quad (3.272)$$

$$v(x, z) = 0 \quad (3.273)$$

$$w(x, z) = w(x, t) \quad (3.274)$$

Bu durumda birim şekil değiştirme değerleri

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.275)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (3.276)$$

γ kayma şekil değiştirmesini ifade etmek üzere, birim şekil değiştirme ve kayma şekil değiştirme arasında $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ şeklinde bir bağıntı olması nedeniyle,

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi \equiv \gamma_{xz}, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (3.277)$$

olur. $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$ olduğu Euler-Bernoulli kirişlerinin denklemleri çıkarılırken anlatılmıştı.

Bu durumda,

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (3.278)$$

Timoshenko kiriş teorisinin esasına göre kesitteki kesme kuvveti aşağıda görüldüğü gibi kayma deformasyonu cinsinden verilmektedir.

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (3.279)$$

Eğer γ_{xz} kütle merkezi eksenindeki kayma deformasyonu ise, $G\gamma_{xz}A$ kesme kuvvetini verecektir. Bununla birlikte, kayma gerilmeleri, kiriş kesiti üzerinde sabit dağılmaz. Bu değer kesit boyunca değişken gerilme dağılımı integrasyonu ile elde edilen değere eşit olmayacaktır.

Buradaki γ_{xz} , kayma gerilmeleri dağılımının düzensizliğini yansıtan temsili bir şekil değiştirmedir ve etkin kayma şekil değiştirmesi diye adlandırılır. Bu değeri dengeye getirmek için bir uyum katsayısı K_S tanımlanmaktadır (Yerlici ve Luş, 2001)

$$\tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{xz} = GK_s \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.280)$$

elde edilmiş olur. Burada E elastisite modülünü, G kayma modülünü ifade etmektedir. (3.44), (3.45) ve (3.46) denklemlerinden yola çıkarak,

$$N = \int E \left(\frac{du}{dx} + z \frac{d\phi}{dx} \right) dA = EA \frac{du}{dx} \quad (3.281)$$

$$V = G \int_A \gamma dA = (G\gamma_{xz} A) K_s \quad V = GAK_s \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.282)$$

$$M = E \frac{\partial \phi}{\partial x} \int_A z^2 dA, \quad M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.283)$$

sonuçlarına ulaşılır.

3.2.2.1. Yerel olmayan Timoshenko kirişinin eğilmesi

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde denge denklemlerinden elde edilen eğilme momenti, kesme kuvveti ve yük arasındaki ilişki Timoshenko kiriş teorisi için de geçerlidir.

Varyasyonel türev yöntemiyle eğilme denkleminin elde edilebilmesi için kirişe ait genel şekil değiştirme enerjisi formülü

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (3.284)$$

olmak üzere burada $\{\sigma\}$ bütün gerilme bileşenlerini, $\{\varepsilon\}$ bütün şekil değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. Timoshenko kiriş teorisine göre σ_{xx} ve τ_{xz} olmak üzere iki adet gerilme ifadesi bulunmaktadır.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz}) dV \quad (3.285)$$

halini alır. Denklem (3.280), (3.285) denkleminde yerine yazıldığında,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2G \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xz}) dV \quad (3.286)$$

olur. Denklem (3.275)'deki ve daha sonra (3.44), (3.45) ve (3.46)'daki ifadeler (3.286)'da kullanıldığında,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \left[(\sigma_{xx}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\tau_{xz}) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \quad (3.287)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left[M \frac{\partial \phi}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \left[\left(V \phi + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} dx \quad (3.288)$$

şeklinde son halini alır. q yayılı yükü ifade etmek üzere dış kuvvetlerin yapmış olduğu potansiyel enerjinin varyasyon ifadesi,

$$\delta W = \int_0^L q(x) \delta w dx \quad (3.289)$$

formülü yardımıyla bulunur. Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlerin yapmış olduğu iş ile dış kuvvetlerin yapmış olduğu işin birbirinden çıkarılması suretiyle bulunmaktadır. O halde,

$$\delta \Pi = \delta(U - W) \quad (3.290)$$

Birinci terimin kısmi varyasyonu alındığı zaman,

$$\int_0^L M \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = \left[M \delta \phi \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial M}{\partial x} \delta \phi dx \right] \quad (3.282)$$

Aynı şekilde diğer terimlerin de varyasyonu alınırsa,

$$\int_0^L N \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \left[N \delta u \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx \right] \quad (3.283)$$

$$\int_0^L V \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = \left[V \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial V}{\partial x} \delta w dx \right] \quad (3.284)$$

varyasyonu alınan ifadeler denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[\left(-\frac{\partial M}{\partial x} + V \right) \delta \phi + \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - q \right) \delta w - \frac{\partial N}{\partial x} \delta u \right] dx + M \delta \phi \Big|_0^L + N \delta u + V \delta w \Big|_0^L \quad (3.285)$$

elde edilmiş olur. Bu denklemde her bölüm 0'a eşit olmak zorundadır. Birinci bölüm Euler-Lagrange denklemi olup integrallerin içi sıfıra eşit olmalıdır.

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = 0 \quad (3.286)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = 0 \quad (3.287)$$

denklemleri elde edilir. $x=0$ ve $x=L$ için sağlanması gereken sınır koşulları,

$$u \text{ ya da } N \quad (3.288)$$

$$w \text{ ya da } V$$

$$\phi \text{ ya da } M \quad (3.289)$$

olur. (3.286)'nın bir kere kısmi türevi alınıp (3.287)'de yerine yazılırsa ve (3.287)'nin bir kere kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = 0 \quad (3.290)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.291)$$

sonuçlarına ulaşılır. Yerel olmayan elastisite teorisine göre (3.8)'de elde edilen denklem z ile çarpılır her iki tarafı alana göre integre edilirse ve (3.9) denkleminin yine her iki tarafı alana göre integre edilirse,

$$M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad V - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \quad (3.292)$$

denklemleri elde edilir. (3.290) ve (3.291) denklemleri (3.292)'de yerlerine yazılırsa,

$$M = -\mu q + EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.293)$$

$$V = -\mu \frac{\partial q}{\partial x} + GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \quad (3.294)$$

ifadelerine ulaşılır. Elde edilen bu ifadeler (3.286) ve (3.287) denklemlerinde yerlerine yazıldığında,

$$GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) - EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.295)$$

$$-\mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \right] + q = 0 \quad (3.296)$$

şeklinde son halini alır. Denklem düzenlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GAK_s \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -q \quad (3.297)$$

ifadelesine ulaşılır (Reddy ve Pang 2008 ve Wang 2008). (3.295) ve (3.297) denklemleri yerel olmayan Timoshenko kirişi için eğilme denklemleridir. (3.297) denkleminin integralinin alınmasıyla,

$$V = \left[GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \right] + \mu \frac{\partial q}{\partial x} = -q_0 x - c_1 \quad (3.298)$$

(3.295) denklemi (3.298) denkleminde yerine yazılıp integrallerini alınırsa,

$$M = \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \mu q_0 = -q_0 \frac{x^2}{2} - c_1 x - c_2 \quad (3.299)$$

$$EI \phi = \mu q_0 x - q_0 \frac{x^3}{6} - c_1 \frac{x^2}{2} - c_2 x - c_3 \quad (3.300)$$

$$EI w = -\mu q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 - \frac{EI}{GAK_s} \left(q_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x - \mu q_0 \right) \quad (3.301)$$

elde edilir (Reddy 2007). Bu durumda denklem (3.297)'de elde edilen ifadeye tekil kuvvet etki ederse,

$$\frac{d}{dx} \left[GAK \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right) \right] - \mu \left[\frac{d^2 q}{dx^2} + \sum_{i=1}^m P_i \delta''(x - a_i) \right] = -q - \sum_{i=1}^m P_i \delta(x - a_i) \quad (3.302)$$

Momentin türevi kesme kuvvetini, kesme kuvvetinin türevi ise yayılı yükün ters işaretlisini verdiğiinden,

$$\begin{aligned}
V &= \left[GAK_s \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right) \right] - \mu \left[\frac{dq}{dx} + \sum_{i=1}^m P_i \delta'(x - a_i) \right] \\
&= - \int_x^x q(x) dx - c_1 - \sum_{i=1}^m P_i H(x - a_i)
\end{aligned} \tag{3.303}$$

(3.295) denklemi (3.303) denkleminde yerine yazılıp integralleri alınırsa,

$$M = \left(EI \frac{d\phi}{dx} \right) - \mu \left[q + \sum_{i=1}^m P_i \delta(x - a_i) \right] = - \int_x^x xq(x) dx - c_1 x - c_2 - \sum_{i=1}^m P_i (x - a_i) H(x - a_i) \tag{3.304}$$

$$\phi = \frac{\mu}{EI} \left[\int_x^x q(x) dx + \sum_{i=1}^m P_i H(x - a_i) \right]$$

$$+ \frac{1}{EI} \left(- \int_x^x \frac{x^2}{2} q(x) dx - c_1 \frac{x^2}{2} - c_2 x - c_3 \right) - \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^m P_i \frac{(x - a_i)^2}{2} H(x - a_i) \tag{3.305}$$

sonuçlarına ulaşılır. (3.305)'de elde ettiğimiz denklemi (3.303) denklemindeki yerine yazılır daha sonra her iki tarafı $\frac{EI}{GAK_s}$ ile çarpıp denklemin integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
EIw &= - \mu \left(\int_x^x xq(x) dx + \sum_{i=1}^m P_i (x - a_i) H(x - a_i) \right) \\
&+ \left(\int_x^x \frac{x^3}{6} q(x) dx + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 + \sum_{i=1}^m P_i \frac{(x - a_i)^3}{6} H(x - a_i) \right) \\
&- \frac{EI}{GAK_s} \left[\left(\int_x^x xq(x) dx + c_1 x + \sum_{i=1}^m P_i (x - a_i) H(x - a_i) \right) + \mu \left[q + \sum_{i=1}^m P_i \delta(x - a_i) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.306}$$

elde edilmiş olur.

Tekil yük etkisindeki kirişler için,

$$EIw = -\mu(P(x-l)H(x-l)) + \left(c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 + P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l) \right) - \frac{EI}{GAK_s} [(c_1 x + P(x-l)H(x-l)) + \mu P \delta(x-l)] \quad (3.307)$$

$$\phi = \frac{\mu}{EI} [PH(x-l)] + \frac{1}{EI} \left(-c_1 \frac{x^2}{2} - c_2 x - c_3 \right) - \frac{1}{EI} P \frac{(x-l)^2}{2} H(x-l) \quad (3.308)$$

$$M = -c_1 x - c_2 - P(x-l)H(x-l) \quad (3.309)$$

$$V = -c_1 - PH(x-l) \quad (3.310)$$

olur (Wang ve Liew 2007).

3.2.2.2. Uygulamalar

Şekil 3.18’de görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki iki tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: x=0 ve x=L noktalarında w ve M değerleri 0’a eşit olmalıdır.

Denklem (3.301) ve (3.299)’da x yerine sıfır yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{0^2}{2} + q_0 \frac{0^4}{24} + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 - \frac{EI}{GAK_s} \left(q_0 \frac{0^2}{2} + c_1 0 - \mu q_0 \right) = 0$$

$$c_4 = -\frac{\mu q_0 EI}{GAK_s} \quad (3.311)$$

$$M = \left(EI \frac{d\phi}{dx} \right) - \mu q_0 = -q_0 \frac{0^2}{2} - c_1 0 - c_2 = 0$$

$$c_2 = 0 \quad (3.312)$$

olur. $x = L$ noktasında yine (3.301) ve (3.299) denklemlerinde x yerine L yazılır, (3.311) ve (3.312)'de elde edilen katsayılar denklemde yerine yazılırsa,

$$M = \left(EI \frac{d\phi}{dx} \right) - \mu q_0 = -q_0 \frac{L^2}{2} - c_1 L - 0 = 0$$

$$c_1 = -q_0 \frac{L}{2} \quad (3.313)$$

$$EIw = -\mu q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + \left(-q_0 \frac{L}{2} \right) \frac{L^3}{6} + 0 \frac{L^2}{2} + c_3 L + \left(-\frac{\mu q_0 EI}{GAK_s} \right) - \frac{EI}{GAK_s} \left(q_0 \frac{L^2}{2} + \left(-q_0 \frac{L}{2} \right) L - \mu q_0 \right)$$

$$c_3 = q_0 \frac{L^3}{24} \left(\frac{12\mu}{L^2} + 1 \right) \quad (3.313)$$

şeklinde integral sabitlerini elde edilmiş olur. Bulunan integral katsayıları denklem (3.299), (3.300) ve (3.301)'de yerine yazılırsa deplasman, eğilme momenti ve dönme denklemleri,

$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{x}{L} \right] + \left(\frac{\mu + \frac{EI}{GAK_s}}{2EI} q_0 L^2 \right) \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (3.314)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{2} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{x}{L} \right] \quad (3.315)$$

$$\phi = -\frac{q_0 L^3}{24EI} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right] + \left(\frac{\mu q_0 L}{2EI} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (3.316)$$

şeklinde bulunur (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.19’da görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki iki tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: $x=0$ ve $x=L$ noktalarında w ve ϕ değerleri 0’a eşit olmalıdır.

$x=0$ noktasında (3.300) ve (3.301) denklemlerinde x yerine sıfır yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{0^2}{2} + q_0 \frac{0^4}{24} + c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 - \frac{EI}{GAK_s} \left(q_0 \frac{0^2}{2} + c_1 0 - \mu q_0 \right) = 0$$

$$c_4 = -\frac{\mu q_0 EI}{GAK_s} \quad (3.317)$$

$$EI\phi = \mu q_0 0 - q_0 \frac{0^3}{6} - c_1 \frac{0^2}{2} - c_2 0 - c_3 = 0$$

$$c_3 = 0 \text{ olur} \quad (3.318)$$

$x=L$ noktasında (3.300) ve (3.301) denklemlerinde x yerine L yazılır ve (3.317), (3.318)’de elde edilen integral katsayıları denklemlerde yerlerine yazılırsa,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + 0x$$

$$+ \left(-\mu q_0 \frac{EI}{GAK_s} \right) - \frac{EI}{GAK_s} \left(q_0 \frac{L^2}{2} + c_1 L - \mu q_0 \right) = 0 \quad (3.319)$$

$$EI\phi = \mu q_0 L - q_0 \frac{L^3}{6} - c_1 \frac{L^2}{2} - c_2 L - 0 = 0 \quad (3.320)$$

İki denklem birlikte çözülürse,

$$c_1 = -\frac{q_0 L}{2} \quad , \quad c_2 = \frac{q_0 L^2}{12} + q_0 \mu \quad (3.321)$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen integral katsayılarının denklem (3.301), (3.302) ve (3.303) denklemlerinde yerine yazılmasıyla deplasman, eğilme momenti ve dönme denklemleri,

$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + \frac{q_0 L^2}{2GAK_s} \left[\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (3.322)$$

$$\phi = \frac{q_0 L^3}{12EI} \left[-2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{x}{L} \right] \quad (3.323)$$

$$M = -\frac{q_0 L^2}{12} \left[1 - 6 \frac{x}{L} + 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - \mu q_0 \quad (3.324)$$

olur (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.20’de görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki tek tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: x=0 da $w = \phi = 0$; x=L noktasında $M = V=0$ olmalıdır.

x=0 noktasında denklem (3.300) ve (3.304)’te x yerine sıfır yazılmasıyla bir önceki soruda bulunduğu gibi,

$$c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{\mu q_0 EI}{GAK_s} \quad (3.325)$$

olur. x=L noktasında denklem (3.298) ve (3.299)’da x yerine L yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} V &= -q_0 L - c_1 = 0 \\ c_1 &= -q_0 L \end{aligned} \quad (3.326)$$

$$M = -q_0 \frac{L^2}{2} - (-q_0 L)L - c_2 = 0$$

$$c_2 = q_0 \frac{L^2}{2} \quad (3.327)$$

olarak bulunur. Elde edilen integral katsayılarının deklemleri (3.299), (3.300) ve (3.301)'de yerine yazılmasıyla deplasman, eğilme momenti ve dönme denklemleri,

$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - \frac{\mu q_0 L^2}{2EI} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{q_0 L^2}{2GAK_s} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (3.328)$$

$$\phi = \frac{q_0 L^3}{6EI} \left[- \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{L} \right) \right] + \frac{\mu q_0 L}{EI} \left(\frac{x}{L} \right) \quad (3.329)$$

$$M = \frac{q_0 L^2}{2} \left[- \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right] \quad (3.330)$$

şeklindedir (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.21'de görülen q düzgün yayılı yük etkisindeki bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: $x=0$ da $w = \phi = 0$; $x=L$ noktasında $w = M = 0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem 3.300 ve 3.304'te x yerine sıfır yazılmasıyla bir önceki soruda bulunduğu gibi

$$c_3 = 0 \quad , \quad c_4 = - \frac{\mu q_0 EI}{GAK_s} \quad (3.331)$$

$x=L$ noktasında denklem (3.301) ve (3.299)'da x yerine L yazıldığı zaman,

$$EIw = -\mu q_0 \frac{L^2}{2} + q_0 \frac{L^4}{24} + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} - \frac{EI}{GAK_s} q_0 \frac{L^2}{2} - \frac{EI}{GAK_s} c_1 L = 0 \quad (3.332)$$

$$M = -q_0 \frac{L^2}{2} - c_1 L - c_2 = 0 \quad (3.333)$$

(3.332) ve (3.333) denklemlerinin ortak çözümünden, ikinci denklemi $\frac{L^2}{2}$ ile çarpıp c_2 değeri yok edilirse,

$$c_1 = -\frac{q_0 L}{8} \frac{\left(5 + 12 \frac{\mu}{L^2} + 12 \frac{EI}{L^2 GAK_s}\right)}{\left(1 + \frac{3}{L^2} \frac{EI}{GAK_s}\right)} \quad (3.334)$$

Denklem (3.333)'de c_1 ifadesi yerine yazılırsa,

$$c_2 = -q_0 \frac{L^2}{2} + \left[\frac{q_0 L^2}{8} \frac{\left(5 + 12 \frac{\mu}{L^2} + 12 \frac{EI}{L^2 GAK_s}\right)}{\left(1 + \frac{3}{L^2} \frac{EI}{GAK_s}\right)} \right] \quad (3.335)$$

olur. Denklemi sadeleştirebilmek açısından,

$$\chi = \frac{\left(5 + 12 \frac{\mu}{L^2} + 12 \frac{EI}{L^2 GAK_s}\right)}{\left(1 + \frac{3}{L^2} \frac{EI}{GAK_s}\right)} \quad (3.336)$$

$$c_1 = -\frac{q_0 L}{8} \chi, \quad c_2 = -q_0 \frac{L^2}{2} + \frac{q_0 L^2}{8} \chi \quad (3.337)$$

olur. Elde edilen integral sabitlerini denklem (3.299), (3.300) ve (3.301)'de yerlerine yazdığımızda deplasman, dönme ve eğilme momenti denklemleri,

$$w = \frac{q_0 L^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - \frac{q_0 L^4}{48EI} \left[\chi \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 24 \frac{\mu}{L^2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 3\chi \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 24 \frac{EI}{GAK_s} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 6\chi \frac{EI}{GAK_s L^2} \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (3.338)$$

$$\phi = \frac{q_0 L^3}{24EI} \left[-4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{3}{2} \chi \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(24 \frac{\mu}{L^2} + 12 - 3\chi \right) \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (3.339)$$

$$M = \frac{q_0 L^2}{4} \left[-2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} \chi \left(\frac{x}{L} \right) + 2 - \frac{1}{2} \chi \right] \quad (3.340)$$

olarak ifade edilebilir (Reddy ve Pang 2008).

Şekil 3.22’de görülen P tekil yük etkisindeki iki tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşullarından : $x=0$ ve $x=L$ noktalarında w ve M değerleri 0’a eşit olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.307) ve (3.309)’da x yerine sıfır yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu(P(0-l)H(0-l)) + \left(c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 + P \frac{(0-l)^3}{6} H(0-l) \right) - \frac{EI}{GAK_s} [(c_1 0 + P(0-l)H(0-l)) - \mu P \delta(0-l)]$$

$$c_4 = 0 \quad (3.341)$$

$$M = -c_1 0 - c_2 - P(0-l)H(0-l) = 0$$

$$c_2 = 0 \quad (3.342)$$

şeklinde bulunur. $x=L$ noktasında denklem (3.307) ve (3.309)’da x yerine L yazılır ve yukarıda elde ettiğimiz integral katsayıları denklemlerde yerlerine yazıldığı takdirde,

$$M = -c_1 L - 0 - P(L-l)H(L-l) = 0$$

$$c_1 = -\frac{P(L-l)}{L} \quad (3.343)$$

$$EIw = -\mu(P(L-l)H(L-l)) + \left(\left(-\frac{P(L-l)}{L} \right) \frac{L^3}{6} + 0 \frac{L^2}{2} + c_3 L + 0 + P \frac{(L-l)^3}{6} H(L-l) \right)$$

$$- \frac{EI}{GAK_s} \left[\left(\left(-\frac{P(L-l)}{L} \right) L + P(L-l)H(L-l) \right) + \mu P \delta(L-l) \right] = 0$$

$$c_3 = \mu \frac{P(L-l)}{L} + \frac{P(L-l)}{6L} (2Ll - l^2) \quad (3.344)$$

bulunmuş olur. Elde edilen integral sabitlerinin denklem (3.307), (3.308) ve (3.309)'da yerlerine yazılmasıyla deplasman, dönme ve eğilme momenti denklemleri,

$$EIw = -\mu(P(x-l)H(x-l)) + \left(-\frac{P(L-l)}{L} \right) \frac{x^3}{6} + \left(\mu \frac{P(L-l)}{L} + \frac{P(L-l)}{6L} (2Ll - l^2) \right) x$$

$$+ P \frac{(x-l)^3}{6} H(x-l) - \frac{EI}{GAK_s} \left[\left(-\frac{P(L-l)}{L} x + P(x-l)H(x-l) \right) + \mu P \delta(x-l) \right] \quad (3.345)$$

$$M = \frac{P(L-l)}{L} x - P(x-l)H(x-l) \quad (3.346)$$

l noktasındaki moment değeri,

$$M = \frac{P(L-l)}{L} l \quad (3.347)$$

olarak bulunabilir (Wang ve Liew 2007).

Şekil 3.23’de görülen P tekil yük etkisindeki bir tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: $x=0$ noktasında $w = \phi = 0$ ve $x=L$ noktalarında $V = M = 0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.307) ve (3.308)’de x yerine sıfır yazılmasıyla,

$$EIw = -\mu(P(0-l)H(0-l)) + \left(c_1 \frac{0^3}{6} + c_2 \frac{0^2}{2} + c_3 0 + c_4 + P \frac{(0-l)^3}{6} H(0-l) \right) - \frac{EI}{GAK_s} [(c_1 0 + P(0-l)H(0-l)) + \mu P \delta(0-l)] = 0$$

$$c_4 = 0 \quad (3.348)$$

$$\phi = \frac{\mu}{EI} [PH(0-l)] + \frac{1}{EI} \left(-c_1 \frac{0^2}{2} - c_2 0 - c_3 \right) - \frac{1}{EI} P \frac{(0-l)^2}{2} H(0-l)$$

$$c_3 = 0 \quad (3.349)$$

$x=L$ noktasında denklem (3.310) ve (3.309)’da x yerine L yazılır ve de yukarıda elde edilen integral sabitleri denklemlerde yerine yazılırsa,

$$V = -c_1 - PH(L-l) = 0$$

$$c_1 = -P \quad (3.350)$$

$$M = PL - c_2 - P(L-l)H(L-l) = 0$$

$$c_2 = Pl \quad (3.351)$$

şeklinde integral sabitlerinin hepsi bulunmuş oldu. Bu sabitlerin denklem (3.307) ve (3.309)’da yerlerini yazılmasıyla deplasman ve eğilme momenti denklemleri,

$$EIw = -\mu(P(x-l)H(x-l)) + \left(-P\frac{x^3}{6} + Pl\frac{x^2}{2} + P\frac{(x-l)^3}{6}H(x-l) \right) - \frac{EI}{GAK_s} [(-Px + P(x-l)H(x-l))] \quad (3.352)$$

$$M = Px - Pl - P(x-l)H(x-l) \quad (3.353)$$

l noktasındaki eğilme momenti değeri,

$$M(l) = 0 \quad (3.354)$$

olur (Wang ve Liew 2007).

Şekil 3.24'te görülen P tekil yük etkisindeki iki tarafı ankastre mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: $x=0$ ve $x=L$ noktasında $w = \phi = 0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.307) ve (3.308)'de x yerine sıfır yazılmasıyla bir önceki örnekte bulunduğu gibi,

$$c_3 = 0, c_4 = 0 \quad (3.355)$$

$x=L$ noktasında denklem (3.307) ve (3.308)'de x yerine L yazılır ve de yukarıda bulunan integral sabitleri denklemde yerine yazılırsa,

$$EIw = -\mu(P(L-l)H(L-l)) + \left(c_1\frac{L^3}{6} + c_2\frac{L^2}{2} + 0L + 0 + P\frac{(L-l)^3}{6}H(L-l) \right)$$

$$-\frac{EI}{GAK_s}[(c_1L + P(L-l)H(L-l))] \quad (3.356)$$

$$\phi = \frac{\mu}{EI}[PH(L-l)] + \frac{1}{EI}\left(-c_1\frac{L^2}{2} - c_2L - 0\right) - \frac{1}{EI}P\frac{(L-l)^2}{2}H(L-l) \quad (3.357)$$

Denklemleri birlikte çözülüp 3.307 denkleminde yerine yazılırsa,

$$c_1 = \frac{P(L-l)\left(\mu + \frac{EI}{GAK_s}\right) + \frac{PL}{2}\left(\mu - \frac{(L-l)^2}{2}\right) + \left(\frac{P(L-l)^3}{6}\right)}{\frac{L^3}{12} + \frac{EI}{GAK_s}L} \quad (3.358)$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P(x-l)^3}{6} H(x-l) - \mu P(x-l) H(x-l) \right. \\ & + \left(\frac{P\mu}{L^2} \left(\frac{2l}{L} - 1 \right) - \frac{P(L-l)^2}{6L^2} \left(1 + \frac{2l}{L} \right) \right) x^3 \\ & + \left(\frac{P\mu}{L^2} (2L - 3l) + \frac{P(L-l)^2 l}{2L^2} \right) x^2 \left. \right\} \\ & + \frac{1}{GAK_s} \left\{ - \left(\frac{P\mu}{L^2} \left(\frac{2l}{L} - 1 \right) - \frac{P(L-l)^2}{6L^2} \left(1 + \frac{2l}{L} \right) \right) x - P(x-l) H(x-l) \right\} \\ & + \frac{3EI}{GAK_s \left(1 + 12 \frac{EI}{GAK_s L^2} \right)} \frac{x}{L} \left\{ - \left(\frac{P\mu}{L^2} \left(\frac{2l}{L} - 1 \right) - \frac{P(L-l)^2}{6L^2} \left(1 + \frac{2l}{L} \right) \right) L - P(L-l) \right\} \\ & * \left(\frac{2x^2}{3L^2} - \frac{4EI}{GAK_s L^2} - \frac{x}{L} \right) \end{aligned} \quad (3.359)$$

şeklinde bulunur (Wang ve Liew 2007).

Şekil 3.25'te görülen P tekil yük etkisindeki bir tarafı ankastre diğer tarafı basit mesnetli kirişin eğilme ve moment denklemi Timoshenko kiriş teorisine göre,

Sınır koşulları: $x=0$ 'da $w = \phi = 0$ ve $x=L$ noktasında $w=M=0$ olmalıdır.

$x=0$ noktasında denklem (3.307) ve (3.308)'de x yerine sıfır yazılmasıyla bir önceki örnekte bulunduğu gibi,

$$c_3 = 0, \quad c_4 = 0 \quad (3.360)$$

$x=L$ noktasında denklem (3.307) ve (3.309)'da x yerine L yazılır ve de yukarıda bulunan integral sabitleri denklemde yerine yazılırsa,

$$M = -c_1 L - c_2 - P(L-l)H(L-l) = 0 \quad (3.361)$$

$$EIw = -\mu(P(L-l)H(L-l)) + \left(c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} + 0L + 0 + P \frac{(L-l)^3}{6} H(L-l) \right) - \frac{EI}{GAK_s} (c_1 L + P(L-l)H(L-l)) = 0 \quad (3.362)$$

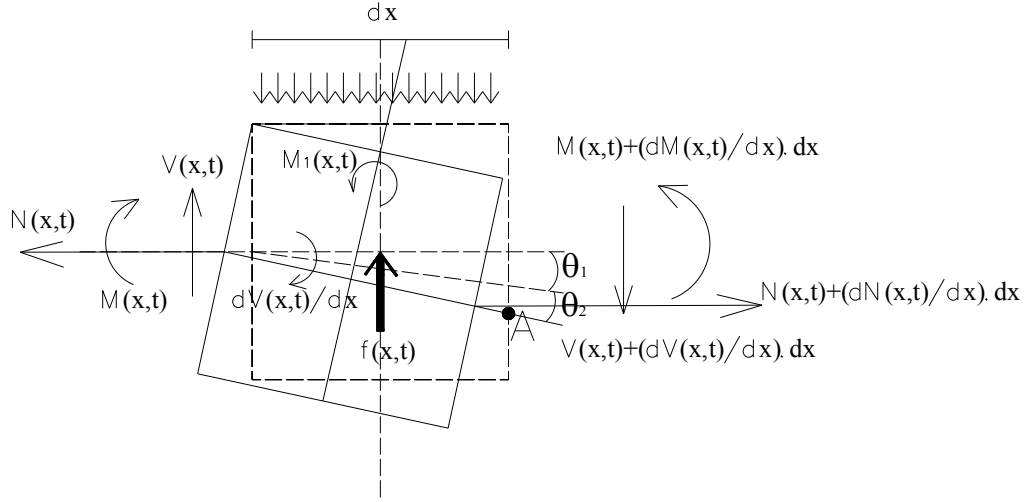
$$c_1 = \frac{P(l-L) \left(\frac{6EI}{GAK_s} + 6\mu - l^2 + 2lL + 2L^2 \right)}{6L \frac{EI}{GAK_s} + 2L^3}, \quad c_2 = \frac{P(l-L) [-6\mu + l(l-2L)]}{6 \frac{EI}{GAK_s} + 2L^2} \quad (3.363)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen integral sabitlerinin denklem (3.307), (3.308) ve (3.309)'da yerlerine yazılmasıyla deplasman, dönme ve eğilme momenti denklemleri

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P(x-l)^3}{6} H(x-l) - \mu P(x-l) H(x-l) \right. \\
& + \left(\frac{P(l-L) \left(\frac{6EI}{GAK_s} + 6\mu - l^2 + 2lL + 2L^2 \right)}{6L \frac{EI}{GAK_s} + 2L^3} \right) \frac{x^3}{6} \\
& + \left(\frac{P(l-L) [-6\mu + l(l-2L)]}{6 \frac{EI}{GAK_s} + 2L^2} \right) \frac{x^2}{2} \left. \vphantom{\frac{1}{EI}} \right\} \\
& - \frac{1}{GAK_s} \left\{ \left(\frac{P(l-L) \left(\frac{6EI}{GAK_s} + 6\mu - l^2 + 2lL + 2L^2 \right)}{6L \frac{EI}{GAK_s} + 2L^3} \right) x + P(x-l) H(x-l) \right\}
\end{aligned} \tag{3.364}$$

$$\begin{aligned}
M = & - \left(\frac{P(l-L) \left(\frac{6EI}{GAK_s} + 6\mu - l^2 + 2lL + 2L^2 \right)}{6L \frac{EI}{GAK_s} + 2L^3} \right) x \\
& - \left(\frac{P(l-L) [-6\mu + l(l-2L)]}{6 \frac{EI}{GAK_s} + 2L^2} \right) - P(x-l) H(x-l)
\end{aligned} \tag{3.365}$$

3.2.2.3. Yerel olmayan Timoshenko kirişinin titreşimi



Şekil 3.29. Timoshenko teorisinde diferansiyel parçaya etkiyen iç kuvvetler ve yer değiştirmeler

Kirişe ait genel şekil değiştirme enerjisi formülü

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (3.366)$$

olmak üzere burada $\{\sigma\}$ bütün gerilme bileşenlerini, $\{\varepsilon\}$ bütün şekil değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. Timoshenko kiriş teorisine göre σ_{xx} ve τ_{xz} olmak üzere iki adet gerilme ifadesi bulunmaktadır.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \varepsilon_{xz}) dV \quad (3.367)$$

Denklem 3.280 bu denklemde yerine yazıldığında

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (E \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xx} + 2G \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xz}) dV \quad (3.368)$$

halini alır. Denklem (3.275) ve (3.276)'da elde edilen değerleri denklem (3.368)'de yerine yazılırsa,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \left[(\sigma_{xx}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\tau_{xz}) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \quad (3.369)$$

halini alır. (3.44), (3.45) ve (3.46) denklemleri (3.369) denkleminde yazılıp gerekli düzenlemeler yapılır ve varyasyonu alınır,

$$\delta \int_0^T U dt = \int_0^T \int_0^L \left\{ M \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} + N \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\left(V \delta \phi + V \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dt \quad (3.370)$$

Birinci terimin kısmi varyasyonu alındığı zaman,

$$\int_0^T \int_0^L M \delta \left(\frac{d\phi}{dx} \right) dx dt = \int_0^T \left[M \delta \phi dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dM}{dx} \delta \phi dx dt \right] \quad (3.371)$$

Aynı şekilde diğer terimlerin de varyasyonu alınır

$$\int_0^T \int_0^L N \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \left[N \delta u dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dN}{dx} \delta u dx dt \right] \quad (3.372)$$

$$\int_0^T \int_0^L V \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \left[V \delta w dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dV}{dx} \delta w dx dt \right] \quad (3.373)$$

q yayılı yükü ifade etmek üzere dış kuvvetlerin yapmış olduğu potansiyel enerjinin varyasyon ifadesi,

$$\delta \int_0^T W dx dt = \int_0^T \int_0^L \left(q \delta w + \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.374)$$

formülü yardımıyla bulunur. Burada ikinci terimin varyasyonu alındığında

$$\int_0^T \int_0^L \left(\bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \left[\bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dx \right]_0^L - \int_0^L \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dt \quad (3.375)$$

olur. Kirişin kinetik enerji ifadesi,

$$\delta \int_0^T T dt = \int_0^T \int_0^L \left[m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + m_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dx dt \quad (3.376)$$

şeklinde son halini alır. İfadelerin varyasyonu alındığında,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt &= \int_0^L m_0 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \delta u dx \right]_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx dt \\ \int_0^T \int_0^L m_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt &= \int_0^L m_2 \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi dx \right]_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta \phi dx dt \\ \int_0^T \int_0^L m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt &= \int_0^L m_0 \left[\frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \right]_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \end{aligned} \quad (3.377)$$

Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlerin yapmış olduğu iş ile dış kuvvetlerin yapmış olduğu işin birbirinden çıkarılması suretiyle bulunmaktadır ve varyasyonu sıfırdır. O halde,

$$\delta \int_0^T [T - (U - W)] dt = 0 \quad (3.378)$$

varyasyonu alınan ifadeler denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L \left[\left[-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial N}{\partial x} \right] \delta u + \left(-m_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{dM}{dx} - V \right) \delta \phi \right] dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L \left(q - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta w dx dt \\
& + \int_0^L \left[m_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \Big|_0^T + m_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \Big|_0^T + m_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_0^T \right] dx \\
& - \int_0^T \left(M \delta \phi \Big|_0^L + N \delta u \Big|_0^L + \left(V \Big|_0^L - \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^L \right) \delta w \right) dt
\end{aligned} \tag{3.379}$$

Birinci kısım Euler-Langrange denklemi olup,

$$\frac{dN}{dx} = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.380}$$

$$\frac{dM}{dx} - V = m_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{3.381}$$

$$\frac{dV}{dx} + q - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.382}$$

x=0 ve x=L için sağlanması gereken sınır koşulları

$$\begin{aligned}
& u \text{ ya da } N \\
& w \text{ ya da } V - \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \\
& \phi \text{ ya da } M
\end{aligned} \tag{3.383}$$

Denklem (3.381)'in bir kere türevi alınıp (3.382)'de yerine yazılır ve denklem (3.74)'ün bir kere türevi alınır,

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} \quad (3.384)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - N \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{dq}{dx} = m_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (3.385)$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu ifade yerel olmayan elastisite teorisine göre elde edilen (3.292) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$M = \mu \left(\bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} \right) + EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.386)$$

$$V = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \quad (3.387)$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.381) ve (3.382) denklemlerinde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \right] + \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right] \\ & + q - \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = m_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (3.388)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - GAK_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) = m_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu m_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^2 \partial x^2} \quad (3.389)$$

şeklinde serbest titreşim denklemleri elde edilmiş olur (Reddy 2007). Timoshenko kiriş teorisi için serbest titreşimde aşağıdaki dönüşüm kullanılacaktır.

$$w(x, t) = W(x) e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 W(x, t) e^{-i\omega t} \quad (3.390)$$

Bu dönüşümler (3.388) ve (3.389) denklemlerinde yerine yazılıp q=0 alınırsa,

$$\frac{d}{dx} \left[GAK_s \left(\frac{dW}{dx} + \phi \right) \right] - \bar{N} \frac{d^2 W}{dx^2} + \mu \bar{N} \frac{d^4 W}{dx^4} + \omega^2 m_0 \left(W - \mu \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = 0 \quad (3.391)$$

$$EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} - GAK_s \left(\frac{dW}{dx} + \phi \right) + \omega^2 m_2 \left(\phi - \mu \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) = 0 \quad (3.392)$$

elde edilir. Burada W: deplasman ϕ : mod şeklini tanımlayan dönmeyi ifade etmektedir.

Yukarıdaki iki denklem birbiri cinsinden yazılıp birleştirildiğinde ifade,

$$A \frac{d^6 W}{dx^6} + B \frac{d^4 W}{dx^4} + C \frac{d^2 W}{dx^2} + DW = 0 \quad (3.392)$$

denkleminde ulaşılır. Burada,

$$A = \frac{\mu N}{GAK_s} (EI - \omega^2 m_2) \quad (3.393)$$

$$B = (EI - \mu \omega^2 m_2) \left(1 - \frac{N}{GAK_s} - \frac{\omega^2 m_0 \mu}{GAK_s} \right) + \frac{\mu N}{GAK_s} (\omega^2 m_2 - GAK_s) \quad (3.394)$$

$$C = GAK_s + \frac{\omega^2 m_0}{GAK_s} (EI - \mu \omega^2 m_2) + \left(1 - \frac{N}{GAK_s} - \frac{\omega^2 m_0 \mu}{GAK_s} \right) (\omega^2 m_2 - GAK_s) \quad (3.395)$$

$$D = \frac{\omega^2 m_0}{GAK_s} (\omega^2 m_2 - GAK_s) \quad (3.396)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklem eksenel yük etki etmiş yerel olmayan teori için geçerlidir. Eğer ki eksenel kuvvetimiz 0 ise ,

$$a \frac{d^4 W}{dx^4} + b \frac{d^2 W}{dx^2} - cW = 0 \quad (3.397)$$

denkleminde dönüşmüş olur.

$$a = \left(EI - \mu \omega^2 m_2 \right) \left(1 - \frac{\omega^2 m_0 \mu}{GAK_s} \right) \quad (3.398)$$

$$b = \omega^2 m_0 \left(\frac{EI}{GAK_s} + \mu \right) + \omega^2 m_2 \left(-2 \frac{\omega^2 m_0}{GAK_s} \mu + 1 \right) \quad (3.399)$$

$$c = \frac{\omega^2 m_0}{GAK_s} \left(-\omega^2 m_2 + GAK_s \right) \quad (3.400)$$

Bu denklemde $W^2 = K$ denilirse,

$$aK^2 + bK - c = 0 \quad (3.401)$$

olur. Denklemin kökleri ,

$$K = \alpha \text{ ve } K = \beta \quad (3.402)$$

olmak üzere $K = W^2$ olduğundan denklemin kökleri,

$$K_1 = \sqrt{\alpha} \quad K_2 = \sqrt{-\alpha} \quad K_3 = \sqrt{\beta_1} \quad K_4 = \sqrt{-\beta_1} \quad (3.403)$$

$$\alpha_1, \beta_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad (3.404)$$

$$4\varsigma = b^2 + 4ac \quad (3.405)$$

olsun.

$$\varsigma = \left(\frac{b}{2} \right)^2 + ac \quad \varsigma > 0 \quad (3.406)$$

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{4\varsigma}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\varsigma}}{a} \quad \alpha > 0 \quad (3.407)$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{4\varsigma}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\varsigma}}{a} \quad \beta < 0 \quad (3.408)$$

Denklemin genel çözümü,

$$W = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x + c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x \quad (3.409)$$

olur. Burada c_1, c_2, c_3, c_4 değerleri sınır koşullarını sağlayan integral sabitleridir.

$$\alpha^2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - (-4ac)}}{2a}, \quad \beta^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - (-4ac)}}{2a} \quad (3.410)$$

Denklem (3.410)'un her iki tarafının karesi alınıp düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} 4a^2\alpha^4 - 4ab\alpha^2 + b^2 &= b^2 + 4ac \\ a\alpha^4 - b\alpha^2 - c &= 0 \end{aligned} \quad (3.411)$$

elde edilmiş olur. Denklem ω katsayılı ifadelerle göre tekrar yazılırsa,

$$A\omega^4 - B\omega^2 + C = 0 \quad (3.412)$$

$$A = \frac{m_0 m_2 \mu^2}{GAK_s} \alpha^4 + \frac{2m_0 m_2 \mu}{GAK_s} \alpha^2 + \frac{m_0 m_2}{GAK_s} \quad (3.413)$$

$$B = \mu \left(m_2 + \frac{m_0 EI}{GAK_s} \right) \alpha^4 + \left(\frac{m_0 EI}{GAK_s} + m_0 \mu + m_2 \right) \alpha^2 + m_0 \quad (3.414)$$

$$C = EI\alpha^4 \quad (3.415)$$

Eğer sistemde dönme atalet ihmal edilecek olursa, $m_2 = 0$,

$$0 - B\omega^2 + C = 0 \quad (3.416)$$

O halde $\omega^2 = \frac{C}{B}$ olur. Değerler yerine yazılacak olursa ve $m_2=0$ durumunda,

$$\omega = \alpha^2 \sqrt{\left(\frac{EI}{m_0}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2\right) (1 + \mu \alpha^2)}} \quad (3.417)$$

$$\Omega = \alpha \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK_s}\right) \left(1 + \left(\frac{e_0 a}{L}\right)^2 \alpha^2\right)}}} \quad (3.418)$$

(3.386) ve (3.387) denklemlerinde (3.390)'da ifade edilen dönüşüm uygulandığı zaman

$$V = \mu \frac{d}{dx} \left(N \frac{d^2 W}{dx^2} - q - \omega^2 m_0 \frac{d^2 W}{dt^2} \right) + GAK_s \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \phi \right) \quad (3.419)$$

$$M = EI \frac{d\phi}{dx} + \mu \left[\frac{d}{dx} \left(N \frac{dW}{dx} \right) - \omega^2 \left(m_0 W + m_2 \frac{d\phi}{dx} \right) \right] \quad (3.420)$$

Denklem (3.391)'de ϕ ifadesi denklemden çekilirse,

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\omega^2 m_0 W}{GAK_s} - \left(1 - \frac{N}{GAK_s} - \frac{\omega^2 m_0 \mu}{GAK_s} \right) \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{\mu N}{GAK_s} \frac{d^4 W}{dx^4} \quad (3.421)$$

şeklinde dönme, kesme ve moment ifadeleri bulunmuş olur (Xu 2006, Reddy ve Pang 2008).

3.2.2.4. Uygulamalar

İki tarafı basit mesnetli kirişin serbest titreşimi için:

Sınır şartlarına göre $x=0$ ve $x=L$ 'de $W = M = 0$ olmalıdır.

(3.420) denkleminde $N=0$ ve $m_2=0$ ve sınır koşulundan W yerine 0 yazılırsa,

$$M = EI \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (3.422)$$

Denklem (3.421)'de $N=0$ ve $m_2=0$ olursa ve sınır koşulundan W yerine 0 yazılıp her iki taraf EI ile çarpılırsa,

$$EI \frac{d\phi}{dx} = - \left(EI - \frac{EI\omega^2 m_0 \mu}{GAK_s} \right) \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (3.423)$$

(3.409)'da elde edilen ifadenin iki kere integrali alındığında yukarıdaki denklemde parantez içinin sıfır olması aşikar çözümdür. Bu nedenle (3.455)'in iki kere türevi alınır,

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -c_1 \alpha^2 \sin \alpha x - c_2 \alpha^2 \cos \alpha x - c_3 \beta^2 \sinh \beta x + c_4 \beta^2 \cosh \beta x = 0 \quad (3.424)$$

olmalıdır. Sınır koşulları uygulanmaya başlandığında $x=0$ noktasında denklem (3.409) ve (3.424)'te x yerine sıfır yazıldığında,

$$W = c_1 \sin \alpha 0 + c_2 \cos \alpha 0 + c_3 \sinh \beta 0 + c_4 \cosh \beta 0 = 0$$

$$c_2 + c_4 = 0 \quad (3.425)$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -c_1 \alpha^2 \sin \alpha 0 - c_2 \alpha^2 \cos \alpha 0 - c_3 \beta^2 \sinh \beta 0 + c_4 \beta^2 \cosh \beta 0 = 0$$

$$-c_2 \alpha^2 + c_4 \beta^2 = 0 \quad (3.426)$$

İki denklemin ortak çözümünden $\alpha^2 \neq \beta^2$ olması nedeniyle,

$$c_2 = c_4 = 0 \quad (3.427)$$

bulunur. $x=L$ noktasında denklem (3.409) ve (3.424)'te x yerine L yazıldığında,

$$c_1 \sin \alpha L + c_3 \sinh \beta L = 0 \quad (3.428)$$

$$-c_1 \alpha^2 \sin \alpha L - c_3 \beta^2 \sinh \beta L = 0 \quad (3.429)$$

$$\beta^2 c_3 \sinh(\beta L) = 0, \alpha^2 c_1 \sin(\alpha L) = 0 \quad (3.430)$$

Bu denklem $c_3 = 0$ ya da $\beta = 0$ için sağlanır. $\beta = 0$ trivial (aşıkâr) cisimdir. Yani kiriş titreşmemiştir. Çözüm $c_3 = 0$ olmalıdır (aşıkâr olmayan çözüm).

Diğer koşullar

$$\sin(\alpha L) = 0$$

$$\alpha L = n\pi, \quad \alpha n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.431)$$

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_0 \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \left(1 + \mu \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)}} \quad (3.432)$$

şeklindedir (Reddy ve Pang 2008).

İki tarafı ankastre mesnetli kirişin serbest titreşimi için:

Sınır şartlarına göre $x=0$ ve $x=L$ 'de $W = \phi = 0$ olmalıdır.

Denklem (3.392)'de $m_2 = 0$, $N = 0$ der ve denklemde ϕ ifadesini yalnız başına bırakacak olursak,

$$\phi = \frac{EI}{GAK_s} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{dW}{dx} \quad (3.433)$$

(3.421)'de $N=0$ alınıp bir kere türevi alınırsa,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\omega^2 m_0}{GAK_s} \frac{dW}{dx} - \left(1 - \frac{\omega^2 m_0 \mu}{GAK_s}\right) \frac{d^3W}{dx^3} \quad (3.434)$$

elde edilebilir. Bulunan bu ifade (3.433) denkleminde yerine yazıldığı takdirde,

$$\phi = -\frac{EI}{GAK_s} \left(1 - \frac{\mu\omega^2 m_0}{GAK_s}\right) \frac{d^3W}{dx^3} - \left(\frac{EI}{GAK_s} \frac{\omega^2 m_0}{GAK_s} + 1\right) \frac{dW}{dx} \quad (3.435)$$

şeklinde bulunur.

$$\phi = -A \frac{d^3W}{dx^3} - B \frac{dW}{dx} \quad (3.436)$$

$$\phi = C(c_1 \cos \alpha x - c_2 \sin \alpha x) - D(c_3 \cosh \beta x + c_4 \sin \beta x) \quad (3.437)$$

(3.417)'de elde edilen ω ifadesi (3.435) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi = -\frac{EI}{GAK_s} \left[1 - \frac{\mu\alpha^4 \left(\frac{EI}{m_0 \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu\alpha^2)} \right) m_0}{GAK_s} \right] \frac{d^3W}{dx^3} - \left[\frac{EI}{GAK_s} \frac{\alpha^4 \left(\frac{EI}{m_0 \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu\alpha^2)} \right) m_0}{GAK_s} + 1 \right] \frac{dW}{dx} \quad (3.438)$$

Bu durumda (3.436)'daki A ve B katsayıları,

$$A = \frac{EI}{GAK_s} \left[1 - \mu\alpha^4 \left(\frac{EI}{GAK_s \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu\alpha^2)} \right) \right] \quad (3.439)$$

$$B = \left(\frac{EI}{GAK_s} \alpha^4 \left(\frac{EI}{GAK_s \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} \right) + 1 \right) \quad (3.440)$$

$$C = A\alpha^3 - B\alpha, \quad C = \alpha(A\alpha^2 - B), \quad D = A\beta^3 + B\beta, \quad D = \beta(A\beta^2 + B) \quad (3.441)$$

$$C = \alpha \left[\alpha^2 \left[\frac{EI}{GAK_s} - \frac{EI}{GAK_s} \mu \alpha^4 \left(\frac{EI}{GAK_s \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} \right) \right] - \frac{EI}{GAK_s} \alpha^4 \left(\frac{EI}{GAK_s \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} \right) - 1 \right]$$

$$C = \alpha \left(\frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 + \frac{\frac{EI}{GAK_s} \mu \alpha^4 \left(1 - \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right)}{\left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} - 1 \right) \quad (3.442)$$

Benzer şekilde,

$$D = \beta \left\{ \left[\beta^2 \frac{EI}{GAK_s} \left(1 - \mu \alpha^4 \left(\frac{EI}{GAK_s \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} \right) \right) \right] + \left(\frac{EI}{GAK_s} \alpha^4 \left(\frac{EI}{GAK_s \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} \right) + 1 \right) \right\}$$

$$D = \beta \left(\frac{EI}{GAK_s} \beta^2 - \frac{\frac{EI}{GAK_s} \mu \alpha^4 \left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \beta^2 \right)}{\left(1 + \frac{EI}{GAK_s} \alpha^2 \right) (1 + \mu \alpha^2)} + 1 \right) \quad (3.443)$$

olarak bulunur. Sınır koşullarını uygulamaya başlarsak,

x=0 noktasında denklem (3.409) ve (3.437)'de x yerine sıfır yazılırsa,

$$W(0) = c_1 \sin \alpha 0 + c_2 \cos \alpha 0 + c_3 \sinh \beta 0 + c_4 \cosh \beta 0 = 0$$

$$c_2 = -c_4 \quad (3.445)$$

$$\begin{aligned}\phi(0) &= C(c_1 \cos \alpha 0 - c_2 \sin \alpha 0) - D(c_3 \cosh \beta 0 + c_4 \sinh \beta 0) = 0 \\ c_3 &= c_1 \frac{C}{D}\end{aligned}\quad (3.446)$$

x=L noktasında denklem (3.409) ve (3.437)'de yukarıda bulunan katsayılar uygulanır x yerine L yazılırsa,

$$W(0) = c_1 \sin \alpha L + c_2 \cos \alpha L + \frac{C}{D} c_1 \sinh \beta L - c_2 \cosh \beta L = 0 \quad (3.447)$$

$$\phi(0) = C(c_1 \cos \alpha L - c_2 \sin \alpha L) - D\left(\frac{C}{D} c_1 \cosh \beta L - c_2 \sinh \beta L\right) = 0 \quad (3.448)$$

Yukarıdaki iki denklemin çözümü için,

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha L + \frac{C}{D} \sinh \beta L & \cos \alpha L - \cosh \beta L \\ C \cos \alpha L - C \cosh \beta L & (-C \sin \alpha L + D \sinh \beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.449)$$

Bu denklemin c_1 ve c_2 'nin sıfır olması dışında bir çözümünün olabilmesi için matris determinantın sıfır olması gerekir.

$$\begin{aligned}-C(\sin^2 \alpha L + \cos^2 \alpha L) + \left(D - \frac{C^2}{D}\right) \sinh \beta L \sin \alpha L + C(\sinh^2 \beta L - \cosh^2 \beta L) + 2C(\cosh \beta L \cos \alpha L) \\ 2 - 2 \cos \alpha L \cosh \beta L + \left(\frac{C}{D} - \frac{D}{C}\right) \sin \alpha L \sinh \beta L = 0\end{aligned}\quad (3.450)$$

Denklemin çözümünden elde edilen α 'nın kökleri (3.417) denkleminde yerine konularak frekans denklemi bulunabilir (Reddy ve Pang 2008).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tez bütününde Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılarak elde ettiğimiz eğilme ve titreşim denklemleri mikrotüpçük ve karbon nanotüp üzerinde analiz edilmiştir.

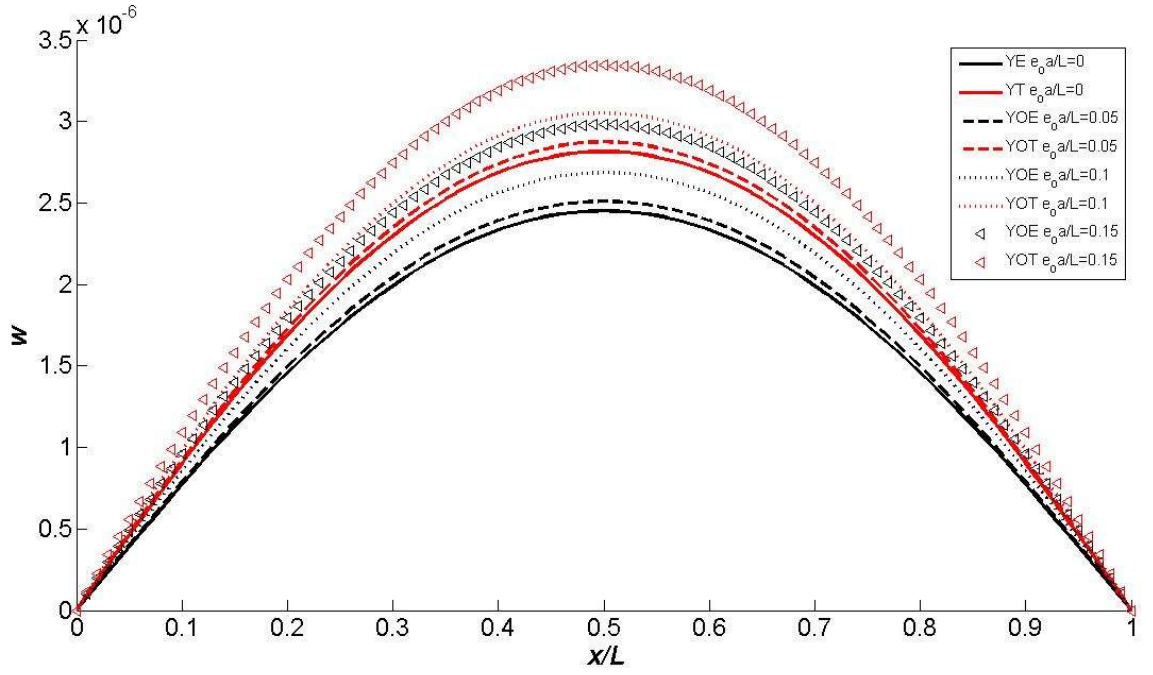
Çizelge 2. Mikrotüpçüklerin malzeme ve geometri özellikleri(Gao ve Lei 2009)

Parametreler	Değerler
EI	$5 \times 10^{-24} \text{ Nm}^2$
E	$2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
P	1470 kg/m^3
Y	0,3
L	$5 \times 10^{-7} \text{ m}$

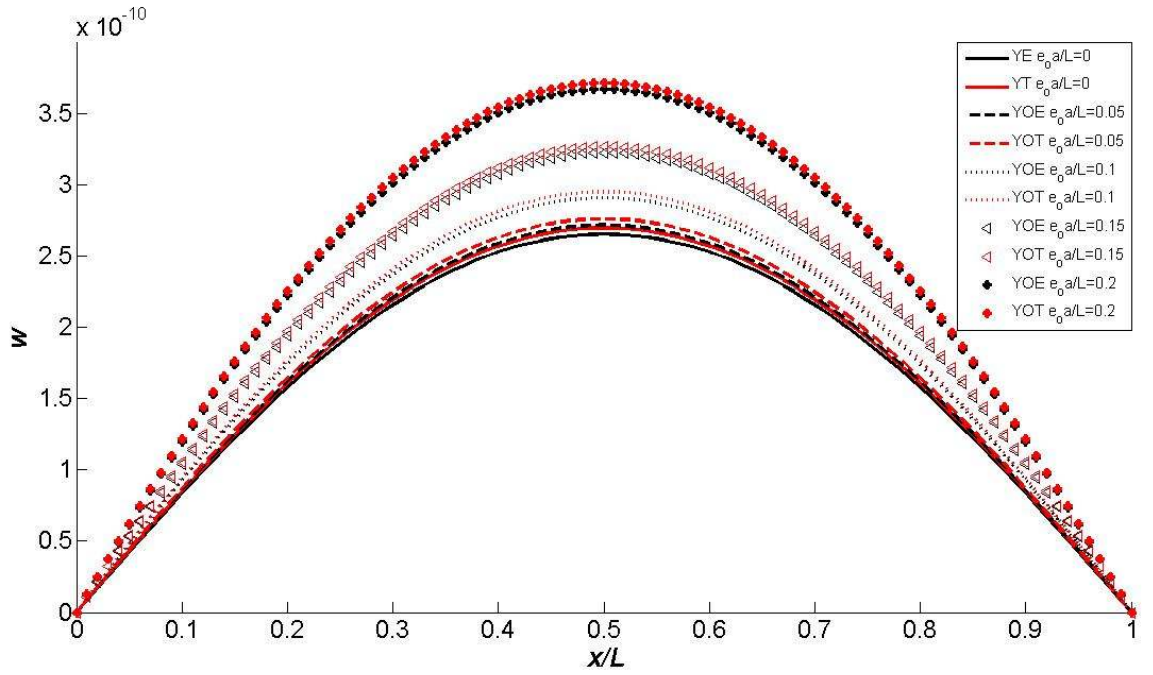
Çizelge 3. Karbon nanotüplerin malzeme ve geometri özellikleri(Reddy ve Pang 2008)

Parametreler	Değerler
E	$1 \times 10^{12} \text{ N/m}^2$
I	$4.91 \times 10^{-38} \text{ m}^4$
P	2300 kg/m^3
L	$1 \times 10^{-8} \text{ m}$

Şekil 4.1-4.2’de iki tarafı basit mesnetli kiriş modelinin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine göre deplasman ve eğilme momenti değerleri görülmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun artmasıyla deplasman artmaktadır. Ayrıca klasik elastisite teorisine göre deplasman değerlerinin daha büyük olduğu açık bir şekilde ifade edilebilir. Momentte ise moment için elde edilen denklemin malzeme karakteristik uzunluğundan bağımsız olması nedeniyle malzeme karakteristik uzunluğundan etkilenmediği sonucuna varılabilir.

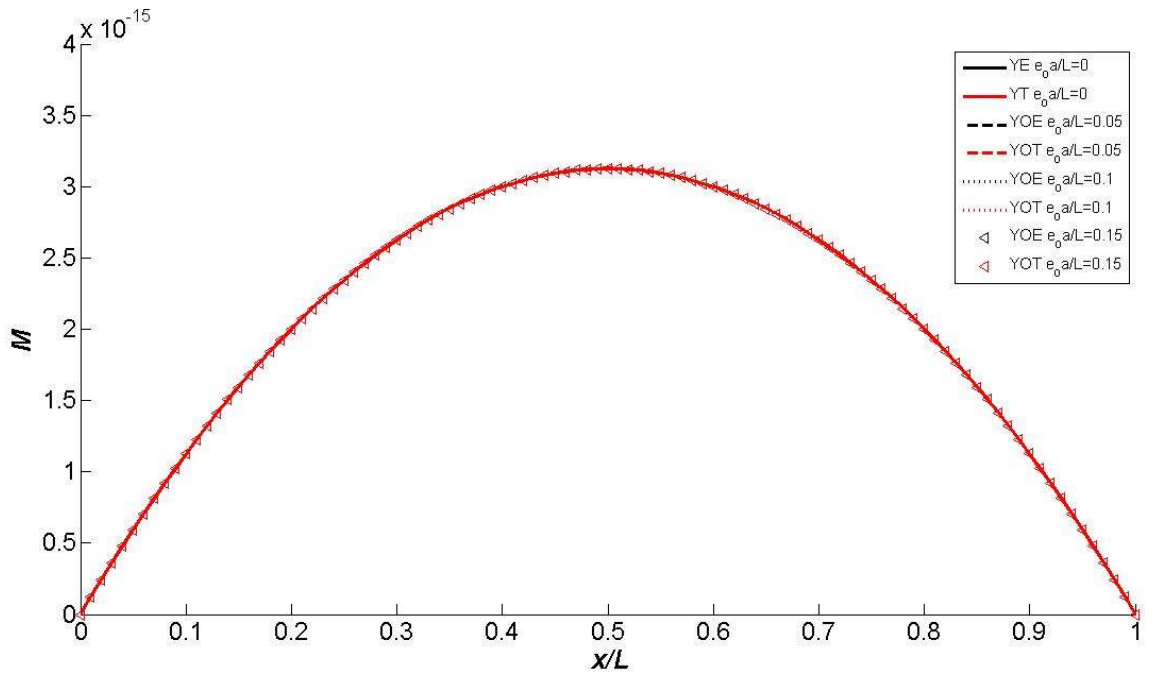


a) Mikrotüpçük

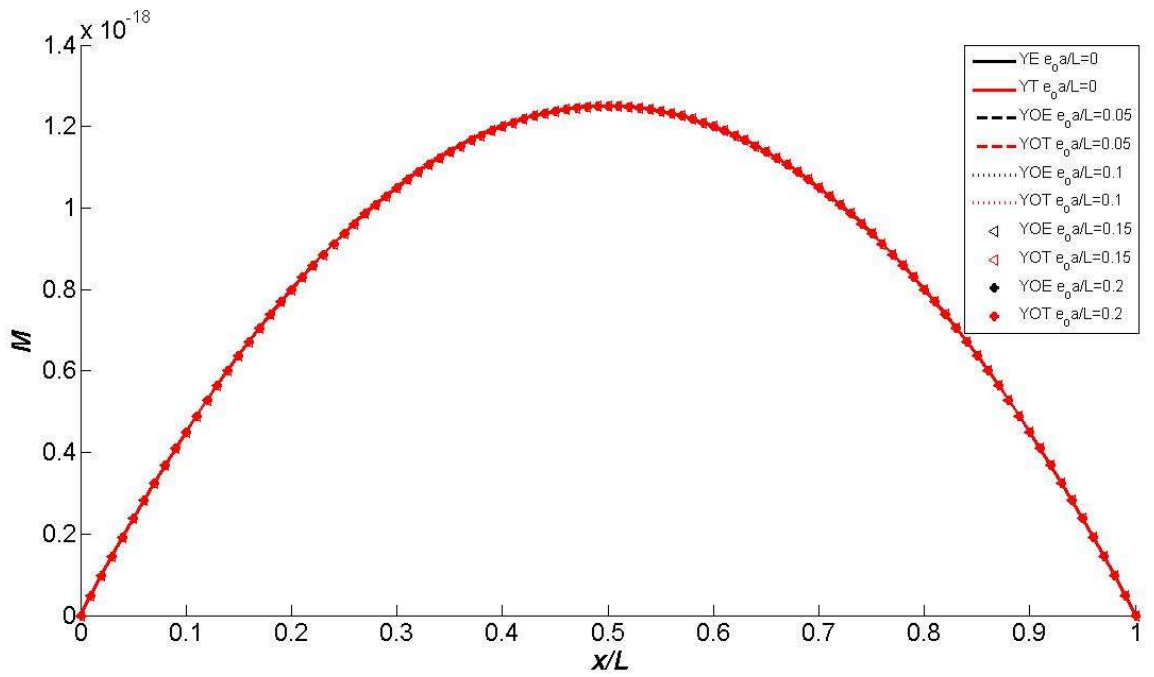


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.1. İki tarafı basit mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde $e_0 a/L$ değerleri değişikçe deplasman değerinin x/L 'ye bağlı değişimi



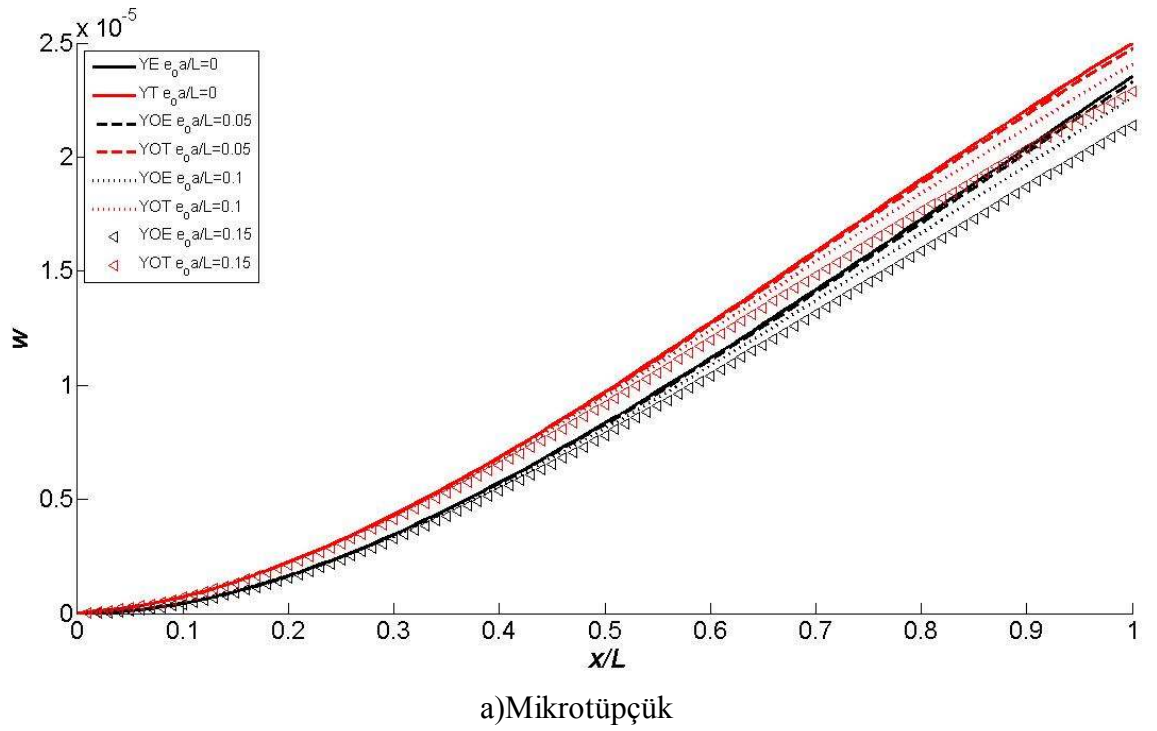
a) Mikrotüpçük

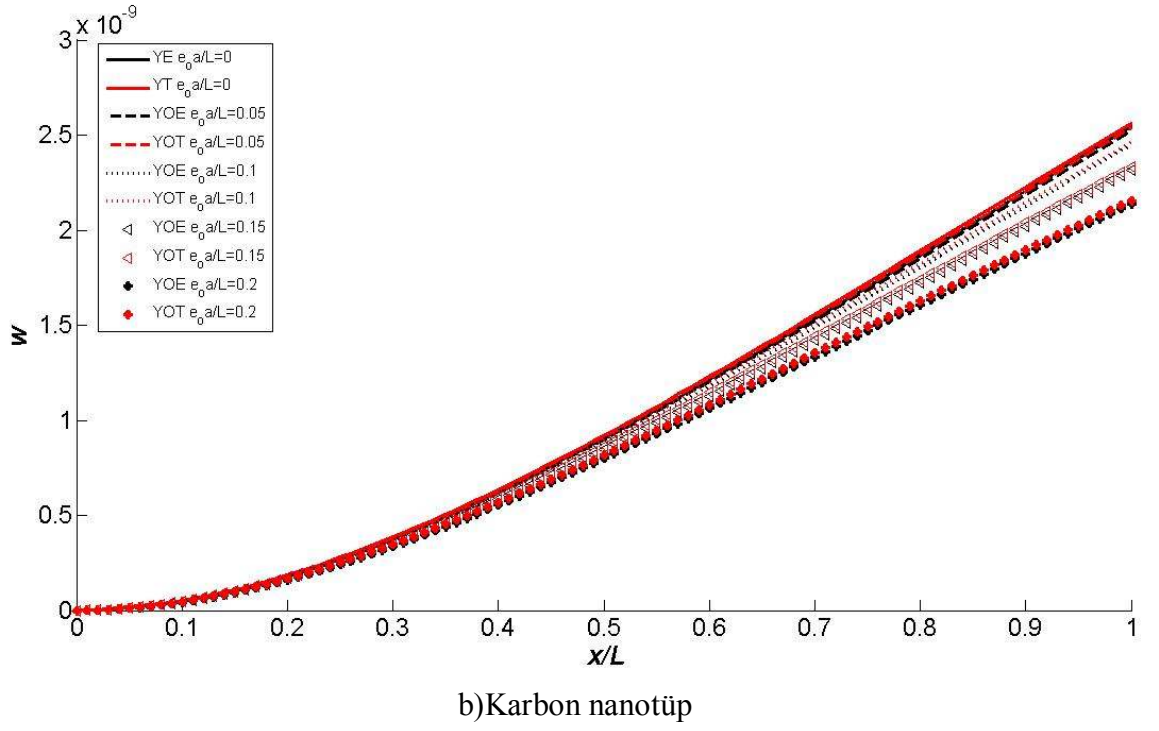


b) Karbon nanotüp

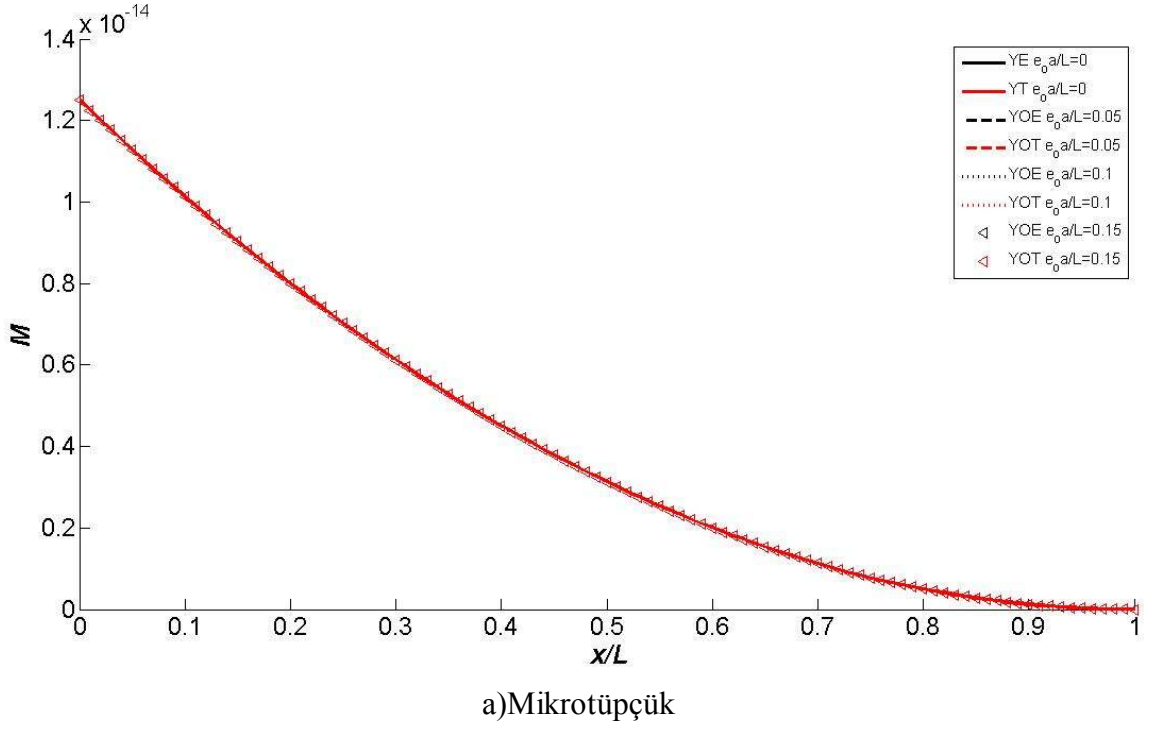
Şekil 4.2. Düzgün yayılı yük etkisinde e_0/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerinin x/L 'ye bağlı değişimi

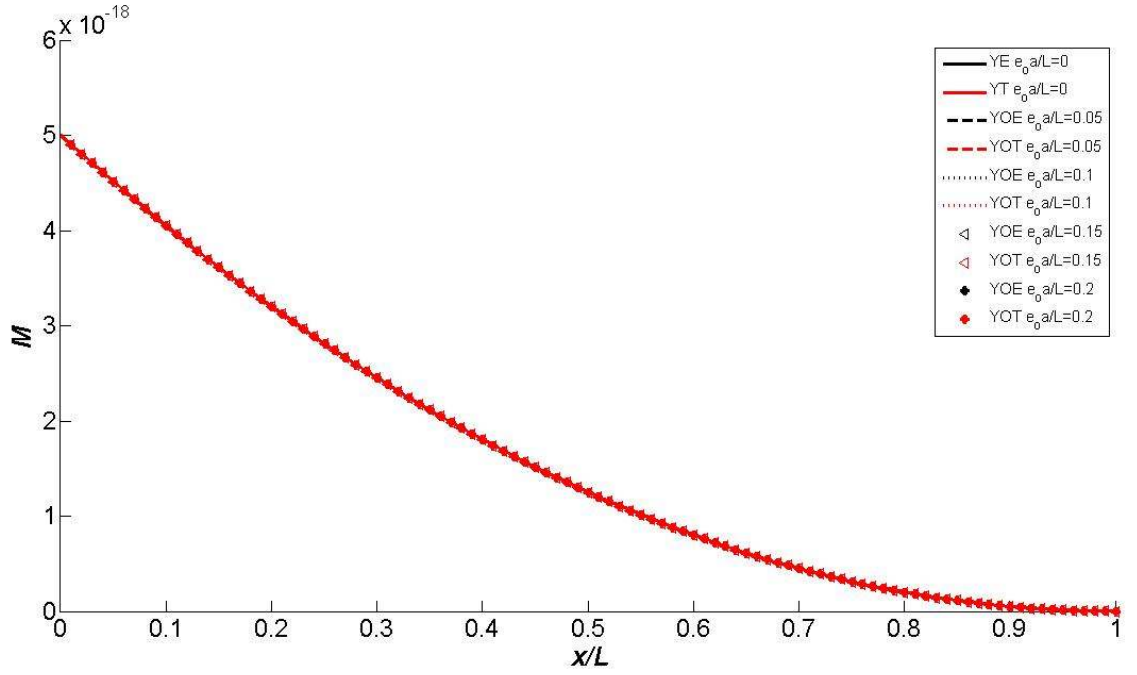
Şekil 4.3-4.4’de tek tarafı ankastre mesnetli kiriş modelinin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine göre deplasman ve eğilme momenti değerleri görülmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun artmasıyla deplasman küçülmektedir. Değerin sıfır olması durumunda ise klasik elastisite sonuçlarına ulaşabiliriz. Ayrıca klasik elastisite teorisine göre yerel olmayan teoride deplasman değerlerinin daha küçük olduğu açık bir şekilde ifade edilebilir. Momentte ise moment için elde edilen denklemin malzeme karakteristik uzunluğundan bağımsız olması nedeniyle malzeme karakteristik uzunluğundan etkilenmediği sonucuna varılabilir.





Şekil 4.3. Tek tarafı ankastre mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde $e_0 a / L$ değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi

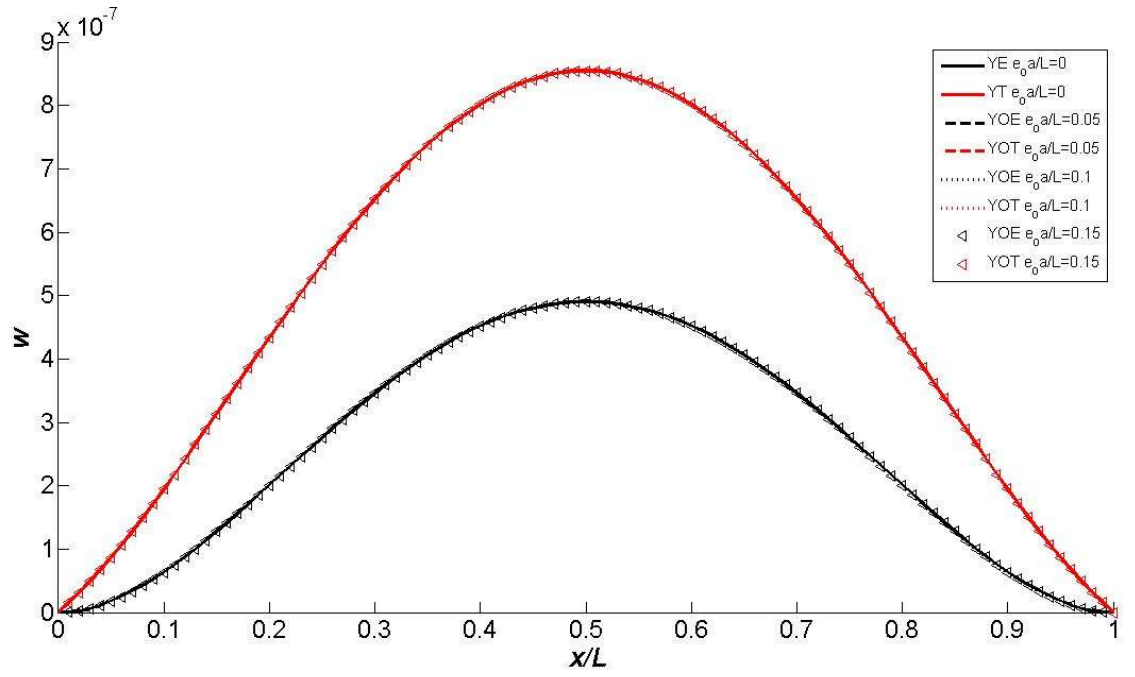




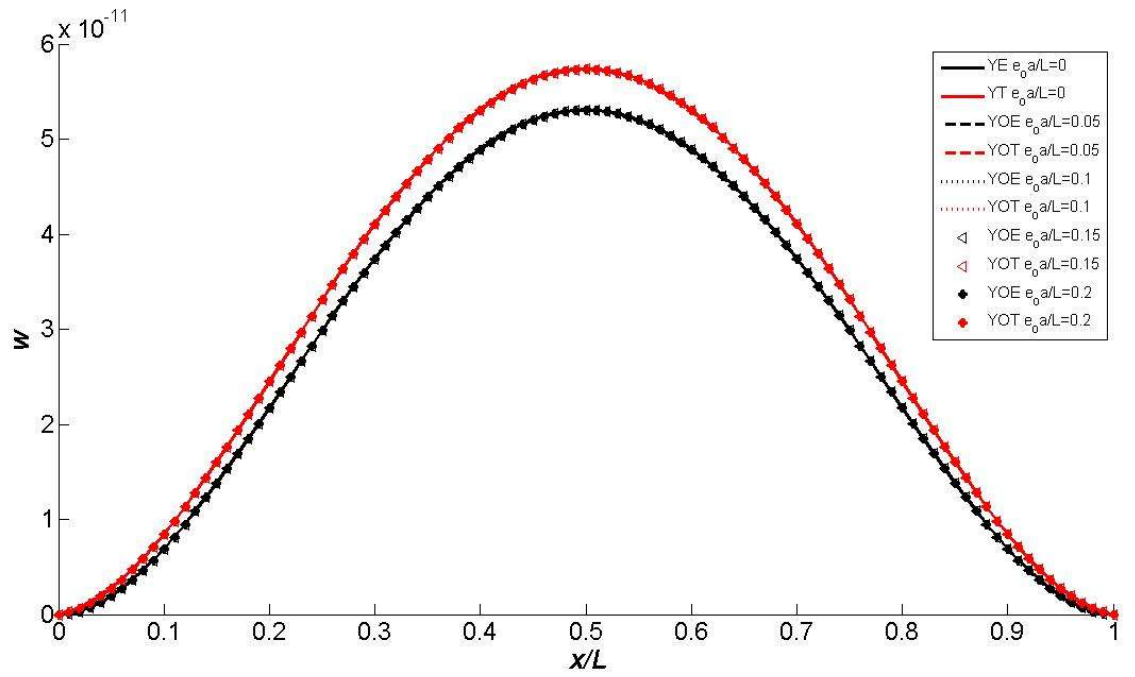
b) Karbon nanotüp

Şekil 4.4. Tek tarafı ankastre mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde e_0a/L değerleri değiştikçe moment değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi

Şekil 4.5-4.6'da iki tarafı ankastre mesnetli kiriş modelinin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine göre deplasman ve eğilme momenti değerleri görülmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun artması veya azalması deplasmanı etkilememektedir. Moment değerlerini ise küçültmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun sıfıra eşitlenmesiyle klasik elastisite teorisi için sonuçlara ulaşılabilir. Klasik elastisite teorisine göre bu teoride eğilme momenti değerlerinin daha küçük olduğu açık bir şekilde ifade edilebilir

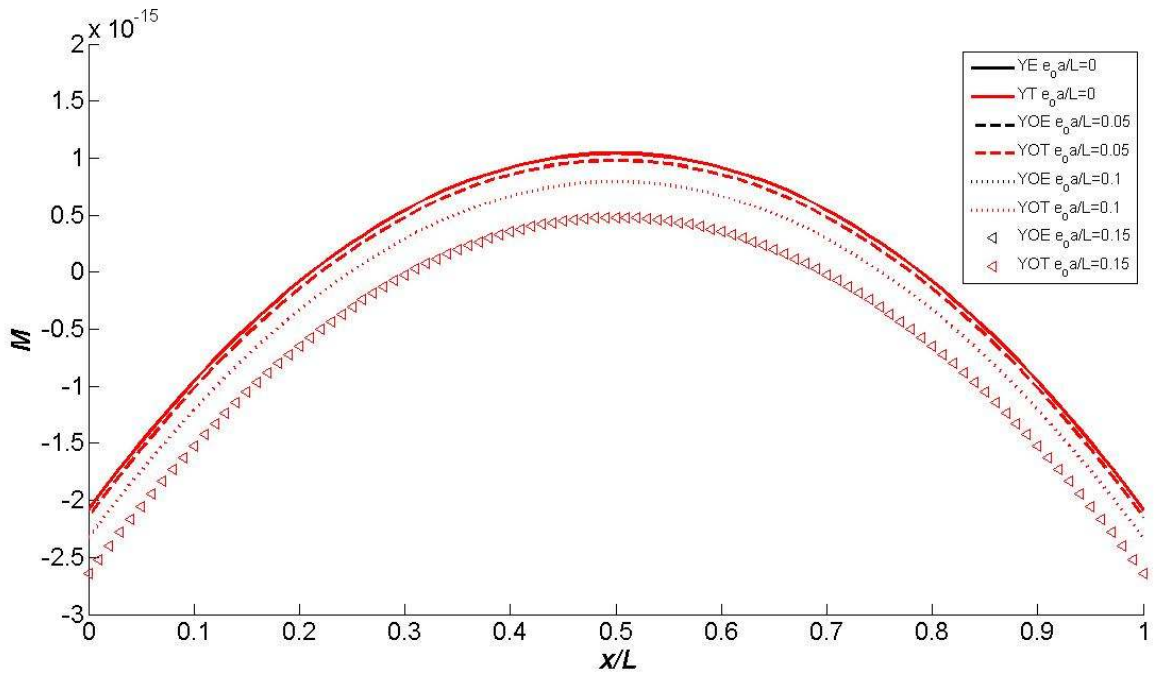


a) Mikrotüpçük

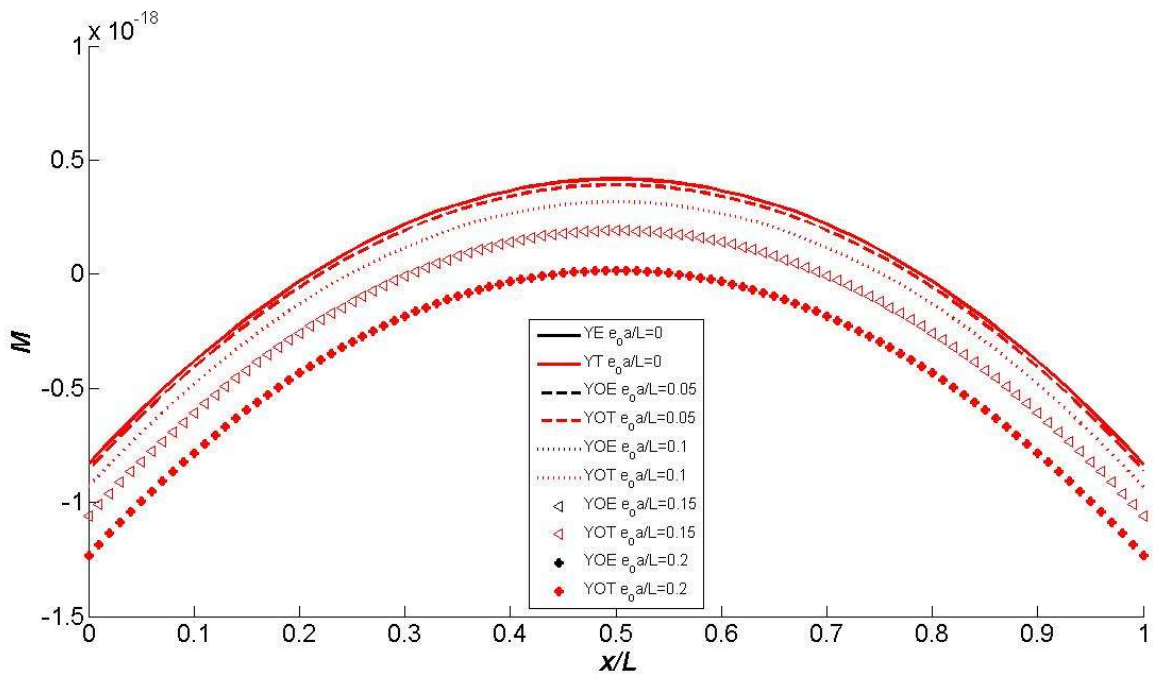


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.5. İki tarafı ankastre mesnetli kirişin düzgün yayılı yük etkisinde $e_0 a/L$ değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi



a) Mikrotüpçük

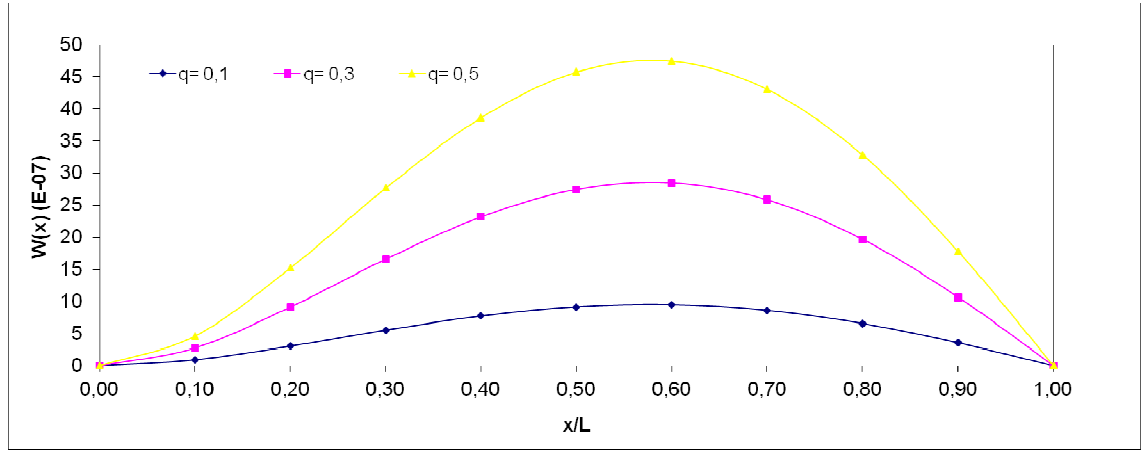


b) Karbon nanotüp

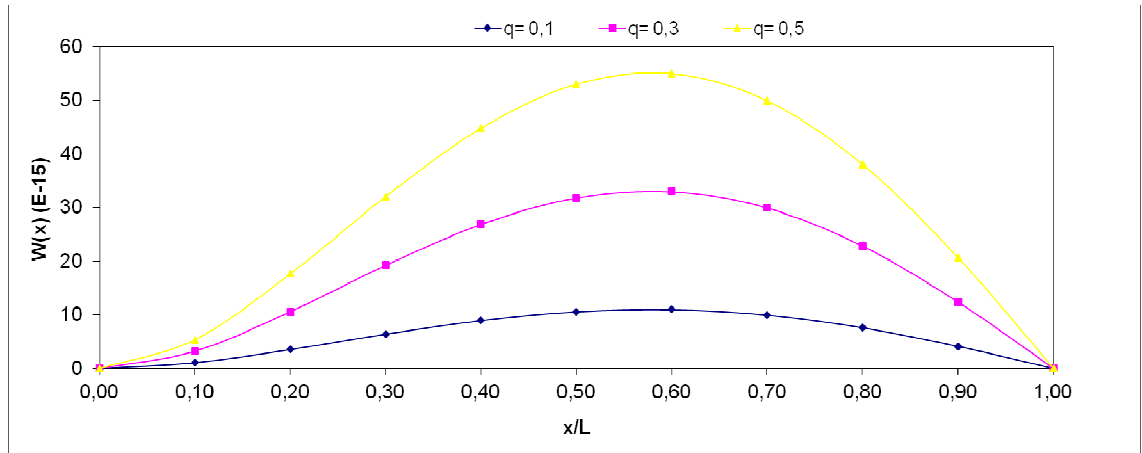
Şekil 4.6. İki tarafı ankastre mesnetli düzgün yayılı yük etkisinde $e_0 a/L$ değerleri değişikçe eğilme momenti değerinin x/L ’ye bağlı değişimi

Şekil 4.7-4.8’de bir tarafı ankastre diğer tarafı basit mesnetli kirişin Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre deplasman ve eğilme momenti değerleri görülmektedir. Malzeme

karakteristik uzunluğunun artması veya azalması deplasmanı etkilememektedir. Momentte değerlerini ise küçültmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun sıfıra eşitlenmesiyle klasik elastisite teorisi için sonuçlara ulaşılabilir. Klasik elastisite teorisine göre eğilme momenti değerlerinin daha küçük olduğu açık bir şekilde ifade edilebilir.

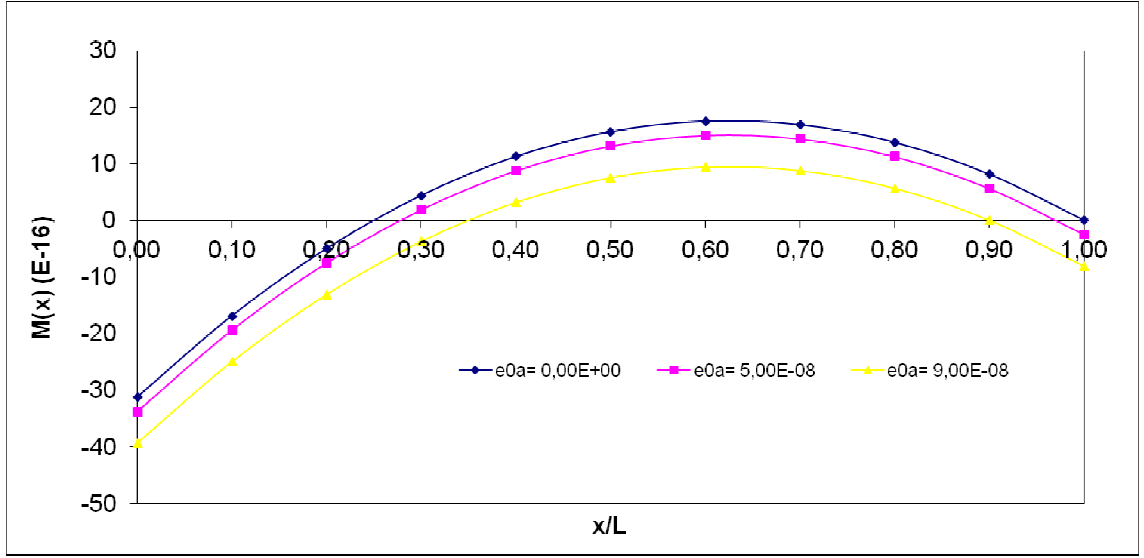


a) Mikrotüpçük

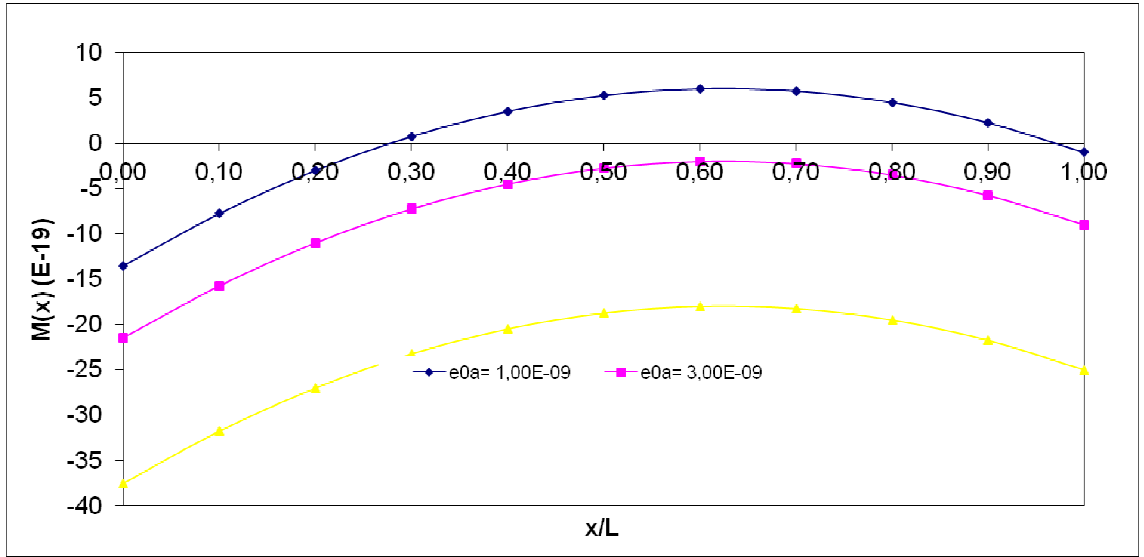


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.7. Tek tarafı ankastre mesnetli tek tarafı basit mesnetli düzgün yayılı yük etkisinde q değerleri değişikçe deplasman değerinin x/L 'ye bağlı değişimi



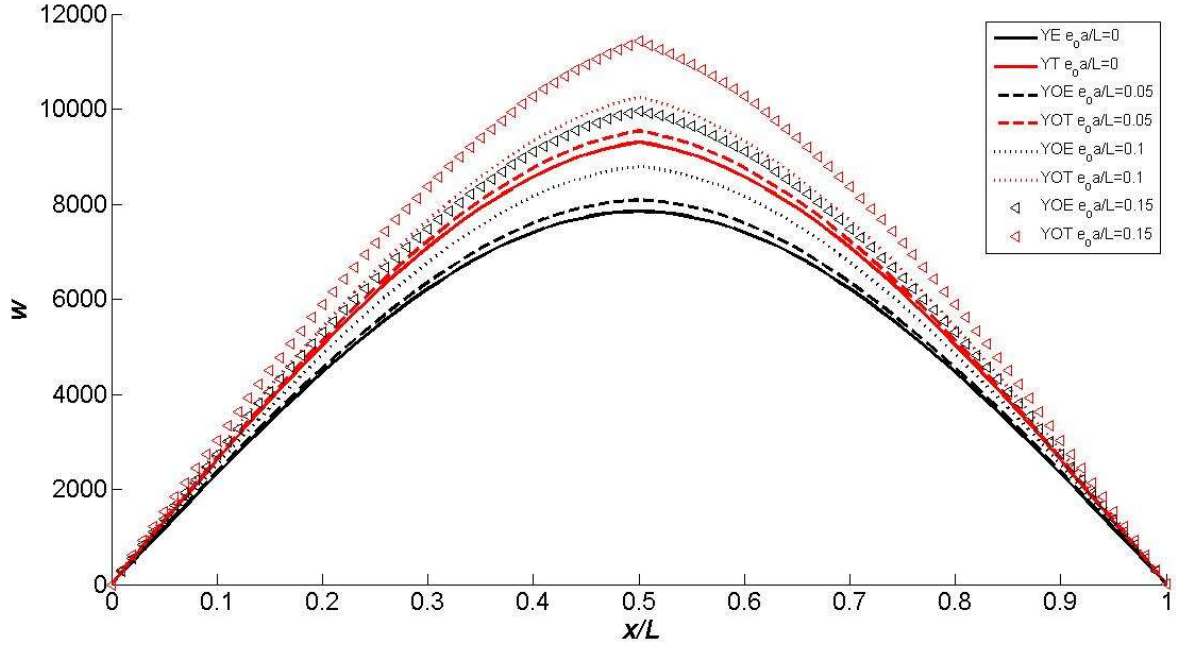
a) Mikrotüpçük



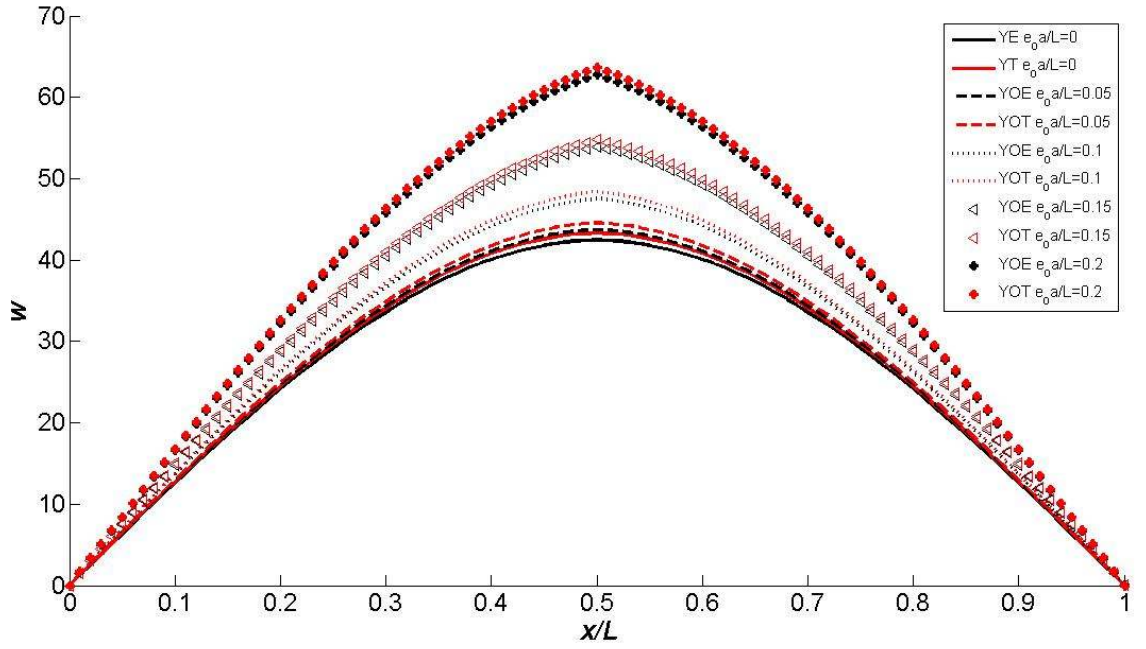
b) Karbon nanotüp

Şekil 4.8. Tek tarafı ankastre mesnetli tek tarafı basit mesnetli düzgün yayılı yük etkisinde e_0a değerleri değişikçe eğilme momenti değerinin x/L 'ye bağlı değişimi

Şekil 4.9-4.10'da iki tarafı basit mesnetli kiriş modelinin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre tekil yük etkisinde deplasman ve moment değerleri görülmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun artmasıyla deplasman artmaktadır. Ayrıca klasik elastisite teorisine göre deplasman değerlerinin daha büyük olduğu açık bir şekilde ifade edilebilir.

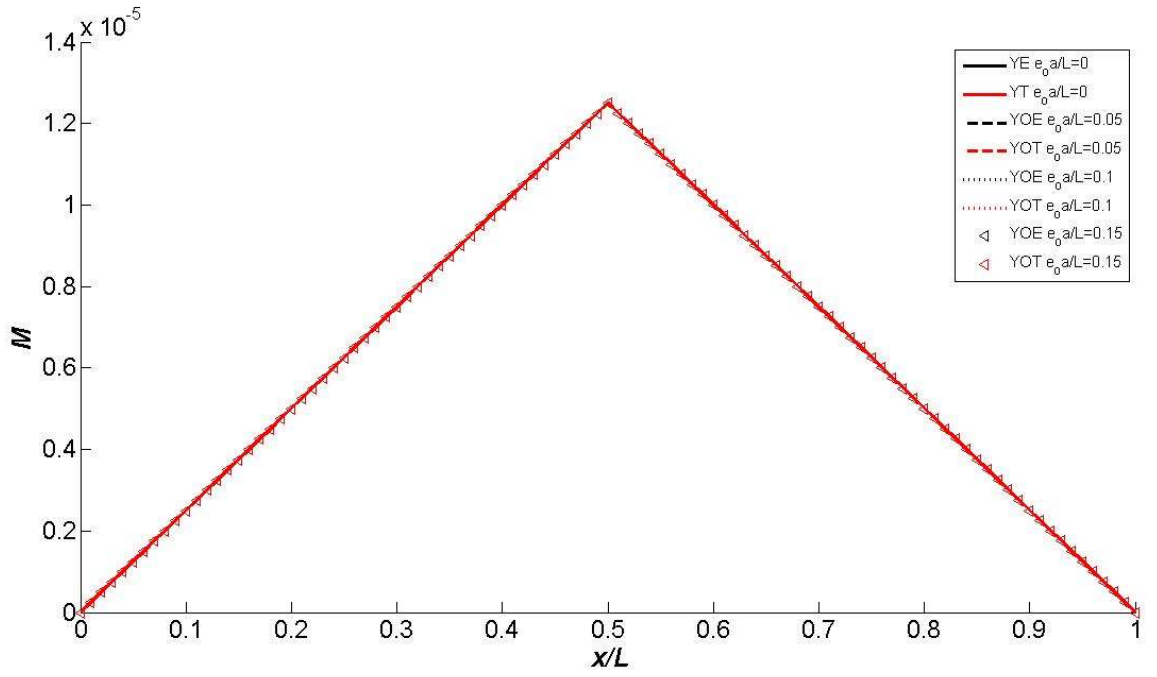


a) Mikrotüpçük

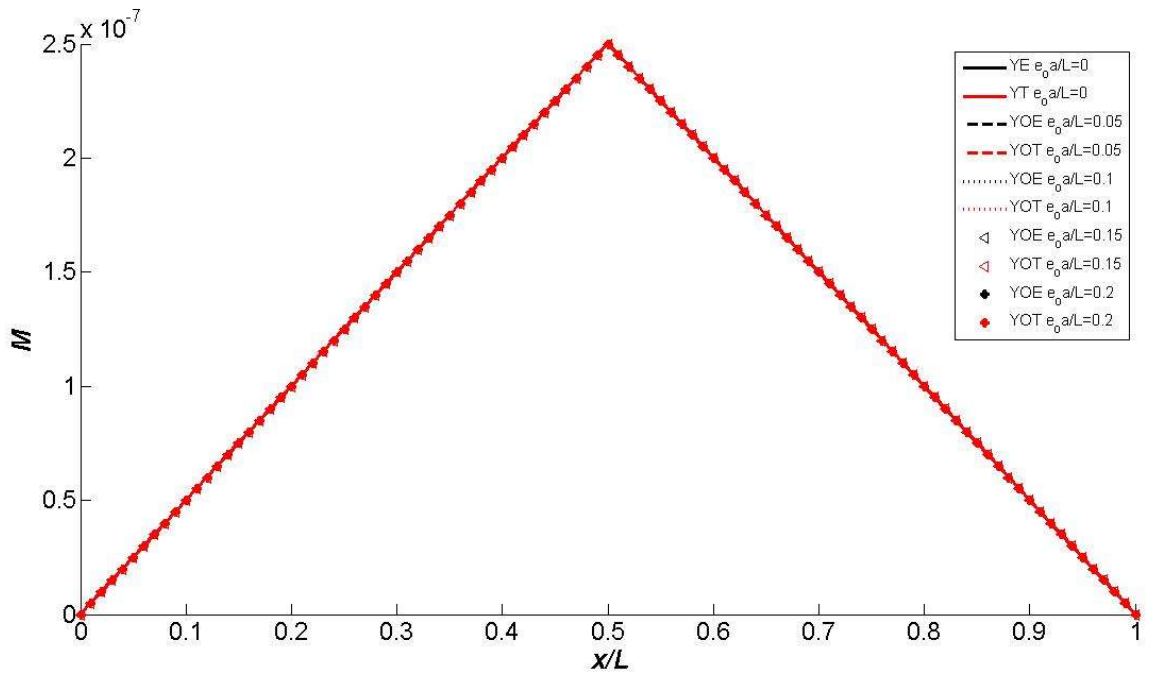


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.9. İki tarafı basit mesnetli ortasından tekil yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerinin x/L 'ye bağlı değişimi



a) Mikrotüpçük

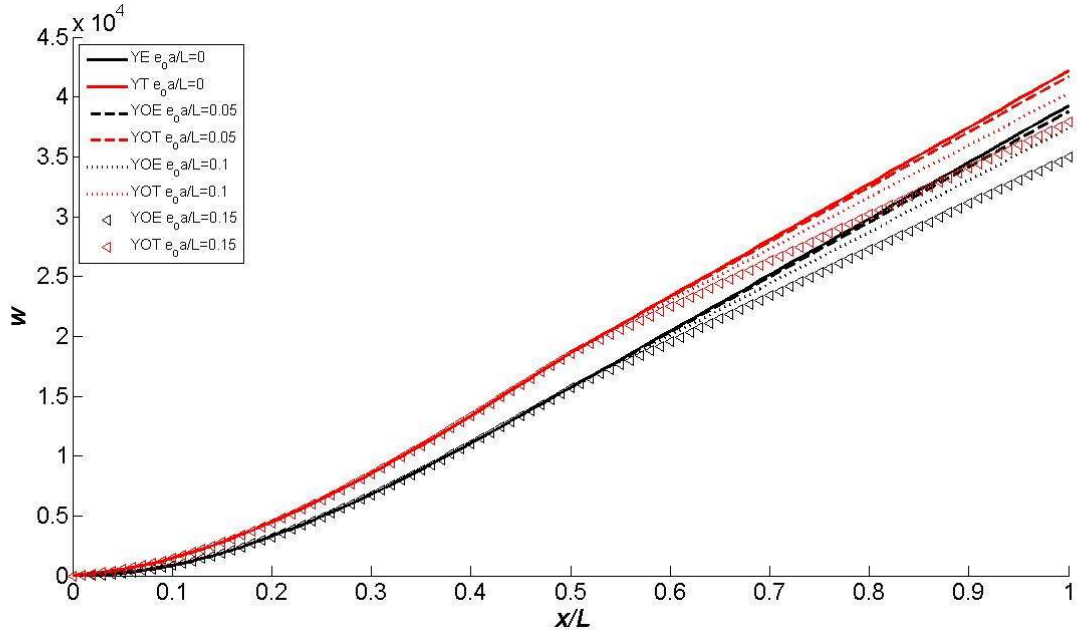


b) Karbon nanotüp

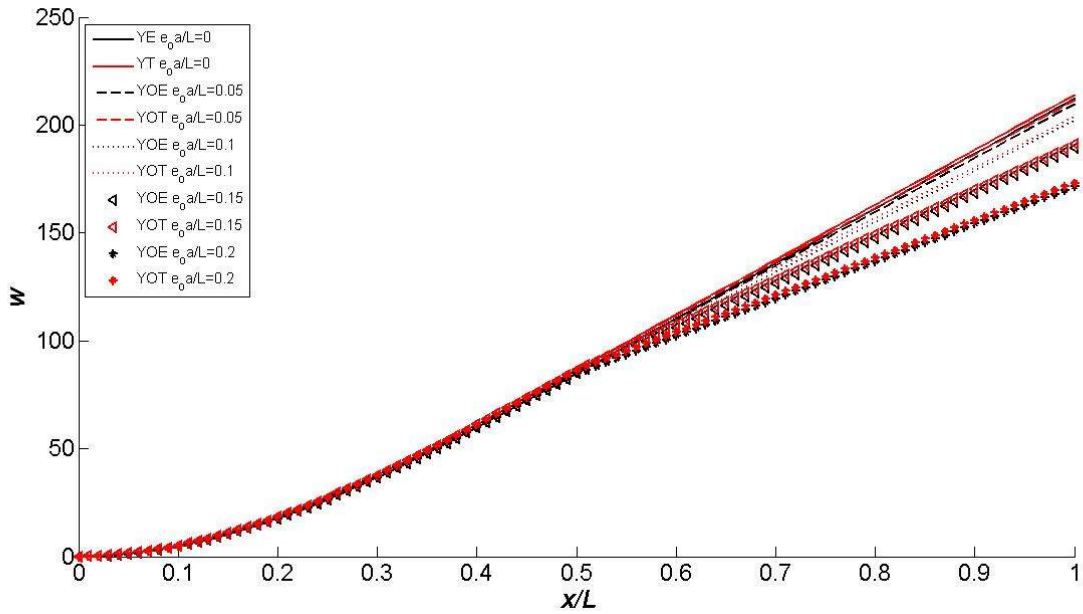
Şekil 4.10. İki tarafı basit mesnetli ortasından tekil yük etkisinde e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi

Şekil 4.11-4.12'de tek tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kiriş modelinin Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre deplasman ve moment değerleri

görülmektedir. Malzeme karakteristik uzunluğunun artmasıyla deplasman azalmaktadır. Değerin sıfır olması durumunda ise klasik elastisite sonuçlarına ulaşabiliriz. Ayrıca klasik elastisite teorisine göre deplasman değerlerinin daha küçük olduğu açık bir şekilde ifade edilebilir.

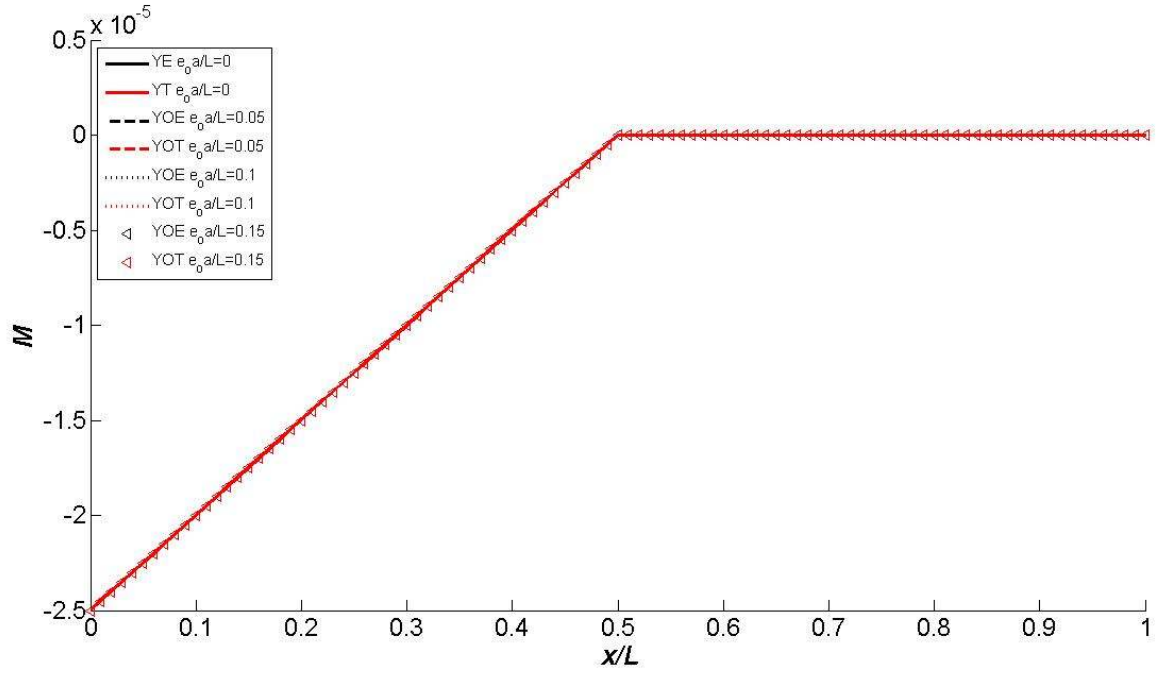


a) Mikrotüpçük

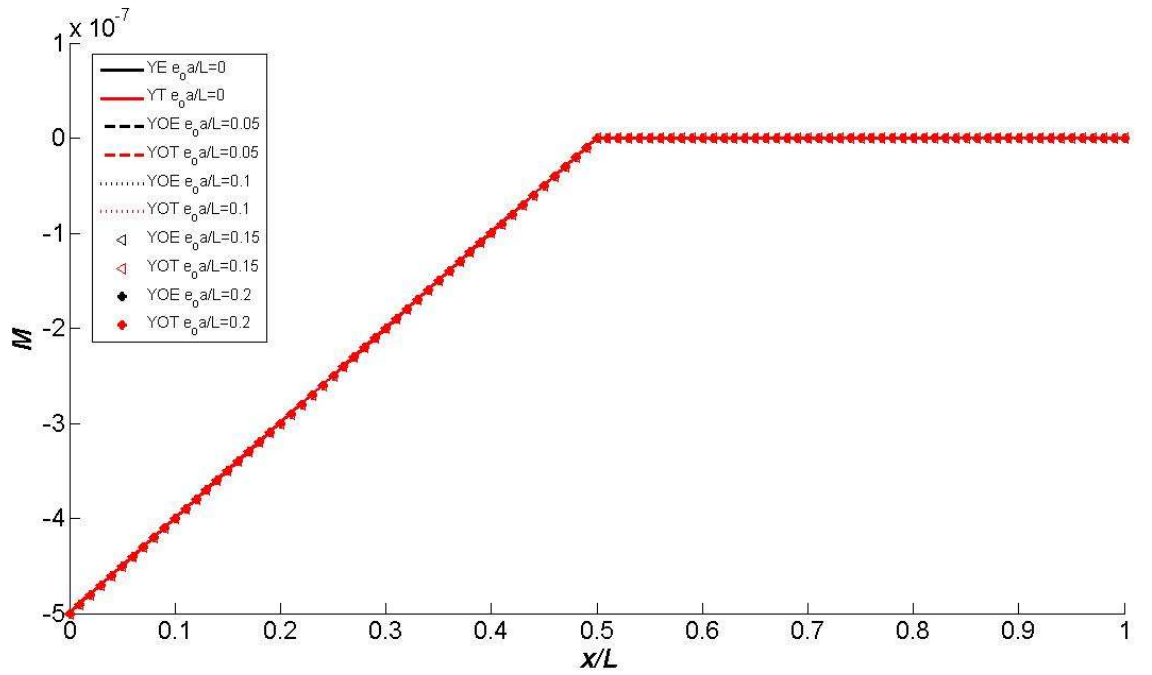


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.11. Tek tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi

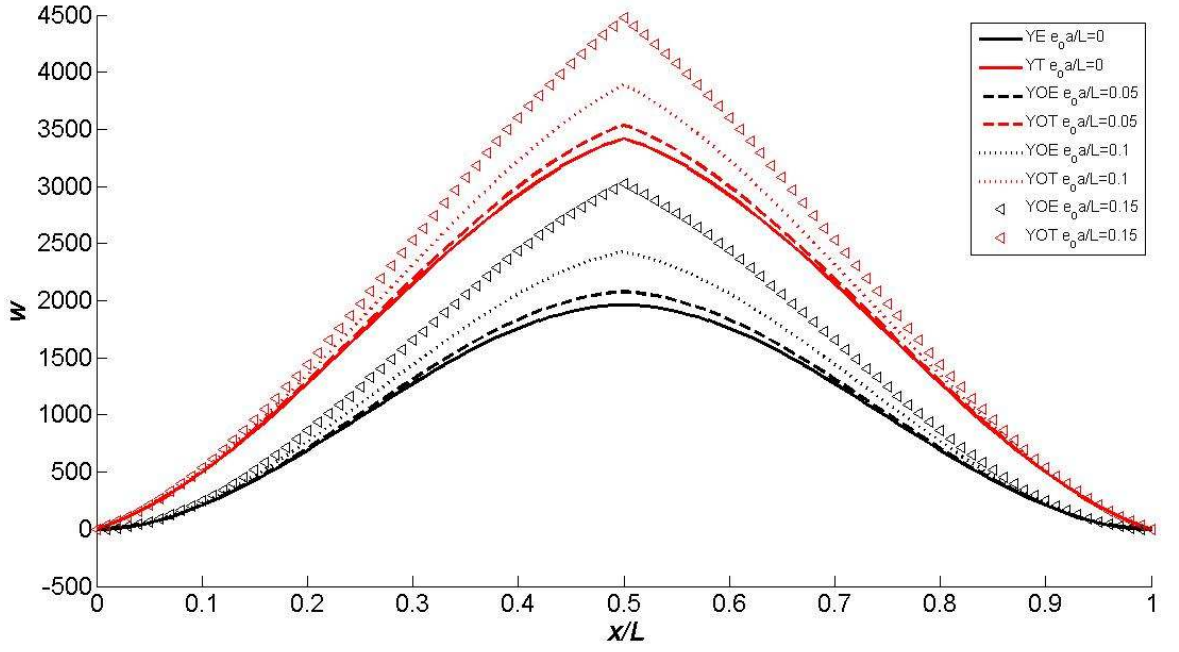


a) Mikrotüpçük

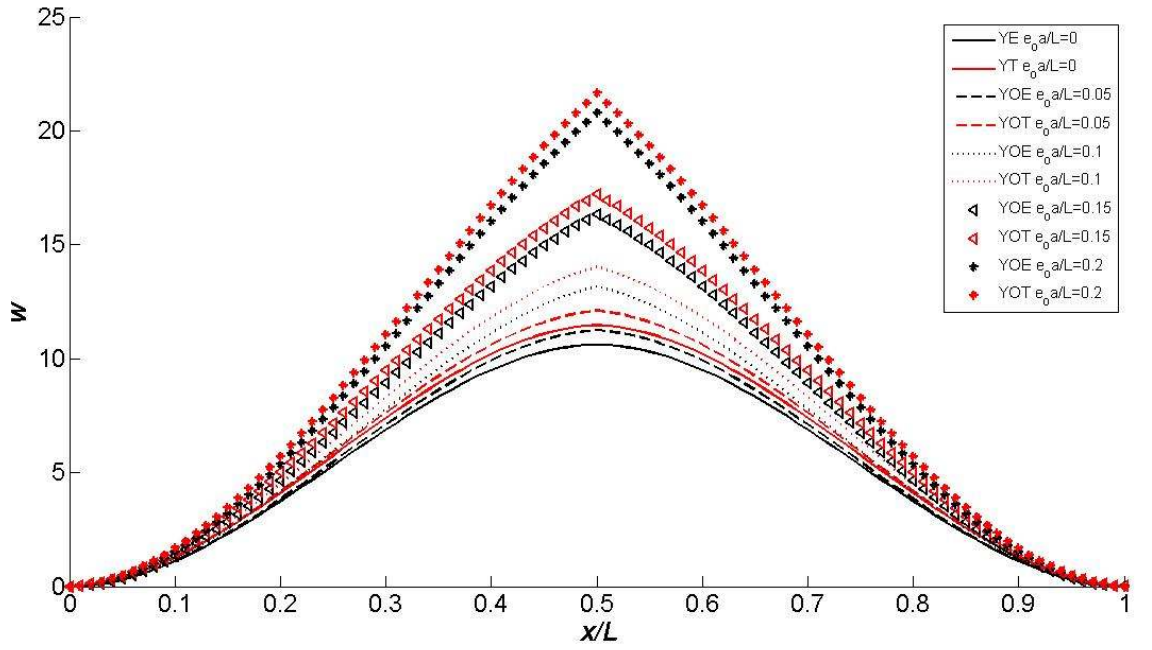


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.12. Tek tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe eğilme momenti değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi

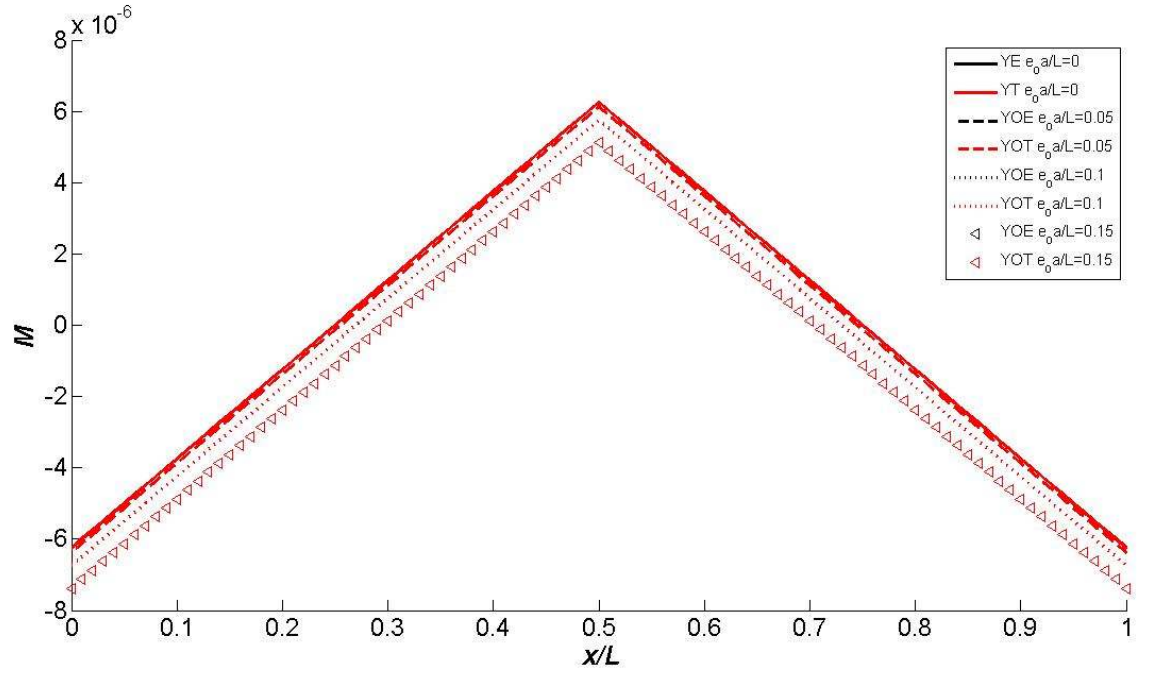


a) Mikrotüpçük

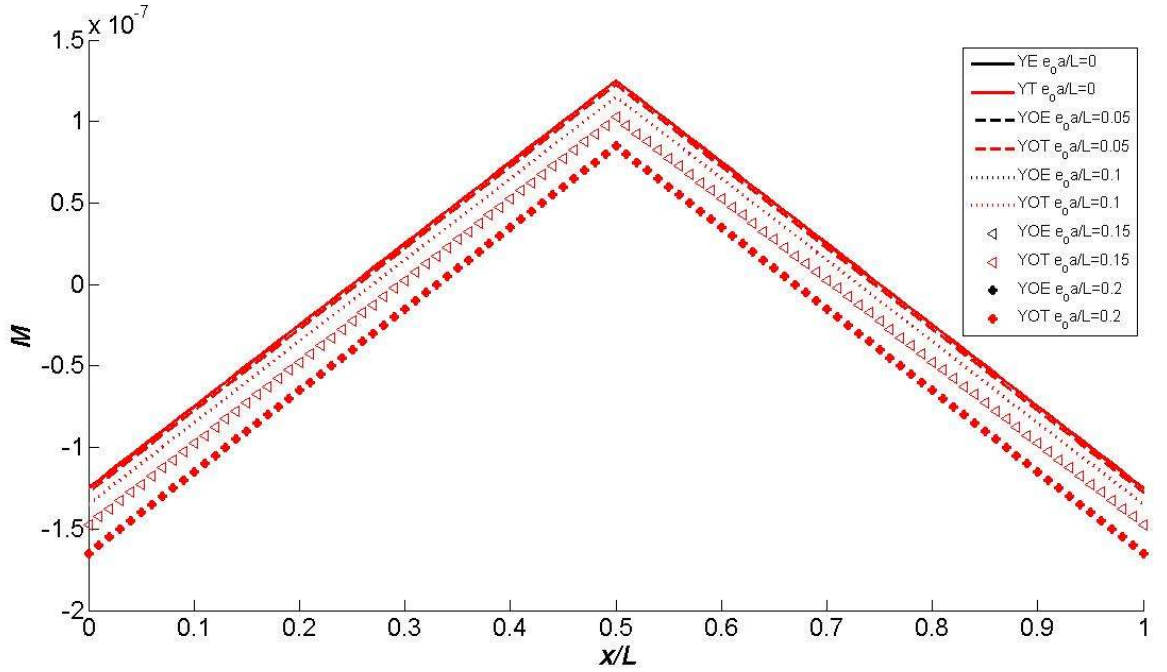


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.13. İki tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin e_0a/L değerleri değişikçe deplasman değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi



a) Mikrotüpçük

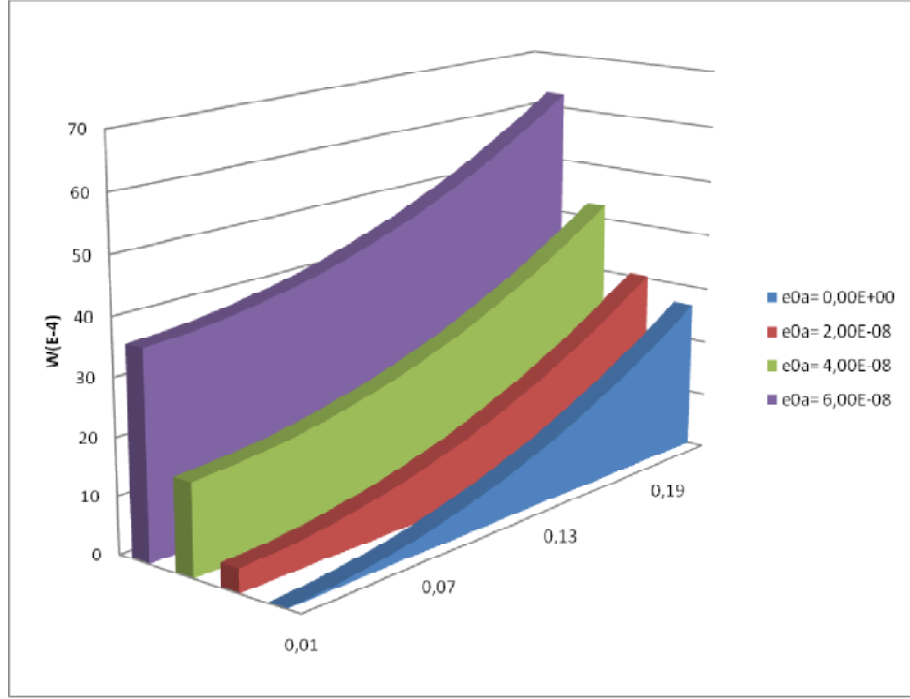


b) Karbon nanotüp

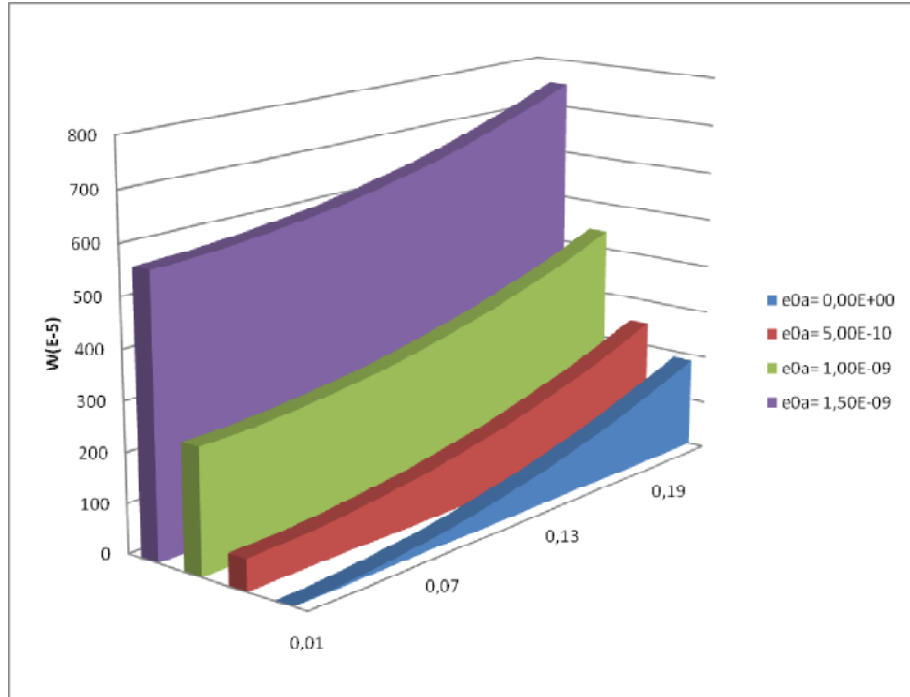
Şekil 4.14. İki tarafı ankastre mesnetli tekil yük etkisindeki kirişin $e_0 a/L$ değerleri değişikçe eğilme momenti değerlerinin x/L 'ye bağlı değişimi

Şekil 4.15-4.17'de iki tarafı basit mesnetli yayılı yük etkisindeki kirişin Timoshenko kiriş teorisine göre kiriş çapının artmasıyla kirişin orta noktasındaki deplasman değerleri görülmektedir. iki tarafı basit mesnetli kirişte kiriş çapı arttıkça deplasman

azalmaktadır. Ayrıca sabit çapta malzeme karakteristik uzunluğu büyüdükçe deplasman artmaktadır. İki tarafı ankastre mesnetli malzeme karakteristik uzunluğundan etkilenmezken tek tarafı basit mesnetlide malzeme karakteristik uzunluğunun artması deplasmanı azaltmaktadır.

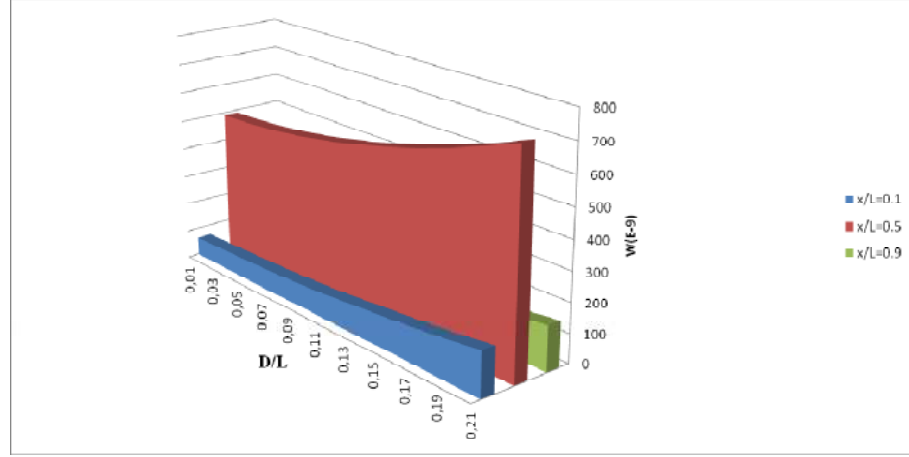


a) Mikrotüpçük

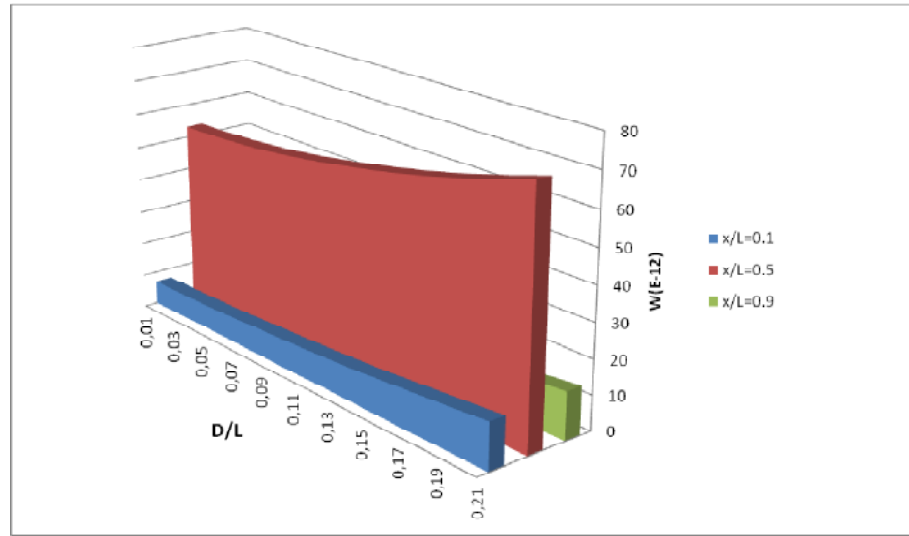


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.15. İki tarafı basit mesnetli Timoshenko kirişinin düzgün yayılı yük etkisinde kiriş orta noktasının deplasman değerlerinin e_0 değıştikçe D/L 'ye bağılı değışimi

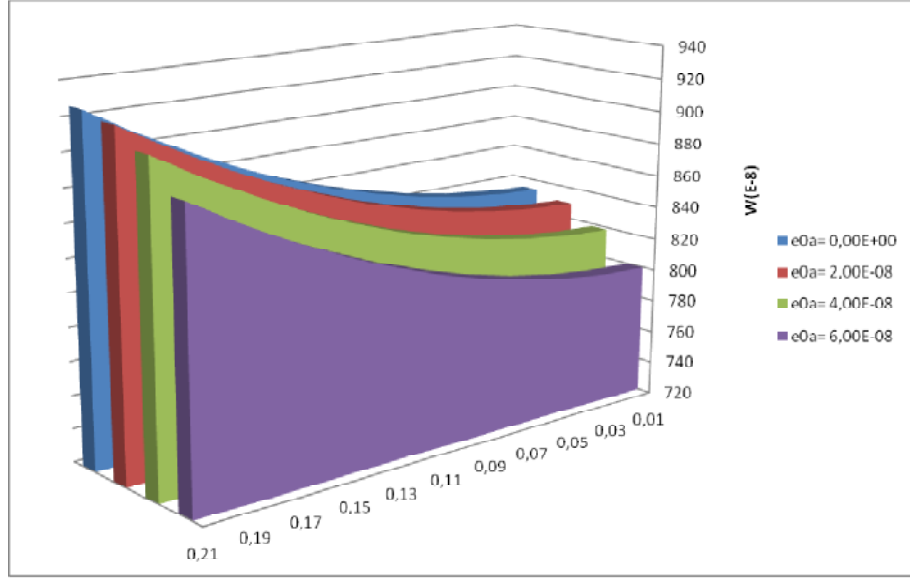


a) Mikrotüpçük

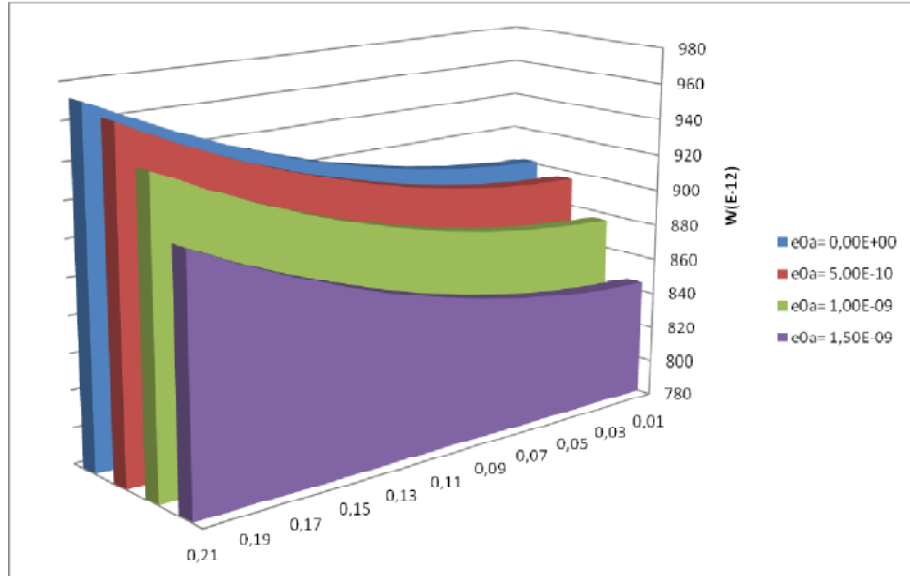


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.16. İki tarafı ankastre mesnetli Timoshenko kirişinin düzgün yayılı yük etkisinde kirişin deplasman değerlerinin x/L değıştikçe D/L 'ye bağılı değışimi

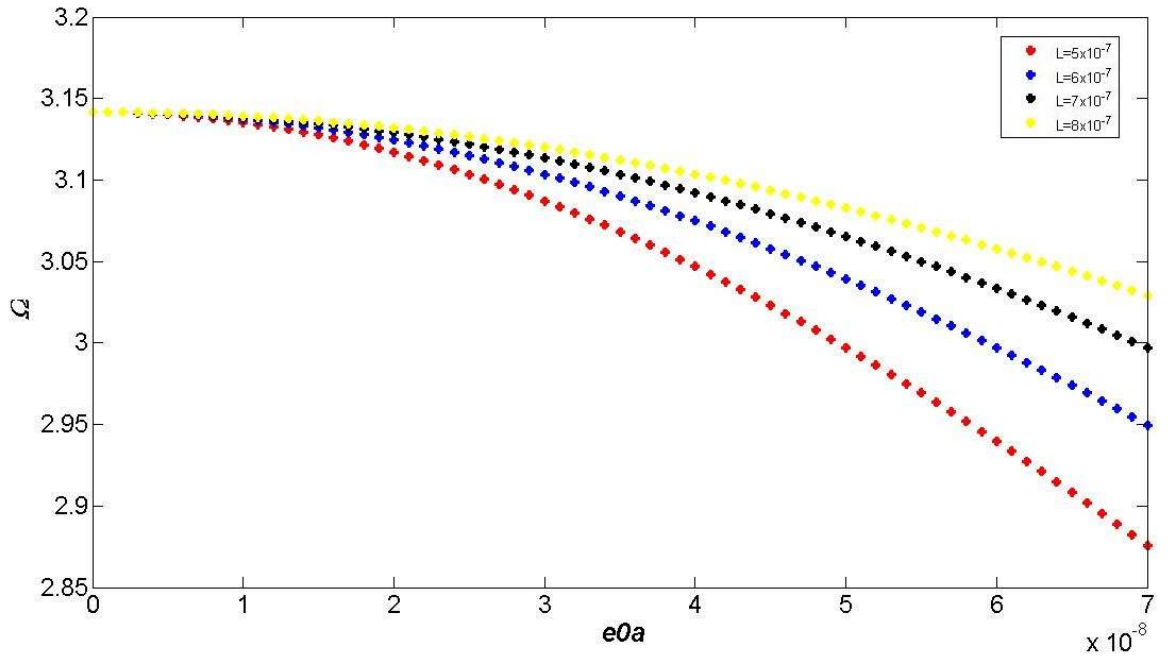


a) Mikrotüpçük

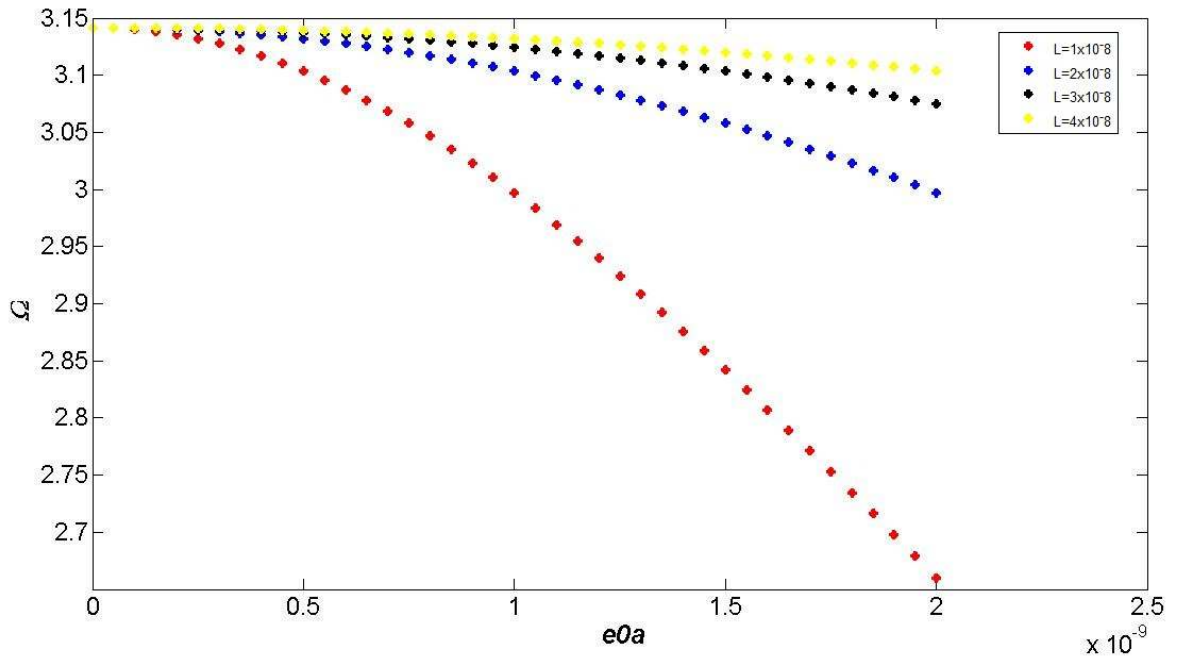


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.17. Tek tarafı basit mesnetli Timoshenko kirişinin düzgün yayılı yük etkisinde kiriş orta noktasının deplasman değerlerinin e_0a değıştikçe D/L 'ye bağılı değışimi

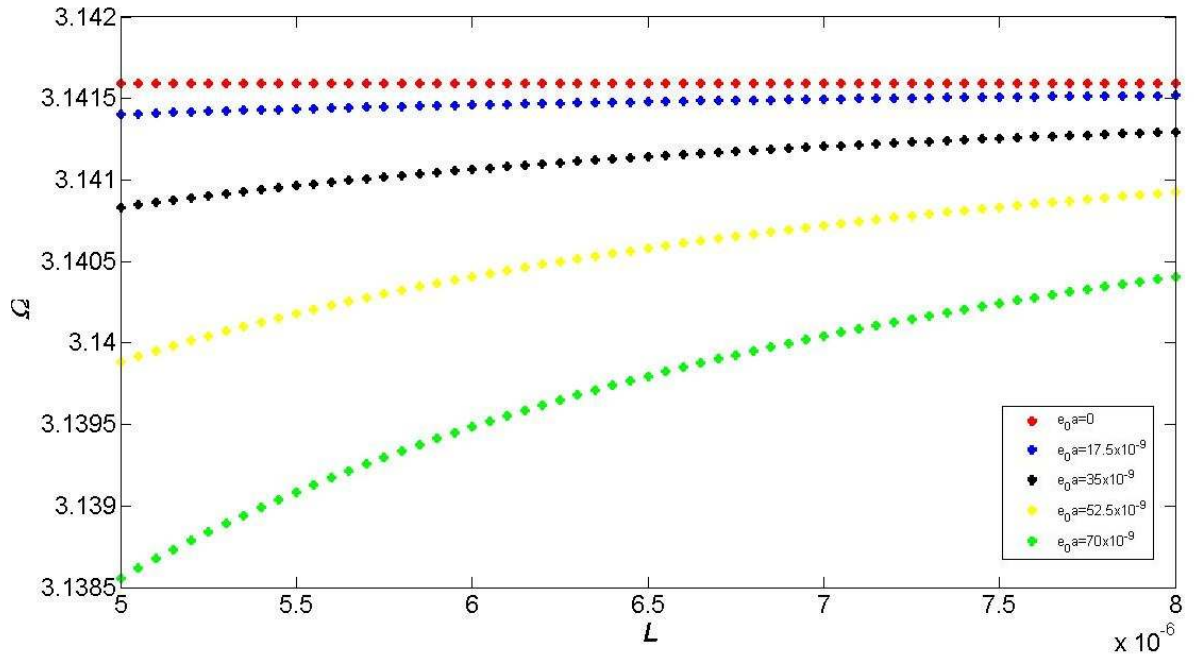


a) Mikrotüpçük

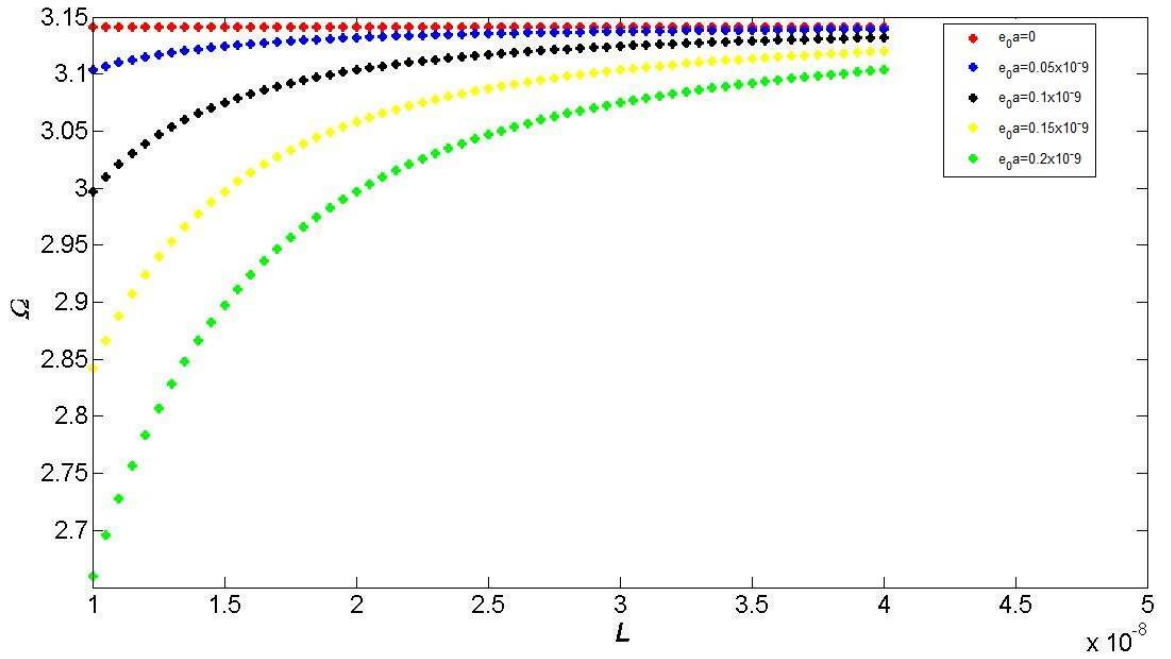


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.18. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin 1. mod için L değıştikçe boyutsuz frekans değeri e_0a 'ya bağılı değışimi

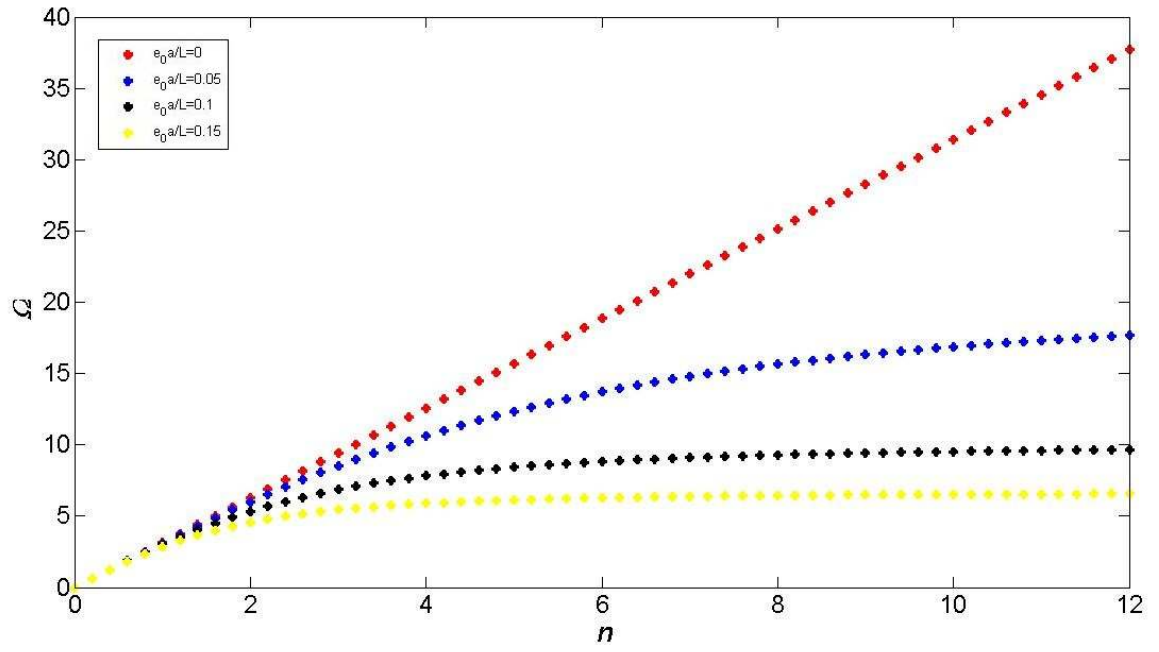


a) Mikrotüpçük

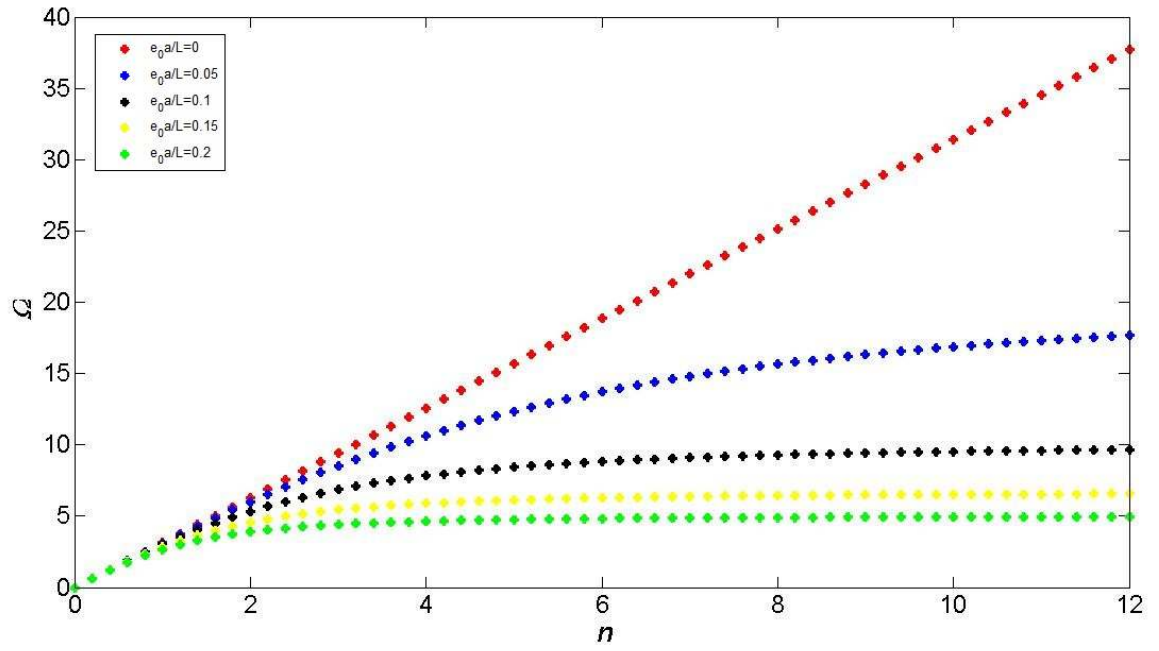


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.19. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin 1. mod için e_0 değişikçe boyutsuz frekans değerinin L 'ye bağlı değişimi

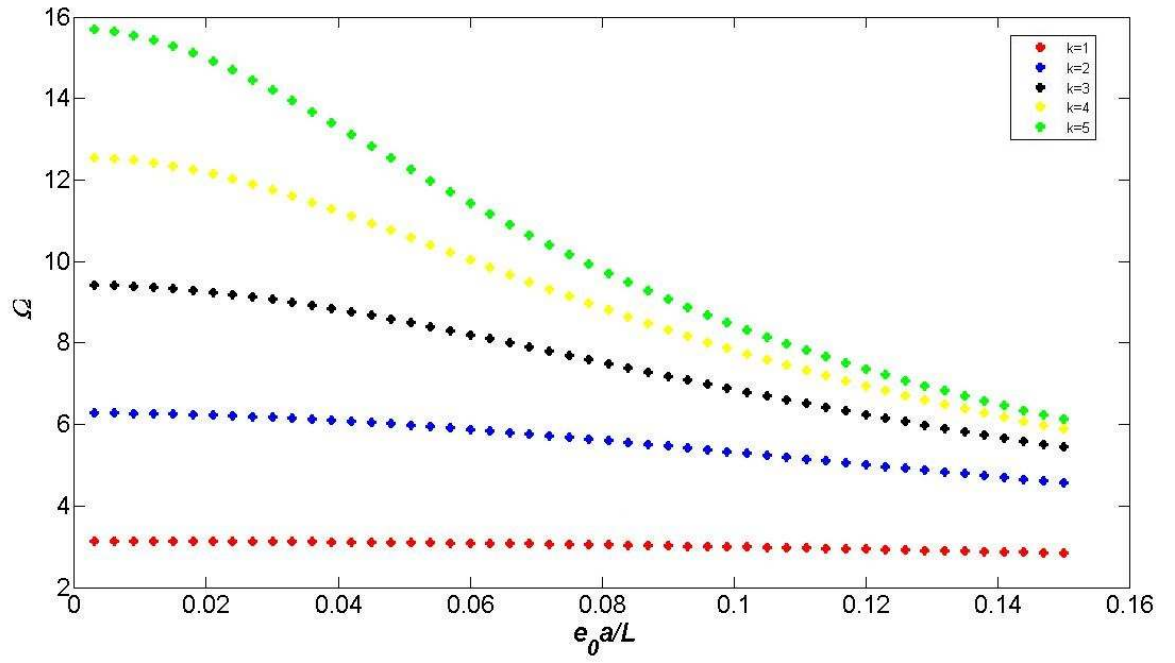


a) Mikrotüpçük

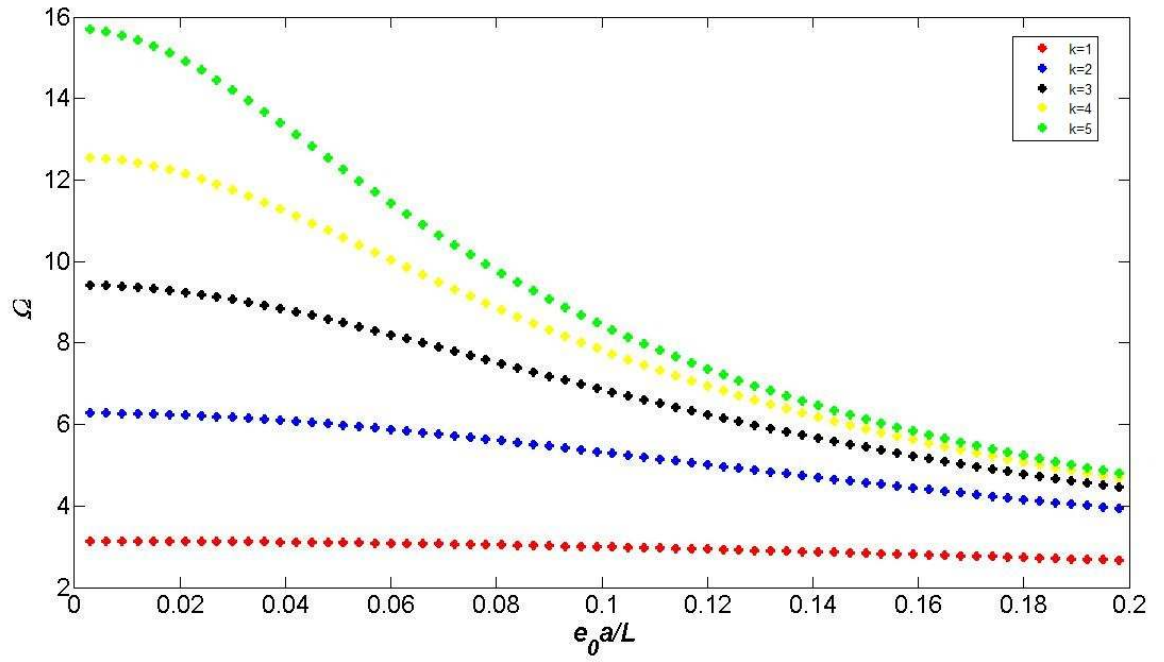


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.20. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a/L değıştikçe boyutsuz frekans değeri nin mod sayısına bağıli değışimi

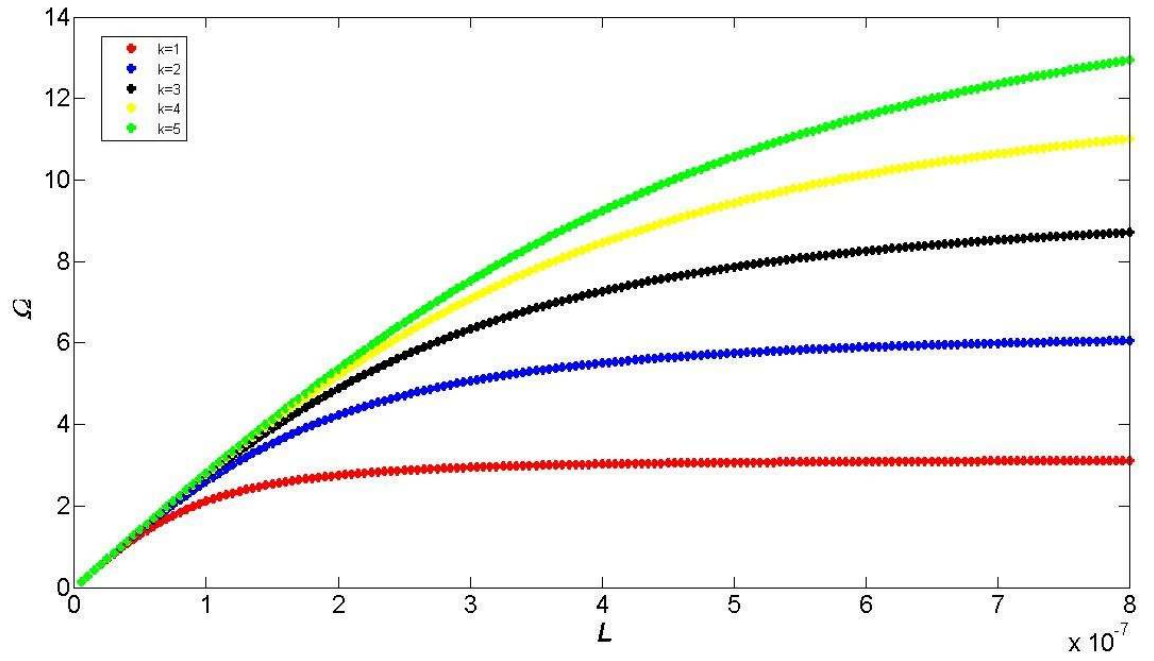


a) Mikrotüpçük

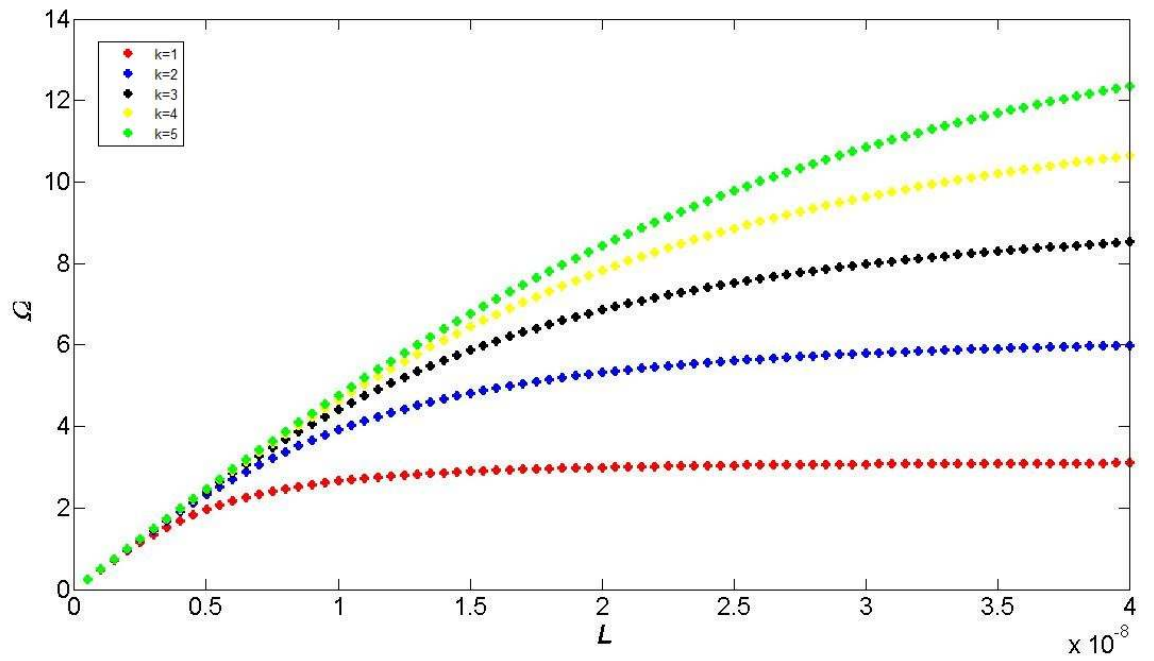


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.21. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin $e_0 a/L$ değişikçe boyutsuz frekans değerinin mod sayısına bağlı değişimi

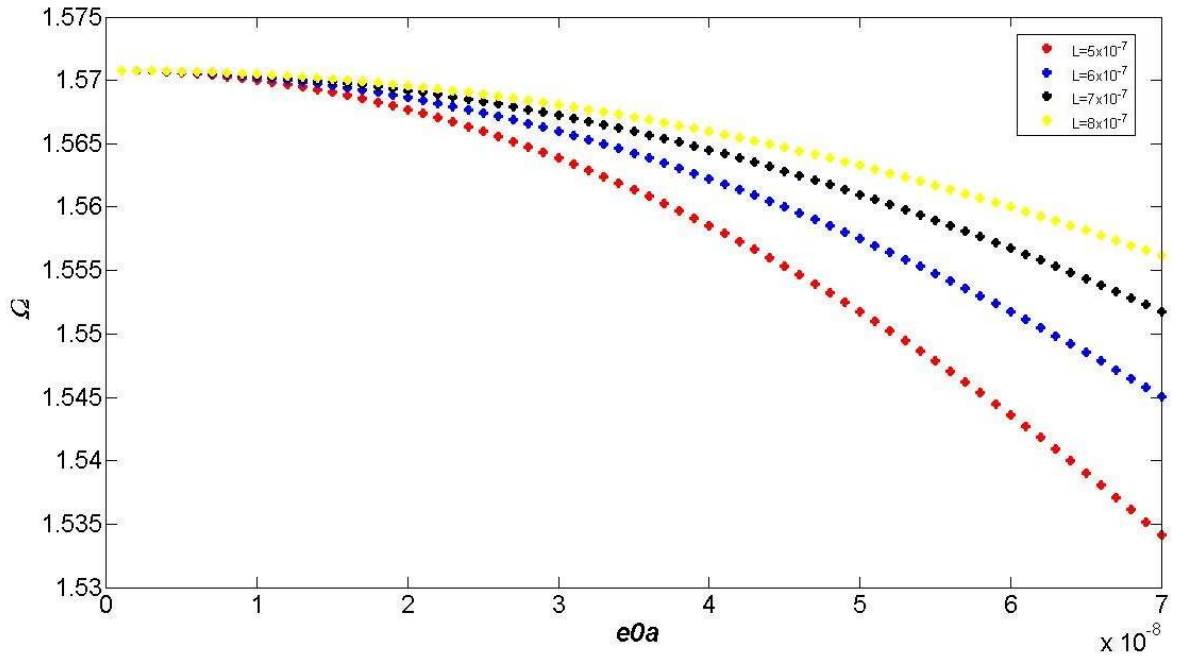


a) Mikrotüpçük

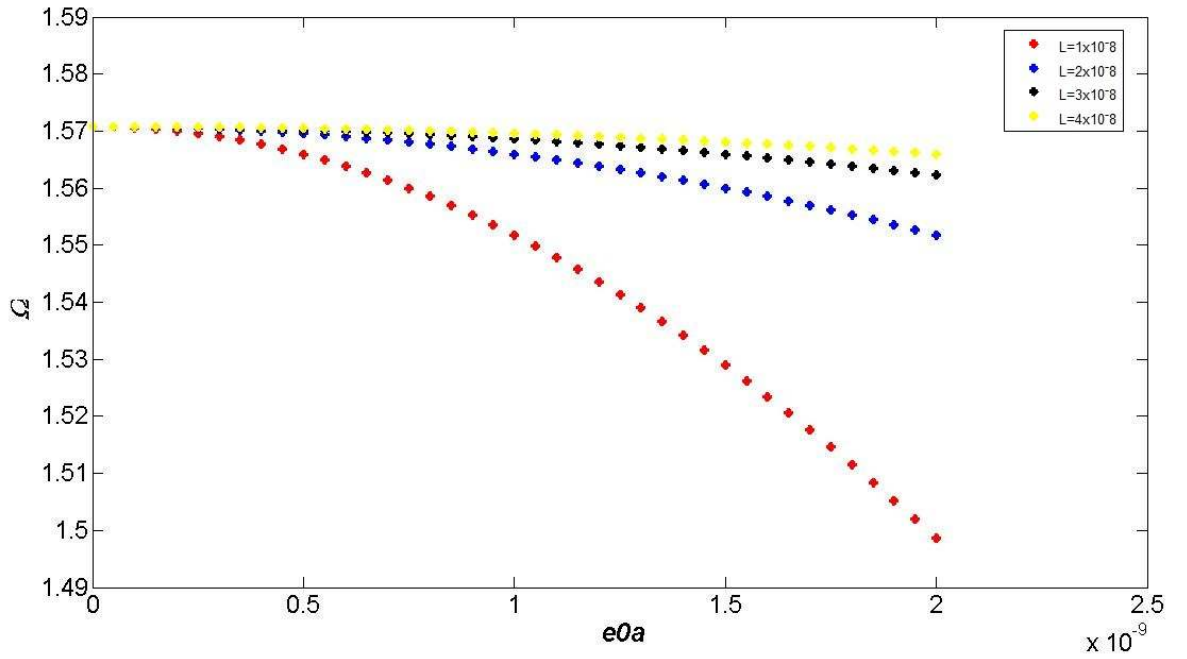


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.22. İki tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin L değıştikçe boyutsuz frekans değeriinin mod sayısına bağı değışimi

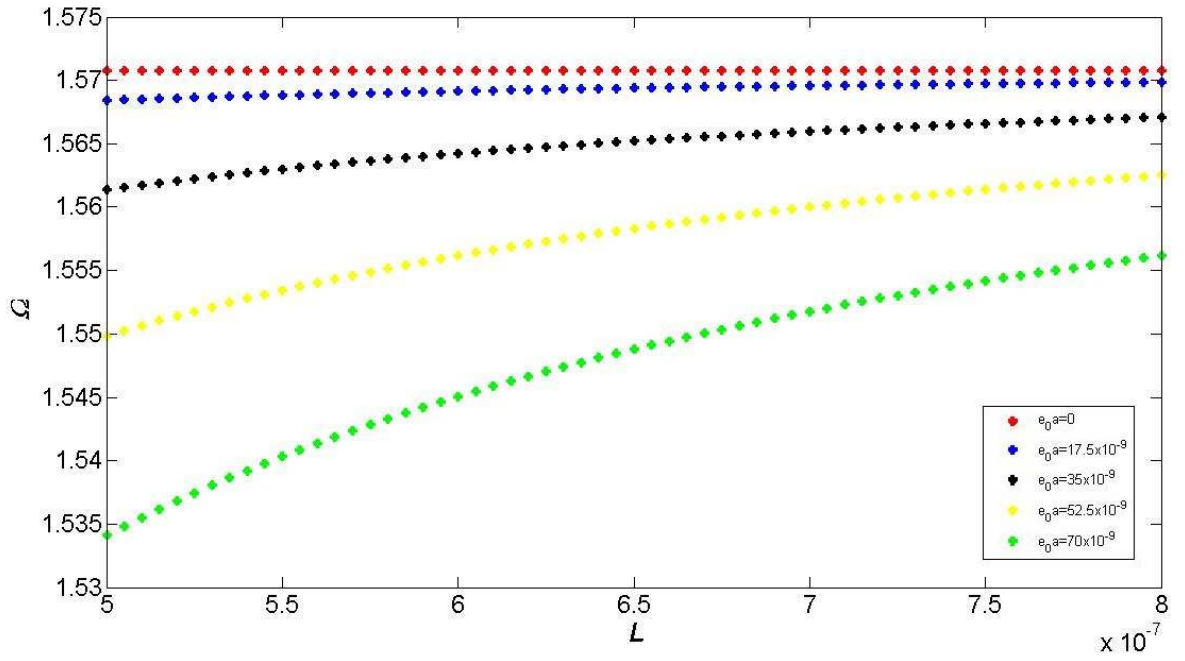


a) Mikrotüpçük

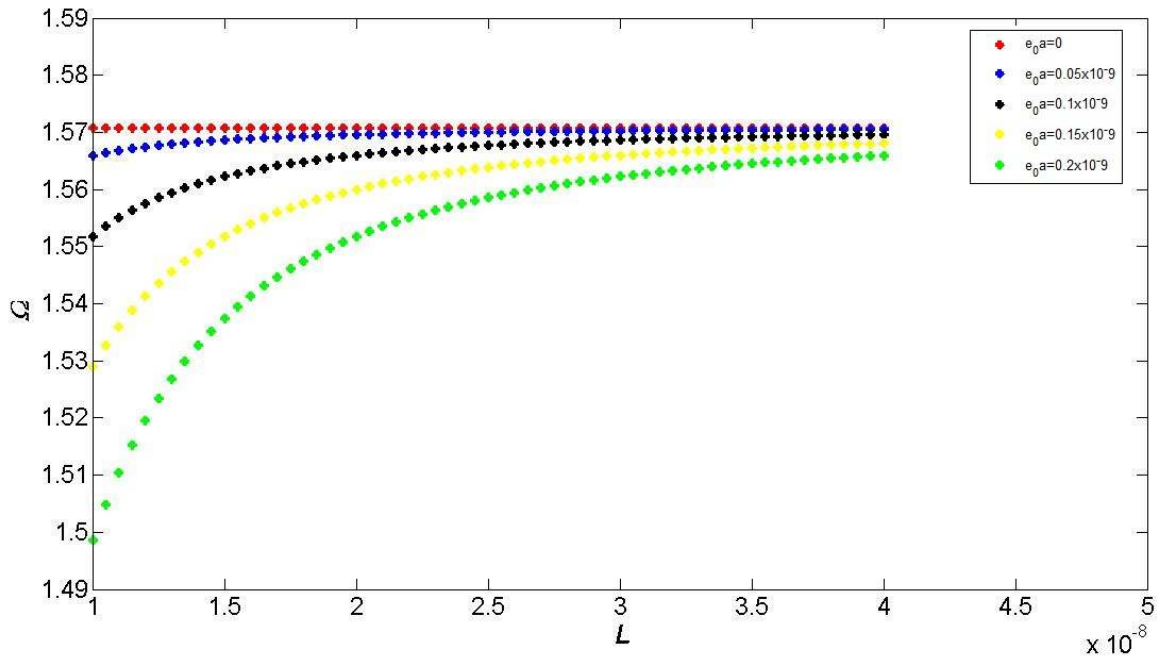


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.23. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin L değıştikçe boyutsuz frekans değeriinin e_0a 'ya bağılı değışimi

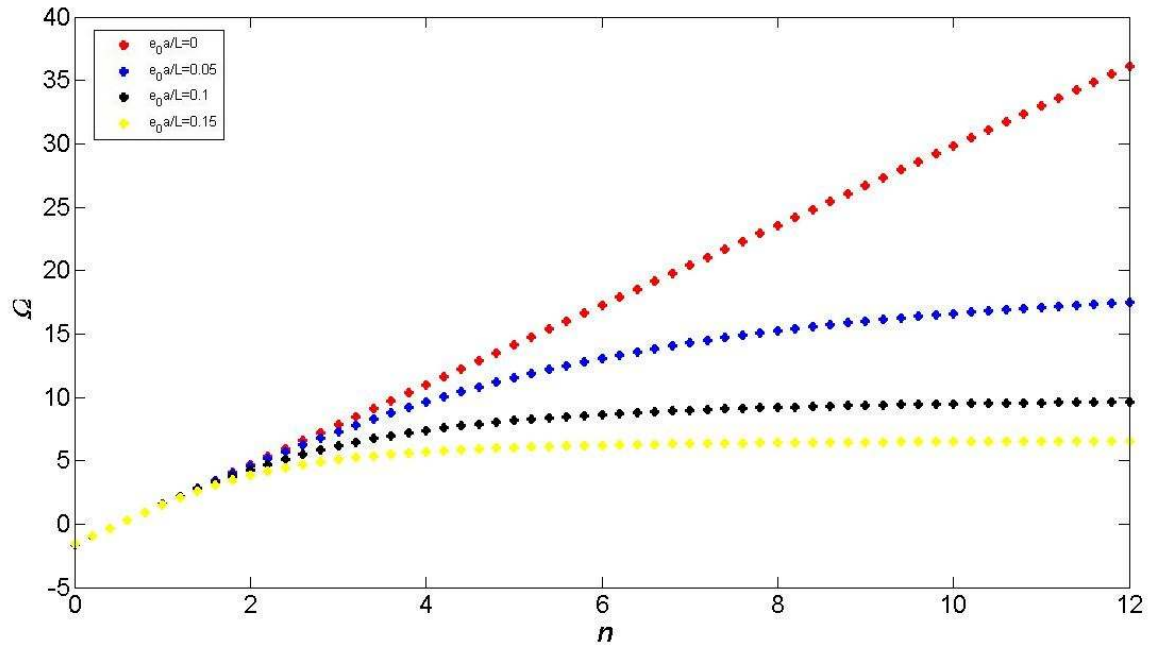


a) Mikrotüpçük

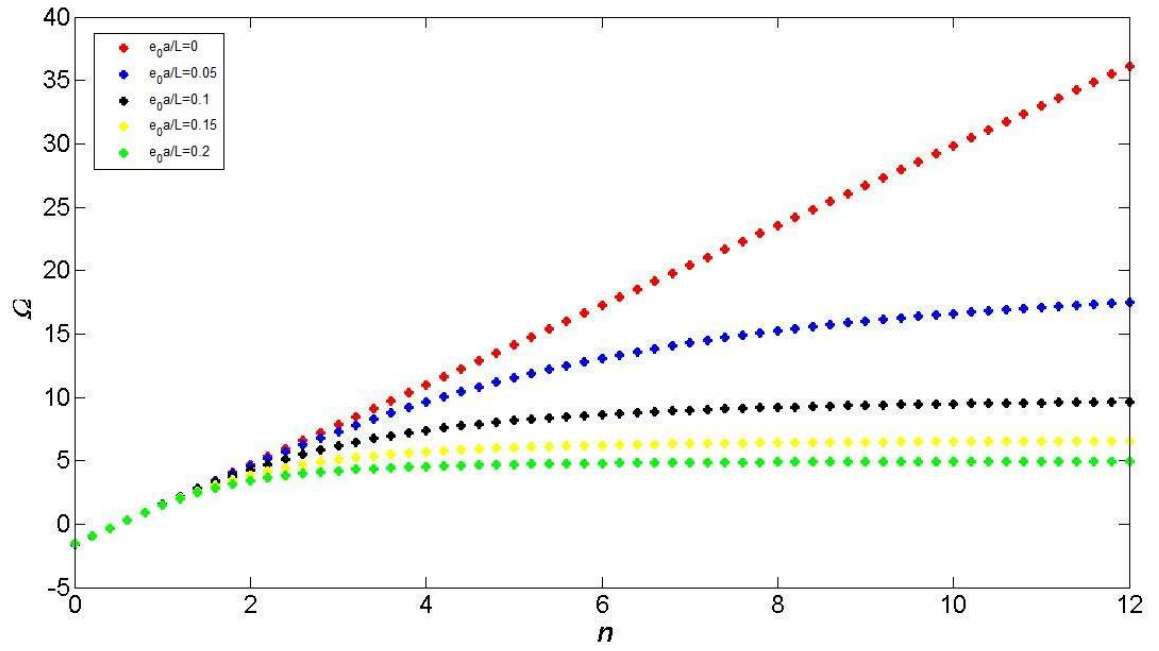


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.24. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a değıştikçe boyutsuz frekans değeri nin L 'ye bağılı değışimi

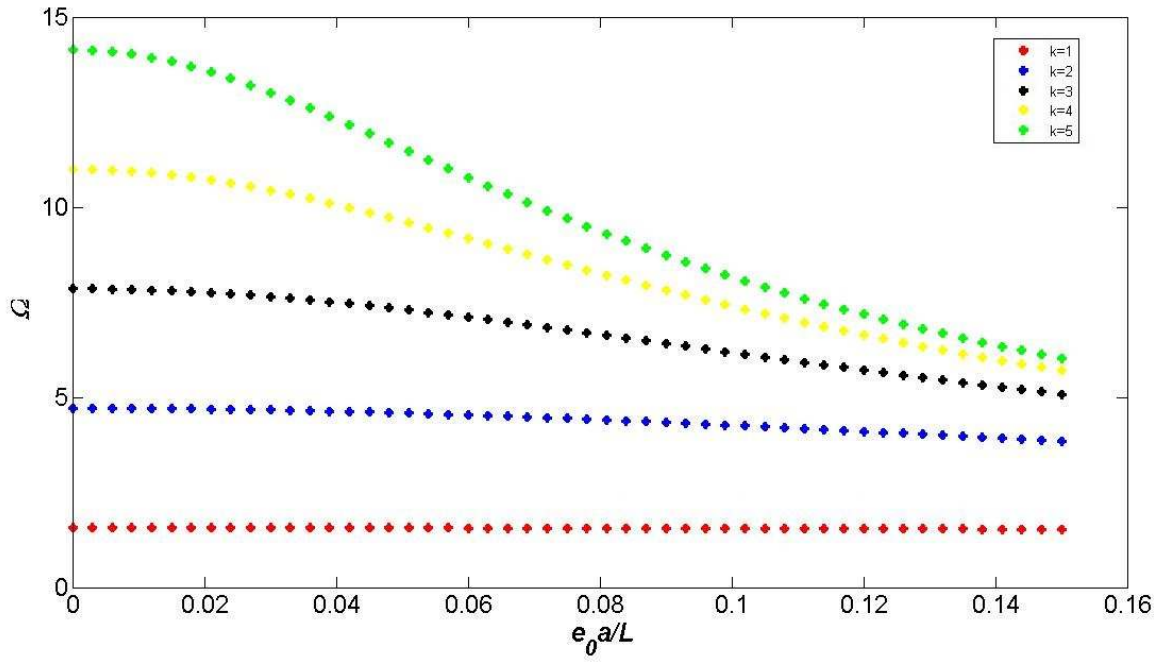


a) Mikrotüpçük

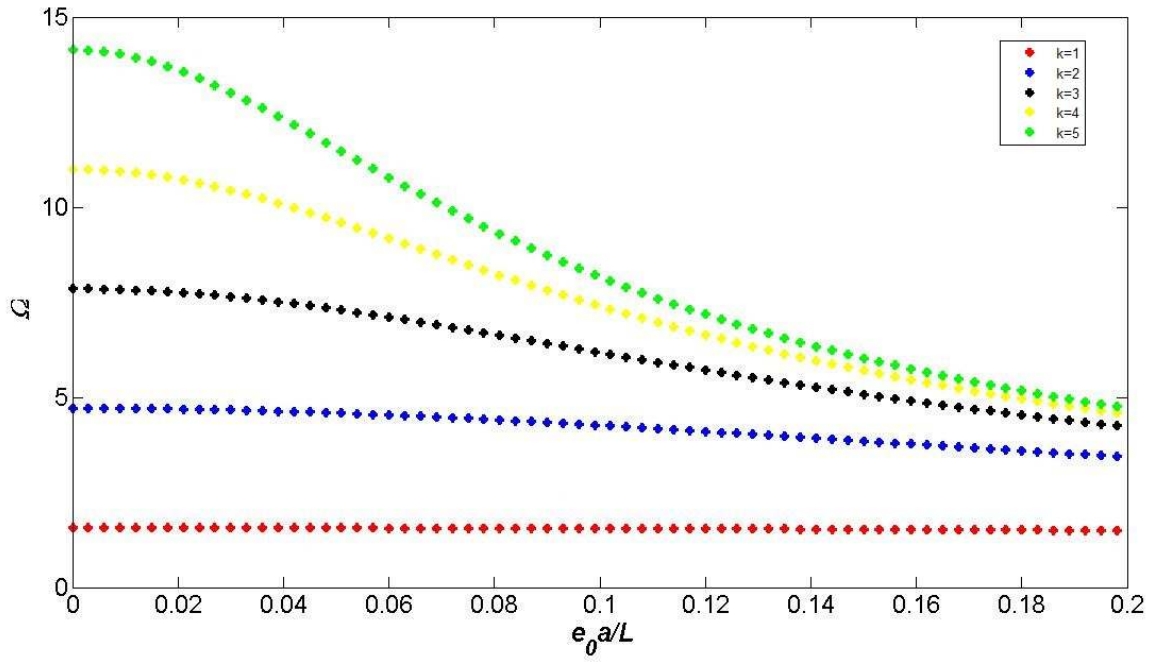


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.25. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin e_0a/L değişikçe boyutsuz frekans değerinin mod sayısına bağlı değişimi

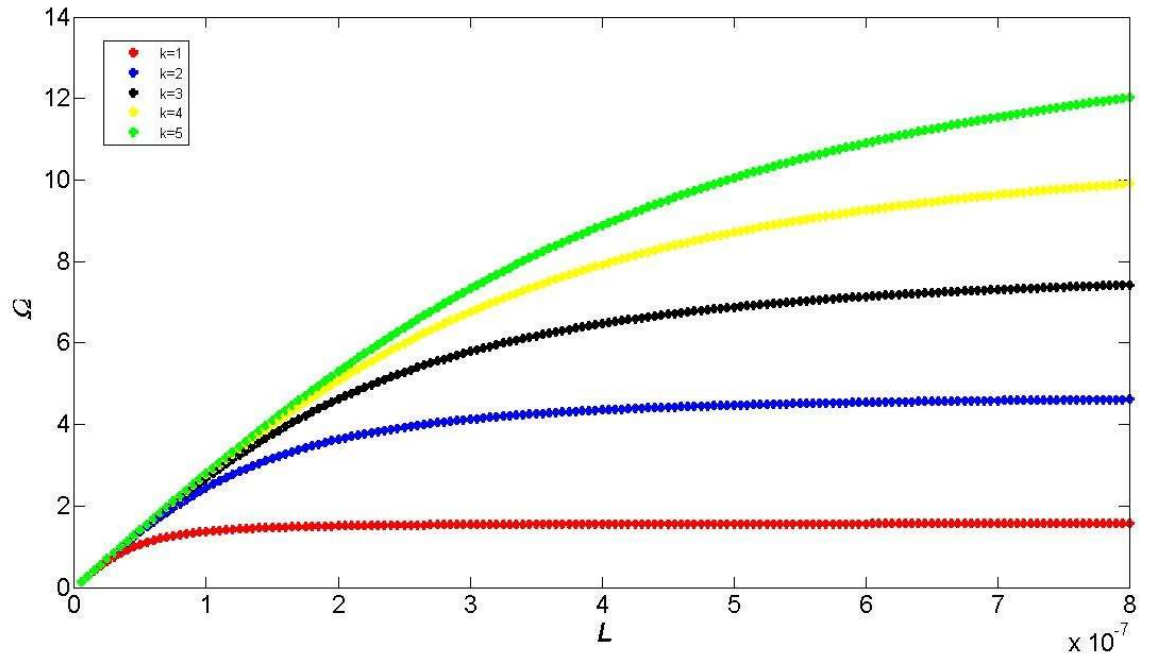


a) Mikrotüpçük

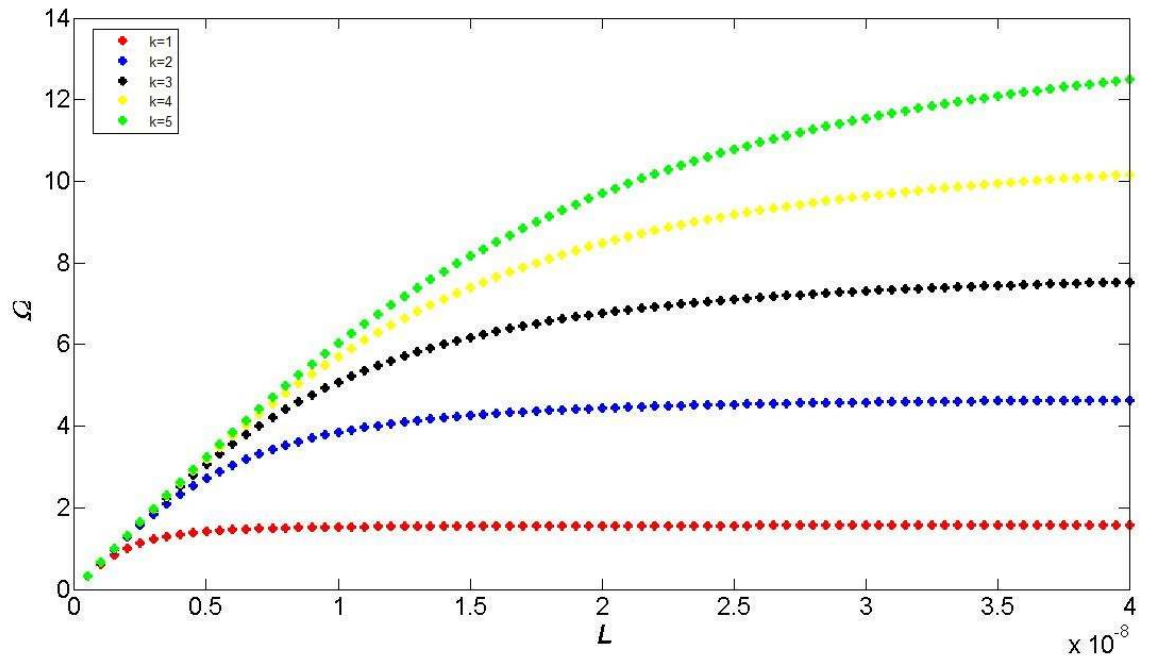


b) Karbon nanotüp

Şekil 4.26. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin mod sayısı değişikçe boyutsuz frekans değerinin e_0a/L 'ye bağlı değişimi



a) Mikrotüpçük



b) Karbon nanotüp

Şekil 4.27. Bir tarafı ankastre mesnetli çubuk modelinin mod sayısı değişikçe boyutsuz frekans değerinin L 'ye bağlı değişimi

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Yerel Olmayan Elastisite teorisi ile mikrotüpçük ve karbon nanotüpün kiriş olarak modellenmesi sağlanarak değişik sınır koşulları altında ve değişik yükleme durumları için eğilme ve titreşim analizi yapılmıştır. Bu analizler karbon nanotüp ve mikrotüpçüklerin mekanik özelliklerini anlayabilmek açısından önem taşımaktadır.

Çalışma kapsamında kullandığımız işlemler daha önce karbon nanotüp için literatürde verilmiştir. Ancak mikrotüpçük için boyutlar değiştiğinden bu teorinin mikrotüpçük için ne kadar doğru sonuçlar verdiği konusundaki çalışma sayısı çok az olmakla birlikte teknolojinin hızla ilerlemesi tez kapsamında ulaştığımız sonuçların bu konuda çalışan diğer bilim adamlarının yayınlamasıyla sonuçlanmıştır.

Sonuçlardan görülmüştür ki, nano ve mikro boyuttaki yapıların hesabında klasik elastisite teorisi yetersiz kalmaktadır. Çünkü klasik elastisite teorisi malzeme iç karakteristik uzunluğunu dikkate almamaktadır. Ama malzeme boyutları küçüldükçe atomlar arası mesafe önem kazanmaktadır.

Eğilme analizi sonuçlarına göre basit mesnetli kiriş için malzeme iç karakteristik uzunluğunun artması momenti etkilemezken deplasmanı artırmaktadır. Tek tarafı ankastre mesnetli kirişte momenti etkilemezken deplasmanı azaltmaktadır. İki tarafı ankastre ve tek tarafı ankastre tek tarafı basit mesnetli kirişte de durum deplasman değerlerini etkilemezken momenti azaltmaktadır. Titreşimde ise malzeme iç karakteristik uzunluğunun artması frekansı azaltmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilen frekanslar klasik sonuçlardan daha küçüktür. Ayrıca yapı boyutunun artmasıyla yerel olmayan elastisite teorisi önemini yitirmekte ve sonuçlar klasik elastisite ile yakınsamaktadır.

6. KAYNAKLAR

- ARSLAN, A. 2004. Varyasyonel türev yöntemi ile Euler- Bernoulli kirişlerinin çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, 85 ss.
- AYDOĞDU, M. 2009. Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model. *Physica E*, 41(5): 861-864.
- BALTA, D.A., SUHUBI, E.S. 1977. Theory of nonlocal generalized thermoelasticity, *Int. Journ. Engn. Sci*, 15: 579.
- BOAL, D.H. 2002. Mechanics of the cell. Cambridge University Press, London.
- CENGER, Y. 2006. Nanoteknoloji ve karbon nanoyapılar, Bitirme Tezi, Ankara Üniversitesi, 80 ss.
- CİVALEK, Ö., AKGÖZ, B. 2010. Free vibration analysis of microtubules as cytoskeleton components: Nonlocal Euler-Bernoulli beam modeling. *Scientia Iranica, Transaction B- Mechanical Engineering*, 17(5): 367-375.
- CİVALEK, Ö., DEMİR, Ç., AKGÖZ, B. 2010. Free vibration and bending analyses of cantilever microtubules based on nonlocal continuum model. *Mathematical and Computational Applications*, 15: 289-298.
- CİVALEK, Ö., DEMİR, Ç. 2011. Buckling and bending analyses of cantilever carbon nanotubes using Euler- Bernoulli beam theory based on non-local continuum model. *Asian Journal of Civil Engineering*, 12(5): 651-661.
- CİVALEK, Ö., DEMİR, Ç. 2011. Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modeling*, 35: 2053-2067.
- ÇIRACI, S. 2005. Nanoteknolojide yeni ufuklar, *Bilim ve Teknik Dergisi*.
- ÇIRACI, S. 2006. Nanoteknolojide yeni ufuklar, *Bilim ve Teknik Dergisi*.
- DAS, M., LEVINE, A.J., MACKINTOSH, F.C. 2008. Buckling and force propagation along intracellular microtubules. *Europhysics letters* , 84: 18003.
- DEVELİ, A. G. 2007. Elastik zemin üzerine oturan Timoshenko kirişinde titreşim problemi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 84 sayfa.
- EDELEN, D.G.B. 1969. On nonlocal variational mechanics I, *Int. Journ. Engn. Sci*, 7: 269.
- EDELEN, D.G.B. 1969. Nonlocal variations and local invariance of fields, *Modern Analytic and Computation Methods in Science and Mathematics*, 19.

- ERİNGEN, A.C., ŞUHUBİ, E.S. 1964a. Nonlinear theory of simple microelastic solid, I. *International Journal of Engineering Science*, 2: 189–203.
- ERİNGEN, A.C., ŞUHUBİ, E.S. 1964b. Nonlinear theory of simple microelastic solid, II. *International Journal of Engineering Science* 2: 389–404.
- ERİNGEN, A.C. 1966. Linear theory of Micropolar elasticity. *Journal of Mathematical Mechanics*, 15: 909-923.
- ERİNGEN, A.C. 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54: 4703–4710.
- ERKOÇ, Ş. 2001. Karbon nano yapılar, *Bilim ve Teknik Dergisi*.
- ERKOÇ, Ş. 2008. Nanobilim ve Nanoteknoloji, *O.D.T.Ü. Bilim ve Toplum Kitapları Dizisi*, 107 ss.
- GAO, Y. and LEI, F-M. 2009. Small scale effects on the mechanical behaviors of protein microtubules based on the nonlocal elasticity theory, *Biochemical and Biophysical Research Communications*, 387(3): 467-471.
- GURTIN, M. E. 1965. Thermodynamics and possibility of spatial interactions in elastic materials, *Arch. Rat.Mech.Anal.*, 19, 339.
- HAO, M.J., GUO, X.M. and WANG, Q. 2010. Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29(1): 49-55.
- HAWKINS, T., MIRIGIAN, M., YASAR, M. S., ROSS, J. 2009. Mechanics of microtubules, *Journal of Biomechanics*, 43(1): 23-30
- HOWARD, J. and HYMAN, A. A. 2003. Dynamics and mechanics of the microtubule plus end. *Nature*, 422, 753-758.
- İJİMA, S., İCHİHASHİ, T. 1993. Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter, *Nature*, 363:603-605.
- İNAN, M. 1981. Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü Yayınları, İstanbul.
- JANMEY, P.A., EUTENEUR, U., TRAUB, P. and SCHLIWA, M. 1991. Viscoelastic properties of vimentin compared with other filamentous biopolymer Networks, *J Cell Biol*, 113:155
- JIANG, H., ZHANG, J. 2008. Mechanics of microtubule buckling supported by cytoplasm, *Journal of Applied Mechanics*, 75: 061019-1-9.

- KASAS, S., DIETLER, G. 2007. Techniques for measuring microtubule stiffness. *Current Nanoscience*, 3(1):79-96.
- KIS, A., KASAS, S., BABIC, B., KULIK, A.J., BENOIT, W., BRIGGS, G.A.D., SCHONENBERGER, C., CATSICAS, S. and FORRO, L. 2002. Nanomechanics of microtubules. *Physical Review Letters*, 89(24): 248101-1-248101-4.
- KOÇ, M. B. 2003. Nanotüpler. Bitirme Tezi, Ankara Üniversitesi, 25 sayfa.
- KOÇ, Y. 2006. Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorileri kullanılarak basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, 67 sayfa.
- KIRSCHER, M. and MITCHISON, K. 1986. Beyond self-assembly: from microtubules to morphogenesis. *Cell*. 45:329-342.
- LAGACE, P.A. 2001. Review of Simple Beam Theory. Review of unified Engineering notes on Beam Theory, Massachusetts Institute of Technology. Unit 13.
- LI, C., RU, C.Q. and MIOUCHIWSKI, A. 2006. Length-dependence of flexural rigidity as a result of anisotropic elastic properties of microtubules *Biochem.Biophys.Res.Comm.* 349:1145.
- LI, X-F., WANG, B.-L., MAI, Y.-W. 2008. Effects of a surrounding elastic medium on flexural waves propagating in carbon nanotubes via nonlocal elasticity. *Journal of Applied Physics*, 103: 074309.
- LIU, Y. 1998. Bar and beam elements. Lecture notes: Introduction to finite element method, University of Cincinnati, Chapter 2.
- LOURIE, O., COX, D. M., and WAGNER, H. D. 1998. Buckling and collapse of embedded carbon nanotubes, *Physical Review Letters*, 81(8): 1638(4).
- LU, P., LEE, H.P., LU, C. and ZHANG, P.Q. 2006. Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model. *Journal of Applied Physics*, 99: 073510.
- LU, P., LEE, H.P., LU, C. and ZHANG, P.Q. 2007. Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures*, 44(16): 5289-5300
- LU, P. 2007. Dynamic analysis of axially prestressed micro/nanobeam structures based on nonlocal beam theory. *Journal of Applied Physics*, 101: 073504.

- LUŞ, H. ve YERLİCİ, V. 2007. Yapı Dinamiği'ne Giriş. Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 493 ss.
- MITRA, M. and GOPALAKRISHNAN, S. 2008. Wave characteristics of multi-walled carbon nanotubes. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 27 (1-2): 125-136.
- MUKHERJEE, S., ARIAS, T., MCEUEN, P. 2004. Dynamical behavior of carbon nanotubes – modeling, simulations and experiments. *NSF Nanoscale Science and Engineering Grantees Conference*
- PAMPALONI, F. and FLORIN, E-L. 2008. Microtubule architecture: inspiration for novel carbon nanotube-based biomimetic materials. *Trends in Biotechnology*, 26(6): 302-310.
- PAMPALONI, F., LATTANZI, JONAS, G.A., SURREY, T., FREY, E. and FLORIN, E.L. 2006. Thermal fluctuations of grafted microtubules provide evidence of a length-dependent persistence length. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 103 (2006) 10248.
- PARKS, D. M. 2004. Euler-Bernoulli beams: bending, buckling, and vibration. 2.002 Mechanics and Materials II. Massachusetts Institute of Technology.
- PEDDIESON, J., BUCHANAN, G. R., McNITT, R. P. 2003. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41: 305-312.
- PERÇİN, S.S. 2008. Timoshenko kirişinin serbest titreşim analizi. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, 201 sayfa.
- PORTET, S., TUSZYŃSKI, J.A., HOGUE, C.W.V. and DIXON, J.M. 2005. Elastic vibrations in seamless microtubules. *Eur Biophys J*, 34: 912-920.
- QIAN, D., WAGNER, G.J., LIU, W.K., YU, M.F. AND RUOFF, R.S. 2002. Mechanics of carbon nanotubes. *Applied Mechanics Reviews*, 55(6): 495-533.
- RAJASEKARAN, S. and CHITRA, P. 2008. Structural mechanics approach for carbon nanotubes. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 13(5): 347-358.
- REDDY, J.N. 2007. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science* 45: 288- 307
- REDDY, J. N., PANG, S. D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2): 023511.

- RU, C. Q. 2000. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes with interlayer radial displacements. *Physical Review B*, 62(24): 16962–16967.
- RUOFF, R. S., QIAN, D., LIU, W.K. 2003. Mechanical properties of carbon nanotubes: theoretical predictions and experimental measurements. *Comptes Rendus Physique*, 4(9): 993-1008.
- RUOFF, R.S. and YU, M.-F. 2005. Nanoscale Mechanical Characterization of Carbon Nanotubes. *Microscale Diagnostic Techniques*. Breuer, Kenny (Ed) *Nanoscale Mechanical Characterization of Carbon Nanotubes*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 197-226.
- SADEGHI, M., OZMAIAN, M. and NAGHDABADI, R. 2008. Stability analysis of carbon nanotubes under electric fields and compressive loading. *Journal of Physics D*, 41(20): 205411
- SALVETAT, J.-P., BONARD, J.-M., THOMSON, N.H., KULIK, A.J., FORRÓ, L., BENOIT, W. and ZUPPIROLI, L. 1999. Mechanical properties of carbon nanotubes. *Applied Physics A*, 69(3): 255-260.
- SEARS, A., BATRA, R.C. 2004. Macroscopic properties of carbon nanotubes from molecular-mechanics simulations. *Physical Review B*, 69(23): 235406(10).
- SEARS, A. Carbon Nanotube Mechanics: Molecular simulations & continuum models for carbon nanotubes.
- SEVİ, A.H. 2006. Nanoteknolojide Karbon nanotüplerin dayanıklılık simülasyonları. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, 53 sayfa.
- SHARIFZADEH, M. 2006. Nanotechnology Sector Report, Cronus Capital Markets, 1st Quarter.
- SHI, Y.J., GUO, W.L. and RU, C.Q. 2008. Relevance of Timoshenko-beam model to microtubules of low shear modulus. *Physica E*, 41(2): 213-219.
- SRIVASTAVA, D., WEI, C. AND CHO, K. 2003. Nanomechanics of carbon nanotubes and composites. *Applied Mechanics Reviews*, 56(2): 215-230.
- SUN, Z.H., WANG X.X., SOH, A.K. WU, H.A. and WANG, Y. 2006. Bending of nanoscale structures: Inconsistency between atomistic simulation and strain gradient elasticity solution, *Computational Materials Science*, 40(1): 108-113.
- SIRENKO, Y.M., STROSCIO, M.A. and KIM, K.W. 1996. Elastic vibrations of microtubules in a fluid, *Physical Review E*, 53(1):1003-1010.

- SUDAK, L.J., 2003. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 94, 7281–7287.
- TAKASONE, T., JUODKAZIS, S., KAWAGISHI, Y., YAMAGUCHI, A., MATSUO, S., SAKAKIBARA, H., NAKAYAMA, H., and MISAWA, H. 2002. Flexural rigidity of a single microtubule, *Japanese journal of applied physics*, 41:3015.
- TEPE, A. 2007. Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 114 sayfa.
- TOLOMEO, J.A. and HOLLEY, M.C. 1997. Mechanics of microtubule bundles in pillar cells from the inner ear, *Biophysical Journal*, 73:2241-2247.
- WANG, C. 2006. Buckling and free vibration of multiwall carbon nanotubes. Ph.D. Thesis, University of Alberta, 248 pp.
- WANG, C.M., ZHANG, Y.Y., RAMESH, S. S. and KITIPORNCHAI, S. 2006. Buckling analysis of micro- and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 39(17): 3904-3909.
- WANG, L.F. and HU, H.Y. 2005. Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes. *Phys. Rev. B* 71, 195412.
- WANG, L., NI, Q. 2009. Vibration of slender structures subjected to axial flow or axially towed in quiescent fluid. *Advances in Acoustics and Vibration*, A review article.
- WANG, Q., 2005. Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *J. Appl. Phys.* 98, 124301.
- WANG, Q., ZHOU, G.Y., LIN, K.C., 2006. Scale effect on wave propagation of double-walled carbon nanotubes. *Int. J. Solids Struct.* 43, 6071–6084.
- WANG, Q. and VARADAN, V.K. 2006. Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics. *Smart Materials and Structures*, 15(2): 659-666.
- WANG, Q. and SHINDO, Y. 2006. Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(4): 663-680.
- WANG, Q. and LIEW, K.M. 2007. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro-and nano structures. *Physics Letters A*, 363: 236-242.

- WANG, Z.L., GAO, R.P., PONCHARAL, P., DE HEER, W.A., DAI, Z.R., PAN, Z.W. 2001. Mechanical and electrostatic properties of carbon nanotubes and nanowires. *Materials Science and Engineering C*. 16:3–10.
- XU, M. 2006. Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams. *Proceeding of the Royal Society A*, 462: 2977-2995.
- YAKOBSON, B. I. and AVOURIS, P. 2001. Mechanical properties of carbon nanotubes. *Carbon Nanotubes*, 80: 287–327.
- ZHANG, Y.Q., LIU, G.R. and WANG, J.S. 2004. Small-scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression. *Phys. Rev. B*, 70, 205430.
- ZHANG, Y.Q., LIU, G.R. and XIE, X.Y. 2005. Free transverse vibration of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Phys. Rev. B* 71, 195404
- ZHOU YE, B.S., M.S. 2005. Mechanism and the effect of microwave-carbon nanotube interaction. Ph.D. Thesis, University of North Texas, 87 pp.
- <http://www.nanoteknolojimucizesi.com> (14.12.2010)

ÖZGEÇMİŞ

Çiğdem IŞIK, 1986 yılında Nevşehir’de doğdu. İlk öğrenimini İstanbul, orta öğrenimini Kütahya ve lise öğrenimini Sinop’ta tamamladı. 2004 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü’nden 2008 yılında İnşaat Mühendisliği olarak mezun oldu. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda yüksek lisansına başladı. 2009 yılından bu yana Akdeniz Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mekanik Anabilim Dalı’nda araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.