

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**NANO ÖLÇEKLİ SÜREKLİ VE AYRIK SİSTEMLERİN YEREL OLMAYAN
SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU (NL-FEM) İLE DİNAMİK
ANALİZİ**

Hayri Metin NUMANOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EKİM 2019

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**NANO ÖLÇEKLİ SÜREKLİ VE AYRIK SİSTEMLERİN YEREL OLMAYAN
SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU (NL-FEM) İLE DİNAMİK
ANALİZİ**

Hayri Metin NUMANOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EKİM 2019

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NANO ÖLÇEKLİ SÜREKLİ VE AYRIK SİSTEMLERİN YEREL OLMAYAN
SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU (NL-FEM) İLE DİNAMİK
ANALİZİ**

**Hayri Metin NUMANOĞLU
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Bu tez Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırmalar Kurumu tarafından 117M495
nolu proje ile desteklenmiştir.**

EKİM 2019

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NANO ÖLÇEKLİ SÜREKLİ VE AYRIK SİSTEMLERİN YEREL OLMAYAN
SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU (NL-FEM) İLE DİNAMİK
ANALİZİ

Hayri Metin NUMANOĞLU
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 18.10.2019... tarihinde jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman)

Doç. Dr. Mehmet AVCAR

Doç. Dr. İbrahim AYDOĞDU

ÖZET

NANO ÖLÇEKLİ SÜREKLİ VE AYRIK SİSTEMLERİN YEREL OLMAYAN SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU (NL-FEM) İLE DİNAMİK ANALİZİ

Hayri Metin NUMANOĞLU

Yüksek Lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Ekim 2019; 252 sayfa

Bu yüksek lisans tezi çalışmasında, nano ölçekli sürekli ve ayrik yapıların yerel olmayan elastisite teorisi ile titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Sürekli sistem olarak çubuk ve kiriş, ayrik sistem olarak kafes ve çerçeveler nano ölçekte modellenmiştir. Tez kapsamında ele alınan problemlerin birincisinde, elastik ortama gömülü basit eksenel, Love-Bishop ve burulma çubuklarının yerel olmayan titreşimi incelenmiştir. İkinci problemde Winkler-Pasternak zeminine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin titreşimi sunulmuştur. Bu tip yapılar için Hamilton İlkesi ile elde edilen titreşim denklemleri önce analitik metot olan değişkenlere ayırma ile çözülmüştür. Daha sonra bu sistemler için, atomik boyut parametresini ve maruz kaldıkları etkileri gözeten sonlu eleman formülasyonları sunulmuştur. Üçüncü ve dördüncü problem olarak, sırayla kafes ve çerçeve sistemlerin yerel olmayan titreşimi ele alınmıştır.

Sayısal sonuçlar kapsamında, genel bilinen ve eklentili sınır koşullara sahip farklı tip çubuk ve kiriş elemanların yanı sıra farklı geometrilere sahip kafes ve çerçevelerin eleman boyutları, mod sayısı, atomik parametre, elastik ortam/zemin parametreleri, ortam sıcaklığı, eklenti oranı, ayrik sistem geometrik parametreleri gibi farklı parametreler altında boyutsuz frekansları sunulmuş olup sonuçların detaylı tartışmaları yapılmıştır. Analitik yöntemlerce elde edilen sonuçların geliştirilmiş sonlu elemanlar formülasyonu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaları yapılmıştır. Sonlu elemanların analitik yöntemle elde edilen değerlere yeter doğrulukta sonuçlar vermesi metodun boyut etkili dinamik problemlerinde kullanılabilirliğini göstermiştir. Son olarak, sayısal sonuçlar ve tartışmadan elde edilen en genel sonuçlar sunulmuştur. En temelde, bu çalışma ile analitik olarak gerçekleştirilemeyen analizlerin sonlu eleman sonuçları sunularak nano ölçekli farklı tipteki yapıların mekanik davranışlarının anlaşılması amaçlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Atomik boyut etkisi, Boyutsuz frekans, Çerçeve, Çubuk, Kafes, Kiriş, Nanoteknoloji, Sonlu elemanlar, Titreşim, Yerel olmayan elastisite

JÜRİ: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Doç. Dr. Mehmet AVCAR

Doç. Dr. İbrahim AYDOĞDU

ABSTRACT

DYNAMIC ANALYSIS OF NANO SCALED CONTINUOUS AND DISCRETE STRUCTURES BASED ON NONLOCAL FINITE ELEMENT FORMULATION (NL-FEM)

Hayri Metin NUMANOĞLU

MSc. Thesis in Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

October 2019; 252 pages

In this master of science thesis, free vibration analysis of continuous and discrete structures is performed by using nonlocal elasticity. Axial rod and beam as continuous systems and truss and frame as discrete systems are modelled at the nano-scale. In the first of examined topics in the study, the nonlocal vibration of simple axial, Love-Bishop and torsional rods embedded in the elastic media is investigated. The nonlocal transverse vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams lying on Winkler-Pasternak elastic media and under thermal environment is studied in the second problem. For this type structures, firstly, the obtained governing equations via Hamilton's Principle are solved with the help of separation of variables that is analytical method. Then, finite element formulation that takes into consideration nonlocality and other environmental effects is presented. In the third and fourth problem types, size-dependent vibration of truss and frame is explained, respectively.

With in the scope of numerical results, the nondimensional frequencies of truss and frames with different geometries as well as rods and beams with general and attached boundary condions are calculated for different parameters such as element sizes, mode number, atomic parameter, elastic media/foundation parameter, temperature, attachment ratio and discrete system geometric parameters and a detailed discussions of these numerical results is carried out. The obtained results are compared by analytical and the developed finite element methods. The fact that finite elements give sufficient accuracy results to the analytical values show the usability of the method in the nonlocal free vibration problems. Finally, attained conclusions from all numerical results and discussions are outlined. Fundamentally, with this study, it is aimed to understand the mechanical behaviors of different types of nano-scaled structures by presenting the finite element results of some analyses which cannot be analytically performed.

KEYWORDS: Atomic size effect, Beam, Finite elements, Frame, Nanotechnology, Nondimensional frequency, Nonlocal elasticity, Rod, Truss, Vibration

COMMITTEE: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Assoc. Prof. Dr. Mehmet AVCAR

Assoc. Prof. Dr. İbrahim AYDOĞDU

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezi boyut etkisi içeren dinamik problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile (FEM) analizlerini sunmak amacıyla Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği anabilim dalı Mekanik bilim dalı bünyesinde hazırlanmıştır.

Nano/mikro elektro-mekanik sistemlerin (NEMS/MEMS) tasarımı ve analizi apayrı bir mühendislik konusudur. Karbon nanotüp, bor nitrit nanotüp, silika karbit nanotüp, altın nanotel, çinko oksit nanotel gibi tek doğrultulu nanoyapıların yanı sıra grafen, silisen, borofen gibi iki doğrultulu nanoyapılar, NEMS ve MEMS teknolojisi çıktılarının vazgeçilemez yapıtaşları olarak bilinmektedir. Bu teknolojinin ürünlerine bilgisayar çipleri, biyosensörler, tıpta kullanılan nanorobotlar, ... vs. örnek verilebilir. Bu gibi yapıların dış mekanik zorlar altında nasıl bir davranış gösterdiği iyi bilinmelidir. Deneysel çalışmalar göstermektedir ki dış zorlar altındaki davranış klasik fizik kurallarıyla, konumuz gereği mekanikteki klasik elastisite teorisinin hükümleri ile açıklanamamaktadır. Deneysel yöntemler, bu durumun nano ve mikro yapının maruz kaldığı dış zorların, yapının karakteristik iç boyutları ile etkileşiminden kaynaklandığını ortaya koymuştur. Bu gerçeğin temelini 1900'lü yılların başında Cosserat kardeşlerin çalışmalarına kadar uzanmakta olduğu belirtilebilir. Deneysel yöntemlerin büyük bir zahmet, işlem hacmi ve bilimsel yetkinlik gerektirmesinden dolayı bilim insanları, yapının karakteristik iç boyutlarını kapsayacak şekilde geliştirilmiş sürekli ortam yaklaşımlarına yönelerek analitik çalışmalar gerçekleştirmiştir.

Bu tez çalışmasında mikro ve nano ölçekli farklı tipteki sistemlerin yerel olmayan elastisite teorisinin sonlu elemanlar formülasyonuna dayanan serbest titreşim analizlerinin dört farklı problem tipi üzerinden ele alınmıştır. Buna göre, birinci problemde eksenel çubuklar için Basit Çubuk Teorisi ve Love-Bishop Çubuk Teorisi gibi yaklaşımlarla beraber burulma çubuklarının tam elastik ortamda bulunma durumu göz önüne alınmıştır. İkinci problemde eğilme kirişleri için Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi ve Timoshenko Kiriş Teorisi kullanılarak çift parametrelili elastik zemine oturma ve termal etki altında olma durumu göz önüne alınmıştır. Üçüncü ve dördüncü problem tipi, ilk iki bölümde incelediğimiz sürekli sistemlerin ayrıklaştırılmış yapılarda olan uygulamalarını kapsar. Şöyle ki, eksenel ve eğilme çubukları, sırayla üçüncü ve dördüncü bölümde ele alacağımız kafes ve çerçeve yapıların atomik ölçekli serbest titreşim analizlerinin temelini oluşturacaktır. Çalışmada genel olarak yönetici denklemler ve sınır şartlar varyasyon cebirine dayalı olarak elde edilmiştir ve bunların mekanik anlamını ortaya koyacak yorumlamalar yapılmıştır. Devamında boyut etkili sonlu elemanlar ve matris deplasman formülasyonları oluşturulmuştur. Sayısal sonuçlar kısmında titreşim analizleri sonuçları detaylı parametrik çalışmalar ile sunulmuştur. Bu çalışma, analitik çözümü elle imkânsız olduğu gibi elektronik ortamda da zor ve verimsiz süreçlere neden olan yerel olmayan elastisite problemlerinde sonlu elemanlar formülasyonunun kullanımı ile büyük kolaylık sağlanabileceğini ve çok daha ileri düzeyli problemlere uygulanabileceği potansiyelini vurgulamayı amaçlamaktadır.

Bu tez çalışmasının yazımının sonlarına gelinmesiyle birlikte tez kapsamında üç adet SCI makale basıma kabul edilmiştir. Bunlardan bir tanesi de kafes ve çerçeve gibi ayrık sistemlerin yerel olmayan titreşim analizleridir. Şahsen, küçük ölçekli ayrık sistemlerin çok farklı boyut etkili mekanik analizlerinin ilerleyen dönemde yoğun bir

şekilde araştırılacağını düşünmekteyim. Ayrıca ilerleyen dönemde bu tezden çıkarılabilecek önemli yayınlara yoğunlaşarak literatürde olmadığı tespit edilen noktaların kapatılmasına çalışılacaktır.

Tabi, bu tez çalışmasını hazırlarken bazı şahsiyetlere kendilerinden görmüş olduğum değerli katkılarından dolayı teşekkür etmem gerekmektedir. Bu bağlamda,engin akademik bilgisiyle donanmış desteğini ve insani hoşgörüsünü şahsımdan esirgememiş olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ömer CİVALEK'e teşekkür ediyor ve saygılarımı sunuyorum. Çok önemli mesleki bilgi ve deneyimlerimi kazanmış olduğum TMH Mühendislik Ltd. Şti. firmasından İnş. Yük. Müh. Aykut DENİZ ve İnş. Müh. Gökhan ULUDAĞ ağabeylerime, değerli arkadaşlarım Emre BEKTAŞOĞLU'ya, Suat TOPUZ'a ve Nuri KAHVECİ'ye, hâlihazırda akademik görevimi sürdürdüğüm Giresun Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'ndeki hocalarıma çok teşekkür ediyorum. Tez çalışmamı desteklemeye değer gören Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırmalar Kurumu'na (TÜBİTAK) (Proje No: 117M495) müteşekkir olduğumu da belirtmek istiyorum. Bu noktada en önemli teşekkürü göstermiş oldukları şartsız ve kesintisiz desteklerinden dolayı başta annem ve babam olmak üzere aile üyelerime sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
AKADEMİK BEYAN	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xv
ÇİZELGELER DİZİNİ	xx
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Nanoteknoloji Bilimi ve Nanoyapılar	3
2.1.1. Nanoteknolojiye giriş.....	3
2.1.2. Nanoteknolojinin gelişimi	4
2.1.3. Dünya’da ve Türkiye’de nanoteknoloji yatırımları	6
2.1.4. Nanoteknoloji ile çalışan sektörler	8
2.1.5. Nano ölçekli yapılar.....	9
2.1.6. Nano–elektro–mekanik sistemler (NEMS).....	16
2.2. Atomik Düzeydeki Sistemlerin Mekanik Analizleri	20
2.3. Mekanik Sistemlerin Titreşimi	21
2.3.1. Sistem, titreşim ve serbestlik derecesi kavramları.....	21
2.3.2. Ayrık ve sürekli sistemler.....	25
2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi	35
2.4.1. Giriş	35
2.4.2. Sonlu eleman tanımı ve mekanik sistemlerin sonlu eleman modeli.....	36
2.4.3. Sonlu eleman yönteminin uygulamaları	41
2.5. Daha Önceden Yapılmış Çalışmalar	41
3. MATERYAL VE METOT	48
3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi	48
3.2. Sonlu Elemanlar Formülasyonu	50
3.2.1. Şekil (interpolasyon) fonksiyonları	50
3.2.1.1. Eksenel çubuklar için şekil fonksiyonu.....	50
3.2.1.2. Eğilme çubukları için şekil fonksiyonu	53

3.2.2. Sonlu elemanların çözüm tekniği	55
3.2.3. Rijitlik ve kütle matrisleri	55
3.3. Problemlere İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi ve Çözümü	59
3.4. Nano Ölçekli Eksenel Çubukların Serbest Titreşimi	62
3.4.1. Basit çubuk teorisi (SRT)	62
3.4.2. Love–Bishop çubuk teorisi (LBRT)	75
3.4.3. Çubukların yerel olmayan burulma titreşimi	83
3.4.4. Eksenel çubuklar için yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu	90
3.4.4.1. Basit eksenel çubuk	90
3.4.4.2. Love–Bishop çubuğu	93
3.4.4.3. Burulma çubuğu	98
3.5. Nano Ölçekli Eğilme Çubuklarının Serbest Titreşimi	99
3.5.1. Euler–Bernoulli kiriş teorisi (EBBT)	99
3.5.2. Timoshenko kiriş teorisi (TBT)	110
3.5.3. Eğilme elemanlarında bazı paradokslar	116
3.5.4. Eğilme çubukları için yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu	119
3.5.4.1. Euler–Bernoulli kirişi	119
3.5.4.2. Timoshenko kirişi	124
3.6. Nano Ölçekli Ayırık Eksenel Sistemler	138
3.7. Nano Ölçekli Ayırık Eğilme Sistemleri	143
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	149
4.1. Nano Ölçekli Yapıların ve Sistemlerin Mekanik Modellenmesi	148
4.2. Sayısal Çalışma ve Tartışma	149
5. SONUÇLAR	231
6. KAYNAKLAR	235
7. EKLER	248
Ek–1. Taylor seri açılımı	248
Ek–2. Statik ve dinamik diferansiyel denge denklemleri	250
Ek–3. Yerel olmayan Timoshenko kirişinin iç tesirleri	252
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Nano Ölçekli Sürekli ve Ayrık Sistemlerin Yerel Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu (NL–FEM) ile Dinamik Analizi” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

15/10/2019

Hayri Metin NUMANOĞLU



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

a	: Karakteristik iç uzunluk
A	: Kesit alanı
c_i	: Şekil fonksiyonu sabitleri ($i = 1, 2, 3, 4$)
C_i	: Mod şekli sabitleri ($i = 1, 2, 3, 4$)
C_{ijkl}	: Dördüncü mertebeden elastisite tansörü
C_h	: Kiriş vektörü
d	: Adi diferansiyel operatörü
D^k	: Kinematik operatör
e_0	: Küçük ölçekli yapının malzeme sabiti
e_1, e_2	: Grafen yüzeyin birim vektörleri
E	: Elastisite modülü
f	: Enine veya eksenel dinamik dış zor
f_j	: Kütlesel kuvvet
f_c	: Klasik dış zor vektörü
f_{nl}	: Yerel olmayan dış zor vektörü
G	: Kayma modülü
h	: Ağırlık fonksiyonu
I	: Ortalama ağırlıklı kalıntı
I	: Eğilme atalet momenti
I_a	: Şaft eklentisinin dönel ataleti
I_c	: Klasik burulma ataleti matrisi

I_{nl}	: Yerel olmayan burulma ataleti matrisi
I_p	: Polar atalet momenti
k	: Kesme düzeltme katsayısı
$[k_{ij}]$	: Genel rijitlik matrisi
k_a	: Eklenti rijitliği
k_M	: Eksenel elastik ortam rijitliği
k_P	: Elastik Pasternak zemini rijitliği
k_T	: Burulmaya karşı elastik ortam rijitliği
k_W	: Elastik Winkler zemini rijitliği
K_I	: Yanal atalet rijitlik matrisi
K_M	: Eksenel elastik ortam parametresi
$K_{M,c}$	: Eksenel ortamın klasik rijitlik matrisi
$K_{M,nl}$	: Eksenel ortamın yerel olmayan rijitlik matrisi
K_P	: Pasternak elastik zemin parametresi
$K_{P,c}$	: Pasternak zemini klasik rijitlik matrisi
$K_{P,nl}$	: Pasternak zemini yerel olmayan rijitlik matrisi
K_T	: Burulmaya karşı elastik ortam parametresi
$K_{T,c}$	: Burulmaya karşı elastik ortamın klasik rijitlik matrisi
$K_{T,nl}$	: Burulmaya karşı elastik ortamın yerel olmayan rijitlik matrisi
K_W	: Winkler elastik zemin parametresi
$K_{W,c}$	: Winkler zemini klasik rijitlik matrisi
$K_{W,nl}$	: Winkler zemini yerel olmayan rijitlik matrisi

K_0	: Modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu
l_e	: Sonlu eleman uzunluğu
L	: Karakteristik dış uzunluk (Yapının uzunluğu)
$[m_{ij}]$	: Genel kütle matrisi
m	: Burulma dış zoru
m_a	: Eklenti kütlesi
$\mathbf{m}_c$	: Klasik dış burulma momenti zoru vektörü
$\mathbf{m}_{nl}$	: Yerel olmayan dış burulma momenti zoru vektörü
M	: Eğilme momenti
M_c	: Klasik kütle matrisi
$M_{I,c}$	: Klasik kütle ataleti matrisi
$M_{I,nl}$	: Yerel olmayan kütle ataleti matrisi
M_{nl}	: Yerel olmayan kütle matrisi
n	: Sonlu eleman sayısı
N	: Eksenel iç tesir
N_t	: Sıcaklık yükü
N_T	: Boyutsuz ortam sıcaklığı parametresi
R	: Kalıntı
s_{ii}	: Klasik eksenel gerilme
t	: Zaman
t_{ij}	: Klasik kayma gerilmesi
T	: Harmonik hareket, Kinetik enerji, Sıcaklık, Transformasyon matrisi
T_c	: Sıcaklık değişiminden kaynaklı negatif klasik rijitlik matrisi

T_{nl}	: Sıcaklık değişiminden kaynaklı negatif yerel olmayan rijitlik matrisi
u, w, θ	: Genel hareket
u, v, w	: Hareket bileşenleri
u^e, w^e, θ^e	: Sonlu elemanın toplam hareketi
U	: İç şekil değiştirme enerjisi
U, W, φ	: Mod denklemi
V	: Kesme kuvveti
$V(\mathbf{x}')$	: Hacim
W	: Dış kuvvetlerin iş potansiyeli
W_n, ϕ_n	: Bilinmeyen Fourier katsayıları
x, y, z	: Eksen koordinat bileşenleri
$ \mathbf{x} - \mathbf{x}' $	: Öklidyen formda uzaklık
$\{x_i\}$	: Genlik vektörü
$\{X_i\}$	: Statik genlik
∇^2	: İkinci dereceden diferansiyel operatörü
α	: Boyutsuz yerel olmayan parametre
α_L	: Termal genleşme katsayısı
β_I	: Atalet oranı
β_k	: Rijitlik oranı
β_m	: Kütle oranı
∂	: Kısmi diferansiyel operatörü
γ_{ij}	: Kayma şekil değiştirmesi
δ	: Varyasyon sembolü, Dirac- δ fonksiyonu

δ_{ij}	: Kronecker Delta Sembolü
ε_{ij}	: Şekil değiştirme tansörü
θ	: Yönelim açısı
λ, μ	: Lamé sabitleri
ξ	: Boyutsuz koordinat
ρ	: Birim hacim ağırlığı
σ_{ij}	: Klasik gerilme tansörü
τ_{ij}	: Yerel olmayan kayma gerilmesi
ν	: Poisson oranı
ϕ	: Şekil fonksiyonu
ϕ, φ	: Faz açısı
χ	: Eğrilik
$\bar{\chi}$	: Yerel olmayan eğrilik
ω_i	: Doğal frekans
ϖ	: Boyutsuz frekans parametresi

Kısaltmalar

ABD	: Amerika Birleşik Devletleri
AFM	: Atomik Kuvvet Mikroskobu
BNNT	: Bor Nitrür Nanotüp
CNT	: Karbon Nanotüp
CNT–FET	: Karbon nanotüp tabanlı alan etkili transistör
DNA	: Deoksiribonükleoik Asit
EBBT	: Euler–Bernoulli Kiriş Teorisi

FEM	: Sonlu Elemanlar Yöntemi (Formülasyonu)
GYTE	: Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
IBM	: Uluslararası İş Makineleri
İTÜ	: İstanbul Teknik Üniversitesi
LBRT	: Love–Bishop Çubuk Teorisi
MDS	: Moleküler Dinamik Simülasyonu
MEMS	: Mikro Elektro Mekanik Sistemler
MFm	: Manyetik Kuvvet Mikroskobu
MT	: Mikrotüpçük
MWCNT	: Çok Duvarlı Karbon Nanotüpler
nm	: Nanometre
NEMS	: Nano Elektro Mekanik Sistemler
NL–FEM	: Yerel Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu
NSA	: Kendine–Eş Olmayan Model
NVRAM	: Kalıcı Rastgele Erişim Belleği
ODTÜ	: Orta Doğu Teknik Üniversitesi
SA	: Kendine–Eş Model
SiCNT	: Silika Karbit Nanotüp
SPM	: Taramalı Uç Mikroskobu
SRT	: Basit Çubuk Teorisi
STM	: Taramalı Tünelleme Mikroskobu
SWCNT	: Tek Duvarlı Karbon Nanotüpler
TBT	: Timoshenko Kiriş Teorisi
TPa	: Terapascal
GPa	: Gigapascal
TÜBİTAK	: Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırmalar Kurumu

ZnONW : Çinko oksit nanotel

Bu tez çalışmasında sayıların ondalık kısmını ayırmak için nokta işareti (.) kullanılmıştır.



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Fullerene (Buckyball) molekülü (Anonymous 1).....	5
Şekil 2.2. Ksenon atomları ile yazılmış “IBM” yazısı (Anonymous 2).....	5
Şekil 2.3. Aks ve dingil sistemi ile nanoaraba modeli (Anonymous 3).....	6
Şekil 2.4. Dünya genelinde nanoteknoloji yatırımları (Roco 2007)	7
Şekil 2.5. Grafen örtü.....	10
Şekil 2.6. Grafen örtünün sarılması (Numanoğlu 2017).....	12
Şekil 2.7. Karbon nanotüplerin sarılma açısına göre farklı konfigürasyonları a) Bükük b) Zikzak c) Koltuk	12
Şekil 2.8. Duvar sayısına göre karbon nanotüp yapıları a) Tek duvarlı karbon nanotüpler b) Çok duvarlı karbon nanotüpler	13
Şekil 2.9. Bor nitrür nanotüp yapısının genel konfigürasyonu	14
Şekil 2.10. Silika karbit nanotüplerin farklı atomik konfigürasyonları a) Tip-I, zikzak b) Tip-I, koltuk c) Tip-II, zikzak d) Tip-II, koltuk	15
Şekil 2.11. Mikrotüpçük yapısının en basit gösterimi	16
Şekil 2.12. Atomik kuvvet mikroskopunun genel şeması	16
Şekil 2.13. Karbon nanotüp alan etkili transistör sistemleri a) Silikon maddelerine oturan karbon nanotüp b) Oksit substrata gömülü karbon nanotüp	17
Şekil 2.14. Organik/anorganik ışık soğurmalı diyot sistemi.....	18
Şekil 2.15. Nano ölçekli mekanik sistemlerde diğer yaygın elektrik alan uygulama a) Kompozit konsol nanotel b) Germanyum nanokiriş	18
Şekil 2.16. Nanotel oluşumu.....	19
Şekil 2.17. Sandviçlenmiş piezoelektrik rezonant nanoplak	19
Şekil 2.18. V-Şekilli kiriş elektrotermal aktivatör	20
Şekil 2.19. Basit kütle-yay modeli a) Denge halindeki sistem b) Denge halinden uzaklaştırılan sistem c) Uzaklaşmanın etkisiyle tekrarlı hareket yapan sistem	22
Şekil 2.20. Tekrarlı (periyodik) hareket grafiği	22
Şekil 2.21. Tek serbestlik dereceli sistem örnekleri a) Basit kütle-yay-sönüm mode b) Basit kayma çerçevesi c) Kütle-yay-makara sistemi d) Rijit kalas-disk sistemi e) Su tankı modeli	24

Şekil 2.22. Çok serbestlik dereceli sistem örnekleri a) İki katlı çerçeve b) Topaklı kütleli kiriş c) Çoklu kütle-yay sistemi d) Kat döşemesi modeli.....	25
Şekil 2.23. Diğer ayırık sistem örnekleri a) Çok açıklıklı düzlem portal çerçeve b) Düzlem kafes c) Karma sistem.....	26
Şekil 2.24. Sürekli sistem örnekleri a) Her iki ucu basit mesnetli kiriş b) Her iki ucu tam tutulu eksenel çubuk c) Burulma çubuğu d) Kare plak e) Eğrisel kabuk	27
Şekil 2.25. Konsol kirişin statik üniform yayılı yük altında sürekli yer değiştirmesi	28
Şekil 2.26. Konsol kirişin serbest titreşiminde farklı mod şekilleri a) Temel mod şekli b) İkinci mod şekli c) Üçüncü mod şekli d) Dördüncü mod şekli	28
Şekil 2.27. a) Yay ve sönüm etkisinde dış uyarıya maruz kütle b) Serbest cisim diyagramı.....	29
Şekil 2.28. a) Çok serbestlikli sistem modeli b) Sistemdeki ayırık kütlelerin serbest cisim diyagramı.....	30
Şekil 2.29. a) Enine dış zorlamasına maruz eğilme çubuğu b) Çubuktan çıkarılmış dx uzunluğundaki diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı.....	33
Şekil 2.30. a) Tüm kenarlarından basınçlanmış dairesel delikli plak b) Sonlu elemanlar modeli (az hassas) c) İyileştirilmiş sonlu eleman modeli (daha hassas)	37
Şekil 2.31. a) Betonarme taşıyıcı sistem (Fiziksel sistem) b) Sonlu elemanlar model ..	39
Şekil 2.32. Çeşitli sürekli ve ayırık yapıların sonlu eleman modeli a) Eksenel çubuk b) Burulma çubuğu c) Eğilme çubuğu (Kiriş) d) Kafes e) Çerçeve	40
Şekil 3.1. İki düğümlü lineer eksenel sonlu eleman	51
Şekil 3.2. Üç düğümlü lineer eksenel sonlu eleman	53
Şekil 3.3. İki düğümlü lineer eğilme sonlu elemanı	54
Şekil 3.4. a) Elastik ortama gömülü eksenel çubuk b) Serbest cisim diyagramı.....	63
Şekil 3.5. a) Çift parametrelili elastik zemine oturan ve termal etkiler altındaki kiriş elemanı b) Serbest cisim diyagramı.....	101
Şekil 3.6. Eksenel üyenin genel (xy) ve bölgesel $(x'y')$ koordinat takımında uç hareket ve kuvvet serbestlikleri.....	139
Şekil 3.7. Eğilme üyesinin genel (xy) ve bölgesel $(x'y')$ koordinat takımında uç hareket ve kuvvet serbestlikleri.....	143
Şekil 3.8. Analiz edilecek olan kafes sistemler ve sonlu eleman modelleri a) Üç üyeli kafes (Kafes-a) b) Üç üyeli kafes (Kafes-b) c) Köprü tipi kafes (Kafes-c) d) Kule tipi kafes (Kafes-d).....	147

Şekil 3.9. Analiz edilecek olan çerçeve sistemler ve sonlu eleman modelleri a) Tek katlı ve tek açıklıklı çerçeve (Çerçeve-a) b) V-şekilli çerçeve (Çerçeve-b) c) Bir üyesi ankastre mesnetli ve diğer üyesi değişken mesnetli iki üyeli çerçeve (Çerçeve-c) d) Bir üyesi basit mesnetli ve diğer üyesi değişken mesnetli iki üyeli çerçeve (Çerçeve-d).....	148
Şekil 4.1. Nano çubukların yerel olmayan boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) C-F b) C-C.....	171
Şekil 4.2. Nano çubukların farklı yerel olmayan ifade değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının eksenel çubuk uzunluğuna göre değişimi a) C-F b) C-C.....	172
Şekil 4.3. Nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz elastik ortam parametresine göre değişimi a) C-F b) C-C.....	173
Şekil 4.4. Eklentili nano çubukların temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının eklenti oranına göre değişimi a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0.4$	174
Şekil 4.5. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının eklenti oranına göre değişimi a) C-M b) F-M c) C-S d) F-S e) C-SM f) F-SM g) S-M.....	176
Şekil 4.6. Nano çubukların farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının boyut suz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam parametresi değerlerine göre değişimi a) C-F b) C-C.....	178
Şekil 4.7. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısı ve eklenti oranı değerlerine göre değişimi a) C-M b) F-M c) C-S d) F-S.....	180
Şekil 4.8. Eklentili nano çubukların farklı mod sayıları için boyutsuz frekansları nın boyutsuz atomik parametre ve eklenti oranı değerlerine göre değişimi a) C-M b) F-M c) C-S d) F-S	181
Şekil 4.9. Nano çubukların farklı çap/uzunluk oranları için boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) C-F, $\alpha = 0$ b) C-F, $\alpha = 0.4$ c) C-C, $\alpha = 0$ b) C-C, $\alpha = 0.4$	182
Şekil 4.10. Nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için $n = 10$ sonlu elemanla elde edilen boyutsuz frekanslarının analitik yöntemle elde edilen frekanslara göre sapmasının mod sayısına göre değişimi a) C-F b) C-C.....	183
Şekil 4.11. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının boyutsuz elastik ortam parametresi ve eklenti oranı değerlerine göre değişimi a) C-S b) F-S.....	184
Şekil 4.12. Nano kirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0.2$	197

Şekil 4.13. Nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) S–S b) C–C	198
Şekil 4.14. Nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Winkler zemin parametresine göre değişimi a) S–S b) C–F c) C–S d) C–C	199
Şekil 4.15. Nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Pasternak zemin parametresi ne göre değişimi a) S–S c) C–C	200
Şekil 4.16. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz Winkler zemin parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Pasternak zemin parametresine göre değişimi a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0.4$	201
Şekil 4.17. Nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının çap/uzunluk oranına göre değişimi a) S–S c) C–C	203
Şekil 4.18. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının ortam sıcaklığına göre değişimi.....	204
Şekil 4.19. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz Pasternak zemin parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametreye göre değişimi	204
Şekil 4.20. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz sıcaklık parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametreye göre değişimi	205
Şekil 4.21. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz sıcaklık parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Pasternak zemin parametresine göre değişimi a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0.4$	206
Şekil 4.22. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının boyutsuz elastik zemin parametrelerine göre değişimi a) 1. Mod b) 2. Mod c) 3. Mod d) 4. Mod	207
Şekil 4.23. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı mod sayıları için Euler–Bernoulli ve Timoshenko teorileri ile hesaplanmış boyutsuz frekanslarının oranının çap/uzunluk ve boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre değişimi	208
Şekil 4.24. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının ortam sıcaklığı ve boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre değişimi	209
Şekil 4.25. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametre ve boyutsuz Pasternak zemin parametresi değerlerine göre değişimi	209

Şekil 4.26. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan Parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının ortam sıcaklığı ve boyutsuz Winkler zemin parametresi değerlerine göre değişimi	210
Şekil 4.27. Uç eklentili nano kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranına göre değişimi a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0.4$	211
Şekil 4.28. Uç eklentili nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranına göre değişimi a) C–MA b) C–SA.....	212
Şekil 4.29. Uç eklentili nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısı ve eklenti oranına göre değişimi a) C–MA b) C–SA.....	213
Şekil 4.30. Bir ucu ankastre ve diğer ucu kesme yayı eklentili nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının eklen ti oranı ve boyutsuz Winkler zemin parametresi değerlerine göre değişimi.....	214
Şekil 4.31. Farklı tipteki nano kafeslerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) Kafes–c b) Kafes–d ($\theta = 45^\circ$)	218
Şekil 4.32. Farklı tipteki nano kafeslerin farklı atomik uzunluk değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının kafes uzunluk parametresine göre değişimi a) Kafes–a b) Kafes–b c) Kafes–c d) Kafes–d ($\theta = 45^\circ$)	219
Şekil 4.33. Farklı tipteki nano kafeslerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının kafes yönelim açısına göre değişimi a) Kafes–a b) Kafes–b c) Kafes–c d) Kafes–d	220
Şekil 4.34. Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) Çerçeve–a b) Çerçeve–b c) Çerçeve–c2 d) Çerçeve–d3 ($\theta = 45^\circ$)	226
Şekil 4.35. Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı atomik uzunluk değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının çerçeve uzunluk parametresine göre değişimi a) Çerçeve–a b) Çerçeve–b c) Çerçeve–c2 d) Çerçeve–d3 ($\theta = 45^\circ$).....	227
Şekil 4.36. Farklı tipteki nano çerçevelerin temel mod boyutsuz frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametreye göre değişimi a) Çerçeve–c b) Çerçeve–d ($\theta = 45^\circ$).....	228
Şekil 4.37. Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının yönelim açısına göre değişimi a) Çerçeve–b c) Çerçeve–c d) Çerçeve–d	229

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Nanoteknolojik üretim yöntemlerinin karşılaştırılması (Gürses 2015)	4
Çizelge 3.1. Eksenel serbest titreşim analizi yapılacak olan nano çubuk modelleri.....	70
Çizelge 3.2. Serbest burulma titreşimi analizi yapılacak olan nanoçubuk modelleri	88
Çizelge 3.3. Eğilme ve eksenel çubuk kuramları arasındaki analogiler	99
Çizelge 3.4. Serbest eğilme titreşimi analizi yapılacak olan nanoçubuk (kiriş) modelleri	109
Çizelge 4.1. Çeşitli sınır şartlardaki nano çubukların klasik eksenel titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)	151
Çizelge 4.2. Çeşitli sınır şartlardaki nano çubukların yerel olmayan eksenel titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)	151
Çizelge 4.3. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları	153
Çizelge 4.4. Elastik ortama gömülü her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları	153
Çizelge 4.5. Bir ucu tutulu ve diğer ucu kütle eklentili nano çubukların klasik eksenel titreşimi için farklı kütle oranı değerleri altında ilk beş mod boyutsuz frekanslarının ilgili referans ve bu tez çalışması için karşılaştırılması	154
Çizelge 4.6. Çeşitli uç eklentili sınır koşullara sahip nano çubukların klasik eksenel titreşimi için farklı kütle/rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları.....	154
Çizelge 4.7. Uç eklentili sınır koşullara sahip nano çubukların yerel olmayan eksenel titreşimi için farklı kütle/rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\alpha = 0.25$).....	155
Çizelge 4.8. İki farklı sınır şartlı nano çubukların eksenel titreşimi için farklı çap/uzunluk değerleri altında ilk üç mod boyutsuz titreşim frekansları	156
Çizelge 4.9. Bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı yerel olmayan boyutsuz parametre değerleri altında ilk dört mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	157
Çizelge 4.10. Her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı yerel olmayan boyutsuz parametre değerleri altında ilk dört mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	158

Çizelge 4.11. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (SRT)	159
Çizelge 4.12. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (LBRT)	160
Çizelge 4.13. Elastik ortama gömülü her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (SRT)	161
Çizelge 4.14. Elastik ortama gömülü her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (LBRT).....	162
Çizelge 4.15. Uç eklentili nano çubukların eksenel titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekansların karşılaştırılması ($\beta_m = \beta_k = 10$, SRT).....	163
Çizelge 4.16. Uç eklentili nano çubukların eksenel titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 10$, LBRT)	164
Çizelge 4.17. Elastik ortama gömülü eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve eklenti oranı parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları ($K_M = 50$).....	165
Çizelge 4.18. Elastik ortama gömülü eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve eklenti oranı parametreleri altında ikinci mod boyutsuz frekansları ($K_M = 50$).....	166
Çizelge 4.19. Elastik ortama gömülü eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve eklenti oranı parametreleri altında üçüncü mod boyutsuz frekansları ($K_M = 50$).....	167
Çizelge 4.20. Çeşitli sınır şartlardaki nanoçubukların burulma titreşimi için ilk beş mod klasik boyutsuz frekans parametreleri ($\beta_I = \beta_k = 5$).....	168
Çizelge 4.21. Çeşitli sınır şartlardaki nano çubukların burulma titreşimi için ilk beş mod yerel olmayan boyutsuz frekansları ($\beta_I = \beta_k = 5$).....	169
Çizelge 4.22. İki farklı sınır koşula sahip nano çubukların burulma titreşimi için farklı yerel olmayan boyutsuz parametre değerleri altında ilk iki mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	169
Çizelge 4.23. Elastik ortama gömülü iki farklı nano çubuğun farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz burulma frekansları	170

Çizelge 4.24. Uç eklentisiz sınır şartlardaki nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları	185
Çizelge 4.25. Uç eklentili sınır şartlardaki nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$).....	185
Çizelge 4.26. Uç eklentisiz sınır şartlardaki nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları	186
Çizelge 4.27. Uç eklentili sınır şartlardaki nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)	187
Çizelge 4.28. Çift parametrelili elastik zemine oturan sıcaklık etkisi altındaki her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin enine titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite, elastik zemin rijitliği ve sıcaklık parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları.....	188
Çizelge 4.29. Uç eklentili sınır koşullara sahip nano kirişlerin klasik eksenel titreşimi için farklı kütle ve rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ...	189
Çizelge 4.30. Uç eklentili sınır koşullara sahip nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için farklı kütle ve rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\bar{l} = 0.25$).....	188
Çizelge 4.31. Çeşitli sınır koşullara sahip nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması	191
Çizelge 4.32. Uç eklentisine sahip nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması ($\beta_m = \beta_k = 10$)	191
Çizelge 4.33. Çeşitli sınır koşullara sahip nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için farklı ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması ($\alpha = 0.25$).....	192
Çizelge 4.34. Uç eklentisine sahip nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için farklı ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması ($\alpha = 0.25, \beta_m = \beta_k = 10$).....	192
Çizelge 4.35. Her iki ucu basit mesnetli kirişlerin enine titreşimi için farklı yerel olmayan ifade değerleri altında temel mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması..	193
Çizelge 4.36. Çift parametrelili elastik zemine oturan her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin enine titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve elastik zemin rijitliği altında ilk beş mod boyutsuz frekanslarının referans çalışma ile karşılaştırılması	193

Çizelge 4.37. Çift parametrelili elastik zemine oturan her iki ucu ankastre mesnetli nano kirişlerin enine titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve elastik zemin rijitliği altında ilk beş mod boyutsuz frekanslarının referans çalışma ile karşılaştırılması	194
Çizelge 4.38. Çift parametrelili elastik zemine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki çeşitli sınır koşullara sahip nano kirişlerin enine titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekansları ($K_W = 100$, $K_P = 10$, $N_T = 2.5$, $\beta_m = \beta_k = 10$, $n = 100$ el.).....	195
Çizelge 4.39. Yerel olmayan titreşim analizi sonuçlarının klasik titreşimle çelişkili olduğu sınır şartlar için ilk beş mod boyutsuz frekanslarının kendine-eş yerel olmayan model ve yerel olmayan sonlu elemanlar ile karşılaştırılması	196
Çizelge 4.40. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\theta = 45^\circ$)	215
Çizelge 4.41. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-a).....	215
Çizelge 4.42. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-b).....	216
Çizelge 4.43. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-c).....	216
Çizelge 4.44. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-d).....	217
Çizelge 4.45. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları	221
Çizelge 4.46. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve-c, $\theta = 45^\circ$).....	222
Çizelge 4.47. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve-d, $\theta = 45^\circ$)	223
Çizelge 4.48. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve-b)	224
Çizelge 4.49. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve-c2)	224
Çizelge 4.50. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve-d3)	225

1. GİRİŞ

İnsanlar varoluşunun başlangıcından bu yana, varlığını en uygun biçimde sürdürebilmek için yararlı bilgiyi elde etmeye ve bunu işlemeye ihtiyaç duymuştur. Kazanılan bilginin çeşitli sistemler ve metotlar vasıtasıyla birikimi, denetimi ve işlenmesi neticesinde yararlı çıktıyı elde etme süreçlerini “teknoloji” olarak adlandırabiliriz. Bulunmakta olduğumuz çağ teknoloji çağı olarak nitelendirilir çünkü teknoloji insanlığın günümüz yaşantısının her noktasında etkisini gösterir. Hayatımıza giren ürünler gün geçtikçe daha güçlü fiziksel, mekanik, elektrik ve termal özelliklere, daha küçük boyutlara ve daha düşük ağırlıklara sahiptir. Çünkü kullanmış olduğumuz bir ürünün sırf yeni diye piyasaya sürülmüş olması değil, az evvel sayılmış özelliklerin muadili tarafınca kazanılmış olması, özellikle insanların ihtiyaçlarının görülmesi hususunda büyük bir öneme sahiptir. Bu gücün arkasında günümüz teknolojisinin hızlı ilerleyişi vardır. Tabi bu noktada, “Ne oluyor, nasıl oluyor da teknoloji gelişiyor?” şeklinde bir soru araştıranların kafasında belirmektedir. Sorunun cevabı oldukça basittir: Küçük ölçekli malzeme teknolojisinin bize sağladığı büyük ölçekli avantajlar sayesinde teknolojinin ivmelendiği belirtilebilir. “Küçük ölçekli malzeme teknolojisi” kavramı mikro ve nano ölçekteki malzeme ve yapıların gözlem ve keşifleri hakkındaki çalışmaları kapsamaktadır. Bu tip malzemeler, yapılar ve sistemler, atom ve molekül boyutları düzeyinde ifade edilmektedir.

İnsanlık tarihi kadar eski olan fizik bilimi hakkında, “canlı veya cansız, doğada var olan maddelerin dış çevresiyle ilgili her türlü etkileşimini kendine has bir dille ifade eden teorik ve uygulamalı bir bilim dalı” gibi bir tanım yapılabilir. Burada bahsi geçen dil matematiksel analizdir. Fizik bilimini birçok alt alana ayırmak mümkündür. Bunlardan “Mekanik” disiplini, maddenin veya cismin, kuvvet adı verilen ayrı bir kavramla olan etkileşimini inceler. Mekanik biliminin günümüze değin geliştirilmiş sistematığı vasıtasıyla, çeşitli mühendislik yapılarının ve sistemlerinin, kuvvetin şekil değiştirici özelliğine atıfta bulunan tüm olaylarla arasındaki münasebet çözümlenebilir. Bu çözümlemeler inşaat, makine, bilgisayar, biyomedikal, otomotiv, mekatronik, malzeme bilimi–teknolojisi, uzay–havacılık gibi birçok bilimin temel uygulamalarının elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

Konumuz olan nano ve mikro ölçekli malzeme bilimi ve mühendisliğine dönecek olursak, az önce bahsetmiş olduğumuz tüm disiplinler öyle veya böyle, küçük ölçek teknolojisinin uygulamalarından bir şekilde etkilenmiştir. En basitinden, bilgi işleme teknolojisi alanında, eskiden çok büyük odalar kadar yer kaplayan bilgisayar işlemcileri günümüzde mikro boyutlara indirgenmiştir. Eskiden veriler büyük bilgisayarlarda depolanmak mecburiyetinde iken günümüzde flash bellekler (USB) ile taşınabilmektedir. Bu tip cihazların yapısında atomik boyutlardaki bileşenler görev görmektedir. Tıp alanından bir örnek, elektrokimyasal nanobiyosensörler hastalık teşhisi ve genetik araştırmalarda kullanılır. Anlaşılacağı üzere günümüz teknolojisi giderek küçülen boyutlardaki yapı ve sistemlerle çalışmaktadır.

Tabi küçük ölçek teknolojisi ile birleştirilmiş bu klasik bilim dallarının ortaya koyacağı yeni uygulamaların mümkün olduğunca doğru ve kusursuz bir şekilde elde edilmesi, önceden açıklandığı gibi dış ortamla olan şekil değiştirme esaslı ilişkilerinin doğru şekilde analiz edilmesine bağlıdır. Bu tip yapıların şekil değiştirme analizlerine dair deneyler atomik yapının iç karakteristik boyutlarının dış ortam zorları ile bir

etkileşiminin var olduğunu ortaya koymaktadır. Deneyler noktasında karşımıza çıkan Moleküler Dinamik Simülasyonu gibi yapıdaki atomların hareketlerini belirli bir zaman aralığında fiziksel denklemlerle simüle eden yaklaşımların oldukça yüksek uzmanlık ve pahalı süreçler gerektirmesi bakımından verimli olmadığı söylenebilir. Bu yüzden atomik boyuttaki yapıların mekanik analizleri için değiştirilmiş elastisite yaklaşımları, araştırmaların temel motivasyonunu teşkil etmiştir. Nano ve mikro ölçekli yapıların çeşitli mekanik modelleri kurularak boyut etkili elastisite formülasyonlarına dayanan mekanik analizleri son 15 yıllık süreçte yoğun bir şekilde çalışılmıştır.

Katı cisimler mekaniğindeki problemlerin çözümü çoğunlukla analitik yöntemler kullanılarak gerçekleştirilir. Ancak çok daha farklı etkileri bir arada gözeten problemlerde, her ne kadar analitik yöntemler kullanılsa bile sayısal bir netice elde etmek oldukça zor olmaktadır. Bu duruma örnek verecek olursak, ikinci mertebeden homojen kısmi bir diferansiyel denklem teşkil eden basit (kaymasız) eksenel çubuğun serbest titreşim denklemi analitik yöntemler kullanılarak el ile çözülebilmektedir. Elde edilen çözüm genel bilinen sınır koşullara uygulandıktan sonra doğal frekans denkleminin çözümü elde edilebilir. Böylece mekanik ve geometrik özellikleri bilinen bir eksenel çubuğun serbest titreşim frekansları hesaplanabilir. Ancak, bu probleme uç eklentisi, elastik rijit ortam ve boyut ölçek parametresi gibi çok daha farklı etkiler dâhil olursa, yine değişkenlere ayırma metodunun kullanımı ile elde edilen frekans denklemi, bu sefer el ile çözülemeyen bir yapıda oluşur. Bu ve buna benzer sorunları ortadan kaldırabilmek adına çeşitli sayısal yöntemler kullanılır. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacimler, başlangıç değeri, sınır değeri, diferansiyel kuadratur, diferansiyel transformasyon, Ritz gibi yöntemler bu noktada örneklenebilir. Sayısal yöntemlerin en karakteristik özelliği, kesin sonuçlara yaklaşık neticeler vermesidir. Tabi bu yakınsaklıktan doğan sapma belli prosedürler altında mümkün mertebe indirgenebilir. En temelde, “yaklaşık çözüm, hiç çözüm elde edilememesinden çok daha iyidir” fikri yer alır çünkü mühendisliğin en önemli işlevi, eldeki sayısal verilerin yorumlanması ile sonuca gidilmesidir.

Bir önceki paragrafta sayılan bu yöntemler içerisinde sonlu elemanlar yöntemi oldukça güçlü bir işlem aracıdır. 1940’lı yıllarda temeli atılan ve 1950’li yıllarda esaslarıyla ortaya çıkan bu yöntem birçok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında nano ölçekli yapıların kiriş ve çubuk gibi sürekli ve kafes ve çerçeve gibi ayrık mekanik modelleri kullanılarak yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşimi incelenmiştir. Yerel olmayan titreşim probleminin frekans eldesi bazı parametreler altında analitik çözüm ile elde edilebilirken bazı etkiler altında elde edilemez. Çözümü elde edilemeyen bazı denklemlerin bilgisayar ortamında direkt programlanması ile sayısal sonuç alınabilir. Ne yazık ki bu olumlu durum da probleme ilave edilen yeni parametreler altında varlık gösteremez. Ancak, algoritması bilgisayar ortamında doğru biçimde programlanabilen bir sonlu elemanlar formülasyonu ile bu sorun ortadan kalkar. İşte bu tez çalışması başta atomik parametre olmak üzere farklı etkileri bir arada gözetken nano ölçekli mekanik sistemlerin serbest titreşim problemlerinde sonlu elemanlar yönteminin kullanılabilirliğini ortaya koyacaktır. Dahası, literatürde yerel olmayan elastisite ve sonlu elemanlar çerçevesinde henüz çalışılmadığı tespit edilen bazı problemler de ele alınarak kapsam zengin tutulmuştur.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Nanoteknoloji Bilimi ve Nanoyapılar

2.1.1. Nanoteknolojiye giriş

Nano kelimesi Yunancadan dilimize “cüce” olarak tercüme edilir. Dünyada genel kabul gören uzunluk ölçüsü birimi olan metrenin (m) milyara taksim edilmesi “nanometre” (nm) ifadesini tanımlar. Boyutları 1 ila 100 nm arasında olan yapıların gözlemlenmesi, özelliklerinin keşfi ve denetimi ile ilgili her türlü çalışmayı bünyesinde toplayan disiplin nanoteknolojiyi ifade eder. Bu bilimin çalışma düzeyini zihinde betimleyebilmek adına başlangıçta şu tipik örnekler verilebilir: 10 adet yan yana dizilmiş hidrojen atomu uzunluğu 1 nm (Erkoç 2007), deoksiribonükleik asit (DNA) molekülü çapı 2.5 nm, saç teli kalınlığı 10^5 nm, karınca başı genişliği 10^6 nm boyutlarındadır (Tepe 2007). Makro anlamda verilebilecek bir örnek, futbol topunun çapı 30 cm = 3×10^8 nm boyutundadır (Bruus 2004).

Nanoteknoloji biliminin genel felsefesinin, mühendislik, fenni ve tıbbi bilimler kullanılarak günümüz teknolojisine göre üretilen bir malzemenin öncekilerine göre daha dayanıklı, daha dayanımlı, daha hafif ve daha az yer kaplayan, daha güçlü elektriksel ve ısısal özelliklere sahip malzemelere dönüştürülmesi olduğu vurgulanabilir. Günümüzde insanoğlunun kendi kullanımına aldığı cihazların ve maddelerin, işlerinin daha hızlı ve kolay görülebilmesi adına ve öncekine göre daha işlevsel ve ufak boyutlu olduğu bir gerçektir. Araştırmacıların nanoteknolojik çalışmalar üzerinde yoğunlaşmalarında iki adet husus temel etkindir (Numanoğlu 2017):

- Atomik yapının istenildiği gibi düzenlenebiliyor olması,
- Atomik yapıya inildiğinde malzemenin çok daha farklı özelliklerinin ortaya çıkıyor olması.

Nanoyapıya yeni bir atom katılması durumunda yapının fiziksel ve kimyasal özellikleri, atomun cinsine, yapının özellikleri ve geometrisine bağlı olarak değişiklik gösterir (Çıracı 2005, 2006). Öte yandan nanoteknolojik çalışmaların klasik fizik kuralları vasıtasıyla yürütülemediği deneysel çalışmalarla kanıtlanmıştır. Nanoteknoloji bilimi tıptan havacılığa, askeriyeden kozmetiğe, otomotivden kimyaya, inşaatın biyoteknolojiye kadar birçok sektörün çeşitli uygulamalarında etkiye bulunmuştur. DNA modifikasyonu, nanobiyoreseptörler, kanserli hücrelerle savaşan nanorobotlar, nanoişlemciler, genetik bilgi teşhisi, taramalı uç mikroskopu, kendini temizleyen yüzey kaplamaları, nanogeneratörler, nanotransistörler, nanokompozitler, nano-işlenmiş betonlar bu bağlamda verilebilecek örneklerden sadece birkaçıdır.

Nano ölçekte üretim aşağıdan yukarıya (bottom-up) ve yukarıdan aşağıya (top-down) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Aşağıdan yukarıya yaklaşımı nano ölçekli yapıların ve sistemlerin temel birim olan atomlar ve moleküllerin bir araya getirilmesi ile inşa edilmesi yöntemini ifade eder. Ayrıca bu yöntem moleküler nanoteknoloji olarak da bilinir. Diğer yandan yukarıdan aşağıya yaklaşımı makineler, teçhizatlar ve kimyasallar vasıtasıyla nano ölçekli yapıların imalatını ele alır. Yani makro ölçekten nano ölçeğe geçiş söz konusudur. Genel olarak aşağıdan yukarıya yaklaşımı yüksek enerji öğütme, litografi, gaz yoğunlaştırma, ağır plastik deformasyonu gibi yöntemlere dayanırken

yukarıdan aşağıya yaklaşımı, kimyasal buhar biriktirme, fiziksel buhar biriktirme, plazma işleme, sol-jel işleme, yumuşak litografi ve kendiliğinden montaj gibi yöntemlere dayanır. Bu bilgilere ek olarak, günümüzdeki nano imalat teknolojisinin çıktıları göz önüne alındığı zaman bu çalışmaların büyük çoğunluğunun yukarıdan aşağıya yaklaşımına dahil olduğu çıkarımı yapılabilir. Her iki yaklaşım için genel bir karşılaştırma ilgili kaynaktan derlenerek sunulmuştur:

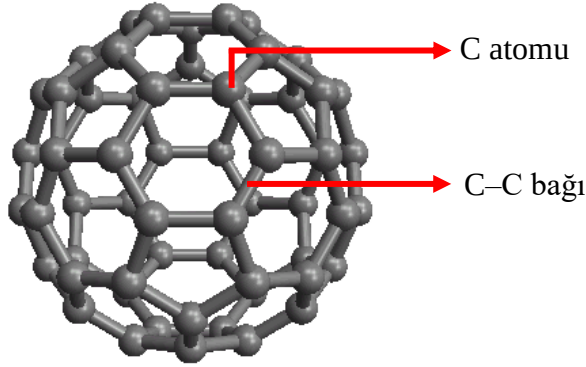
Çizelge 2.1. Nanoteknolojik üretim yöntemlerinin karşılaştırılması (Gürses 2015)

Kıstas	Aşağıdan yukarıya yaklaşımı	Yukarıdan aşağıya yaklaşımı
Temel felsefesi	Birimden bütüne geçiş	Bütünden birime geçiş
Ekonomiklik	Ucuz	Pahalı
Üretim alanı	Kimyasal ve biyolojik	Fiziksel
Tipik örnek	Taramalı tünelleme mikroskopları, karbon nanotüpler ve fullerener	Bilgisayar çipleri, bellekler ve depolama verileri
Çevresel koşullar (Isı, sıcaklık, basınç, vs.)	Baskın değil	Baskın

2.1.2. Nanoteknolojinin gelişimi

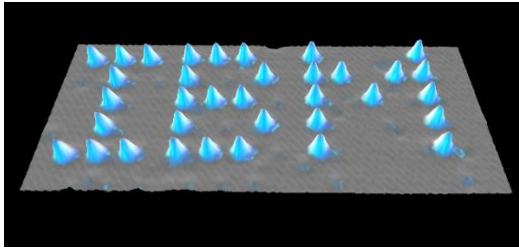
Nano bilimin tarihçesi aslında oldukça geniş bir konudur. Ancak bilimin gelişiminde önemli olduğu düşünülen çalışmalar aşağıda kronolojik sıra ile verilmiştir:

- 1959: Nobel Ödülü sahibi fizikçi Richard Feynman “There’s Plenty of Room at the Bottom” adlı ünlü konferansını gerçekleştirdi. Feynman konuşmasında moleküler düzeydeki malzemeler ve cihazların yapılabilmesi durumunda bunların yeni buluşların önünü açacağını söyledi. Böylece nanoteknolojinin temeli atılmış oldu.
- 1974: Tokyo Science Üniversitesinden Japon bilim adamı Norio Taniguchi yayınladığı bir makalede nanoteknolojinin tanımını yapmıştır: Nanoteknoloji, maddelerin bir atom ya da molekül tarafından ayrılması, birleştirilmesi ve bozulması yöntemi olarak tanımlanmıştır.
- 1981: Eric Drexler tarafından ilk nanoteknoloji makalesi yayımlandı.
- 1981: Gerd K. Binnig ve Heinrich Rohrer tarafından nanoteknolojik çalışmaların ciddi anlamda önünü açan bir hamleye imza atıldı. Bu bilim adamları taramalı tünelleme mikroskopunu icat etti ve bu buluş sayesinde atomik hareketlerin ve tepkimelerin izlenmesi mümkün hale geldi. Bu icat bilim adamlarına 1986 yılında Nobel Ödülü’nü kazandırdı.
- 1985: Robert F. Curl, Harold W. Kroto ve Richard E. Smalley onlara 1996’da Nobel Kimya Ödülü’nü kazandıran, karbon atomunun allotropu olan ve şekli futbol topuna benzediği için “buckyball” olarak isimlendirdikleri fullerene molekülünü elde ettiler. Fullerene 1 nm büyüklüğündedir, çelikten daha güçlüdür, plastikten daha hafiftir ve atomik konfigürasyonu Şekil 2.1’de betimlenmiştir.



Şekil 2.1. Fullerene (Buckyball) molekülü (Anonymous 1)

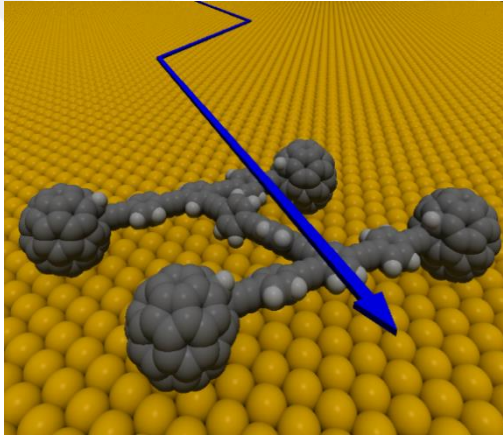
- 1986: Binnig, Quate ve Gerber tarafından Atomik Kuvvet Mikroskobu (AFM) icat edildi.
- 1986: Drexler moleküler nanoteknolojiyi açıklayan bir kitap yayınladı. Bu arada Drexler nanoteknoloji kelimesini ilk kullanan bilim adamıdır.
- 1986: Drexler tarafından dünyanın ilk nanoteknoloji organizasyonu olan Foresight Enstitüsü kuruldu.
- 1987: İletkenliğin kuantum özelliği keşfedildi.
- 1988: Drexler, ilk nanoteknoloji dersini açtı.
- 1989: IBM şirketi çalışanlarından Don Eigler, nikel yüzeye ksenon atomları vasıtasıyla “IBM” yazısını yazdı. Yazının yüksekliği milimetrenin (mm) 250 binde biri ve genişliği 333 binde biri kadardır. Bir saç telinin kalınlığı kadar bir alana bunun gibi 250 milyon tane yazılı plaka yerleştirilebiliyor olması bu yazının büyüklüğü hakkında fikir vermektedir. Bu yazıya ait resim Şekil 2.2’de görülmektedir.



Şekil 2.2. Ksenon atomları ile yazılmış “IBM” yazısı (Anonymous 2)

- 1991: Nanoteknoloji biliminin tarihçesinin belki de dönüm noktası yaşanmıştır. Japon bilim insanı Sumio Iijima çok duvarlı karbon nanotüp (MWCNT) yapısını keşfetmiştir. Karbon atomunun uzayda gösterdiği altıgensel dizilimlerin oluşturduğu çoklu silindirlere meydana gelen bu yapılar çeliğe göre kat be kat daha güçlü ve altıda bir oranda daha hafiftir.
- 1993: Iijima ve Bethune ark-buharlaştırma yöntemini kullanarak tek duvarlı karbon nanotüpleri (SWCNT) yapısını keşfetti.
- 1993: ABD’deki Rice üniversitesinde ilk nanoteknoloji laboratuvarı kuruldu.
- 1996: Yine Rice Üniversitesinde lazer-buharlaştırma tekniği keşfedildi.
- 1997: N. Seedman ilk defa DNA molekülünü kullanarak nano-mekanik bir aygıt

- yaptı. Aynı yıl nanotüp kullanılarak elektrik akımı ölçüldü.
- 1998: C. Dekker ve ekibi alan etkili karbon nanotüp transistörü (CNT–FET) yapısını icat ettiler. CNT–FET sisteminin genel şeması Şekil 2.3’te görülmektedir.
 - 1999: ABD hükümeti nanoteknoloji alanındaki Ar–Ge ve ticarileşme faaliyetlerini hızlandırabilmek adına ilk resmi hükümet programı olan Ulusal Nanoteknoloji Adımı’nı başlattı.
 - 2001: AB nanoteknoloji çalışmalarını çerçeve programının öncelikli alanı olarak belirledi. Çinkooksit nanotel (ZnONW) lazer keşfedildi. Yine bu yılda nanotüplerden transistör yapıldı.
 - 2005: Rice Üniversitesi’nden bazı araştırmacılar ilk defa dört tekerlekli nanoaraba modelini hareket ettirdiler. Bu araba 3×4 nm boyutlarında olup bir DNA satırı genişliğindedir. Bu arabalardan 20.000 tanesi yan yana dizildiğinde bir saç teli kalınlığı elde edilmiş olur. Ayrıca nanoarabanın atomları da bir araya getirilerek moleküler akslar ve dingiller inşa edilmiştir. Tekerler sürüklenerek değil döndürülerek hareket ettirilmiştir. Nanoaraba modeli Şekil 2.3’te görülmektedir.



Şekil 2.3. Aks ve dingil sistemi ile nanoaraba modeli (Anonymous 3)

2.1.3. Dünyada ve Türkiye’de nanoteknoloji yatırımları

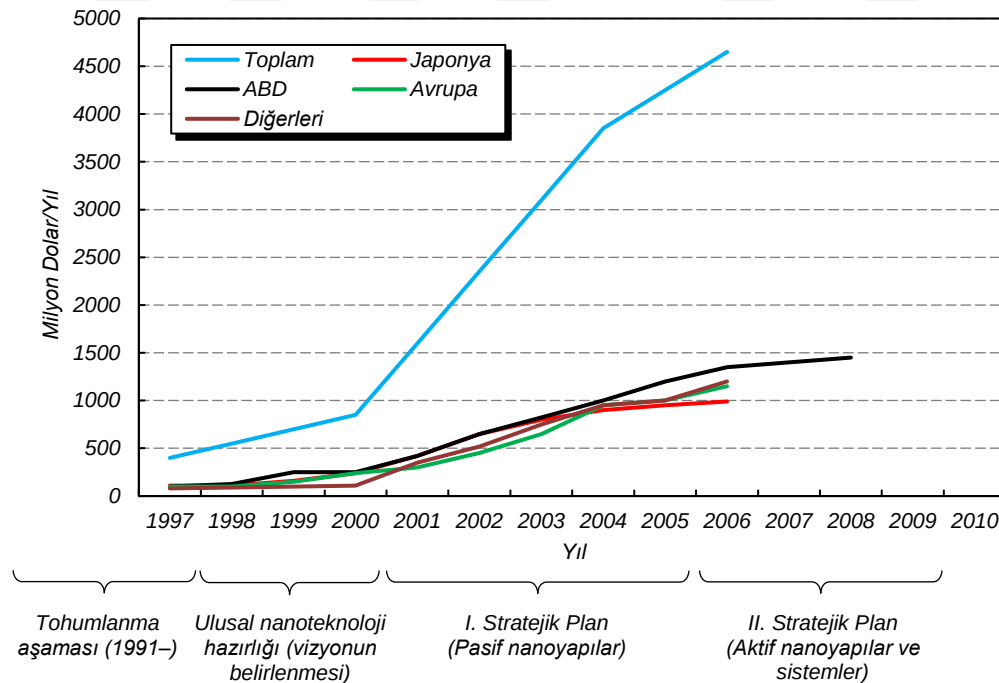
Bilimin öneminin kavranmasıyla beraber dünya genelinde birçok toplum nanoteknoloji konusunda öne çıkmak için çalışmalarına hız kazandırmıştır. İlk olarak Dünya genelinde nanoteknoloji harcamalarını özetleyelim. Buna göre ABD, 1999 yılında yayımlanmış olduğu ulusal nanoteknoloji bildirgesi ile nanoteknolojiyi öncelikli alan olarak belirlemiştir. ABD hükümetinin yapılan Ar–Ge çalışmalarına 2000 yılında 420 milyon dolar, 2001 yılında 520 milyon dolar ve 2003 yılında 700 milyon dolar ayırmıştır. 2005 yılında bu meblağ 3.7 milyar dolar tutarına ulaşmıştır. Çalışmalar, moleküler elektronik, kuantum bilgisayarlar, nanoparçalar, biyosensörler, atomik modelleme ve simülasyonlar, nanorobotlar gibi alanlarda yürütülmektedir. Çeşitli kamu kuruluşları da çalışmaları desteklemektedir (Anonim 1).

AB, 1994 ve 1998 arasında yürüttüğü 4. Çerçeve programı ile nanoteknolojiye yönelik araştırma yapan 80 firmayı desteklemiştir. 1998 ve 2002 yılları arasındaki 5. Çerçeve programında bu alana ayrılan fon 45 milyon Euro tutarındadır. Daha sonraki dört yılı kapsayan 6. Çerçeve programında nanoteknoloji yine öncelikli alan olarak yer almıştır ve 1.3 milyar Euro bütçe ayrılmıştır. AB’de genel olarak nanoelektronik

sistemler, karbon nanotüpler, biyosensörler, nanokompozitler ve yeni görüntüleme teknolojileri üzerine çalışmalar gerçekleştirilmiştir (Anonim 1). Ülke bazında verilebilecek bir örneğe göre, Almanya, nanoteknoloji konusunda Avrupa'nın öncü ülkelerinden birisidir. Yılda 144 milyon Euro hükümet ve 44 milyon Euro endüstri yatırımı yapılmaktadır. Nanoteknoloji araştırmalarının büyük çoğunluğu Federal Eğitim ve Araştırma Bakanlığı tarafından desteklenmektedir (Özer 2008).

Asya ülkelerini incelediğimizde Japonya'nın başı çektiği görülmektedir. Japonya, dünya genelinde ABD'den sonra en fazla Ar-Ge yatırımı yapan ülke konumundadır. Japonya'daki çalışmalarda genellikle NEC ve Sumitomo firmaları öne çıkmaktadır. Daha sonra gelen ülkelere Çin Halk Cumhuriyetinde çalışmalar Çin Bilimler Akademisi vasıtasıyla gerçekleştirilmektedir. Çin yarıiletken teknolojisi ve nanoelektronik cihazlar üzerinde çalışmaktadır. Öte yandan, Güney Kore'den Samsung firması çalışmalarını tamamen mikro elektromekanik sistemlerin (MEMS) üzerinde gerçekleştirmektedir. Ek olarak, Tayvan, Singapur, Tayland, Hindistan ve Vietnam gibi gelişmekte olan ülkelerin de nanoteknolojiyi öncelikli alan olarak belirlediği belirtilebilir (Anonim 1).

Şekil 2.4'te Dünya genelinde yapılan yatırımlara dair bir çizgi grafiği sunulmuştur. Bu grafik incelendiği zaman nanoteknolojiye yapılan genel harcamaların yıldan yıla arttığını görüyoruz. Tohumlanma ve planlanma evrelerinde yatırımlar genel olarak düşük de olsa, ileri evreler olan çeşitli stratejik planlar için bu yatırım meblağları ciddi bir yükseliş göstermiştir. Tabi bu noktada teknolojiye önemli gelişmelerin varlığı unutulmamalıdır. Öte yandan ABD'nin yapmış olduğu yatırımların diğer ülke ve topluluklara göre daha yüksek olması, çıkarabileceğimiz başka bir sonuçtur.



Şekil 2.4. Dünya genelinde nanoteknoloji yatırımları (Roco 2007)

Son olarak ülkemizdeki nanoteknoloji yatırımlarına değinelim. Devlet Planlama Teşkilatı tarafından 2005 yılında Bilkent Üniversitesi Malzeme Bilimi ve Nanoteknoloji Enstitüsüne 100 milyon TL tutarında bir meblağ ayrılmıştır. Bunun yanı sıra ODTÜ, İTÜ,

GYTE, Gazi, Anadolu, Ege, Koç, Sabancı gibi bazı üniversitelerin ve TÜBİTAK, ROKETSAN gibi bazı kurumların önemli nanoteknoloji çalışmaları mevcuttur (Özer 2008; Üreyen 2006). Öte yandan ülkemizde Arçelik, DYO, Yaşar Holding, Yeşim Tekstil, Zorlu Enerji, İstikbal gibi bazı firmalar nanoteknoloji üzerinden de ticari faaliyette bulunmaktadır (Bozkaya 2006). Bu altbaşlıkta yapılmış olan açıklamalar doğrultusunda nanoteknoloji biliminin ilerleyen çağımızın vazgeçilmezi olacağı kararlılıkla vurgulanmalıdır.

2.1.4. Nanoteknoloji ile çalışan sektörler

Daha önceden de bahsedildiği gibi nanoteknoloji, klasik disiplinlerin yaygın uygulamalarını ultra-küçük yapı malzeme teknolojisi ile birleştiren ve hala gelişimini sürdüren bir disiplindir. Bu disiplinin uygulama alanlarını sınırlamak tabii ki doğru değildir ancak en azından konu hakkında bilgi verebilmek adına birkaç örnek aşağıda sunulmuştur (Erkoç 2007; Anonim 2; Anonim 3; Anonim 4)

Malzeme ve imalat: Bu sektörün nanoteknoloji uygulamalarının temel alanı olduğu belirtilebilir. Genel olarak gelecekte piyasaya çıkabileceği düşünülen malzeme, sistem ve cihazların üretiminde daha kullanışlı metotların geliştirilmesi, özelliklerinde olumlu değişimlerin elde edilmesi ve kullanımında daha büyük yararların sağlanması ele alınır.

Elektronik ve bilişim teknolojisi: Nanoteknoloji ile çıkılabilecek elektronik devreler, jeneratörler, transistörler, işlemciler, vs. gibi yapıların temel bileşen olarak yer alacağı yeni nesil bilgisayarlar, giderek küçük boyutlara, büyük yüksek veri depolama kapasitelerine ve yüksek işlem hızlarına sahip olacaktır. Ayrıca sensörler, görüntüleme cihazları ve sinyal işleyiciler alanında ciddi gelişmeler görülecektir. Silisyum ve Galyum nitrit nanoteller kullanılarak nanoölçekte “ve”, “veya” mantık devreleri üretilebilmiştir.

Havacılık ve uzay: Çalışmaların gerektirdiği yakıt ve düşük ağırlık problemi ele alınmaktadır ancak bu çalışmaların biraz pahalı olduğu bir gerçektir. Nanoyapıların daha hafif, daha az hacimli, yüksek dayanıklılık ve yüksek dayanımlılık özelliklerinden dolayı yeni roket ve uzay istasyonları kurulabilecektir. Bununla beraber, nano algılayıcılar, nano elektronik destekli uçuş sistemleri, ısıya dayanıklı nano kaplama malzemeleri verilebilecek diğer örneklerdir.

Tıp ve sağlık: Genetik hastalık teşhisi ve kontrolünün nano ölçekteki elektromekanik sistemlerle çözülebileceğinin yanı sıra yaşayan mikroorganizmalar ile etkileşime geçilebilecek boyutlarda araç üretimi ile yepyeni tedavi yöntemleri geliştirilecektir. Bu tip araçlar hasarlı hücrelerimizde dolaşan bir doktor gibi teşhis koyup hemen onarıma başlayabilecektir.

Çevre ve enerji: Hidrojen enerjisi ile çalışacak nano otomobiller ile yakıt tüketimi çok büyük oranda düşürülecek, çevre daha az kirletilecek ve otomobillerin genel üretim prosesleri daha ekonomik olacaktır. Nanofiltreler sayesinde daha temiz su kolayca ulaşılabilir olacaktır. Bununla beraber ısı ve enerji tüketimini kontrol edebilen binalar, ısı absorpsiyonu ve enerji tasarrufu yapabilen dış cephe kaplamaları verilebilecek diğer örneklerdir.

Biyoteknoloji ve tarım: Biyoteknolojik ürünler eczacılıkta kullanılabilir. Bitkileri başta böcekler ve diğer zararlı organizmalardan koruma hususunda nano kimyasallar geliştirilecektir.

Askeriye ve savunma: Nanoelektrik uygulamaları savunma alanında haberleşme için büyük önem teşkil etmektedir. Yine bazı nanomekanik aygıtlar sayesinde nükleer savunma sistemlerinin kontrolü mümkün hale gelecektir. Nanoteknoloji ürünü kamufle edici, hafif ve aynı zamanda akıllı giysiler üretilebilir. Bu akıllı giysiler tarafından enerji ihtiyacını karşılanabilecek ve aynı zamanda nano algılayıcı cihazlar sayesinde zararlı gazlar ve kimyasal silah saldırıları tespit edilebilecektir.

İnşaat ve mimari: İç ve dış etmenlere karşı daha yüksek dayanım ve dayanıklılık özelliklerine sahip nano işlenmiş beton, nanokompozit çelik ve alçı uygulamaları, kendi kendini temizleyen yüzeyler, antimikrobiyel kaplamamalar, aerogel translusent termal yalıtımı ve nanoporoz ses yalıtımı örnek verilebilir.

Tekstil: Çorap ipliğinin gümüş nanoparçacıklarla katkılandırılması mikrop ve kötü koku oluşumlarını engelleyecektir. Esnek ve yıkanabilen sensörlerin kumaşa aktarılması ile elbiselerimiz kendi enerjisini üretecektir. Kumaş ipliğinin yeni optoelektronik özellikleri sayesinde aydınlatma özelliğine sahip giysi üretiminin önü açılacaktır. Akıllı kıyafetler çevresel faktörlere göre kalınlık, renk ve gözenek yapısı gibi fiziksel özelliklerini ayarlayabilecektir.

Ulaştırma: İnce filmler sayesinde araç kaportaları çizilmeye karşı daha dayanıklı hale gelecektir. Camlara uygulanan nanokaplamalar ile daha iyi bir görüş açısı alınabilecektir. Araçların çevreye yaydığı çeşitli emisyonlar yakıtların içine konan katkı maddeleri ve nanokatalizörler sayesinde azaltılacaktır

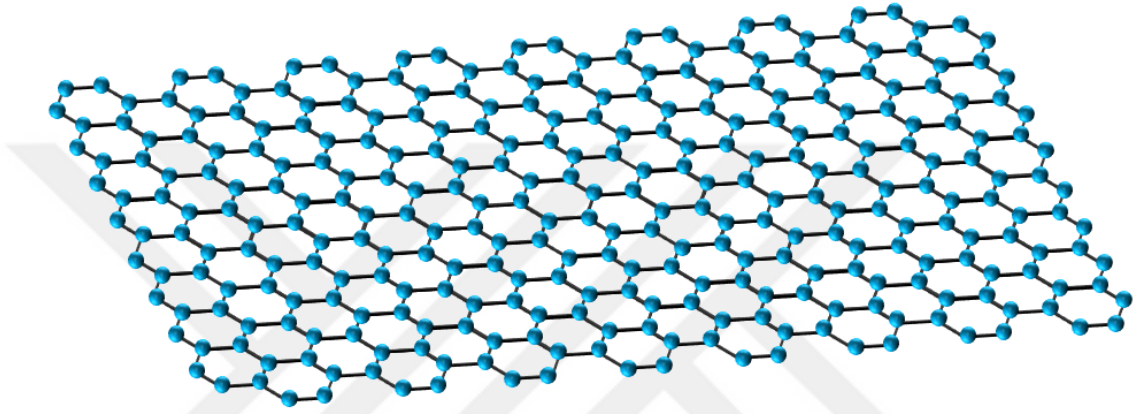
Nanokarakterizasyon: Nanokarakterizasyon, nanoteknolojinin gelişmesinde önemli bir temel oluşturmaktadır çünkü atomik ölçekte görüntüleme ve bu yapıların özelliklerinin tespiti nanoteknolojinin ana işlevleri arasındadır. Taramalı uç mikroskopları (SPM) sivri bir iğne uç vasıtasıyla yüzeyin atomik yapısının görüntülenmesini sağlar. İğne ile uç arasındaki fiziksel etkileşim sonucunda yüzey görüntülenebilir. Böylece nanoyapının yüzey topografyası, moleküler konfigürasyonu ve fiziksel özellikleri tespit edilebilir. SPM, AFM, STM ve manyetik kuvvet mikroskopu (MFM) gibi aygıtlar vakum, yüksek basınç, sıvı yüzey ve ekstrem sıcaklık gibi farklı etkenler altında çalışabilmektedir.

2.1.5. Bazı nano ölçekli yapılar

Nanotüpler (NT): Uzunluğunun çapına olan oranı milyonları bulabilen tek doğrultulu yapılardır. Daha betimleyici bir tanım yapmak istersek, bir veya daha çok sayıdaki iki boyutlu düzlem bir atomik örtünün herhangi bir temel alınan bir doğrultu etrafında sarılması ile oluşan yapılara nanotüp denir. Eğer çok sayıda atomik örtü sarılıyorsa bunlar iç içe geçerek nanotüp yapısını oluştururlar. Bu örtüler duvar olarak adlandırılır. Dolayısıyla tek bir katman sarılıyorsa tek duvarlı nanotüp ve birden çok örtü sarılıyorsa çok duvarlı nanotüp isimlendirmesi yapılır. Nanotüpler geleneksel yapı ve makine malzemelerinden daha yüksek elektriksel ve ısısal iletkenliğe, daha yüksek

rijitliğe, daha düşük ağırlık ve hacimlere sahiptir. Popüler nanotüplerden aşağıda bahsedilmiştir.

Karbon nanotüpler (CNT): Karbon (C) elementi, periyodik tablonun 4A grubu ve 2. Periyonda yer alan bir nonmetaldir. Canlı organizmaların, anorganik bileşiklerin ve bazı tek doğrultulu nanomalzemelerin yapısına katılım gösterir. Karbon atomlarının düzlemde altıgen oluşturduktan sonra bu altıgenlerin oluşturacağı grafen adlı yapının uzayda rulo gibi sarılmasından meydana gelen yapı basitçe karbon nanotüp yapısını tanımlar. Grafenin genel konfigürasyonu Şekil 2.5'te verilmiştir.



Şekil 2.5. Grafen örtü

CNT konfigürasyonları sarılma şekline göre koltuk, bükük veya zikzak model olarak üçe ayrılmaktadır. Değişik tip nanotüpler birim hücrelerine göre kolayca belirlenebilir. Şekil 2.6'da altıgen köşeleri karbon atomlarını temsil etmek suretiyle, sarılma vektörüne dik olan vektör C_h nanotüpün giriş vektörünü ve a_1 ve a_2 hegzagonal örgü birim vektörlerini tanımlar. Böylece giriş vektörü

$$C_h = ma_1 + na_2 \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada m ve n birer tam sayıdır. Ayrıca C_h ve a_1 vektörleri arasında kalan açıya giriş açısı denir. Hekzagonal örgü birim vektörlerinden xy kartezyen takımı birim vektörlerine

$$a_1 = a_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \right), \quad a_2 = a_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2 \right) \quad (2.2)$$

denklemleriyle ulaşılır. Burada, $a_0 = \sqrt{3}b$ olarak tanımlanmak üzere $b = 0.142$ nm karbon atomları arasındaki bağ uzunluğudur (Dresselhaus vd. 1995). Denklem (2.2)'de görülen ifadeler Denklem (2.1)'de yerine konursa,

$$\mathbf{C}_h = \frac{\sqrt{3}a_0}{2}(m+n)\mathbf{e}_1 + \frac{a_0}{2}(m-n)\mathbf{e}_2 \quad (2.3)$$

elde edilir. Dolayısı ile dairesel kesit çevresi (veya kiriş vektörünün boyu)

$$c = C_h = a_0 \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad (2.4)$$

olur. Grafen örtü nanotüpün silindirik kısmını oluşturmak suretiyle sarıldığında kiriş vektörünün uçları çakışır. Kiriş vektörü nanotüpün dairesel kesit çevresini meydana getirir. CNT yapısının kesit çapı

$$d = \frac{a_0}{\pi} \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Öte yandan kiralite açısının trigonometrik ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}n}{2\sqrt{m^2 + mn + n^2}}, \quad \cos \theta = \frac{2m+n}{2\sqrt{m^2 + mn + n^2}}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{3}n}{2n+m} \quad (2.6)$$

Ayrıca, sarılma yönelimindeki birim vektör $\mathbf{T}$ olmak üzere onun vektörel formu

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 \quad (2.7)$$

Bu vektör kiriş vektörüne dik olduğundan iç (nokta) çarpımları 0'a eşit olmalıdır:

$$\mathbf{C}_h \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (2.8)$$

Denklem (2.3) ve (2.7), Denklem (2.8)'de yerine konursa

$$\alpha \frac{\sqrt{3}a_0}{2}(m+n) + \beta \frac{a_0}{2}(m-n) = 0 \quad (2.9)$$

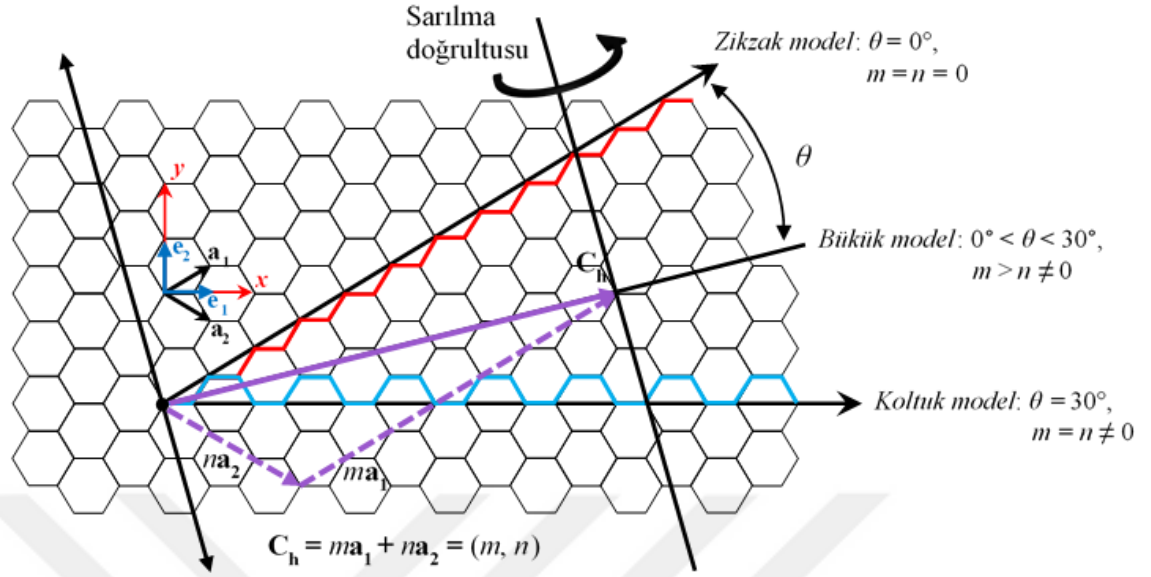
yazılır. Kiriş vektörü doğrultusundaki birim vektör ve sarılma doğrultusundaki birim vektörün boyu eşit ve 1 br olması gerektiğinden

$$\frac{3a_0^2}{4c^2}(m+n)^2 + \frac{a_0^2}{4c^2}(m-n)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.10)$$

olur. Denklem (2.9) ve (2.10)'un ortak çözümünden

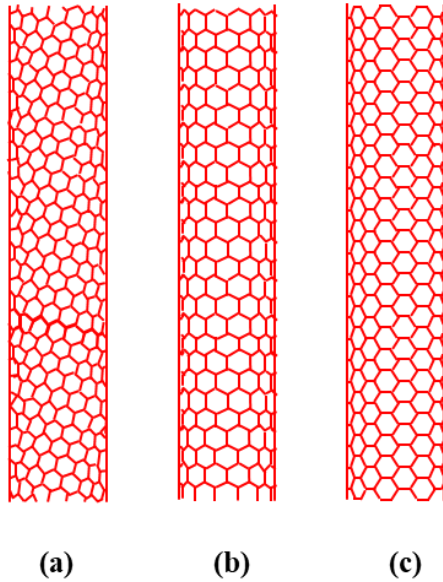
$$\alpha = -\frac{a_0}{2c}(m-n), \quad \beta = \frac{\sqrt{3}a_0}{2c}(m+n) \quad (2.11)$$

elde edilir (Rafii-Tabar 2008).



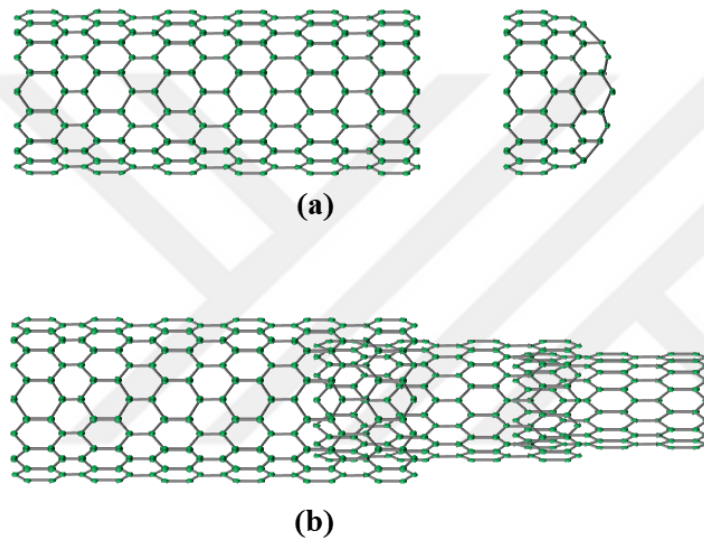
Şekil 2.6. Grafen örtünün sarılması (Numanoğlu 2017)

Sarılma biçimine bağlı olarak farklı nanotüp yapıları görülebilir. $n = m$ ve kiriş açısı 30° ise model koltuk, $n = 0$, $m = 0$ ve kiriş açısı 0° ise model zikzak, kiriş açısı 0° ile 30° arasındaysa model büküktür. Sarılma biçimi mekanik, fiziksel ve kimyasal özellikleri etkiler. Farklı sarılma konfigürasyonları Şekil 2.7’de görülmektedir.



Şekil 2.7. Karbon nanotüplerin sarılma açısına göre farklı konfigürasyonları **a)** Bükük **b)** Zikzak **c)** Koltuk

Karbon nanotüp yapılarının duvar sayısına göre tek veya çok duvarlı olabildiğini belirtmiştik. Japon bilim adamı Iijima, ark-buhar deneyleri neticesinde çok duvarlı karbon nanotüpleri (MWCNT) keşfetmiştir (Iijima 1991). Tek duvarlı karbon nanotüplerin (SWCNT) keşfi ise daha sonraki çalışmaları izler (Iijima ve Ichihashi 1993, Bethune vd. 1993). Tek duvarlı karbon nanotüpler tek bir grafen örtünün sarılmasından meydana gelir. Genellikle çapları 0.5–5 nm olup uçları fullerene yapısının yarısı şeklinde kapalıdır. Birden çok grafen örtünün iç içe geçerek oluşturduğu çok duvarlı karbon nanotüp yapılarında ise genellikle katmanlar arası mesafe, iki karbon atomu arasındaki mesafeden daha fazladır ve çapları genellikle 0.34 nm kadardır. Duvar sayısı mekanik ve fiziksel özellikleri etkilemektedir. CNT yapılarının duvar sayısına göre konfigürasyonları Şekil 2.8’de sunulmuştur.



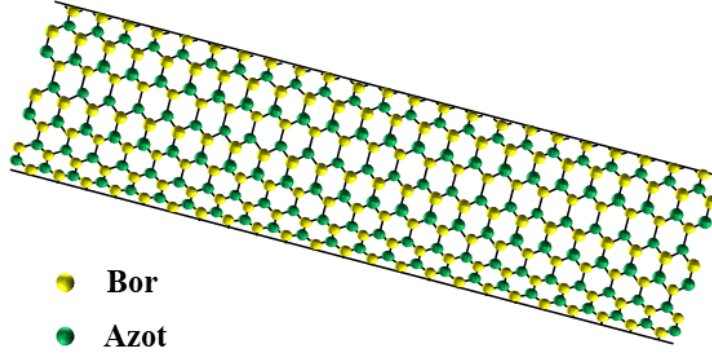
Şekil 2.8. Duvar sayısına göre karbon nanotüp yapıları **a)** Tek duvarlı karbon nanotüpler **b)** Çok duvarlı karbon nanotüpler

Karbon nanotüpler, taramalı uç mikroskoplarında (Meyyappan 2005), alan etkili transistörlerde (Philip Wong ve Akinwande 2011), kimyasal ve biyolojik sensörlerde (Li vd. 2003, Wang 2005), hidrojen depolamada (Schlapbach ve Züttel 2001), termal iletkenlikte (Kumanek ve Janas 2019), hava-su filtrasyonunda (Anonymous 4), kalıcı rastgele erişim belleklerinde (NVRAM) (Rueckes vd. 2000) ve daha birçok alanda kullanılır. Ayrıca potansiyel elektrotlarda, uzay asansörleri için süper iletken kablolarda, nanokompozitlerde, güneş enerjisinde de kullanılabilir (Işık 2018).

Karbon nanotüplerin çok güçlü mekanik ve fiziksel özelliklere sahip olduğu belirtilebilir. Ağırlıkları çeliğin 6’da 1’i kadardır. 600 °C sıcaklığa kadar dayanaktadırlar. MWCNT yapılarının elastisite modülü ve dayanımının 1–1.8 TPa ve 0.8–150 GPa arasında olduğu, eğilme testleri ile belirlenmiştir (Ruoff ve Lorentz 1995).

Bor nitrür nanotüpler (BNNT): Bor (B) ve azot (N) atomlarından oluşan bir örtünün, karbon nanotüp yapılanmasında olduğu gibi bükük, zikzak veya koltuk olarak sarmalanmasından meydana gelen tek doğrultulu nano ölçekli yapılardır. Özellikleri ve

üretim yöntemleri CNT'ye benzerlik göstermektedir. BNNT yapıları için genel bir konfigürasyon örneği aşağıda sunulmuştur.

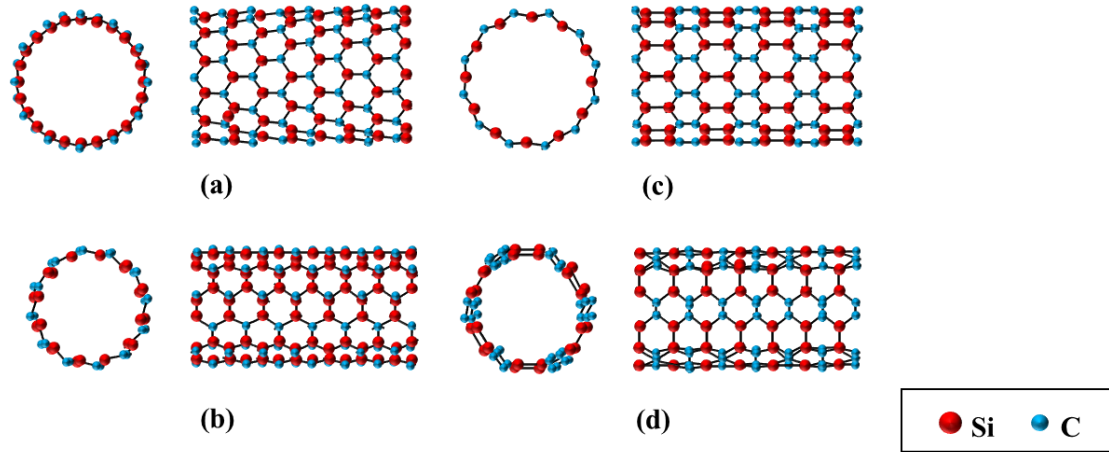


Şekil 2.9. Bor nitrür nanotüp yapısının genel konfigürasyonu

Termal titreşim metoduna dayanan bir çalışmada, çok duvarlı bor nitrür nanotüplerin elastisite modülü 1.22 TPa olarak saptanmıştır (Chopra ve Zettl 1997). Saflaştırılmış ve çöktürülmüş BNNT'ler üzerinde yapılan deneysel çalışmalara göre termal iletkenlik 18-46 W/mK kadardır (Hanley vd. 1988). Çok güçlü mekanik, piezoelektrik, elektronik ve optik özelliklerinden dolayı alan etkili transistörlerde (Radosavljevic vd. 2003), elektrokimyasal insülatörlerde (Lee vd. 2010), biyomedikalde (Mukhopadhyay vd. 2011), hidrojen depolamasında (Jhi ve Kwon 2004), yüzey modifikasyonu ve fonksiyonelleştirilmesinde (Kim vd. 2012) kullanılabilmektedir.

Silika karbit nanotüpler (SiCNT): Karbon nanotüplerin silislenmesi yolu ile elde edilen nano ölçekli tek doğrultulu yapılar silika karbit nanotüpü tanımlar. SiCNT iki şekilde üretilir: Birincisi şekil bellek sentezi ve ikincisi nanotel çekirdeği oluşumu yöntemi. Birinci yöntemle göre silisyum oksit ve silisyum karışımı ısıtılır. Silisyum bir karbon şablonu ile katı-gaz tepkimesine girer ve neticede SiCNT yapısı oluşur (Pham-Huu vd. 2001). İkinci yöntemle göre, nanotel çekirdeği silisyum karbit ve çinko sülfür nanotellerinden oluşan karışım yüksek sıcaklıkta metan gazı ile ısıtılır. Hidroklorik asitle aşındırma yapılarak SiCNT yapısı üretilmiş olur (Sun vd. 2002).

SiCNT yapılarının bilinen iki geometrisi vardır. Tip-I geometrisine göre her silisyum ve karbon atomu muhakkak birbirine bağlanır. Tip-II geometride ise her silisyum atomu kendi içinde bağlanarak karbon ile bağ yapar. Kısacası Tip-I ve Tip-II geometrileri arasındaki tek fark, aynı atomların birbirine bağlanması veya bağlanmamasıdır. SiCNT yapıları da CNT'lere benzer kiralite gösterirler ve bahsedilmiş iki farklı tip geometrinin genel konfigürasyonları Şekil 2.10'da verilmiştir.



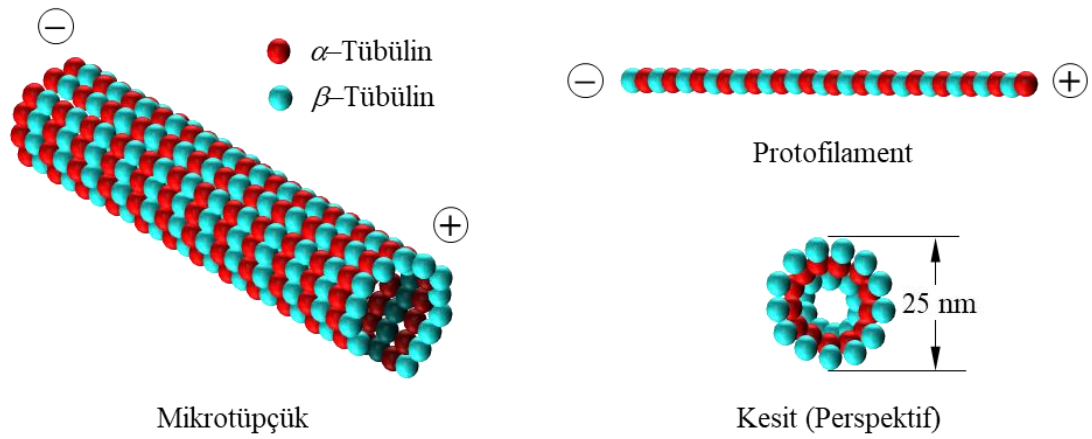
Şekil 2.10. Silika karbit nanotüplerin farklı atomik konfigürasyonları **a)** Tip-I, zikzak **b)** Tip-I, koltuk **c)** Tip-I, zikzak **d)** Tip-II, koltuk

Nanoteller (NW): Çapı 1 nm ve daha az olan ancak uzunluğu çapın en az 100 katı olan boyuna yapılar nanotel olarak adlandırılır. Nanotellerin birçok tipi vardır. Nikel altın, platin, iletken; silisyum, indiyum, galyum, yarı-iletken, silisyum dioksit, titanyum dioksit yalıtkan; molibden, kükürt, iyot atomlarının çeşitli moleküler oluşumları anorganik moleküler ve DNA yapısı organik moleküler tipteki nanotellere örnek olarak verilebilir. Nanoteller genel olarak, optoelektronikte, biyomedikal ve genetik uygulamalarda, solar hücrelerde kullanım alanına sahiptir.

Nanoçubuklar (NR): Boyu 1–100 nm arasında, uzunluk/çap oranı ise 3–5 arasında değişen nanotel benzeri olan, ancak onlar kadar esnek olamayan tek doğrultulu yapılar nanoçubuk sınıfına mensuptur. Genellikle metal ve yarıiletken malzemelerden sentezlenme yolu ile üretilirler. Görüntüleme teknolojisinde, elektromanyetik uygulamalarda, kanser tedavisinde, enerji üretimi ve ışık yayan cihazlarda kullanılabilir.

Nanohalkalar: Bu tip yapılar, dümdüz şeklindeki nanotüplerin halka haline gelmesinden oluşur. Protein ve diğer biyomoleküllerde gözlemlenebilir. Halka halindeki nanotüpler düşük sıcaklıkta yüksek iletkenlik özelliği göstermektedirler.

Mikrotüpçükler (MT): Bu yüksek lisans tezi genelinde, konumuz gereği nanoteknoloji ve nanomekanik ele alınacaktır. Ancak küçük ölçekli malzeme teknolojisi ve mühendisliği disiplinini sadece nano anlamda idrak etmeye çalışmak biraz yetersiz kalabilir. Genel hatları ile mikroteknoloji tabii ki de çalışmamızın dışındadır ancak onun hayatımıza soktuğu en önemli kavramlardan birisi olan mikrotüpçük yapısına az da olsa değinilmelidir. Mikrotüpçükler, biyolojik hücrelerin görevlerini gerçekleştirmesi için onlara stabilite sağlayan tek doğrultulu öğelerdir. Hücre iskeletinin en önemli bileşeni olduğu belirtilebilir. Genel bir MT organizasyonunda, α ve β tübülünlerinin oluşturduğu ikişerli yapıya heterodimer denir. Bu heterodimerlerin yanyana gelmesiyle oluşan protofilamentler silindirik bir şekilde dizilir ve bu silindirik yapı basitçe MT'yi tanımlar. Enkesit çapları 25 nm kadardır. Genel olarak bir MT 13 adet protofilament ile tanımlanır ancak farklı organizmalarda bu sayı değişiklik gösterebilir. MT'lerde (–) ve (+) olmak üzere iki farklı uç bulunur ve (+) uç daha hızlı bir büyüme gösterir (Schatten 2015). Tipik mikrotüpçük yapısı Şekil 2.11'de gösterilmiştir.



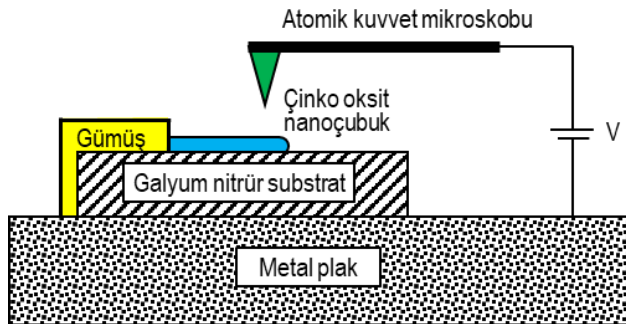
Şekil 2.11. Mikrotüpçük yapısının en basit gösterimi

MT'ler hücre şeklinin bakımı ve onarımı, mitokondri gibi organellerin, makro moleküllerin ve membran veziküllerinin taşınımı, mayoz ve mitoz bölünmenin gerçekleşmesi, silya, flagella ve sentriyol yapılarının oluşması gibi hücresel faaliyetlerde çok büyük bir öneme sahiptir (Schatten 2015).

2.1.6. Nano–elektro–mekanik sistemler (NEMS)

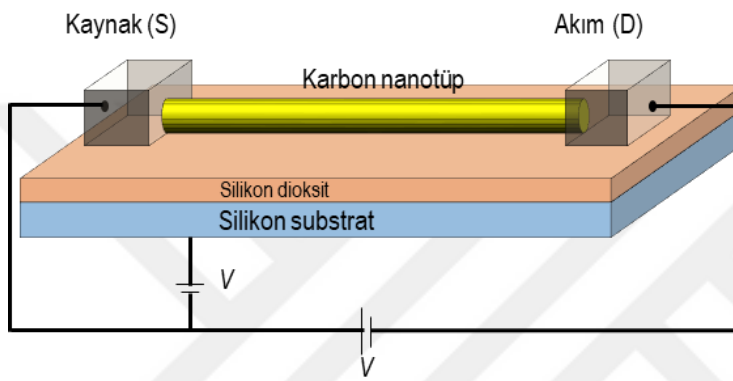
Nano–elektro–mekanik sistemler (NEMS) insanlar tarafından belirlenmiş ihtiyaçların karşılanması için elektriksel ve mekaniksel işlemleri veya süreçleri bir arada gerçekleştiren ve birbiri ile uyumlu çalışması zaruri olan nano ölçekli bileşenleri kapsayan yapılar ve cihazlar grubudur. Anlaşılacağı üzere NEMS'ler, nanoteknoloji biliminin insanlığa sunduğu çıktılardır.

Tezin bu altbaşlığında bazı NEMS örnekleri ve kullanım alanları ele alınacaktır. Ancak bunların mekanik modellenmesi ile ilgili tüm detaylardan 4.1 altbaşlığında bahsedilecektir. Burada sadece ilgili konuya bir ön hazırlık amaçlanmaktadır. NEMS konusunda verebileceğimiz en temel ve bir o kadar da önemli olan örnek Atomik Kuvvet Mikroskobudur. Sistemdeki mekanik yapıyı temsil eden bu mikroskop nano boyutta görüntüleme, ölçüm ve atomik düzen işleme görevlerini görebilmektedir. Atomik kuvvet mikroskobunun genel bir şeması Şekil 2.12'de sunulmuştur.

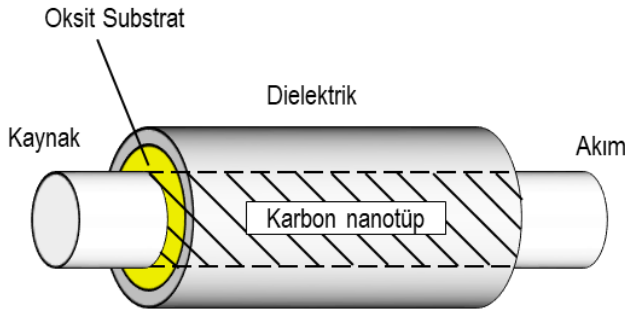


Şekil 2.12. Atomik kuvvet mikroskobunun genel şeması

Karbon nanotüp tabanlı alan etkili transistörler (CNT-FET) mantıksal devrelerde, biyomedikal/biyoteknoloji uygulamalarında, elektrik uygulamalarında, iletişim alanlarında kullanılmaktadır (Prakash vd. 2018). CNT-FET yapısı tipik olarak Şekil 2.13a’da betimlenmiştir. Görüldüğü üzere sistem elektromekanik etkiler altında çalışır. Konuya sadece mekanik anlamda yaklaşmak gerekirse, karbon nanotüp yapısının tek doğrultulu sürekli mekanik yapı görevini icra ettiği vurgulanabilir. Bu mekanik yapıyı temsilen silisyum nanotel de kullanılabilir (Chen vd. 2011). Ek olarak, elektriksel özelliklerin araştırılması amacıyla yine karbon nanotüp tabanlı ve eş-eksenli silindirik alan etkili transistörlerden de bahsedilebilir (Singh vd. 2018). İlgili model Şekil 2.13b’de betimlenmiştir.



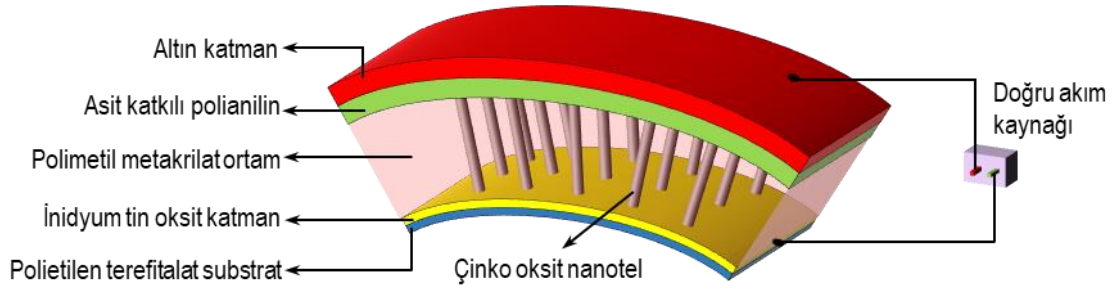
(a)



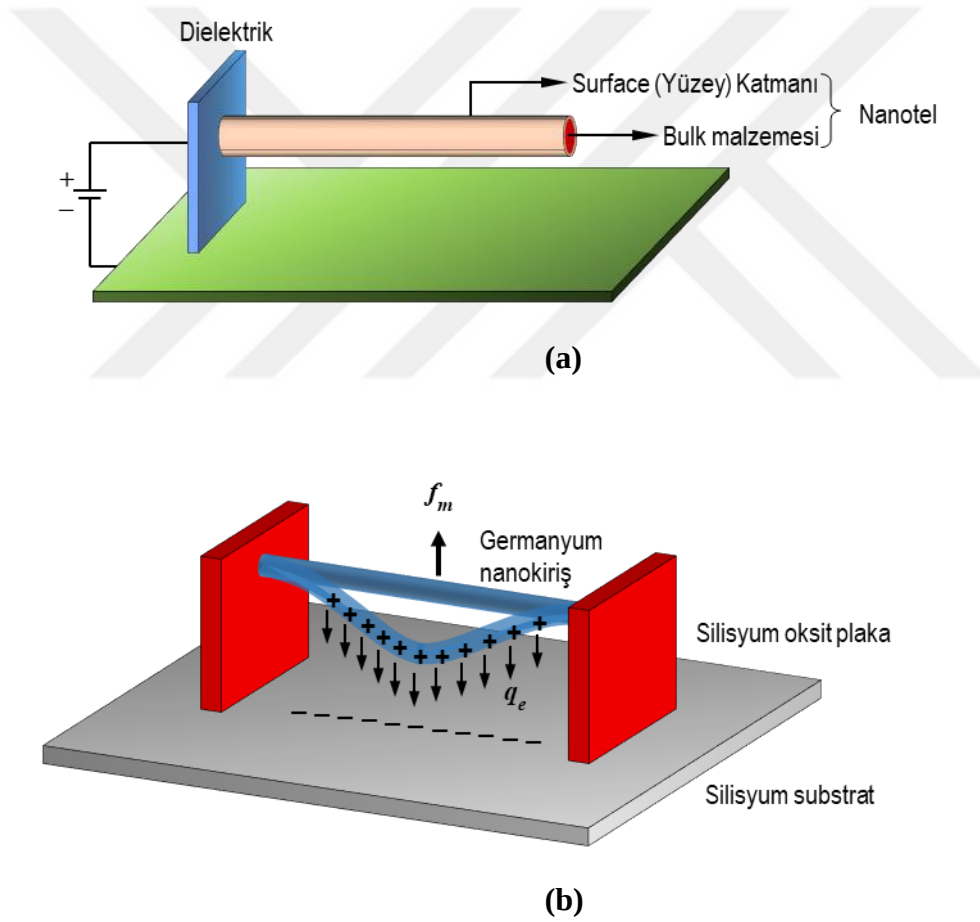
(b)

Şekil 2.13. Karbon nanotüp alan etkili transistör sistemleri **a)** Silikon maddelerine oturan karbon nanotüp **b)** Oksit substrata gömülü karbon nanotüp

Şekil 2.14’te organik ve anorganik bileşenlerden oluşan bir ışık soğurmalı diyot (LED) yapısı (Liu vd. 2013) görülmektedir. Optoelektronik etkiler altındaki nano ölçekli bu sistemde genel olarak polimetil metakrilat ortama gömülmüş çinko oksit nanotel yapısı mekanik elemanı temsil eder. Polimetil metakrilat ortam sisteme esneklik ve ayarlanabilir madde taşınımı gibi avantajlar sağlamaktadır. NEMS konusunda yaygın olan diğer sistemlerden piezoelektrik kompozit konsol nanotel ve uçları elektrot plakalarla sabitlenmiş germanyum nanokiriş örnekleri Şekil 2.15’te sunulmuştur.



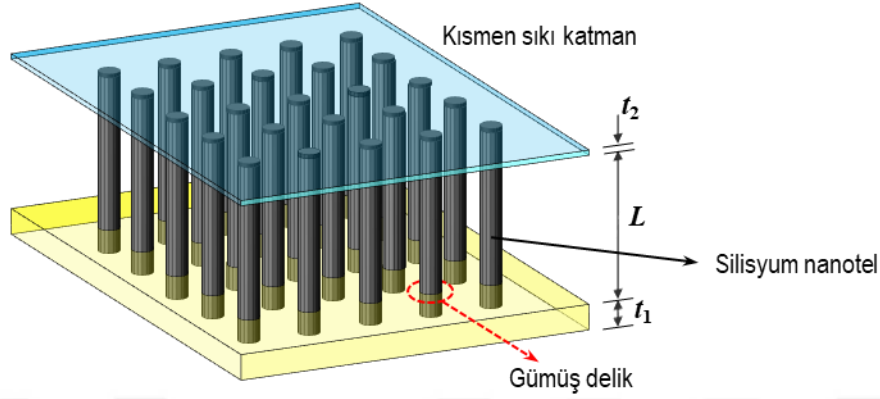
Şekil 2.14. Organik/anorganik ışık soğurmalı diyot sistemi



Şekil 2.15. Nano ölçekli mekanik sistemlerde diğer yaygın elektrik alan uygulamaları
a) Kompozit konsol nanotel **b)** Germanyum nanokiriş

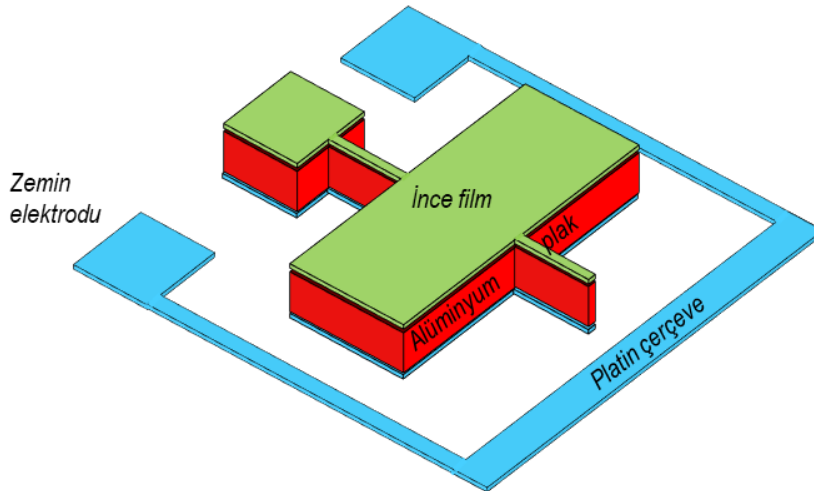
Silisyum nanotel yetiştirme mekanizmasının genel şeması Şekil 2.16’da görüldüğü gibidir. Sistemde genel olarak mekanik elemanı temsil eden silisyum nanoteller bir

ucundan gümüş bir plakaya sıkıca ve diğer ucundan başka bir katmana kısmen sıkıca gömülüdür.

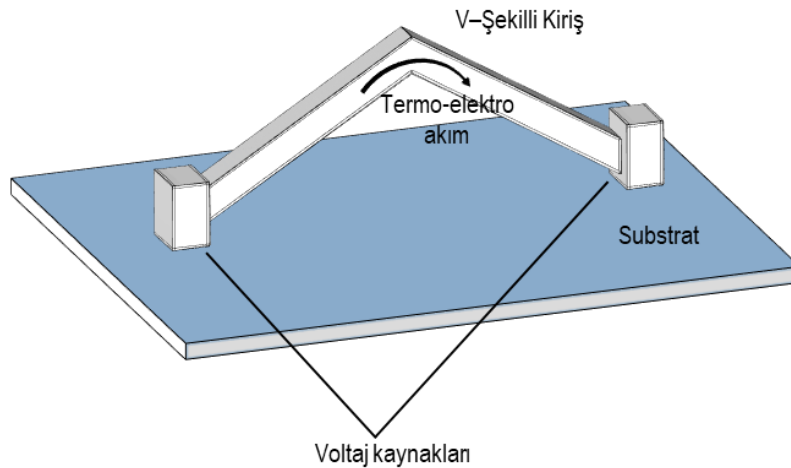


Şekil 2.16. Nanotel oluşumu

Son olarak ayırık mekanik elemanların temel rol oynadığı nano–elektro–mekanik sistemlerden bahsedilecektir. Buna göre, Şekil 2.17’de sunulmuş olan örnekte, ince alüminyum filmler arasına sandviçlenmiş piezoelektrik rezonant alüminyum nitrit plak yapısı, yüksek çalıştırma frekansları eldesinde kullanılır (Piazza vd. 2006). Sistemdeki elektrik alanı sağlayan zemin elektrodu bağlantısını sağlayan platin tek doğrultulu elemanlardan oluşan bir ayırık sistemdir. Öte yandan Şekil 2.18’de görülen elektrotermal aktivatör V–kiriş (bent kiriş) yapısı gerinim algılamasında görev alır (Que vd. 2001). Bu yapı da iki elemandan oluşan bir ayırık sistem gibi düşünülebilir.



Şekil 2.17. Sandviçlenmiş piezoelektrik rezonant nanoplak



Şekil 2.18. V-şekilli kiriş elektrotermal aktivatör

Küçük ölçekli malzeme teknolojisi ve mühendisliğindeki gelişmeleri göz önünde bulundurursak, nano ölçekli elemanların NEMS’lerde aktif görev üstlenebilmesi için maruz kalacağı mekanik ve elektrik etkenlerin yanı sıra sisteme ilave olabilen termal, optik, piezo, manyetik, sıvı akımı gibi çeşitli etkileri de doğru bir şekilde kapsayan mekanik modellerinin kurulabiliyor olması önem kazanmıştır.

2.2. Atomik Düzeydeki Sistemlerin Mekanik Analizi

Herhangi bir sistemin ve onu oluşturan bileşenlerin bilgisayar ortamında farklı metotlar ve algoritmalar kullanılarak incelenmesi simülasyon kavramını ifade eder. Moleküler dinamik simülasyonu (MDS) ise sistemin veya yapının tüm atomlarının zamana karşı davranışlarının Newton hareket denklemleri kullanılarak sayısal olarak anlaşılmasını sağlayan bir simülasyon yöntemidir. Burada bilgisayarların yarı deneysel bir ortam teşkil ettiği vurgulanabilir. Sistemde genel olarak i . molekülün Newton kuvvet denklemi olan $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ değerleri hesaplanır. Bu ifadelerin, simülasyondaki zaman aralığı üzerinden sayısal integrasyonu yapılır. Atomlar arası etkileşim nedeniyle bir atoma diğer atomlardan gelen Newton kuvveti ve onun sayesinde hız ve konum parametreleri tespit edilebilir (Gürbulak 2009).

Bilgisayar teknolojisi geçmişten günümüze büyük bir devinim geçirmiştir. Ancak şu da bir gerçektir ki atomların bilgisayarda modellenmesiyle bu modellemelerden verimli bir çıktı alınmasının önünde çok ciddi engeller bulunmaktadır. İleri düzeyde teorik bilgi gereksinimi, programlama kabiliyeti, simülasyonlar esnasında oluşacak ciddi bir işlem hacmi ve sonuçların sağlıklı yorumlanabilirliği bu engellerin başında gelir. Kısaca atomik ölçekli yapıların mekanik analizlerini simülasyonlar yoluyla anlamaya çalışmak biraz külfetlidir.

Atomik ölçekli yapıların makro düzeydeki yapılardan daha farklı özellikler göstermesinin yanı sıra bu yapıların mekanik davranışlarının klasik yasalar ile anlaşılamadığı deneysel metotlar ile ortaya çıkarılmıştır. 1900’lü yılların hemen başında, bu durumun yapıdaki atomların dış faktörlerle etkileşimde olması fikri doğmuştur. Bu fikre göre atomların mekanik davranışları üzerinde iç karakteristik boyutlarının bir etkisi vardır. Cosserat kardeşler (Cosserat ve Cosserat 1909) tarafından yazılan “Théorie Des

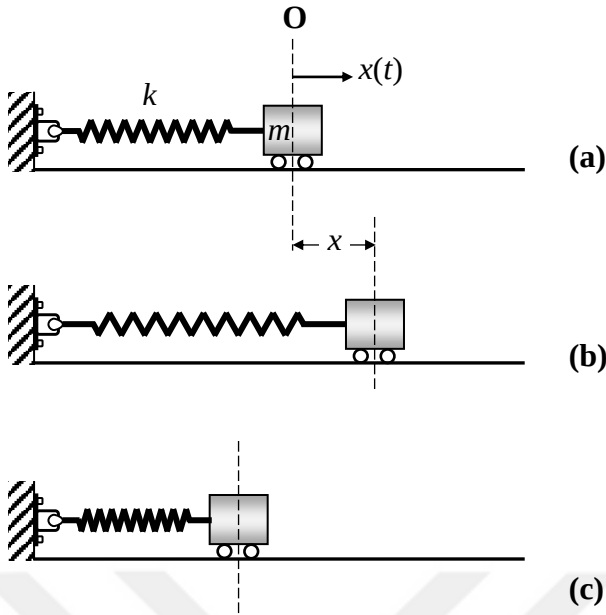
Corps Déformables” adlı eser yapıların mekanik analizlerinde boyut etkisi için bir başlangıç olarak kabul edilir. Bu fikir, o yıllarda ilgiyle karşılanmamış olsa bile, içinde bulunduğumuz zaman diliminde, özellikle hesaplamalı katı cisimler mekaniği bilimine çok büyük bir damga vurmuştur. Atomik ölçekli yapıların mekanik analizlerinin bilgisayar ortamındaki simülasyonlar vasıtasıyla gerçekleştirilmesinin zor olması nedeniyle birçok araştırmacı ilgili probleme, sürekli ortam mekaniği esaslı analitik yöntemler üzerinden çözüm getirmişlerdir. Tabi bu analitik formülasyonlar çeşitlidir ve birbirinden farklı dönemlerde ortaya çıkmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisi (Eringen ve Edelen 1972; Eringen 1972a, 1972b, 1972c, 1976, 1977a, 1977b, 1983, 2002; Eringen ve Kim 1977, Hadjo ve Eringen 1979), gerilme çifti elastisite teorisi (Toupin 1962; Mindlin ve Tiersten 1962; Koiter 1964; Yang vd. 2002; Park ve Gao 2006; Ma vd. 2008), şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi (Fleck ve Hutchinson 1993, 2001; Lam vd. 2003; Kong vd 2009), yüzey enerjisi elastisite teorisi (Gurtin ve Murdoch 1975, 1978; Cammarata 1994; Miller ve Shenoy 2000; Wang ve Feng 2007, 2009), eşil mekaniği elastisite teorisi (Granik ve Ferrari 1993; Ferrari vd. 1997) bu formülasyonlara verilebilecek en temel örneklerdir.

2.3. Mekanik Sistemlerin Titreşimi

2.3.1. Sistem, titreşim ve serbestlik derecesi kavramları

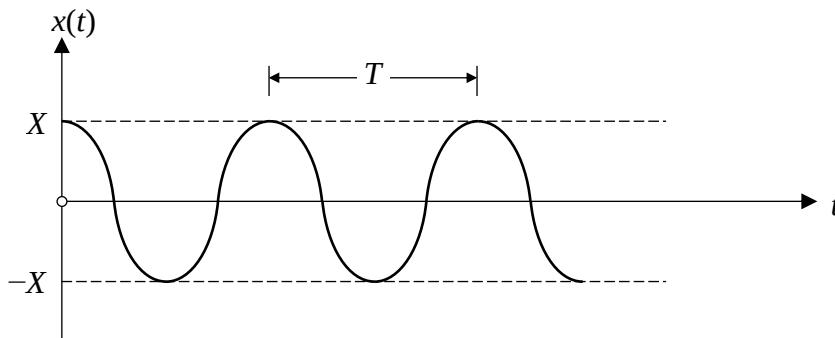
En basit tanımı ile birbiri ve çevresi ile etkileşim halinde olan elemanlar topluluğuna sistem adı verilir. Elemanların bu etkileşimi sistemin amacının gerçekleşebilmesi için en doğru şekilde anlaşılmalı ve ifade edilmelidir. Biyolojik sistemler, sosyal sistemler, ekonomik sistemler, kimyasal sistemler, fiziksel sistemler, mekanik sistemler, ... vs. olmak üzere çok sayıda sistem türü örnek olarak verilebilir. Bir sistem, çeşitli girdileri işleyerek çıktılara dönüştürür. Bu işleme süreçleri sistemin bileşenlerince denetlenir. Bizim konumuz mekanik sistemler olduğu için bunun üzerine gideceğiz. Buna göre, birbiri ile etkileşimli mekanik bileşenlerin oluşturduğu yapılar mekanik sistem kavramını tanımlar. Arabanın süspansiyon sistemi mekanik sisteme verilebilecek en tipik örneklerden bir tanesidir. Tekerlek lastiği, hava, yay ve amortisörden oluşan süspansiyon tekerleklerin araca bağlanmasını ve tekerleklerden gelen sarsıntıların sönümlenmesini sağlayan bir sistemdir. Bu tanım, sistemin amacını ve elemanlarını açıkça içermektedir. Genel olarak sistemin yay elemanı iyi bir yol tutuşu sağlarken ve sürüş konforunu desteklerken sönüm, sarsıntıdan doğacak tehlikeli titreşimleri karşılar. Burası da elemanların görevlerini, birbiri ve dış çevresi ile olan etkileşimini ifade eder. Son olarak, girdiler dışarıdan gelen sarsıntı kuvvetleri, yay ve sönüm sabitleridir. Buna karşılık çıktılar iç tepki kuvveti ve doğal titreşim frekansıdır. Bu ve benzeri sistemlerden daha ileride bahsedilecektir.

Aslında süspansiyon sistemi, yapı dinamiği biliminin resmen temelini inşa eden basit kütle-yay-sönüm modeli ile tanımlanabilir. Biz bu sistemi Şekil 2.19a’da tasvir edelim ve şimdilik sönüm etkisini göz ardı edelim.



Şekil 2.19. Basit kütle-yay modeli **a)** Denge halindeki sistem **b)** Denge halinden uzaklaştırılan sistem **c)** Uzaklaşmanın etkisiyle tekrarlı hareket yapan sistem

Şekil 2.19a'da sadece yatay doğrultuda harekete müsaade edilen ve denge konumunda hareketsiz olarak görülen m kütlesi başlangıç ($t = 0$) anında sisteme verilen bir dış uyarı ile $x = x(0)$ kadar uzaklaştırılır (Şekil 2.19b). Bu uzaklaştırma işlemi esnasında elastik yayda uzama enerjisi birikir. Eğer uyarı kaldırılırsa sistem hareket etmeye başlar. Çünkü uzama enerjisi kinetik enerjiye dönüşür. Kütle Şekil 2.19c'de görülen maksimum yay kısaltmasını yaptıktan sonra tekrardan denge noktasına doğru yol alır. Çünkü bu sefer kısaltmadan kaynaklı enerji kinetik enerjiye dönüşür. Eğer sistemde sürtünme etkisi veya viskoz sönüm yoksa enerji dönüşümleri kayıpsız şekilde sonsuza dek devam edeceğinden bu hareket de sonsuza dek sürer. Burada asıl vurgulanması gereken şudur: Sonsuza dek sürecek olan bu harekette dengeye uzaklık (konum) değişimi tekrarlı (periyodik) bir şekilde değişir ve bu tekrarlı harekete titreşim adı verilir. Bir titreşim olayı kendi içerisinde bazı kavramları barındırır. Bu kavramlardan bahsetmeden önce az evvel atfedilen tekrarlı hareket kavramını aşağıdaki grafikte açıklayalım.



Şekil 2.20. Tekrarlı (periyodik) hareket grafiği

Titreşim hareketi periyodik olabileceği gibi periyodik olmayan veya rastgele tipte de gerçekleşebilir. Biz basitlik açısından sadece periyodik hareketi ele alacağız. Öncelikle Şekil 2.20’de görülen grafik zaman parametresi t ’nin değişimine karşılık denge konumuna olan $x = x(t)$ uzaklığının değişimini gösterir. Buna göre denge halinden herhangi bir pozisyona, sonra yine dengeye ve sonra yine aynı pozisyona gelme durumuna titreşim hareketinin çevrimi denir. Titreşen bir elemanın ulaşabileceği en uzak pozisyona titreşimin genliği denir ve Şekil 2.20’de tasvir edilmiş grafikte genlik X ve $-X$ ile gösterilmiştir. Titreşim hareketinde bir çevrimin tamamlanma süresine periyot adı verilir. Betimlenmiş tekrarlı hareketin periyodu T olmak üzere bu ifade,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.11)$$

şeklindedir ve burada ω açısal sıklık (frekans) denilen bir ifadedir. Şayet titreşim hareketi, yarıçapının üzerinde serbestçe açısal dönüş yapabildiği bir çember ile tasvir edilecek olursa çember yarıçapının birim zamanda taradığı açıya açısal sıklık kavramını tanımlar. Buradan anlaşılabileceği üzere,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad (2.12)$$

olur. Burada θ taranan açıdır. Bir titreşim hareketinde periyodun çarpma işlemine göre tersine *sıklık* (frekans) denir. Frekans, daha başka bir tanımla birim zamanda görülen çevrim sayısını belirten bir kavram olup,

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.13)$$

olması gerekir. Denklem (2.11), Denklem (2.13)’te yerine yazılırsa açısal frekans ve frekans arasındaki ilişki

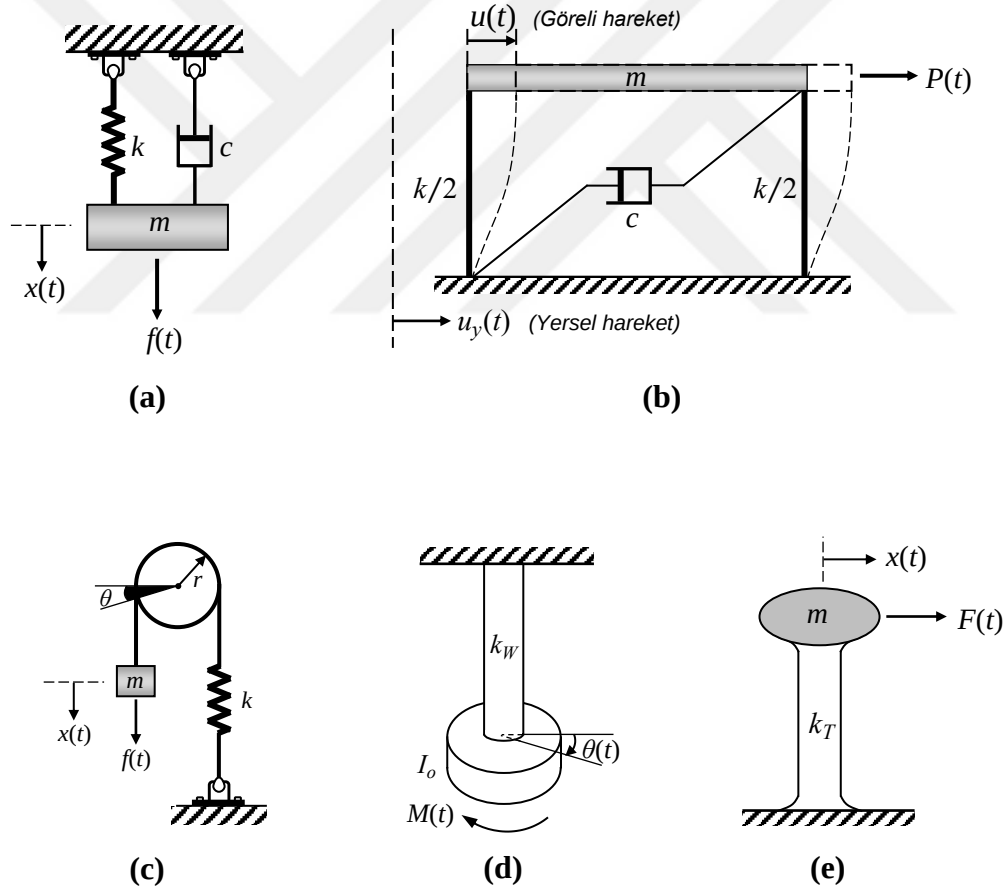
$$\omega = 2\pi f \quad (2.14)$$

olarak elde edilir.

Bir sistemin titreşimi esnasında sürtünme ve başka dirençler nedeni ile enerji dağılması veya kaybı olmuyorsa o sisteme sönümsüz sistem olarak tanımlanır. Sönüm etkisi varsa sistem sönümlü sistem olarak adlandırılır. Sönümsüz sistemler sonsuza dek hareketini sürdürebilir. Sistemde titreşime sebebiyet verecek iç veya dış uyarılar yok iken bu sistemde meydana gelen titreşim hareketine serbest titreşim denir. Öte yandan hareket, tahriklerle meydana geliyorsa bu harekete de zorlanmış titreşim denir. Titreşen bir sistemde bileşenlerin tümü (kütle, yay, sönüm, vb.) doğrusal matematiksel modellerle ifade edilebiliyorsa (kütle için Newton, yay için Hooke ve sönüm için Coulomb denklemi) sistemin o hareketine doğrusal titreşim denir. Bunlardan en az biri doğrusal olmayan davranışta bulunuyorsa o harekete doğrusal olmayan titreşim tanımlar.

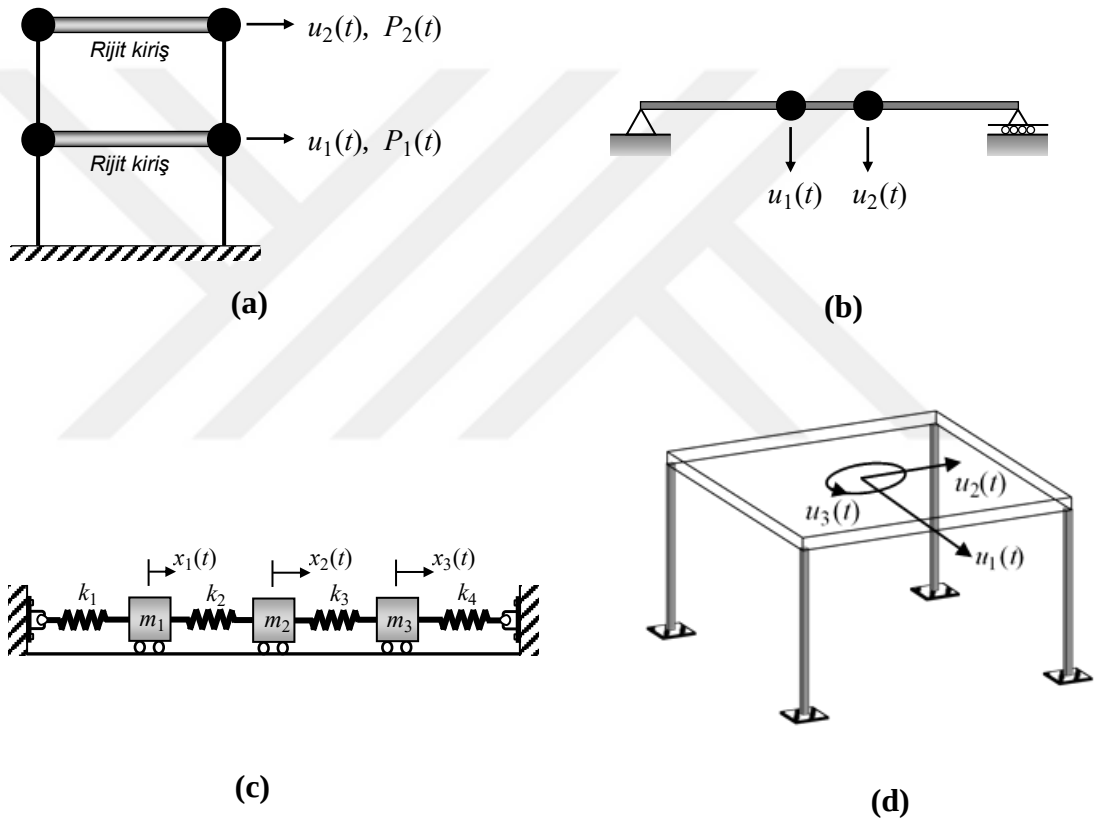
Titreşim olgusunun tam manası ile idrak edilmesi serbestlik derecesi denilen başka bir kavramın anlaşılmasına bağlıdır. Buna göre bir hareketin çözümlenebilmesi

adına o sistemde düzenlenmesi gereken minimum nokta sayısına o sistemin serbestlik derecesi denir (Numanoğlu 2017). Bu kavrama bir takım örnekler verelim. Buna göre Şekil 2.21a'da görülen ve girişte az da olsa değinilen basit kütle–yay–sönüm modelinde kütle sadece düşey doğrultuda tekrarlı hareket yapabileceğinden bu sistem tek serbestliklidir. Şekil 2.21b'de görülen deprem (yersel hareket) ve elastik (kendi hareketi) olmak üzere iki çeşit hareket gerçekleştiren tek katlı ve tek açıklıklı kayma çerçevesi modelinde kütle kat kirişinde ve elastik özellikler kolonda toplanmıştır, sönüm yapıya dışarıdan iteşkil edilmiştir. Bu sistemde aşırı rijit kat kirişine etki eden deprem yükü altında kiriş sadece deprem doğrultusunda hareket eder. Dolayısı ile sistem tek serbestliklidir. Şekil 2.21c'de görülen kütle–yay–makara sisteminde sisteme verilebilecek uyarı altında kütle sadece düşey doğrultuda hareket eder. Şekil 2.21d'de görülen aşırı rijit kalasa bağlı dönel ataletli kalınlığı önemsiz disk sadece dönme doğrultusundaki dış uyarı yönünde hareket eder. Şekil 2.21e'de görülen rijit kuleye bağlı su tankı sadece yatay doğrultuda hareket eder. Dolayısı ile bu modellerin de tek serbestlikli sistem örneği teşkil ettiğini belirtebiliriz.



Şekil 2.21. Tek serbestlik dereceli sistem örnekleri **a)** Basit kütle–yay–sönüm modeli **b)** Basit kayma çerçevesi **c)** Kütle–yay–makara sistemi **d)** Rijit kalas–disk sistemi **e)** Su tankı modeli

Şekil 2.22a’da görülen iki katlı ve tek açıklıklı çerçevede her kat rijit hareket yapılabiliyorsa döşeme kütleleri kiriş-kolon bağlantılarında toplanabilir. Kiriş elemanlarında genellikle aksenal uzamanın ihmal edilebildiği de göz önünde bulundurulursa topaklı kütleler sadece yatay doğrultuda hareket edebilir ve sistemin iki serbestlik derecesine sahip olduğu söylenebilir. Şekil 2.22b’deki örnekte sürekli basit kiriş elemanının kütlesi açıklık ortasındaki iki farklı kütlede toplanmıştır. Bu elemanın da serbestlik derecesi 2’dir. Şekil 2.22c’de görülen sistemde bu sefer dış uyarı üç farklı kütlelin yatay doğrultuda hareketini tetikleyeceğinden sistem üç serbestlik derecesine sahiptir. Son olarak Şekil 2.22d’de görülen rijit plakla modellenmiş kat döşemesi modelinde döşeme, planda yatay ve düşey çizgisel hareket yapabilir. Bunlara ilaveten bir de burulma momenti etkisinde dönme hareketi gerçekleştirebilir. Toplamda üç hareket bileşeni olduğundan bu sistemin üç serbestlik derecesine sahip olduğu söylenebilir.

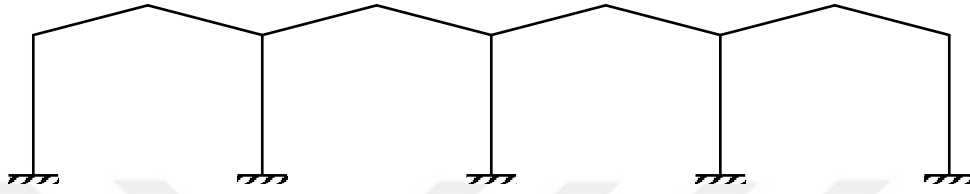


Şekil 2.22. Çok serbestlik dereceli sistem örnekleri **a)** İki katlı çerçeve **b)** Topaklı kütleli kiriş **c)** Çoklu kütle-yay sistemi **d)** Kat döşemesi modeli

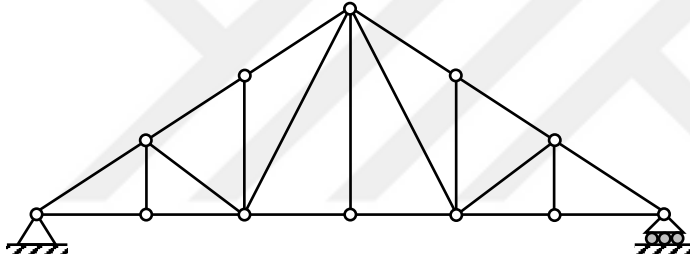
2.3.2. Ayrık ve sürekli sistemler

Bir önceki altbaşlığın en sonunda sistemleri serbestlik derecesine göre ayırmıştık. Bu altbaşlıkta ise mekanik sistemleri çalışma prensibine göre ayıracğız. Buna göre ayrık sistem ve sürekli sistem kavramını ele alacağız. Serbestlik derecesini belli bir sayı ile ifade ettiğimiz tüm sistemler ayrık çalışır. Bileşenler her ne kadar birbiri ile etkileşimde olsa bile her birinin kendi başına mekanik analizi yapılabilir. Bunun için diğer bileşenlerden incelenecek olan bileşene gelen etkileri tespit edebilmek yeterlidir. Bir

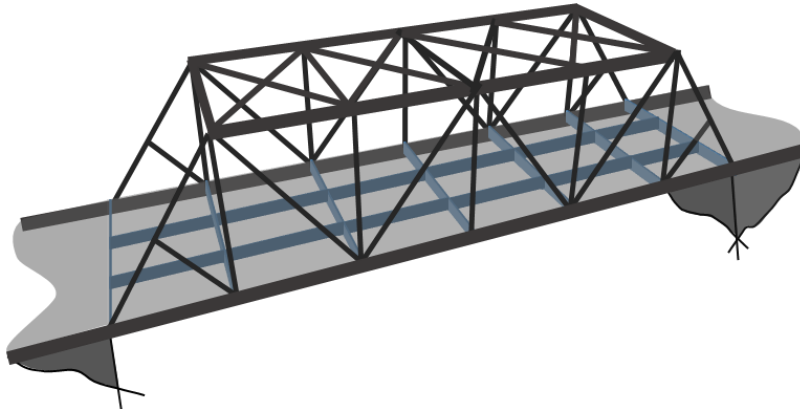
önceki başlıkta verdiğimiz tek ve çok serbestlikli sistemlerin hepsi ayrıktır. Ek olarak, çerçeve sistemler, kafes sistemler veya bunların bileşimi olan karma yapılar da ayrıktır. Kafes sistemler, sadece eksenel zorlama alıp eksenel deformasyon yapabilen üyelerden meydana gelirler. Çerçeve sistemler ise eksenel etkilerin yanı sıra kesme ve eğilme etkileri de alabilen ve bunların doğrultularında şekil değişimi yapabilen üyelerden oluşur. Anlaşılacak olduğu üzere kafes ve çerçevelerin üyeleri tek doğrultuludur. Tek veya çok doğrultulu olmasının yanı sıra mekanik açıdan da farklı tipteki üyelerin bir arada olduğu sistemler de karma olarak nitelendirilir. Bahsedilen ayrıktır sistemler aşağıda görülmektedir.



(a)



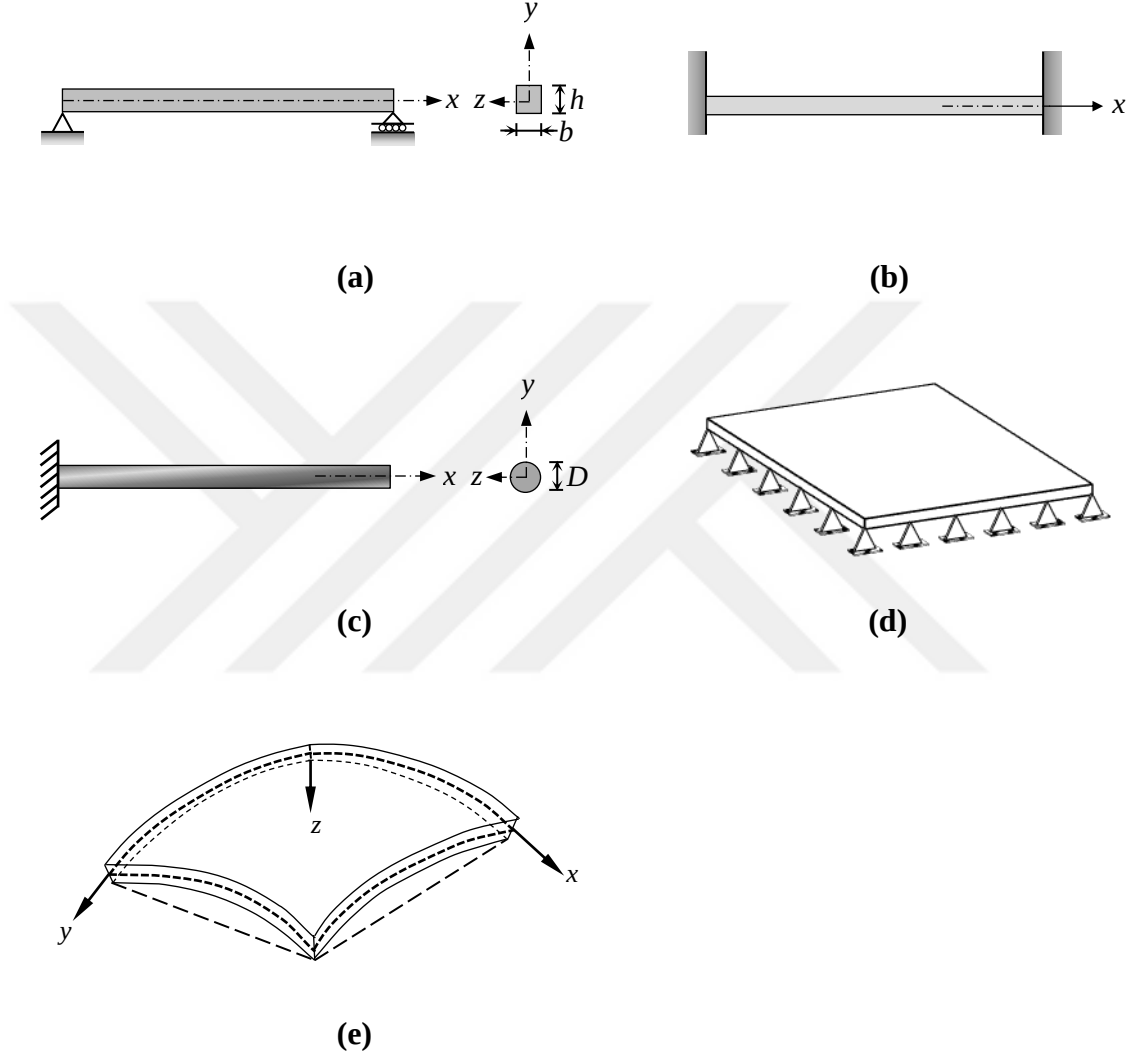
(b)



(c)

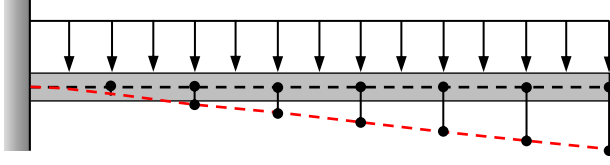
Şekil 2.23. Diğer ayrıktır sistem örnekleri **a)** Çok açıklıklı düzlem portal çerçeve **b)** Düzlem kafes **c)** Karma sistem

Sürekli sistemler serbestlik derecesi sonsuz olan sistemlerdir. İnce ve gergin teller, değişken veya sabit kesitli borular, burulmaya çalışan şaftlar, dolu göveli sürekli kirişler/çubuklar, plaklar ve kabuklar sürekli sistemlere örnek olarak verilebilir. Bu tip sistemler doğrultu sayılarına, geometrilerine, aldıkları iç tesir ve deformasyonlarının sayı ve niteliklerine göre karakterize edilebilir. Sürekli sistem örnekleri Şekil 2.24'te çizilmiştir.



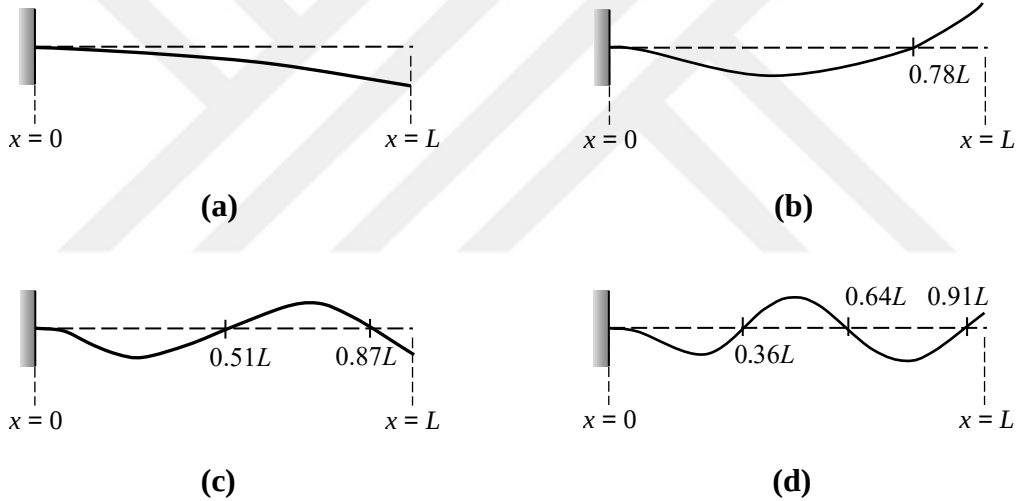
Şekil 2.24. Sürekli sistem örnekleri **a)** Her iki ucu basit mesnetli kiriş **b)** Her iki ucu tam tutulu eksenel çubuk **c)** Burulma çubuğu **d)** Kare plak **e)** Eğrisel kabuk

Sürekli sistemlerin analizi matematiksel süreklilik denklemleri, sınır ve uygunluk şartları üzerinden gerçekleştirilir. Bu belirtilen sistematığı çok basit bir örnek üzerinden açıklayacağız. Eğilme elemanlarının yani kirişlerin statik yükler altındaki yer değiştirme denklemi bir diferansiyel denklemin geometrik ve mekanik sınır şartlarına göre çözümüne bağlıdır. Konsol bir kirişe açıklığı boyunca üniform yayılı ve statik bir yük etkiğinde bu yer değiştirme olayı eleman boyunca sürekli. Yani elemanda yerdeğiştirme yapmayan nokta kalmaz (Sınır şartı teşkil eden ankastre uç hariç). En azından bu tip yüklemeler altında oluşan yer değiştirme, kesiksiz başka bir deyişle sürekli bir fonksiyonla ifade edilir.



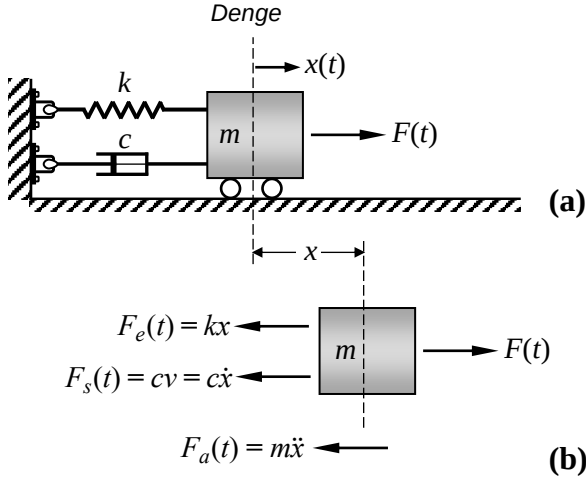
Şekil 2.25. Konsol kirişin statik üniform yayılı yük altında sürekli yer değiştirmesi

Sürekli elemana etkiyen dış zorlamaların anlık veya darbeleri olması durumunda bir titreşimden söz edilebilir ve bu titreşim olayı zorlanmış titreşim olarak nitelendirilir. Ancak, dış zorlamaların etkilemediği veya etkir etkimez hemen kalktığı cisimlerin kendi iç dengesi altında doğal sıklığı ile görülebilen bir titreşim olgusu vardır ve bu titreşim olayı serbest titreşim kavramını tanımlar. Serbest titreşimde bir titreşim mod şekli oluşur ve yukarıda verilen statik yük altındaki elastik şekil değiştirme olayına benzer şekilde, bu mod şeklinin de sürekli bir fonksiyon teşkil etmesi beklenir. Mesela, konsol bir kirişin serbest titreşimine ait ilk dört mod şekli Şekil 2.26'da verilmiştir.



Şekil 2.26. Konsol kirişin serbest titreşiminde farklı mod şekilleri **a)** Temel mod şekli **b)** İkinci mod şekli **c)** Üçüncü mod şekli **d)** Dördüncü mod şekli

Ayrık ve sürekli sistemlerin tam manasıyla karakterize edilmesinin temelinde matematiksel formülasyonlarının oluşturulabilmesi ile ilgili belirgin ayrımlar vardır. İlk olarak tek serbestlikli sistemlere değinelim. Bunun için Şekil 2.27'de görülmekte olan k rijitlik sabitli yay ve c sönüm sabitli sönümleyici etkisindeki kütle ve serbest cisim diyagramı düşünölsün.



Şekil 2.27. a) Yay ve sönüm etkisinde dış uyarıya maruz kütle **b)** Serbest cisim diyagramı

Sistem, dış uyarı etkisinde $x = x(t)$ kadar yerdeğiştirme gerçekleştirirse

$$F_e(t) = kx, \quad F_s(t) = cv = c\dot{x} \quad (2.15)$$

şeklinde iç tesir kuvvetleri oluşur. F_e ve F_s sırayla yay ve sönüm elemanlarında oluşan kuvvetleri ve $\dot{x} = \dot{x}(t) = dx/dt$ hız bileşenini belirtir. Bu tez çalışmasında bir fonksiyonun zamana göre bir defa türevi alınacaksa tek nokta, iki defa türevi alınacaksa çift nokta notasyonu kullanılacaktır ($\dot{\diamond} = d\diamond/dt$, $\ddot{\diamond} = d^2\diamond/dt^2$). Newton'un ikinci hareket yasası gereğince

$$\sum F_{net} = F_a = ma = m\ddot{x} \quad (2.16)$$

yazılır. Burada m kütle ve $a = \ddot{x}$ ivmedir. Anlaşılacağı üzere net kuvveti atalet kuvvetleri dengeler. Şekil 2.27.b'deki serbest cisim diyagramı göz önüne alındığında Denklem (2.16) düzenlenebilir:

$$F(t) - F_e(t) - F_s(t) = m\ddot{x} \quad (2.17)$$

Denklem (2.15)'te görülen ifadeler Denklem (2.17)'de yerine konursa

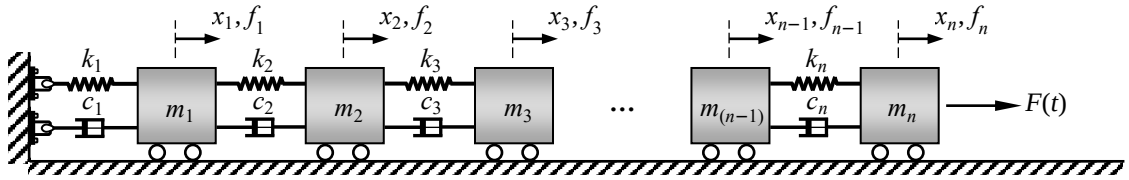
$$kx(t) + c\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t) \quad (2.18)$$

elde edilir. Bu denklem titreşimin en genel hareket denklemi olarak bilinir. Bir titreşim hareketi,

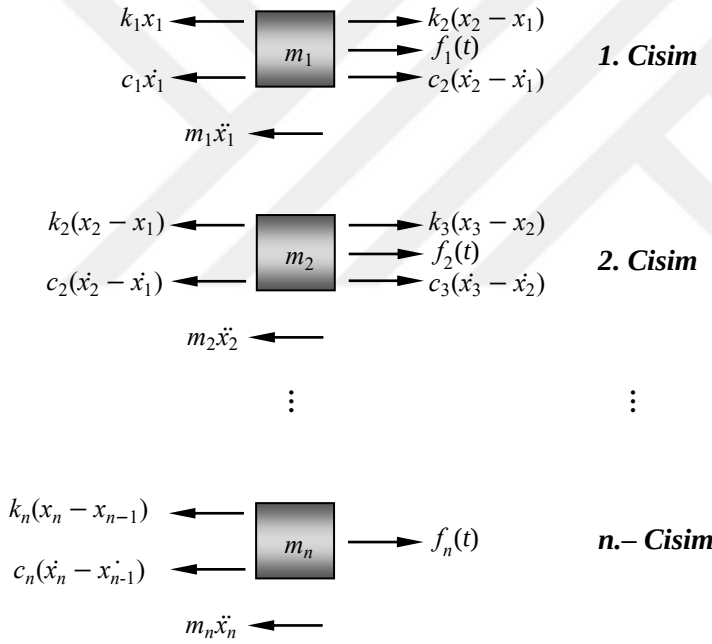
- $c = 0$ ve $F = 0$ için sönümsüz serbest titreşim,
- $c = 0$ ve $F \neq 0$ için sönümsüz zorlanmış titreşim,
- $c \neq 0$ ve $F = 0$ için sönümlü serbest titreşim,
- $c \neq 0$ ve $F \neq 0$ için sönümlü zorlanmış titreşim,

olarak nitelendirilir. Bu dört farklı durumu birbirinden ayırt eden nokta Denklem (2.18)'de görülen ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemin çözümünün değişkenlik göstermesidir.

Tek serbestlikli lineer sistemler için bu yapıları çok serbestlikli sistemlere de uyarlanabilir. Buna göre Şekil 2.28'de çizilmiş olan çok serbestlikli yay-sönüm-kütle modeli ve her bir kütle için serbest cisim diyagramı incelenebilir.



(a)



(b)

Şekil 2.28. a) Çok serbestlikli sistem modeli **b)** Sistemdeki ayırık kütlelerin serbest cisim diyagramı

Sistemin yerdeğiştirme, hız ve ivme bileşenleri için $x_n > x_{n-1} > \dots > x_3 > x_2 > x_1$, $\dot{x}_n > \dot{x}_{n-1} > \dots > \dot{x}_3 > \dot{x}_2 > \dot{x}_1$ ve $\ddot{x}_n > \ddot{x}_{n-1} > \dots > \ddot{x}_3 > \ddot{x}_2 > \ddot{x}_1$ kabulleri altında Denklem (2.16) ilk olarak birinci cisim için düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\sum F_{net,1} &= m_1 \ddot{x}_1 \\
-k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1 &= m_1 \ddot{x}_1 \\
(k_1 + k_2)x_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 + (-k_1)x_2 + (-c_2)\dot{x}_2 + (m_1)\ddot{x}_1 &= f_1
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra aynı denklem ikinci cisim için yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum F_{net,2} &= m_2 \ddot{x}_2 \\
-k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3 (x_3 - x_2) + f_2 &= m_2 \ddot{x}_2 \\
(-k_2)x_1 + (-c_2)\dot{x}_1 + (k_2 + k_3)x_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 + (m_2)\ddot{x}_2 + (-k_3)x_3 + (-c_3)\dot{x}_3 &= f_2
\end{aligned} \tag{2.19}$$

olur. Denklem (2.19) n .- cismin serbest cisim diyagramına kadar genelleştirilebilir. Bu nedenle tüm cisimlerin denge şartını yazmak yerine n .- cismin dengesini inceleyelim,

$$\begin{aligned}
\sum F_{net,n} &= m_n \ddot{x}_n \\
-k_n (x_n - x_{n-1}) - c_n (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + f_n &= m_n \ddot{x}_n \\
(-k_n)x_{n-1} + (-c_n)\dot{x}_{n-1} + (k_n)x_n + (c_n)\dot{x}_n + (m_n)\ddot{x}_n &= f_n
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Denklem (2.18), (2.19) ve (2.20) açık matris notasyonu formunda

$$[k_{ij}]\{x_i\} + [c_{ij}]\{\dot{x}_i\} + [m_{ij}]\{\ddot{x}_i\} = \{f_i\} \tag{2.21}$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle tanımlı hale gelen

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix},$$

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{bmatrix},$$

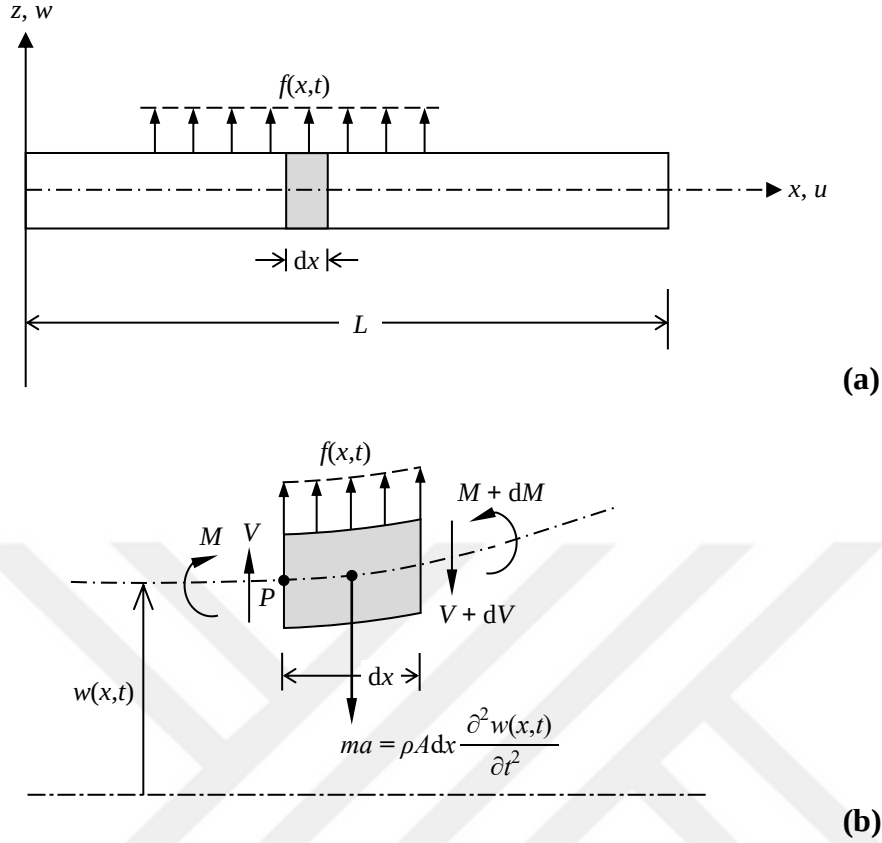
$$[m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ifadelerinden $[k_{ij}]$ rijitlik, $[c_{ij}]$ sönüm ve $[m_{ij}]$ kütle matrislerini tanımlar. Denklem (2.23)'te görülen

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n \ x_{n-1}]^T, \quad \{\dot{x}_i\} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \cdots \ \dot{x}_n \ \dot{x}_{n-1}]^T, \\ \{\ddot{x}_i\} &= [\ddot{x}_1 \ \ddot{x}_2 \ \ddot{x}_3 \ \cdots \ \ddot{x}_n \ \ddot{x}_{n-1}]^T, \quad \{f_i\} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \cdots \ f_n \ f_{n-1}]^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

ifadelerinden $\{x_i\}$ yer değiştirme vektörü, $\{\dot{x}_i\}$ hız vektörü, $\{\ddot{x}_i\}$ ivme vektörü ve $\{f_i\}$ kuvvet vektörüdür.

Buraya kadar ayırık sistemleri inceledik. Dikkat edilirse sistemdeki her bir ayırık kütlelerin komşuluğundaki yay ve sönüm gibi yapılara bağlı bir şekilde dinamik denge analizi gerçekleştirilmektedir. Ancak sistemin kütleleri birbirinden etkilenmemektedir. Sürekli sistemlerde ise durum farklıdır. Sürekli ortamlar mekaniğine göre bir cismin mekanik zorlara karşı göstereceği davranışın analizi için tüm cisim bir arada düşünülmelidir çünkü cisim adı üzerinde süreklidir. Tabi analizler genellikle cismin tamamını matematik ve mekanik anlamda temsil edebilme kabiliyetine sahip oldukça küçük bir parça üzerinden yapılır. Şöyle ki, sürekli yapıdan alınacak sonsuz küçük parça üzerindeki iç tesirler ve deformasyonların doğru betimlemesi yapıldıktan sonra uygun matematiksel işlemlerin kullanımı ile tüm cismin mekanik analizi (konumuz gereği titreşimi) gerçekleştirilebilir. Bu anlatılanları da elastik kirişlerin serbest titreşimi üzerinden örnekleyeceğiz. Buna göre, düz bir eğilme çubuğu ve içinden çıkarılmış sonsuz küçük parçanın serbest cisim diyagramı Şekil 2.29'da verilmiştir.



Şekil 2.29. a) Enine dış zorlamasına maruz eğilme çubuğu **b)** Çubuktan çıkarılmış dx uzunluğundaki diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı

Eğilme elemanları enine kuvvetler etkisinde titreşime maruz kalabilir. Burada $w = w(x,t)$ enine yerdeğiştirme, $f = f(x,t)$ enine dış kuvvet zoru (uyarı), $M = M(x,t)$ eğilme momenti, $V = V(x,t)$ kesme kuvvetidir. İlk olarak kirişin atalet kuvveti

$$dm a = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

olarak verilir. Burada dm diferansiyel elemanın kütlesi, a ivme, ρ birim hacim kütlesi ve A kesit alanıdır. Enine kuvvetlerin dengesini yazacak olursak

$$-(V + dV) + f dx + V = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

olur. Öte yandan iç ve dış tesirlerin P noktasına göre moment dengesi

$$(M + dM) - (V + dV) + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (2.26)$$

şeklinde. Yüksek mertebeden diferansiyel terimler oldukça küçük mertebede olduğundan denklemden düşerler. Neticede eğilme momenti ve kesme kuvveti arasındaki

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (2.27)$$

bağıntısı karşımıza çıkar. Diferansiyel kesme kuvveti için

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad (2.28)$$

eşitliği kurulabilir. Denklem (2.28)'in oluşturulabilmesiyle alakalı olarak tezin Ekler bölümünde sunulmuş kısımlardan Ek-1: Taylor serileri kısmına bakılabilir. Denklem (2.28), Denklem (2.25)'te yerine yazılırsa

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

elde edilir. Euler–Bernoulli eğilme varsayımlarına göre ortaya çıkan önemli bir ilişkinin

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

olduğunu biliyoruz. Burada E elastisite modülü ve I atalet momentidir. Denklem (2.27) ve (2.30), Denklem (2.29)'da yerine yazılırsa

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (2.31)$$

ifadesi ortaya çıkar. İşte bu denklem, sürekli kiriş elemanının titreşim denklemdir. Tek serbestlikli sistemlerle bir analogi yapmak istersek, buradaki $EI(\partial^4 w / \partial x^4)$ teriminin rijitliğe ve $\rho A(\partial^2 w / \partial t^2)$ teriminin kütle ataletine karşılık geldiğini belirtebiliriz. Öte yandan bu denklemin değişkenlere ayırma gibi genel bilinen metotlarla çözümü gerçekleştirilebilir ve titreşim hareketinin esasları sürekli eleman için kavranabilir. Tabi bu anlatılanın detayına şu anda girilmeyecektir.

Bu altbaşlıkta son olarak titreşimin bir diğer çözümü olan modal analiz fonksiyonunun kullanımından bahsedeceğiz. Buna göre Denklem (2.21) için özel olarak sönümsüz serbest titreşimi ele alalım.

$$[k_{ij}] \{x_i\} + [m_{ij}] \{\ddot{x}_i\} = 0 \quad (2.32)$$

Çok serbestlikli sistemde düğüm noktalarını temsil eden kütlelerin yerdeğiştirmeleri

$$\{x_i\} = \{X_i\} \sin(\omega_i t + \phi) \quad (2.33)$$

ile ifade edilebilir. Burada ω_i i. mod için titreşim frekansdır (mod kelimesi titreşimin fiziksel çıktısını tanımlar). ϕ ise faz açısıdır. Denklem (2.33)'ün dinamik olaydaki yerdeğiştirmelerin statik esaslara göre yorumlanmasını sağlayan ve hesapları kolaylaştırıcı bir yaklaşım olduğu belirtilebilir. Bu harmonik fonksiyonun zamana göre ikinci mertebeden türevi

$$\{\ddot{x}_i\} = -\omega_i^2 \{X_i\} \sin(\omega_i t + \phi) \quad (2.34)$$

şeklindedir. Denklem (2.33) ve (2.34), Denklem (2.32)'de yerine konursa

$$([k_{ij}] - \omega_i^2 [m_{ij}]) \{X_i\} = 0 \quad (2.35)$$

şeklinde yazılan ifadenin triviyal (aşıkâr olmayan) çözümünün elde edilebilmesi için genlik vektörünün önündeki parantezin içindeki matris ifadesinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır:

$$|k_{ij} - \omega_i^2 m_{ij}| = 0 \quad (2.36)$$

Bu ifade bir standart özdeğer problemini belirtir. Denklemin kökleri olan ω_i değerleri sistemin titreşim göstereceği her modun özdeğerleri yani doğal titreşim frekanslarıdır. Her bir özdeğere karşılık gelen $\{X_i\}$ ifadesi de özvektör yani mod şekli olarak tanımlanır. Bu vektör özellikle tez çalışmasındaki sonlu eleman analizlerinde çok önemli bir yer teşkil edecektir.

2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi

2.4.1. Giriş

Mühendislik disiplinleri fiziksel bir problemi matematiksel olarak ifade edip bunun çözümünün üzerine gider. Her fiziksel problem aynı karakteristiği sergilemeyebilir. Konumuz gereği mekanikten bahsetmek istersek, her ne kadar çoğunlukta olmasa bile sistemlerin bazen doğrusal olmayan davranış içerdiği veya içerebileceği bilinmektedir. Başka bir örnek, sisteme dış yükün yanı sıra elastik zemin, termal çevre, piezo, elektrik, manyetik veya optik etkiler de etkiyebilir. Bunlar olmasa bile sırf dış yüklenme durumu aşırı karmaşık olabilir. Yahut yapı basit bir formda değil, tabakalı kompozit veya kademeli kompozit olabilir. Yani mekanik problemler uğraşı alanına göre dallanıp budaklanabilir. Çoğu basit mekanik analizlerde kullandığımız analitik yöntemler karmaşık problemlerde bizi yarı yolda bırakabilir çünkü bu yöntemlerin gücü hakikaten çok sınırlıdır. Evet, bu bir sorundur ancak çözüm elde edemiyor olmak, mühendislik işlevi yerine getirilemediği için daha ciddi bir sorundur çünkü mühendis sayılar karşısında yorum yapıp belli kıstaslar altında bunu çıktıya (ürüne) dönüştüren kişidir.

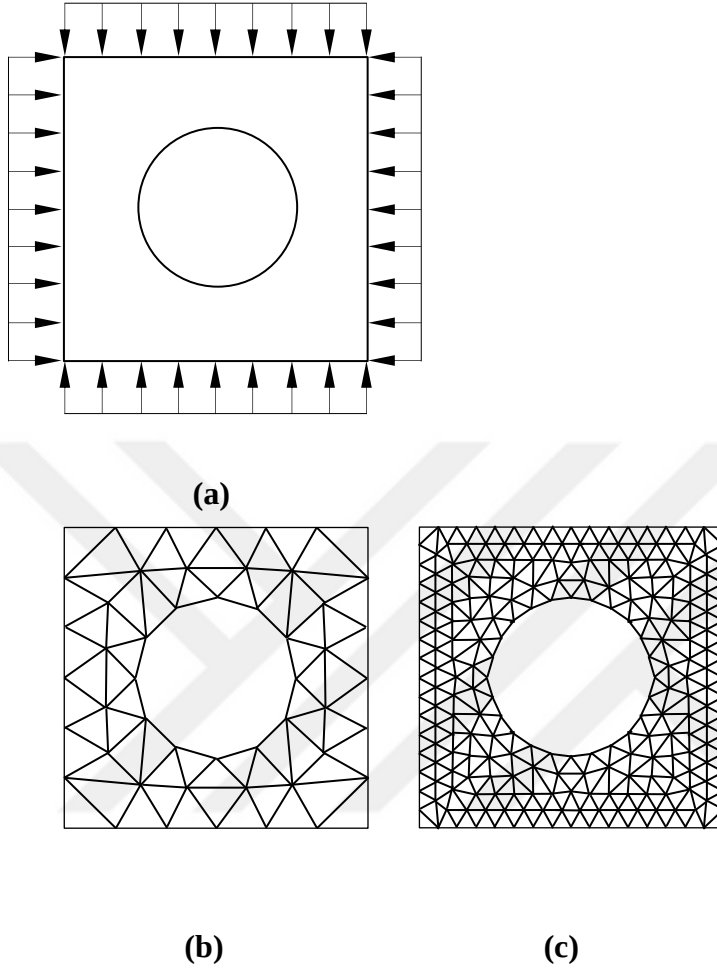
Tanımlanmış bu problemin üstesinden gelmek için sayısal yöntemler geliştirilmiş ve halen geliştirilmektedir. Günümüzde birçok sayısal yöntem artık analitik yöntemlerin alternatifi konumundadır. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) bu yöntemlerden birisi olup çok güçlü bir matematiksel bir işlem aracıdır. FEM'in tarihçesinin 1940'lı yıllara dayandığı belirtilebilir. Çeşitli yazarlar tarafından yazılan ve dilimize de çevrilen kaynaklardan derlenen yöntemin kısa bir tarihçesi şöyle verilebilir (Moaveni 2015; Fish ve Belytschko 2016; Chandrupatla ve Belegundu 2017): Courant (1943) incelediği elemanın üçgen şeklindeki alt birimlere ayrılması ile oluşan bir interpolasyon yöntemini kullanmıştır. 1950'li yıllarda hava-uzay endüstrisi alanında, uçak kanatlarının gerilme analizi gerçekleştirilmiştir. Argyris (1954) tarafından yapılan çalışmada enerji formülasyonları ve matris cebri anlatılmıştır. Turner vd. (1956) çalışmalarında temel esasları ilk kez açıkladılar ancak "sonlu eleman" kavramını kullanmadılar. Bu kavram ilk defa 1960'da Ray W. Clough tarafından kullanıldı. Zienkiewicz ve Cheung (1967) ilk sonlu elemanlar metodu kitabını yazmıştır. Ayrıca doğrusal davranmama durumunun mühendislik problemlerindeki varlığı sonlu elemanlar yönteminin gelişiminde etkide bulunmuştur. Doğrusal olmayan sonlu elemanlar analizleri hakkındaki ilk kitap Oden (1972) tarafından yayınlanmıştır. Tabi bu teorik gelişimin yanında 1965'te NASTRAN ve 1971'de ANSYS gibi bilgisayar programlarının ortaya çıktığını da belirtebiliriz.

2.4.2. Sonlu eleman tanımı ve mekanik sistemlerin sonlu eleman modeli

FEM, incelenecek olan fiziksel sistemi (bütün) sonlu eleman adı verilen fiziksel ve geometrik özellikleri ve sınırları belli olan, mekanik özellikleri belli bir prosedüre göre formüle edilebilen alt elemanlara (birimlere) bölerek analiz eden bir yöntemdir. Burada sonlu denmesinin sebebi sonsuz sayıda noktadan oluştuğu varsayılan sistemin sonlu sayıdaki elemanlara ayrıştırılmasıdır. Belli prosedür kavramından kasıt daha ileride ele alınacak olan şekil fonksiyonlarıdır. Metot genel olarak, sonlu elemanlar arasındaki etkileşimden yola çıkarak tüm sistemi küresel matrisler denilen ileride daha detaylı açıklanacak kavramlar ışığında birleştirir. Bu birleşim sonucunda oluşan lineer cebrik denklem takımları matris cebirinden bilinen metotlarla çözüme kavuşturulur. Böylece tüm sistem çözümü tamamlanır. Ancak bazı problemlerde bütünden elde edilen analiz sonuçlarının birimlere uygulanması gerekebilir. Örnek verecek olursak, ayırık olsun sürekli olsun, yapının titreşim frekansı veya burkulma yükü aranıyorsa tüm sistemi ifade eden matrislerden ileri gelen özdeğer probleminin köklerini hesaplamak yeterlidir. Ancak bir kafes veya çerçeve yapısında eğilme problemi analizi için çubuk (ayırık üye) elemanların iç kuvvetleri, önce küresel matrislerden deplasmanların elde edilip daha sonra bu deplasmanların her bir çubuğu formüle eden matris eşitliklerinde bir dizi işlemlere tabi tutulması ile hesaplanabilir. Bu arada, basit ve tek doğrultulu elemanlarla çalışan ayırık sistemlerde sonlu elemanlar ayırık üyelerin kendisidir. Sürekli bir sistem ise, bir adet sonlu elemanın bizzatı kendisi olabileceği gibi çok sayıda sonlu elemana bölünmek suretiyle de modellenebilir.

Sonlu elemanlar yöntemi bir sayısal yöntem olduğundan elde edilen sonuçların analitik yönetime yaklaşık neticeler vermesi beklenir. Tabi bu neticelerin yakınsaklık mertebesi belli prosedürler altında ayarlanabilir. Bu sefer belli prosedür kavramından kasıt, mümkün olduğunca birbirine eşit boyutlarda ve yüksek sayıda sonlu eleman seçimidir. Tüm kenarlarından homojen basınçlanmaya maruz kalan dairesel delikli plak ve sonlu eleman modelleri Şekil 2.30'da sunulmuştur. Dikkat edilirse sonlu eleman

modellerinin birinde az sayıda üçgen sonlu eleman kullanılmışken diğerinde daha fazla sayıda ve mümkün olduğunca eş boyutlara sahip elemanlar kullanılmıştır.



Şekil 2.30. a) Tüm kenarlarından basınçlanmış dairesel delikli plak **b)** Sonlu elemanlar modeli (az hassas) **c)** İyileştirilmiş sonlu eleman modeli (daha hassas)

Delikli plağın ilgili mekanik zor altındaki mekanik analiz neticelerinin analitik yöntemlerle elde edilebilirliği kesin değildir. Ancak, algoritması doğru programlanabilecek bir sonlu elemanlar formülasyonu sayesinde yaklaşık da olsa netice alınabileceği kesindir (Tabi öngöremediğimiz istisnai durumlar oluşmazsa). Sonlu elemanlar metodu için vurgulamamız gereken diğer kesin ve çok önemli bir husus şudur: Eğer mekanik sistemde kullanımı uygun sonlu eleman sayısını artırırsak daha hassas yani doğru sonuçlar elde ederiz. Bu bağlamda, Şekil 2.30b’de görülen iyileştirilmiş sonlu elemanlar modeli, Şekil 2.30a’da görülen modelden daha avantajlıdır. Ek olarak, az sonlu elemanlar modelinden kaynaklanan dairesel deliğin çokgenimsi halde olduğu algısının iyileştirilmiş sonlu elemanlar modelinin kullanımı ile ortadan kalktığını belirtebiliriz. Tam bu noktada vurgulamalıyız ki yanlış sayısal sonuçların kullanımı, mühendisliğin esaslarına aykırı tasarımlara yol açar.

Sonlu elemanlar geometrilerine göre değişiklik gösterebilmektedir. Doğrusal, düzlemsel, kübik, prizmatik gibi oldukça genel bir sınıflandırma yapılabilir. Doğrusal

elemanlar en az iki düğümlü elemanlardır. Düzlemsel, kübik ve prizmatik elemanlar en az köşelerinde bir düğüm bulunduran elemanlardır. Düzlemsel elemanlar üçgensel ve dörtgensel olabildiği gibi daha fazla sayıda kenarlı olabilir, dahası düzgün olmayan çokgen gibi de olabilir. Üç boyutlu (uzaysal) sonlu elemanlar da düzgün olmayan formda olabilirler. Bilinmelidir ki daha çok düğümlü yapılan sonlu eleman analizinde hassasiyet artar. Bu yüksek lisans tezi çalışmasının sonlu eleman kısmı sadece lineer (doğrusal) elemanları kapsadığı için diğer elemanlar hakkında bilgi verilmesi gerekli görülmemiştir.

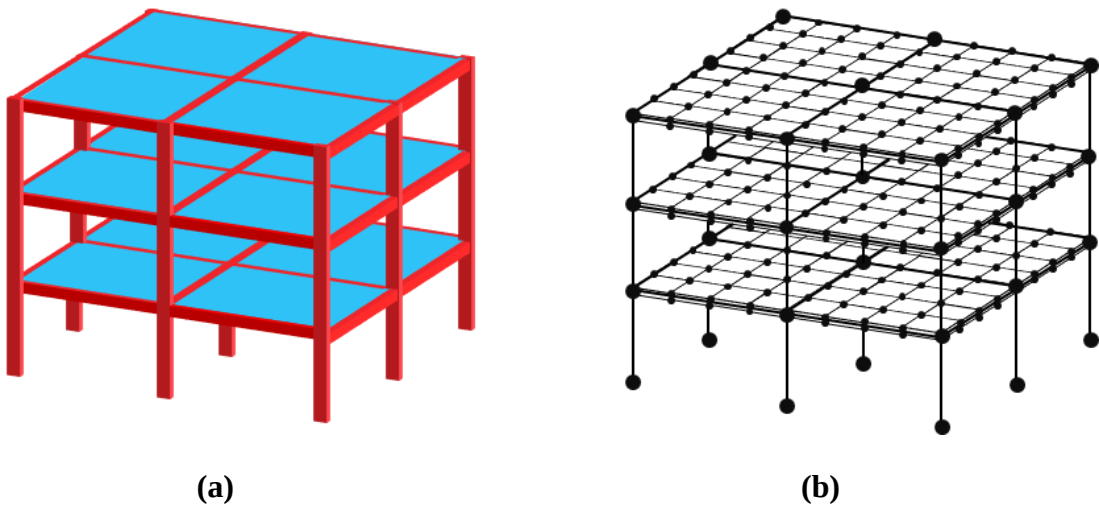
Her ne kadar farklı yapıların analizde kullanılan sonlu eleman formülasyonu farklı da olsa analizin temel aşamaları esasen aynıdır. Aşağıda sonlu eleman metodunun genel aşamaları kısaca aktarılmıştır.

1. **Sistemin sonlu eleman ağının oluşturulması:** Aslında bu aşamanın öncesinde kullanılacak sonlu eleman tipinin seçilmesi vardır. Buna göre, problemi temsil etme kabiliyetine sahip asgari sonlu eleman tipinin seçimi yapıldıktan sonra yapı (fiziksel sistem) ayrıkça bütün üyeleri, sürekliyse seçilmiş sonlu eleman sayısınca bölünmüş hali birbirine sonlu eleman sınırlarından bağlanır. Bu aşamada hangi sonlu elemanın hangi sınırlarda birbirine bağlandığı, düğüm ve eleman numaraları ve eleman yönelimleri tespit edilmelidir. Tüm bu bileşenler sonlu eleman ağının göz ardı edilemez parçalarıdır. Sonlu eleman ağının doğru oluşturulması sistem küresel matrislerinin oluşum aşamasını etkiler.
2. **İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi:** İnterpolasyon (şekil) fonksiyonları, kullanılan sonlu elemanın mekanik yer değişimi/dönme gibi hareketlerinin karakteristiğini yansıtır. Bir sonlu elemanın çok farklı şekil fonksiyonu olabilir. Burada mühim olan, problemin tipine uygun olan asgari şekil fonksiyonunun seçimidir. Örnek verecek olursak, basit eksenel çubuk teorisinde iki düğümlü lineer sonlu eleman iş görürken bu eleman kayma etkili eksenel çubuklarda kullanılamaz. Kayma etkili çubuklar için asgari üç düğümlü lineer sonlu eleman kullanmak gerekir. Şekil fonksiyonları tez çalışmasının sonlu elemanlar kısmında detaylı biçimde ele alınacaktır.
3. **Sonlu eleman matrislerinin hesaplanması:** Her bir sonlu elemanın fiziksel ve mekanik özellikleri vardır. Bu özellikler altında, her bir sonlu elemanın, ilgili mekanik problemin gerektirdiği matrisleri hesaplanır. Mesela, titreşim probleminde her bir sonlu elemanın kendi ekseninde yani yerel eksendeki rijitlik ve kütle matrisleri kurulmalıdır.
4. **Sistemin küresel matrislerinin hesaplanması:** Her bir sonlu elemanın küresel yapıda temsil edilebilirliğini sağlamak adına önce sistemin global eksenindeki transformasyonu gerçekleştirilir. Bazı durumlarda transformasyona gerek yoktur. Eğer gerekliyse transforme edilmiş sonlu eleman matrisleri, direkt değil, her bir sonlu elemanın serbestlikleri doğrultusunda toplanır. Böylece küresel matrisler hazır edilmiş olur. Küresel matrislerin sağlanması gereken bazı özellikler vardır ve bunlar ileride ele alınacaktır.
5. **Sınır şartların uygulanması:** Problemin analizi için gereken tüm küresel matrisler, sistemin tüm küresel geometrik tutululuk durumları (sınır şartları) altında indirgenir. İndirgeme zorunluluğu serbestlik derecesi kavramından ileri gelen bir durumdur.

Örneğin konsol kiriş elemanda, ilk sonlu eleman muhtemelen ankastre mesnetli elemana atanacaktır. Hatta bu sonlu elemanın ilk ucu ankastre mesnetlenme noktasını temsil edecektir. Bu durumda küresel matrisler kurulduktan sonra ankastre mesnet çökme ve dönmeye karşı rijit olduğundan bu deformasyonların yönündeki serbestlikler, küresel rijitlik matrisinden satır ve sütunca elimine edilir.

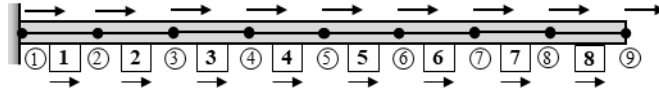
6. **Sistemin çözülmesi:** Küresel matrisler hazırsa, sistemi temsil eden mekanik problemin çözümü lineer cebir ve vektör analizi biliminden bilinen yöntemlerce gerçekleştirilir. Örneğin lineer statik analiz probleminde kurulması gereken denge (Hooke) denklemi, hazırlanan küresel rijitlik matrisinde yerine koyma metoduyla çözülür ve deplasman bileşenleri tespit edilir. Başka bir örnekte ise, burkulma probleminde küresel elastik rijitlik ve küresel geometrik rijitlik matrisleri tespit edildikten sonra bunlar ilgili özdeğer probleminde yerine koyulur ve özdeğer problemi ya elektronik ortamda ya da Newton–Raphson, Stodola (Kuvvet iterasyon) gibi bilinen sayısal yöntemlerle yapılır.
7. **Elemanların çözülmesi:** Sistem çözümünün yapılması sonlu eleman analizi sürecinin bir çıktısıdır ancak tek çıktı bu değildir. Mekanik çözümden elde edilen neticeler her bir sonlu elemanın kendi matris denklemlerinde kullanılarak eleman çözümü gerçekleştirilir. Örnek vermek gerekirse, çerçeve elemanın lineer statik analizinde sistem çözümü sonucunda sistemin deplasman, kesit dönmesi ve mesnet tepkileri gibi parametreleri elde edilir. Daha sonra her bir sonlu elemanın uçlarının temsil ettiği kesit tesirlerini hesaplamak için deplasmanlar ve kesit dönmeleri transforme edilir ve eğilme sonlu elemanın matris deplasman denkleminde yerine yazılır ve kesit tesirleri hesaplanır. Böylece sonlu elemanlarla analiz süreci tamamlanmış olur.

Daha çok uygulamaya yönelik ve oldukça akılda kalıcı bir örnek teşkil etmesi bakımından iki katlı ve plandaki her iki doğrultusu boyunca iki açıklıklı bir betonarme taşıyıcı sistem ve sonlu eleman modeli Şekil 2.31’de sunulmuştur.

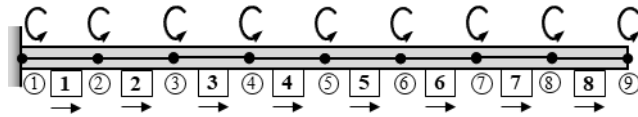


Şekil 2.31. a) Betonarme taşıyıcı sistem (Fiziksel sistem) b) Sonlu elemanlar modeli

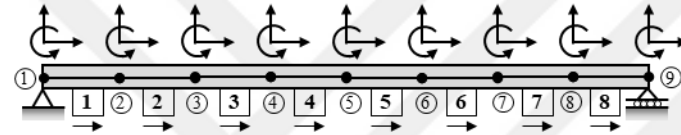
Tabi bizim konumuz yapı mühendisliği değil nano ölçekli sürekli ve ayırık sistemlerin mekanik analizidir. Bu bağlamda, tezin sonlu elemanlar kısmında yapılacaklar hakkında ön bilgi vermek açısından kiriş, eksenel çubuk, burulma çubuğu, kafes ve çerçeve örneklerinin basit sonlu eleman modelleri de Şekil 2.32’de görüldüğü gibidir.



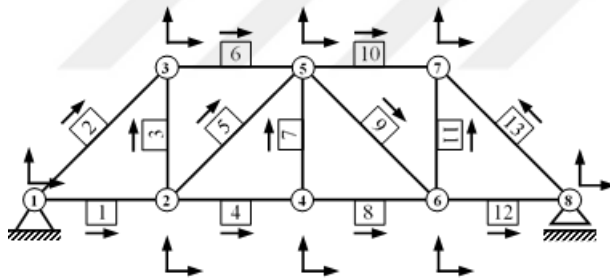
(a)



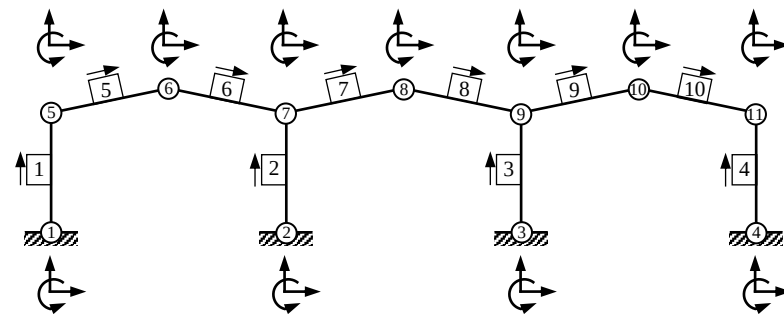
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 2.32. Çeşitli sürekli ve ayırık yapıların sonlu eleman modeli **a)** Eksenel çubuk **b)** Burulma çubuğu **c)** Eğilme çubuğu (Kiriş) **d)** Kafes **e)** Çerçeve

2.4.3. Sonlu elemanlar yönteminin uygulamaları

Sonlu elemanlar analizinin birçok problemin üstesinden gelebilen bir metot olduğunun anlaşılmasıyla uygulama alanları da olgunlaşmaya başlamıştır. FEM, makine, otomotiv, inşaat, uçak–uzay, elektromanyetizma, biyomedikal, tıp, dişçilik, endüstriyel tasarım gibi birçok alanda irili veya ufaklı bir şekilde kullanılmaktadır. Bu alanlardan birkaç özel örnek, cihaz tasarımında ısı iletiminin ölçümü, uçak kanadındaki gerilmelerin tespiti, canlı doku–dental yapı arasındaki kuvvetlerin hesabı, otomobillerin tasarım aşamasındaki dayanıklılık ve titreşim testleri olarak verilebilir. İnşaat mühendisliği disiplini içerisindeki kullanımdan bahsetmek istersek zeminlerin permeabilite analizi, stabilite analizi, viskoz akış alanında yer alan cismin maruz kaldığı kuvvetler ve belki de en yoğun kullanım konusu olan yapısal analiz örneklenebilir.

Sonlu elemanlar yöntemi tabanlı geliştirilen bilgisayar programları çok sayıdadır. NASTRAN, LS-DYNA, PATRAN, HYPERMESH, ABAQUS, ANSYS, STA4CAD, SAP2000, PLAXIS bu programlara örnektir. İnşaat mühendisliği disiplini açısından ANSYS genel bir sonlu eleman programı iken, SAP2000 ve STA4CAD daha çok yapısal analizde ve PLAXIS geoteknik alanında göze çarpmaktadır.

2.5. Daha Önceden Yapılmış Çalışmalar

Boyutları, nano ve mikro ölçek gibi atomik düzeylerle ifade edilen yapılar ve malzemelerin mekanik özelliklerini araştırmak için birçok deneysel çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu tip çalışmalar çok ciddi bilgisayar kapasiteleri, uzun süren işlem süreçleri ve yüksek uzmanlık gerektirmektedir. Bahsedilen bu zorluk nedeniyle, sürekli ortam teorileri küçük boyutlu yapılar için geliştirmiş olup bu tip yapıların farklı mekanik analizlerine uygulanmıştır. İlgili sürekli ortam teorileri küçük boyutlu yapıların malzeme ölçek parametresini içermektedir ve bahsedilen uygulama alanında son 15 yıldır kullanılmaktadır. İçinde bulunduğumuz dönemde bu konuyla ilgili çalışmaların sıklaştığı ve dolayısıyla takibinin çok zorlaştığı belirtilebilir. Bu altbaşlıkta, yerel olmayan elastisite teorisi ağırlıklı olmak üzere küçük ölçekli yapıların boyut etkisi ile mekanik analizlerini konu alan çalışmalardan oldukça önemli görülenlerinden fazla detaya girilmeden bahsedilecektir.

Eringen ve bazı bilim adamları tarafından 1960'lı yıllarda temeli oluşturulan yerel olmayan elastisite teorisinin yaklaşık 40 yıl sonra katı cisimler mekaniği alanına uygulanmaya başlandığını görüyoruz. Bu noktada, Peddieson vd. (2003) tarafından gerçekleştirilen çalışmada ise yerel olmayan kiriş eğilmesi problemi incelenmiştir. Yerel olmayan gerilme denkleminde yola çıkılarak eğilme momenti ve kesme kuvveti türetilmiştir. Çeşitli yük tipleri etkisindeki her iki ucu basit mesnetli ve konsol kirişlerin yer değiştirme denklemleri sunulmuştur.

Sudak (2003) tarafından çok duvarlı karbon nanotüplerin burkulma analizi gerçekleştirilmiştir. Çalışmada tüpler arasındaki van der Waals etkileşimi de dikkate alınmıştır. Kritik şekil değiştirme formülasyonu yerel olmayan parametreyi (bu tez çalışmasında bazen atomik parametre olarak da zikredilecektir) de içerecek şekilde türetilmiştir. Farklı burkulma modlarında, burkulma davranışının değişimi yerel olmayan parametrenin değişimine göre sunulmuştur. Bahsedilen bu davranış, kritik yerel olmayan burkulma şekil değişiminin kritik klasik burkulma şekil değişimine oranıdır ve

sonuçlardan boyutsuz atomik parametrenin değişimi ile tanımlanmış oran parametresinin azaldığı görülebilir. Atomik parametrenin etkisi mod sayısı yükseldikçe daha çok belirginleşmiştir. Lu vd. (2007) tarafından yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin serbest titreşiminde faz hızları incelenmiştir. Nano ölçekteki yapıların dalga yayılım özelliklerinin anlaşılmasında yerel olmayan model tabanlı sonuçların, özellikle nanotüp tabanlı titreşim sistemlerinin tasarımında oldukça kullanışlı olduğunu vurgulamışlardır.

Wang vd. (2006) nanoçubuk ve tüplerin burkulma analizi yerel olmayan elastisiteye göre gerçekleştirmişlerdir. Burkulmanın yönetici denklemini Timoshenko kiriş teorisi ve varyasyonel cebre göre elde etmişlerdir. Uygulama olarak dört farklı sınır şartlı kirişlerin burkulma determinantlarını sunmuşlardır. Boyut ölçek parametresinin kesme deformasyonu etkisine benzer biçimde kritik burkulma yükünü düşürdüğünü vurgulamışlardır.

Wang ve Varadan (2006) yapmış oldukları çalışmada Timoshenko kiriş teorisi ile modellenmiş çift duvarlı karbon nanotüplerin yerel olmayan serbest titreşimini incelemişlerdir. Hareket denklemini türetirken kiriş elemanının dengesini ve van der Waals etkileşimini kullanmışlardır. Farklı kesit çapı, kiriş uzunluğu, atomik uzunluk ve mod sayısı gibi parametreler altında yerel olmayan frekansların klasik frekanslara oranını grafiksel olarak sunmuşlardır. Yerel olmayan elastisitenin serbest titreşim frekansları üzerinde düşürücü etkisinin atomik parametrenin yükselmesi, mod numarasının yükselmesi ve kiriş uzunluğunun düşmesi ile daha da belirgin hale geldiği çalışmadan anlaşılmaktadır.

Wang ve Liew (2007) yapmış oldukları çalışmada mikro ve nano ölçekli Euler–Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin üç farklı mesnetlenme modeli için tekil ve yayılı yük altında yerel olmayan eğilme analizini sunmuşlardır. Yönetici denklemleri denge denklemlerine göre elde etmişlerdir. Tekil yük, süreksizlik gösterdiğinden farklı bir matematiksel ifade yardımıyla modellenmiştir.

Reddy (2007) her iki ucu basit mesnetli kirişlerin eğilme, burkulma ve serbest titreşim analizini yerel olmayan elastisite teorisine göre yapmıştır. Kiriş modellemesinde Euler–Bernoulli, Timoshenko, Reddy (Reddy 1984, Heyliger ve Reddy 1988) ve Levinson (Levinson 1981) olmak üzere dört farklı kiriş teorisi kullanmıştır. Yönetici denklemleri varyasyonel cebre göre türetmiştir. Sayısal sonuçlarda atomik parametre kiriş çökmesini artırmakta, serbest titreşim frekanslarını ve kritik burkulma yüklerini azaltmaktadır. Bunlara ek olarak, genellikle Euler–Bernoulli dışındaki kiriş formülasyonlarının birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Reddy ve Pang (2007) karbon nanotüplerin Euler–Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorisine göre yerel olmayan eğilme, burkulma ve titreşim analizlerini sunmuştur. Kirişleri dört farklı sınır şarta göre modellemiştir. Atomik parametrenin her iki ucu ankastre mesnetli kirişin mekanik analiz sonuçlarını diğer mesnetlenme şartlarına göre daha çok etkilediği sonuçlardan anlaşılmaktadır.

Aydoğdu (2009a) tarafından yerel olmayan elastisite teorisi için oldukça önemli bir çalışma yapıldığı belirtilebilir. Çalışmada eksenel çubukların yerel olmayan serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Serbest titreşimin yönetici denklemi eksenel çubuğun dengesi temelli oluşturulmuş ve değişkenlerine ayırma ile çözülmüştür. Uygulama olması

açısından iki farklı sınır şarta sahip eksenel çubuğun frekans denklemi sunulmuştur. Yazar başka çalışmasında elastik ortama gömülü karbon nanotüplerin eksenel serbest titreşim analizini iki farklı sınır şart için gerçekleştirmiştir (Aydoğdu 2012).

Aydoğdu (2009b) yeni bir yerel olmayan kiriş teorisi ve onun eğilme, burkulma ve titreşim analizlerini sunmuştur. İlgili kiriş teorisinin kiriş koordinatının yanı sıra kirişin deformasyon yönündeki koordinatını içerdiğinden kesme (kayma) bağımlı bir formülasyon olduğu anlaşılmaktadır. Sayısal sonuçlar kapsamında her iki ucu basit mesnetli kirişlerin bu yeni formülasyonla elde edilmiş olan statik çökme, kritik burkulma yükleri ve serbest titreşim frekansları, Euler–Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş teorileri ile farklı uzunluk/yükseklik oranı ve yerel olmayan parametre için karşılaştırılmıştır.

Pradhan ve Reddy (2011) Winkler elastik zeminine oturan tek duvarlı karbon nanotüplerin yerel olmayan burkulma analizini diferansiyel transformasyon metodunu kullanarak gerçekleştirmiştir. Nanotüp yapısı Euler–Bernoulli kiriş teorisi ile dört farklı sınır şart için modellenmiştir.

Civalek ve Demir (2011) mikrotüpçüklerin yayılı ve tekil yük için yerel olmayan statik eğilme analizini diferansiyel kuadratür yöntemini kullanarak sunmuşlardır. Mikrotüpçükleri Euler–Bernoulli kiriş teorisi ile denge yaklaşımına dayanarak modellemişlerdir. Yerel olmayan parametrenin mikrotüpçüklerin statik davranışında önemli bir etki olduğunu vurgulamışlardır.

Guo ve Yang (2012) nanokonilerin yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak eksenel titreşim analizini yapmışlardır. Nanokoniler, daralan (veya sivrilen) kesitli eksenel çubuk olarak modellenmiştir. Çözümler üç farklı sınır şarta göre elde edilmiştir. Grafik biçimde sunulmuş olan sayısal sonuçlara bakıldığında zaman, normalize edilmiş frekans (yerel olmayan frekansın yerel frekansa oranı biçiminde tanımlanmış şekli) değerleri farklı atomik parametre ve nanokoninin geometrisine bağlı katsayıya göre verilen sonuçlara bakıldığında, atomik parametre arttıkça normalize frekans değeri azalmaktadır.

Lim vd. (2012) nanotüplerin serbest eksenel ve burulma titreşimlerini yeni bir yerel olmayan gerilme modeline göre incelemiştir. Modellemede 3 farklı sınır şart kullanmışlardır. Yeni modele göre elde ettikleri yönetici denklemin çözümünü değişkenlere ayırma ile yapmışlardır.

Thai (2012) kesme deformasyonlu yeni bir yerel olmayan kiriş teorisi üzerinde çalışmıştır. Teoriyi eğilme, burkulma ve titreşim problemlerine uygulamıştır. Yönetici denklemler Hamilton ilkesi yardımıyla elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar Euler–Bernoulli, Timoshenko ve Reddy ve yeni teoriye göre verilmiştir. Sonuçlar ele alındığında zaman atomik parametrenin her değerinde yeni teorisinin sonuçları Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerine yakın elde edilmektedir. Bahsedilen bu üç mekanik problemin yerel olmayan elastisite teorisi için sinüzoidal kesme deformasyonlu kiriş teorisindeki uygulamaları Thai ve Vo (2012) tarafından sunulmuştur. Bunlara ek olarak Thai vd. (2018) basit kayma deformasyonlu kirişlerin dört farklı sınır şart için statik eğilme ve serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir.

Islam vd. (2014) yapmış oldukları çalışmada dairesel kesitli nanoyapıların yerel olmayan burulma titreşimi ve dalga yayılımını incelemişlerdir. Burulma çubuğunun dinamik dengesine dayanarak elde ettikleri yönetici denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözmüşlerdir. Üç farklı sınır şarta sahip nanoçubukların burulma frekansı denklemini sunmuşlardır. Yerel olmayan parametrenin etkisinden dolayı rijitliğin düştüğünü belirtmişlerdir. Ayrıca bu parametrenin faz hızı, grup hızı ve titreşim frekansını düşürdüğünü de belirtmişlerdir.

Li (2014) Karbon nanotüplerin burulma titreşimi davranışını iki ayrı yerel olmayan model ve yarı sürekli bir modele göre açıklamaya yönelik bir çalışma yapmıştır. Yerel olmayan modellere bakıldığında zayıf model yerel olmayan elastisitedeki mekanik analiz için kullanılan kurucu denklemdir. İkinci yerel olmayan model ise geliştirilmiş modeldir ve denklemin çözümü bir seri açılımı ve Hamilton ilkesi kullanılarak mümkün olmuştur. Bunların yanı sıra önerilen yarı sürekli model ise atomik bağlar ve atomaltı yapı ile ilgilidir. Yarı sürekli modelin ilgili denklemleri de açısal koordinat takımı kullanılarak verilmiştir. Toplamda üç ayrı model için sunulmuş olan sayısal sonuçları incelediğimiz zaman, zayıf yerel olmayan modele göre atomik parametrenin artışı ile burulma frekansları her modda düşmüştür. Geliştirilmiş yerel olmayan modele göre ise durum tam tersidir. Yarı-sürekli modele bakıldığı zaman, tanımlanmış başka bir sabit, titreşim frekanslarını etkilemektedir. Buna göre bu sabitin kimi değerlerinde atomik parametrenin artışı yerel olmayan frekansı düşürürken kimi değerlerinde yerel olmayan frekansı arttırmıştır.

Ansari vd. (2015) çok duvarlı karbon nanotüplerin burkulma ve burkulma sonrası davranışını yerel olmayan Timoshenko kiriş modelini kullanarak incelemişlerdir. Elde etmiş oldukları yönetici denklemleri genelleştirilmiş diferansiyel kuadratur yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Uzunluk/çap, eksenel yük, yerel olmayan ifade gibi farklı parametreler altında üç farklı sınır şartlı kiriş elemanları için kritik yük oranlarını sunmuşlardır.

Li vd. (2017) eksenel çubuklardaki yerel olmayan titreşim ve dalga yayılımı problemlerini Love (Love 1944) ve Bishop (Bishop 1952) çubuk teorileri için incelemişlerdir. Çubuğun birim uzunluk kütlelerini (ρA) denklemlere katarken Poisson etkisini göz önüne almışlardır. Yönetici denklemleri Hamilton ilkesi yardımıyla çıkartmışlardır. Dört farklı sınır şartlı çubuklar için Basit (Bishop ve Love formülasyonlarındaki ilave etkilerin tamamını ihmal ettiğinden dolayı böyle zikredilmiştir), Bishop ve Love çubuk teorileri için serbest titreşim frekanslarını ve faz hızlarını hesaplamışlardır. Bu arada, Bishop teorisi literatürde Love–Bishop diye de anılır çünkü Love çubuğunda hem gözetilen yanal ataleti hem de gözetilmeyen kesme ataletini içerir. Başka bir çalışmada ise Karlicic vd. (2018) basit ve çoklu yapıdaki nano ölçekli Bishop çubuklarının yerel olmayan serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Yönetici denklemleri ve sınır şartları Hamilton ilkesine göre elde etmiş olup değişkenlerine ayırma ile çözmüşlerdir. Bunların yanı sıra Bishop çubuğunun sonlu farklar metodu ile yerel olmayan titreşim çözümünü de vermişlerdir.

Yayli (2018) elastik ortamda bulunan ve uçlarından burulmaya karşı rijiditeye sahip yay elemanı ile modellenmiş nanotüplerin burulma titreşimini araştırmıştır. Yerel olmayan burulma dinamiğinin yönetici denklemini Stokes' dönüşümü ile çözmüştür.

Numanoğlu vd. (2018) tutulu ve serbest gibi genel bilinen sınır koşullarına ek olarak uçta kütle ve/veya yay eklentisine sahip eksenel nanoçubukların yerel olmayan eksenel serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Sayısal sonuçlardan kütle eklentisinin frekansları düşürdüğü, yay eklentisinin rijitliğinin ise frekansları çoğunlukla artırdığı görülmektedir. Yerel olmayan parametre genel olarak bir ucu serbest diğer ucu kütleli ve bir ucu tutulu diğer ucu yay eklentili nanoçubukların serbest titreşim frekanslarını daha çok indirgemektedir.

Çok yakın geçmişte, Numanoğlu ve Civalek (2019a) nano ölçekli kafes ve çerçeve sistemlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşimini sunmuşlardır. Titreşime dair yönetici denklemleri, sonlu eleman temelli matris hareket formülasyonuna göre elde etmişlerdir. Farklı geometrilerdeki kafes ve çerçeve sistemlerin boyutsuz frekanslarının üzerinde atomik parametre, mod sayısı ve sistemlerin geometrik parametrelerinin etkisini incelemişlerdir.

Yerel olmayan elastisite ile ilgili diğer çalışmalardan bahsetmeden önce, diğer yüksek mertebeden elastisite teorilerinin mikro ve nano ölçekli yapıların mekaniğine uygulandığı çalışmalar hakkında bir parantez açmak gerekir. Bu bağlamda, değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisi kullanılarak Euler–Bernoulli kirişinin eğilmesi (Park ve Gao 2006), titreşimi (Kong vd. 2008), Timoshenko kirişlerinin eğilmesi ve titreşimi (Ma vd. 2008) ve yeni bir gerilme çifti kiriş formülasyonu (Kahrobaiyan vd. 2014), değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi ile Euler–Bernoulli kirişlerinin eğilmesi ve titreşimi (Kong vd. 2009), sonlu elemanlar formülasyonu ile eğilmesi (Kahrobaiyan vd. 2013a), titreşimi (Kahrobaiyan vd. 2015), yüzey enerjili eğilmesi ve burkulması (Lazopoulos ve Lazopoulos 2010), Timoshenko kirişlerinin eğilmesi (Wang vd. 2010), eksenel çubukların burulması (Gheshlaghi 2010, Kahrobaiyan vd. 2011), serbest titreşimi (Akgöz ve Civalek 2012), statığı ve titreşimi (Kahrobaiyan vd. 2013b), Love–Bishop çubuklarının serbest titreşimi (Güven 2014), elastik zemine oturan karbon nanotüplerin eğilmesi (Akgöz ve Civalek 2016), protein mikrotüpçüklerin burkulması (Akgöz ve Civalek 2011) örneklenebilir. Ek olarak eşil mekaniği elastisite teorisi kullanılarak nanoçubukların dalga yayılımı analizi (Gul ve Aydogdu 2017), elastik ortamdaki eksenel titreşimi (Gul vd. 2017), nanokirişlerin statığı ve dinamiği (Gul ve Aydogdu 2018) verilebilir.

Kirişlerin ve çubukların yerel olmayan mekanik analizlerinde farklı dış çevresel etmenlerin göz önüne alındığı ve önceki paragraflarda anılmamış bazı makale çalışmalarından da bahsedilebilir. İlk olarak, Euler–Bernoulli kirişlerinin termal titreşimi (Murmu ve Pradhan 2009, Janghorban 2012), elastik zemin etkisinde lineer olmayan titreşimi (Togun ve Bağdatlı 2015), lineer olmayan termal burkulması (Lim vd. 2012), piezo etkiler altında burkulması (Jandaghian ve Rahmani 2015), basınçlanmış ve termal etkiler altındaki tek duvarlı karbon nanotüplerin Euler–Bernoulli formülasyonu ile burkulma sonrası davranışı (Ansari vd. 2013) örnek verilebilir. Ayrıca termodinamik yaklaşımıyla yeni bir yerel olmayan Euler–Bernoulli kiriş modeli ve eğilme uygulaması da gerçekleştirilmiştir (de Sciarra ve Barretta 2014). Diğer yandan, Timoshenko kirişlerinin termal titreşimi (Benzair vd. 2008), çift parametrelili elastik zemine oturmuş eksenel yüklü Rayleigh kirişlerinin serbest titreşimi (Mustapha ve Zhong 2010, Timoshenko kirişinin termal etkiler altındaki titreşimi (Zidour vd. 2012), elastik ortamla etkileşim hali için titreşimi (Heireche vd. 2010), hem elastik ortam hem de termal etkilere maruz durumu için lineer olmayan titreşimi (Ansari ve Ramezannezhad 2011), manyetik–

elektrik etkiler altındaki eğilmesi, titreşimi ve burkulması (Li vd. 2015) sunulmuştur. Çubuklar açısından, uçta Buckyball kütlesi eklentili karbon nanotüplerin basit (kayma ve yanal ataletsiz) modelinin eksenel (Murmu ve Adhikari 2011) ve burulma titreşimi (Murmu vd. 2011), elastik ortam altındaki statik ve dinamik burulması (Arda ve Aydoğdu 2014), elastik ortama gömülü ve enine manyetik etki altındaki eksenel titreşimi (Murmu vd. 2014), uç eklentilerine sahip nanoçubuk modelinin Love teorisi ile eksenel titreşimi (Li vd. 2016) de çalışılmıştır. Ayrıca, yerel olmayan elastisite ile sürekli sistemlerin çatlak analizi, Euler–Bernoulli nanokirişlerinin titreşimi (Roostai vd. 2014), basit eksenel çubukların titreşimi (Hsu vd. 2011), elastik ortamdaki basit çubukların eksenel titreşimi (Hosseini vd. 2015), karbon nanotüplerin çubuk modelinin burulma titreşimi (Loya vd. 2014, Yayli vd. 2018) gibi alanlarda ele alınmıştır. Son olarak, uçta mikro kütle sensörlü (topaklı kütle eklentisi modeli) konsol Timoshenko kirişlerinin nanotüp modelinin serbest titreşimi de örnek verilebilir (Shen vd. 2012).

Son dönemde yerel olmayan elastisite teorisiyle ilgili olarak çalışılan yoğun konulardan bir tanesi de boyut etkisini gözetken sürekli ortam teorilerinin hibriti biçiminde karşımıza çıkan yerel olmayan değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi formülasyonudur. Bu konuda eksenel çubukların serbest titreşimi (Li vd. 2016, Zhu ve Li 2017, Xu vd. 2017), nano ölçekli sinüzoidal kesme deformasyonlu kirişlerin serbest titreşimi (Lu vd. 2017), Euler–Bernoulli kirişlerinin titreşimi (Apuzzo vd. 2018), lineer olmayan eğilmesi ve burkulması (Xu vd. 2017), tek duvarlı karbon nanotüplerin Timoshenko kirişi modelinin viskoelastik ortamdaki dalga yayını (Tang vd. 2017) literatürden verilebilecek temel örneklerdir.

Fonksiyonel dereceli malzemelerden imal edilmiş küçük ölçekli yapılar hakkındaki çalışmalara değinecek olursak Euler–Bernoulli kirişlerinin serbest titreşimi (Eltaher vd. 2012), burkulması ve eğilmesi (Eltaher vd. 2013), termal titreşimi (Ebrahimi ve Salari 2015a, 2015b), Timoshenko kirişlerinin titreşimi (Rahmani ve Pedram 2014), burkulması ve eğilmesi (Şimşek ve Yurtcu 2013, Eltaher vd. 2014), kesme deformasyonlu kirişlerin titreşimi (Ebrahimi ve Barati 2016), burulma çubuklarının statığı (Zhu ve Li 2017), Bishop çubuklarının eksenel titreşimi (Nazemnezhad ve Kamali 2018) şeklindeki çalışmalar belirtilebilir. Ek olarak, bir önceki paragrafta bahsedilmiş olan hibrit formülasyon ile yapılan çalışmalardan Euler–Bernoulli kirişlerinin eğilme, burkulma ve titreşimi (Li vd. 2017), dalga yayını analizi (Li vd. 2015) ve Timoshenko kirişlerinin titreşimi (Li vd. 2016) olarak bahsedilebilir.

Yerel olmayan elastisite teorisinde genel olarak atomik parametre yapının rijitliğini düşürücü bir niteliğe sahiptir. Mesela, kirişlerin atomik parametre nedeniyle titreşim frekanslarının düşmesi ve statik yüklemekten doğan elastik çökmelerinin yükselmesi beklenir. Ancak konsol kirişlerde bu durum tam tersidir. Bunların yanı sıra, ucu tekil yüklü konsol kirişin çökmesinde yerel olmayan parametre çökme denklemini etkilemez. Kısaca ortada paradoks içeren bir mevzu vardır. Bazı araştırmacılar bu paradoksu ortadan kaldıran yöntemler üzerinde çalışmışlardır. Challamel ve Wang (2008) yerel ve yerel olmayan eğriliklerin bileşimine dayanan basitleştirilmiş yeni bir model üzerinde çalışmışlardır. Uygulama olarak uçta tekil yüklü konsol kirişi ele almışlardır. Challamel vd. (2014) elastik kirişin eğrilğine dayanan kendine-eş (self-adjoint) yerel olmayan modeli sunmuşlardır. Bu modele göre kiriş elemanın kesme sınır şartı analitik modelden değişiklik göstermektedir. Konsol Euler–Bernoulli kirişinin serbest titreşimi uygulama olarak verilmiştir. Bunların yanı sıra Khodabakhshi ve Reddy (2015) iki fazlı

yerel olmayan modelin sonlu elemanlarla çözümünü vermişlerdir. Barretta vd. (2016) Eringen'in diferansiyel modelinin geliştirilmiş versiyonu üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmalarda da çeşitli sınır şartlı kirişlerin statik analizi uygulama olarak verilmiştir.

Paradokslar hakkındaki diğer çalışmalara değinecek olursak, Fernández-Sáez vd. (2016) yerel olmayan integral formu önermişlerdir ve tekil ve yayılı yüklü konsol kirişlerin statik çökme analizine uygulamışlardır. Eptaimeros vd. (2016) iki fazlı yerel olmayan formülasyonun (Polizzotto 2001) sonlu elemanlar çözümünü birisi de konsol olmak üzere üç farklı sınır şart için kirişlerin dinamik analizine uygulamışlardır. Wang vd. (2016) iki fazlı yerel olmayan bir Euler-Bernoulli kiriş modeli ve statik analizi üzerinde çalışmışlardır. Dört farklı sınır şart ve yayılı yükü göz önüne almışlardır. Romano ve Barretta (2017) gerilme bağımlı yeni bir yerel olmayan integral modelini sunmuşlardır. Farklı sınır şartlı kirişlerin eğrilik-deformasyon ilişkilerini elde etmişlerdir. Bunların yanı sıra Demir ve Civalek (2017), Eringen'in diferansiyel modelinin geliştirilmiş versiyonunu kullanarak farklı sınır şartlı tekil ve yayılı yükleme altındaki Euler-Bernoulli kirişlerinin statik analizi için yeni sonuçlar sunmuşlardır.

Bu tez çalışmasının konusunu içermesi bakımından yerel olmayan elastisitedeki başka bir çalışma alanı olan sonlu elemanlar formülasyonu hakkındaki çalışmalara da değinmek gerekir. Buna göre Timoshenko kiriş teorisi ile modellenmiş karbon nanotüplerin yerel olmayan eğilme burkulma ve titreşim analizi (Pradhan 2012), termomekanik analizleri (Pradhan ve Mandal 2012), Euler-Bernoulli kirişlerinin dinamik analizi (Eltaher vd. 2013), statik analizi (Alshorbagy vd. 2013), termal titreşimi (Demir ve Civalek 2017), elastik matris ortamı ile çevrili mikrotüpçüklerin burkulması (Civalek ve Demir 2016) örneklenabilir. Eksenel çubukların titreşimi (Adhikari vd. 2013, 2014) ile burulma statığı ve titreşimi (Demir ve Civalek 2013, Lim vd. 2015) diğer örneklenilecek çalışmalardır. Çok yakın dönemde, Numanoğlu ve Civalek (2019b) elastik ortama gömülü ve noktasal yay eklentili çubukların yerel olmayan burulma titreşimini sonlu elemanlarla incelemişlerdir. Bu arada, önceki paragraflarda anılmış olan çalışmalardan fonksiyonel derecelendirilmiş Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin yerel olmayan burkulma, eğilme ve titreşim analizlerinde (Eltaher vd. 2012, 2013, Eltaher vd. 2014) elde edilen yönetici denklemlerin çözümünde sonlu elemanlar formülasyonu kullanılmıştır.

Son olarak, yerel olmayan elastisite teorisi ile küçük ölçekli yapıların mekanik analizlerini konu alan ve bunları temel noktalarıyla inceleyen kitapların da literatürde yerini aldığı belirtilebilir. Buna Karlicic vd. (2013), Gopalakrishnan ve Narendar (2013), Chakraverty ve Behera (2016) tarafından yazılan kitaplar örnek verilebilir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Klasik fizik teorileri denge, uygunluk ve enerji denklemlerinin makro yapının tümünü temsil ettiğini ifade eder. Nano ve mikro yapıda ise klasik fizik temelli mekanik denklemleri kullanılarak yapılan analizlerin doğru sonuçları yansıtmadığı deneysel verilerle ortaya çıkartılmıştır. Atomik yapının karakteristik iç boyutlarının yapıya etkiden dış kuvvetlerle etkileşim halinde olması bu gerçeğin nedenidir. Klasik fizik teorilerinin bu konudaki eksikliğini gidermek için sürekli ortam formülasyonları atomik ölçekli yapıların boyut ölçek parametrelerini içerecek şekilde geliştirilmiştir ve bu formülasyonlardan bir tanesi de Eringen'in Yerel Olmayan Elastisite Teorisi'dir. Bu teoriye göre, cismin bir bölgesindeki gerilme ve şekil değişimleri, o noktaya komşu olan tüm bölgelerin gerilme ve şekil değişimlerine bağlıdır.

Atomik ölçekli yapılarda cisimlerin dış zor etkisindeki yerdeğiştirmeleri ile ortaya çıkan geometrik düzensizliklerden dolayı cismin içinde ilave gerilmeler doğar ve klasik teorilerle alınan sonuçlar gerçekçi olmaz. Bu yerdeğiştirmeler sonucunda gerilmeler ve şekil değıştirmeler sonsuza gider. Yerel olmayan teori kullanılarak problemin çözümündeki bu sorun ortadan kalkar (Tepe 2007).

Yerel olmayan elastisite teorisinin kurucu denklemleri Eringen (1983) tarafından

$$\sigma_{ij} + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}((\nabla u)_i + (\nabla u)_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij} = \int_V \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \phi) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV(\mathbf{x}') = \int_V \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \phi) s_{ij} dV(\mathbf{x}') \quad (3.3)$$

$$s_{ij} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

şeklinde verilmiştir. Burada σ_{ij} ve ε_{ij} sırasıyla yerel olmayan gerilme ve şekil değışimi tansörlerini, ρ cismin birim hacim kütlesini, u hareket bileşenini, f_j kütleli kuvveti, $\ddot{u}_j$ hareketin ivmesini, $\alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \phi)$ yerel olmayan modülü, C_{ijkl} dördüncü mertebeden elastisite tansörünü, $V(\mathbf{x}')$ cismin hacmini, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ Öklidyen formda uzaklığı, δ_{ij} Kronecker Delta sembolünü belirtir. λ ve μ Lamé sabitleridir ve

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.5)$$

olarak verilir. Burada E elastisite modülü, ν Poisson oranı, μ kayma modülüdür. Denklem (3.3)'te görülmekte olan

$$\phi = \frac{e_0 a}{L} \quad (3.6)$$

ifadesi boyutsuz atomik parametreyi veya tezde çokça kullanacağımız adıyla boyutsuz yerel olmayan parametreyi tanımlar. e_0 deneysel olarak belirlenebilen bir atomik sabiti, a karakteristik iç uzunluğu (çatlak genişliği, iki C atomu arası mesafe veya bağ uzunluğu, kafes modelinde latik uzunluk, ... vs.) ve L dış uzunluktur. Eringen (1983) tarafından karbon atomu için $e_0 = 0.39$ olarak hesaplanmıştır.

İki boyutlu formda yerel olmayan modül

$$\alpha(|x|, \phi) = \frac{1}{2\pi(e_0 a)^2} K_0 \left(\frac{\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}}{\phi} \right) \quad (3.7)$$

şeklindedir. Burada K_0 modifiye edilmiş Bessel Fonksiyonunu belirtir ve aşağıdaki gibidir (Haberman 2012)

$$K_0(r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp(-\sqrt{r^2 + z^2}) / \sqrt{r^2 + z^2} \right] dz \quad (3.8)$$

Öte yandan Denklem (3.7) en genel halde

$$L_0 \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \phi) = \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (3.9)$$

bağıntısını sağlar. Burada L_0 doğrusal diferansiyel operatörü ve δ ifadesi Dirac fonksiyonudur. Denklem (3.9) daha anlaşılır bir şekilde

$$L_0 \sigma_{ij} = s_{ij} \quad (3.10)$$

olarak verilir ve doğrusal diferansiyel operatörü

$$L_0 = 1 - L^2 \lambda^2 \nabla^2 = 1 - L^2 \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Denklem (3.11), (3.10)'da yerine yazılırsa

$$\left(1 - L^2 \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \quad (3.12)$$

olur ve bu denklem kullanılarak yerel olmayan elastisitenin lineer, izotropik ve elastik katılar için gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

$$\sigma_{ii} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial x^2} = s_{ii} = E \varepsilon_{ii} \quad (3.13)$$

$$\tau_{ij} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x^2} = t_{ij} = G \gamma_{ij} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada σ_{ii} ve ε_{ii} sırayla yerel olmayan eksenel gerilme ve şekil değiştirmeyi, τ_{ij} ve γ_{ij} sırayla yerel olmayan kayma gerilmesi ve açısal şekil değiştirmeyi, s_{ii} ve t_{ij} sırayla klasik eksenel ve kayma gerilmelerini belirtir.

3.2. Sonlu Elemanlar Formülasyonu

3.2.1. Şekil (interpolasyon) fonksiyonları

Sonlu elemanlar yöntemi ile yapıların analizinde genel işlem aşamalarından bahsedilirken bunlardan bir tanesinin de şekil (interpolasyon) fonksiyonlarının seçimi olduğu vurgulanmıştı. Şekil fonksiyonları, mekanik sonlu elemanın yapacak olduğu yerdeğişimi veya dönme gibi geometrik hareketlerin karakteristiğini yansıtır. Aslında bu fonksiyonların, sonlu eleman algoritmasının temelini oluşturduğu belirtilebilir. İlgili aşama hakkında bilgi verilirken sistemin yapısına ve davranışına uygun sonlu elemanın ve onun şekil fonksiyonunun seçiminin önemli olduğu vurgulanmıştı. Bu durum tezin ilerleyen altbaşlıklarında kendini gösterecektir. Bu nedenle bir altyapı oluşturulması bakımından eksenel çubuk ve eğilme çubukları gibi sürekli sistemlerin şekil fonksiyonları verilecektir.

3.2.1.1. Eksenel çubuklar için şekil fonksiyonu

Bu konuya girmeden önce eksenel çubuk kavramının neyi ifade ettiğinden bahsedilmelidir. Sadece eksenel yönde ya da başka bir deyişle kesit alanına dik yöndeki mekanik zorlamalar altında sadece bu yönde bir şekil değişimi yapabilen sürekli elemanlara eksenel çubuk denir. Eksenel çubukların kalınlıksız lineer sonlu elemanlarla modellenmesi yapılabilir. Bu sonlu eleman asgari olarak iki düğümlü olmak zorundadır. Buna göre Şekil 3.1’de tasvir edilmiş olan, isimleri i ve j olarak verilen iki düğümlü ve global x eksenine tabii lineer sonlu eleman göz önüne alınsın. Bu sonlu elemanın toplam eksenel hareketi

$$u^e = c_1 + c_2 x \quad (3.15)$$

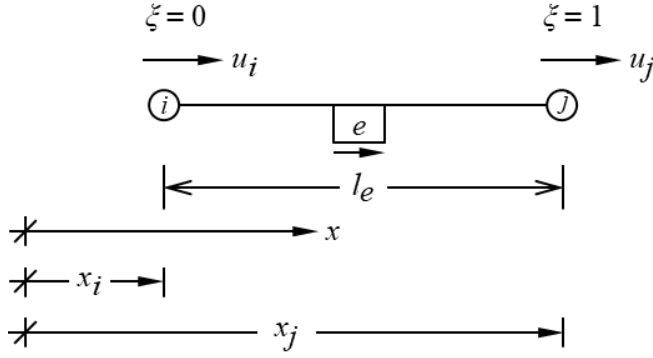
şeklinde bir lineer fonksiyonla modellenebilir. Burada c_1 ve c_2 bilinmeyenleri, sonlu elemanın

$$u^e(x_i) = u_i, \quad u^e(x_j) = u_j \quad (3.16)$$

şeklindeki sınır şartları ile bulunabilir. Burada x_i ve x_j düğüm koordinatlarını, u_i ve u_j düğüm deformasyonlarını ifade eder. Çubuk sonlu elemanının geometrisi için

$$x_j - x_i = l_e \quad (3.17)$$

yazılmalıdır. Burada l_e sonlu elemanın uzunluğudur.



Şekil 3.1. İki düğümlü lineer aksenal sonlu eleman

Denklem (3.15) kullanılarak aşağıdaki iki bilinmeyenli iki denklem takımı oluşturulabilir:

$$u_i = c_1 + c_2 x_i, \quad u_j = c_1 + c_2 x_j \quad (3.18)$$

burada Denklem (3.16) kullanılarak denklemler taraf tarafa çözülürse ve biraz daha düzenleme yapılırsa

$$c_1 = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{l_e}, \quad c_2 = \frac{u_j - u_i}{l_e} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu ifadeler Denklem (3.15)'te yerine konulmalıdır:

$$u = \left(\frac{u_i x_j - u_j x_i}{l_e} \right) + \left(\frac{u_j - u_i}{l_e} \right) x \quad (3.20)$$

bu ifadenin daha da düzenlenmesi için boyutsuzlaştırma parametresi kullanılmalıdır. Bu boyutsuzlaştırma parametresi, ilerideki altbaşlıklarda da görülecektir ki sonlu eleman formülasyonlarının çok önemli bir kısmında rol oynayacaktır. Buna göre, sonlu elemanın boyutsuzlaştırılmış deplasmanlarını 0 ile 1 arasında değiştirecek bir ξ boyutsuz parametresi

$$\xi = \frac{x - x_i}{l_e} = \frac{x - x_i + l_e}{l_e} \quad (3.21)$$

şeklinde tayin edilir. Bir adım geri gelelim ve Denklem (3.20)'yi sonlu elemanın düğüm deplasman bileşenleri cinsinden şu şekilde yazalım:

$$u^e = \left(\frac{x_j - x}{l_e} \right) u_i + \left(\frac{x - x_i}{l_e} \right) u_j \quad (3.22)$$

Denklem (3.22) $u^e = \phi_i u_i + \phi_j u_j$ şablonunda verilecek olursa

$$\phi_i = \frac{x_j - x}{l_e} = \frac{l_e + x_i - x}{l_e} = 1 - \xi, \quad \phi_j = \frac{x - x_i}{l_e} = \xi \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilen ϕ_i ve ϕ_j ifadeleri eksenel çubuk sonlu elemanın şekil fonksiyonları olarak bilinir. Bu arada çubuk sonlu elemanın toplam hareketinin

$$u^e = [\phi_i \quad \phi_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [\phi] \{d\} \quad (3.24)$$

şeklindeki matris formu ilerideki altbaşlıklarda büyük bir kullanıma sahip olacaktır. Burada $[\phi]$ şekil fonksiyonları matrisi ve $\{d\}$ uç serbestlikler vektörüdür.

Görülecektir ki bazı eksenel çubuk problemlerinde iki düğümlü sonlu elemanın kullanımı yetersiz gelecektir. Bunun nedeni yeri geldiğinde açıklanacaktır. Böyle bir durumda sonlu eleman tipini değiştirmek gerekir. Bu sefer kullanılacak olan üç düğümlü lineer sonlu eleman ve serbestlikleri Şekil 3.2’de gösterilmektedir. Tabi bu sefer ara işlemlerin daha kolay olması bakımından lineer eksen i düğümünü orijin olarak baz alacaktır. Bu sonlu elemanın toplam eksenel hareketini temsil eden fonksiyon

$$u^e = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \quad (3.25)$$

şeklindedir. Sonlu elemanın üç adet sınır şartı olduğundan dolayı

$$u_i = c_1 + c_2 x_i + c_3 x_i^2, \quad u_j = c_1 + c_2 x_j + c_3 x_j^2, \quad u_k = c_1 + c_2 x_k + c_3 x_k^2 \quad (3.26)$$

yazılabilir. Düzenleme işlemlerinde uygunluk denklemleri olarak

$$x_k - x_i = l_e, \quad x_k - x_j = x_j - x_i = \frac{l_e}{2} \quad (3.27)$$

Bu denklem takımı ekleme–çıkarma gibi bazı ara işlemlere tabi tutulursa ilk olarak

$$c_3 = \frac{2}{l_e^2} (u_i - 2u_j + u_k) \quad (3.28)$$

sabiti elde edilir. Bu ifade kullanılarak diğer sabitler ise

$$c_1 = u_k - \frac{u_i x_k}{l_e} + 4 \frac{u_j x_k}{l_e} - 3 \frac{u_k x_k^2}{l_e^2} + 2 \frac{u_i x_k^2}{l_e^2} - 4 \frac{u_j x_k^2}{l_e^2} + 2 \frac{u_k x_k^2}{l_e^2},$$

$$c_2 = \frac{u_i}{l_e} - 4 \frac{u_j}{l_e} + 3 \frac{u_k}{l_e} - 4 \frac{u_i x_k}{l_e^2} + 8 \frac{u_j x_k}{l_e^2} - 4 \frac{u_k x_k}{l_e^2} \quad (3.29)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler Denklem (3.25)'te yerine koyulursa

$$u^e = \left(-\frac{x_k}{l_e} + 2\frac{x_k^2}{l_e^2} + \frac{x}{l_e} - 4\frac{x_k x}{l_e^2} + 2\frac{x^2}{l_e^2} \right) u_i + \left(4\frac{x_k}{l_e} - 4\frac{x_k^2}{l_e^2} - 4\frac{x}{l_e} + 8\frac{x_k x}{l_e^2} - 4\frac{x^2}{l_e^2} \right) u_j + \left(-3\frac{x_k}{l_e} + 2\frac{x_k^2}{l_e^2} + 3\frac{x}{l_e} - 4\frac{x_k x}{l_e^2} + 2\frac{x^2}{l_e^2} + 1 \right) u_k \quad (3.30)$$

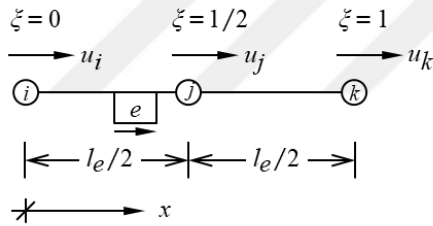
yazılır. Eksenin orijini i düğümünde olduğundan dolayı $x_k = L$ yazılırsa ve boyutsuz deplasman $\xi = x/l_e$ olarak alınırsa

$$u^e = (2\xi^2 - 3\xi + 1)u_i + (-4\xi^2 + 4\xi)u_j + (2\xi^2 - \xi)u_k \quad (3.31)$$

elde edilir ve toplam eksenel hareket bu sefer $u^e = \phi_i u_i + \phi_j u_j + \phi_k u_k$ olarak yazıldığı için şekil fonksiyonları

$$\phi_i = 2\xi^2 - 3\xi + 1, \quad \phi_j = -4\xi^2 + 4\xi, \quad \phi_k = 2\xi^2 - \xi \quad (3.32)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.2. Üç düğümlü lineer eksenel sonlu eleman

3.2.1.2. Eğilme çubukları için şekil fonksiyonu

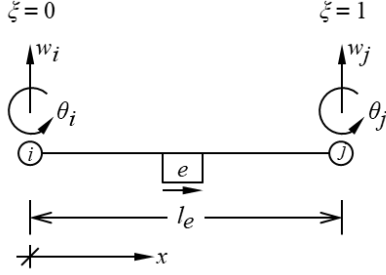
Bu altbaşlıkta eğilme çubukları yani kirişlerin sonlu eleman formülasyonlarının temelini oluşturan şekil fonksiyonları ele alınacaktır. Eğilme çubukları, eksenel çubuklardan farklı olarak eğilme ve bundan doğan kesme etkileri altında çalışan ve bu etkiler yönünde deformasyon yapan elemanlardır. Tabi bu elemanlar eğilme ve kesmeye ek olarak eksenel zorlar altında da çalışabilirler ancak bu tip elemanları karakterize eden özellik, eğilme ve kesme olgularından en az birinin var olmasıdır. Eğilme elemanlarının Şekil 3.3'te görülen eksenel etkilerden izole edilmiş iki düğümlü lineer sonlu elemanlarla modellenmesi gerçekleştirilebilir. Düğümlerinde ikişer tane olmak üzere toplamda dört farklı serbestlik içeren bu sonlu elemanın toplam hareketini karakterize eden denklem

$$w^e = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (3.33)$$

şeklinde dir. Bu elemandaki dört farklı serbestliğe dair sınır şartlar

$$w^e(x_i) = w_i, \quad \frac{dw^e}{dx}(x_i) = -\theta_i, \quad w^e(x_j) = w_j, \quad \frac{dw^e}{dx}(x_j) = -\theta_j \quad (3.34)$$

olarak verilir. Burada w çökme ve θ dönme serbestliğini ifade eder.



Şekil 3.3. İki düğümlü lineer eğilme sonlu elemanı

Denklem (3.34)'te belirtilmiş olan sınır şartların uygulanması neticesinde hesaplanacak olan c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sabitleri

$$c_1 = -\theta_i, \quad c_2 = -\theta_i, \quad c_3 = -3\frac{w_i}{l_e^2} + 3\frac{w_j}{l_e^2} + 2\frac{\theta_i}{l_e} + \frac{\theta_j}{l_e}, \quad c_4 = 2\frac{w_i}{l_e^3} - 2\frac{w_j}{l_e^3} - \frac{\theta_i}{l_e^2} - \frac{\theta_j}{l_e^2} \quad (3.35)$$

şeklindedir. Bu sabitler Denklem (3.33)'te yerine koyulduktan sonra elde edilen ifade

$$w^e = \phi_i w_i + \varphi_i \theta_i + \phi_j w_j + \varphi_j \theta_j \quad (3.36)$$

formuna göre düzenlendikten sonra boyutsuz koordinat $\xi = x/l_e$ olarak alınırsa neticede elde edilen

$$\phi_i = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \varphi_i = L(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3), \quad \phi_j = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \varphi_j = L(\xi^2 - \xi^3) \quad (3.37)$$

ifadeleri eğilme sonlu elemanının şekil fonksiyonlarını tanımlar (Omurtag 2010). Son olarak eğilme sonlu elemanının toplam hareketi

$$w^e = \begin{bmatrix} \phi_i & \varphi_i & \phi_j & \varphi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [\phi] \{d\} \quad (3.38)$$

ile matris formda yazılabilir. Aynı aksenal elemanlarda olduğu gibi $[\phi]$ şekil fonksiyonları matrisi ve $\{d\}$ uç serbestlikler vektörüdür.

3.2.2. Sonlu elemanların çözüm tekniği

Bir önceki alışılda sonlu elemanlar yönteminin temeli verildi. Buradan itibaren de sonlu elemanların mantalitesinden söz edilecektir. Sonlu elemanlar yöntemi, sonsuz sayıda noktaya sahip elemanı, sonlu eleman denilen ve birbiri ile düğüm noktaları aracılığıyla etkileşimde bulunan alt elemanlara ayırklaştıran bir sayısal yöntemdir. İkinci bölümde sonlu elemanlar yönteminin aşamalarından bahsederken bu alt elemanların, ilgili problemin çözümünde kullanmak üzere kurulması gereken bazı matrislerinden söz etmiştik. Sonlu elemanlar metodunda öncelikle her eleman için bu matrisler kurulur ve en sonda toplanır. Ancak bu matris toplaması lineer cebrik yani girdi girdiye bir toplama değildir. Matrislerin her bir girdisinin bütün olarak değerlendirilen yapıda temsil ettiğı serbestlik doğrultusunda yapılan bir toplamadır. Bu toplam matrisler problemin gerektirdiğı lineer cebrik işleme tabi tutulur ve sonlu elemanlar yönteminin çıktılaması elde edilir.

Konumuz olan titreşim problemine bakacak olursak, her bir elemanın kütle ve rijitlik matrisleri kurulduktan sonra bunların, gerekirse transforme edilmiş hali, gerekmezse kendisi düğüm serbestlikleri doğrultusunda toplanır. Bu toplama neticesinde kurulan matrislere küresel matris denir. Fiziksel anlamdaki titreşim probleminin matematiksel anlamı bir standart özdeğer problemidir ve bu özdeğer probleminde yerine yazılan küresel matrislerin tabi tutulduğu lineer cebrik işlem bize yapının doğal titreşim frekanslarını sunar. Bu frekanslar kullanılarak mod çözümü yapılabilir ve yapının genlik vektörü yani mod şekilleri de tespit edilebilir. Buradan itibaren rijitlik ve kütle matrislerinden söz edeceğiz.

3.2.3. Rijitlik ve kütle matrisleri

Sönümsüz ve serbest titreşim probleminin ikinci merteben homojen ve adi bir diferansiyel denklem teşkil ettiğini belirtmiştik. Aslında sonlu elemanlar yönteminin biraz ileride kısaca değinilecek değişkenlere ayırma metodu gibi sürekli sistemler için kısmi olan bu homojen diferansiyel denklemi adi denklemlere ayırklaştıran bir yöntem olduğu belirtilebilir ama tabi ki de yöntemin diğer prensipleri değişkenlere ayırma metodundan farklıdır. Denklem (2.35) ayırklaştırılmış diferansiyel denklemin nihai halini sunar. Tabi sonlu eleman analizinin gerçekleştirilebiliyor olması için bu denklemde görölmekte olan rijitlik ve kütle matrisleri kurulabiliyor olmalıdır.

Bir elemanın rijitlik matrisi, onun eleman boyunca sürekli olan katılık yani mukavemetsel özelliklerinin o eleman için ayırklaştırılmış noktadaki dağılımını belirtir. Benzer şekilde kütle matrisi de o elemanın sürekli olan kütlelerinin ayırklaştırılmış olan noktalardaki dağılımını gösterir. Bu dağılımlar rijitlik matrisinde ilgili mekanik rijitlik ifadesinin ve kütle matrisinde birim hacim, kesit alan ve uzunluk parametrelerinin çarpımlarının farklı kompozisyonları ile ifade edilir.

Rijitlik ve kütle matrisinin elde edilisinde farklı yöntemler vardır. Direkt (denge) yöntemi, enerji yöntemleri, varyasyonel yöntem bunlardan birkaçıdır. Bunların hepsinin tez çalışmasında detayını vermek gereksiz bir uğraşı olacaktır. Sadece klasik yani makro anlamdaki elastisite için enerji denklemleri üzerinden bazı örnekler vererek bu alışıldı kapatacağız. İlk olarak basit çubuğun kütle ve rijitlik matrisinden söz edelim. Buna göre

ilk olarak basit yani kayma etkilerini gözlemleyen eksenel çubuğun rijitlik matrisi türetilcektir. Çıkarılış detayına girmeden, bu çubuğun iç şekil değiştirme enerjisini

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L AE \left(\frac{du^e}{dx} \right)^2 dx \quad (3.39)$$

olarak verebiliriz. Burada E elastisite modülü, A kesit alanı, L çubuğun boyu ve u^e eksenel deplasman bileşenidir. Bu çubuğun eksenel hareketinin türevi

$$\frac{du^e}{dx} = \frac{d\phi_i}{dx} u_i + \frac{d\phi_j}{dx} u_j = \frac{u_j - u_i}{L} \quad (3.40)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.40), (3.39)'da yerine yazılacak olursa

$$U = \frac{AE}{L} (u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2) \quad (3.41)$$

elde edilir. Enerji yöntemlerinde temel bilinmesi gereken bir durum iç şekil değiştirme enerjisinin yerdeğiştirmeye göre türevi, çubuğun üzerindeki iç kuvvet bileşenini verir (Castigliano'nun I. Teorisi). Buna göre iki düğümlü elemanda

$$\frac{dU}{du_i} = f_i = \frac{AE}{L} (u_i - u_j), \quad \frac{dU}{du_j} = f_j = \frac{AE}{L} (-u_i + u_j) \quad (3.42)$$

denklemleri oluşturulabilir. Hooke yasasının matris formu $\{f\} = [k]\{d\}$ olduğuna göre bu denklemler

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

olarak birleştirilebilir. Burada $\{f\}$ yük vektörünü ve $\{d\}$ deplasman vektörünü tanımlar. $[k]$ ise eksenel rijitlik matrisi olarak bilinir:

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

İkinci örnek ise yine kayma etkisiz eksenel çubuklar için bu sefer kütle matrisinin enerji ifadesi temelli eldesidir. Buna göre cismin hareketi esnasındaki kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} \int_0^V (\rho \ddot{u}^e) u^e dV \quad (3.45)$$

şeklinde bir integral ile hesaplanabilir. Burada V eksenel çubuğun hacmi ve ρ birim hacim kütesidir. $\ddot{u}^e$ hareketin ivmesi olup

$$\frac{d^2 u^e}{dt^2} = \phi_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \phi_j \frac{d^2 u_j}{dt^2} \quad (3.46)$$

şeklinde yazılır. Eksenel hareket ve Denklem (3.46)'da görülen zamana göre ikinci türevi Denklem (3.45)'te yerine yazılırsa

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \ddot{u}_i u_i + \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) \ddot{u}_i u_j + \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) u_i \ddot{u}_j + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \ddot{u}_j u_j \right] dx \quad (3.47)$$

elde edilir. Enerjinin düğüm deplasmanlarına göre türevleri

$$\frac{dT}{du_i} = f_i = \frac{\rho AL}{6} (2\ddot{u}_i + \ddot{u}_j), \quad \frac{dT}{du_j} = f_j = \frac{\rho AL}{6} (\ddot{u}_i + 2\ddot{u}_j) \quad (3.48)$$

olarak hesaplanır. Denklemler $\{f\} = [m]\{\ddot{d}\}$ şeklinde bir matris formda birleştirilecek olursa

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

yazılır ve anlaşılacağı üzere

$$[m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

ifadesi eksenel çubuğun kütle matrisidir.

Üçüncü ve son örnek kayma etkili eksenel çubukların rijitlik matrisi için verilecektir. Detayı ilerleyen altbaşlıklarda ele alınacak olan iç şekil değiştirme enerjisi, basit eksenel çubuklardan farklı olarak

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[AE \left(\frac{du^e}{dx} \right)^2 + \nu^2 G I_p \left(\frac{d^2 u^e}{dx^2} \right)^2 \right] dx \quad (3.51)$$

şeklinde yazılır ve burada ilk kez görülen terimlerden ν Poisson oranı, G kayma modülü ve I_p polar (kutupsal) atalet momentidir. Enerji denkleminin içerisine bu ifadelerin çarpımı ile dahil olan terim çubuğun kayma ataletini tanımlar. Denklem (3.51)'in daha da düzenlenmesi için sonlu eleman hareket formülasyonuna ihtiyacımız olduğunu önceki iki örnekten biliyoruz. İlgili örneklerde iki düğümlü sonlu eleman kullanılmıştı. Dikkat edilirse Denklem (3.51)'de görülen kayma ataleti teriminde hareketin konuma göre ikinci mertebe türevi alınacağı için iki düğümlü lineer sonlu eleman işe yarar özellik gösteremez. Bu durum asgari üç düğümlü lineer eksenel sonlu eleman formülasyonunun tercih edilmesi gerekliliğini ortaya koyar. Bu tip sonlu elemanda hareket ifadesinin birinci ve ikinci türevi

$$\frac{du^e}{dx} = \frac{d\phi_i}{dx}u_i + \frac{d\phi_j}{dx}u_j + \frac{d\phi_k}{dx}u_k = \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)u_i + \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}\right)u_j + \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}\right)u_k \quad (3.52)$$

$$\frac{d^2u^e}{dx^2} = \frac{d^2\phi_i}{dx^2}u_i + \frac{d^2\phi_j}{dx^2}u_j + \frac{d^2\phi_k}{dx^2}u_k = \frac{4}{L^2}u_i - \frac{8}{L^2}u_j + \frac{4}{L^2}u_k \quad (3.53)$$

olarak hesaplanır. İç şekil değiştirme enerjisinin tüm bileşenlere göre türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_i} &= \int_0^L \left[EA \left[\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right)^2 u_i + \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) u_j + \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) u_k \right] \right. \\ &\quad \left. + \nu^2 GI_p \left(\frac{16}{L^4} u_i - \frac{32}{L^4} u_j + \frac{16}{L^4} u_k \right) \right] dx \\ &= \frac{EA}{L} \left(\frac{7}{3} u_i - \frac{8}{3} u_j + \frac{1}{3} u_i \right) + \frac{\nu^2 GI_p}{L^3} (16u_i - 32u_j + 16u_i) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_j} &= \int_0^L \left[EA \left[\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) u_i + \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right)^2 u_j + \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) u_k \right] \right. \\ &\quad \left. + \nu^2 GI_p \left(-\frac{32}{L^4} u_i + \frac{64}{L^4} u_j - \frac{32}{L^4} u_k \right) \right] dx \\ &= \frac{EA}{L} \left(-\frac{8}{3} u_i + \frac{16}{3} u_j - \frac{8}{3} u_i \right) + \frac{\nu^2 GI_p}{L^3} (-32u_i + 64u_j - 32u_i) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_k} &= \int_0^L \left[EA \left[\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) u_i + \left(-\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L} \right) \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right) u_j + \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right)^2 u_k \right] \right. \\ &\quad \left. + \nu^2 GI_p \left(\frac{16}{L^4} u_i - \frac{32}{L^4} u_j + \frac{16}{L^4} u_k \right) \right] dx \\ &= \frac{EA}{L} \left(\frac{1}{3} u_i - \frac{8}{3} u_j + \frac{7}{3} u_i \right) + \frac{\nu^2 GI_p}{L^3} (16u_i - 32u_j + 16u_i) \end{aligned} \quad (3.56)$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklemlerin neticelerinin $\{f\} = [k]\{d\}$ göz önüne alınarak matris formda düzenlenmesi sonucunda oluşan

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

matrisinin girdileri

$$k_{11} = k_{33} = \frac{7}{3} \frac{EA}{L} + 16 \frac{\nu^2 GI_p}{L^3}, \quad k_{12} = k_{21} = k_{23} = k_{32} = -\frac{8}{3} \frac{EA}{L} - 32 \frac{\nu^2 GI_p}{L^3},$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{1}{3} \frac{EA}{L} + 16 \frac{\nu^2 GI_p}{L^3}, \quad k_{22} = \frac{16}{3} \frac{EA}{L} + 64 \frac{\nu^2 GI_p}{L^3} \quad (3.58)$$

olarak hesaplanır.

3.3. Problemlere İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi ve Çözümü

Bu yüksek lisans tezi çalışmasında, atomik ölçekli ve tek doğrultulu yapıların sürekli ve ayrık modellerinin boyut etkisini göz önünde bulunduran serbest titreşimleri ele alınmıştır. Yüksek mertebeden sürekli ortam teorilerinden olan Yerel Olmayan Elastisite Teorisi üzerinden boyut etkisi kavramı vurgulanmıştır. Belirli etkiler altındaki nano ve mikro ölçekli yapıların titreşimi fiziksel yasalara dayanan matematiksel denklemler üzerinden formüle edilecektir. Bu denklemlerin sonucunda elde edilen hareket denklemleri ve mekanik sınır şartlar kısmi diferansiyel denklem halindedir. Genel olarak bu denklemlerin eldesinde üç temel yaklaşımdan söz edilebilir:

1. **Direkt (Denge) Yaklaşım:** Yapıların maruz kaldığı dış etkiler ve bunlardan doğan iç etkilerden kaynaklanan tüm kuvvetlerin doğru ve eksiksiz bir modeli sayesinde denge denklemleri de doğru bir şekilde kurulabiliyorsa yönetici denklemler elde edilebilir. Bazı problemler için oldukça pratik bir yaklaşım olduğunu belirtebiliriz ancak çok daha fazla etkileri içeren problemlerde bu yaklaşımı kullanmak yanlış sonuçlara sebep olur.
2. **Varyasyonel İlke Yaklaşımı:** Sistemin enerji ifadesi, çözümü gerçekleştirebilen birçok fonksiyona bağlı olduğundan fonksiyoneldir yani fonksiyonların fonksiyonudur. İşte enerji yöntemleri bu fonksiyonelin belirli sınırlar arasındaki integralinin durağanlık koşulu gereği ekstrem değerini araştırır. Varyasyon (Değişim) İlkesi, bir fonksiyonun kabul edilebilir aralıklardaki değişimini inceler ve az evvel bahsedilen ekstrem değeri araştırılan integralin gerekli cebrik işlemlerinin gerçekleştirilmesini sağlar. Bu ilkeye göre dinamik problemlerde, yapının iç şekil değiştirme enerjisini, kinetik enerjisini ve dış kuvvetin yapı üzerinde iş yapabilme kabiliyetini gözetten Hamilton İlkesi, statik problemlerde ise iç şekil değiştirme ve dış kuvvetin iş yapabilme kabiliyetini gözetten Minimum Toplam Potansiyel Enerji İlkesi kullanılır. Denge yaklaşımının bir sorunlu yanı da araştırmacının mühendislik mekaniği olayları üzerindeki bilgi ve yorumlama kabiliyeti seviyesi düşüklüğünden kaynaklanan hatalara açık olmasıdır. Şöyle bir örnek verelim: Yerel olmayan elastisite teorisi ile kirişlerin denge yaklaşımını kullanarak hareket denklemini elde edebiliriz. Birazdan bahsedeceğimiz Değişkenlere Ayırma çözüm prosedürü ile kısmi diferansiyel denklem olan hareket denklemini adileştirebiliriz. Adi diferansiyel denklem mod şekli denkleminin eldesinin temelini oluşturur. Mod denkleminin uygulamasını yaparken, örneğin, her iki ucu basit mesnetli kirişin mod denkleminin mesnet noktalarında sıfıra eşit olması gerektiğini geometriden bilir ve uygularız. Hatta mod denkleminin iki defa türevini alıp yine sıfıra eşitleriz çünkü biliriz ki bu noktalar eğilme momenti de almayacak. Bu kirişe sistematik olarak yanlış yaklaşımıştır ama şans eseridir ki çözüm doğrudur. Çünkü görülecektir ki mesnet şartları araştırmacıya, kazara bu şansı verir. Ancak konsol kirişte bu yaklaşım patlak verecektir: Ankastre uçta mod denkleminin kendisini ve türevini 0'a eşitlerken doğru işlem yapılmıştır ama “boş uçta moment ve kesme olmaz, dolayısı ile mod denkleminin ikinci ve üçüncü türevlerini boş uçta yani noktasında 0'a eşitlersek kalan integral sabitlerini

buluruz” şeklinde bir yaklaşım yanlıştır. Araştırmacının hareket denklemini doğru elde etmesine karşın mekanik sınır şartı olan eğilme momenti fonksiyonunu unutmuş olması bu yanlışlığın sebebidir. Moment fonksiyonu, klasikteki gibi olmayacak, atomik parametreden etkilenecektir. Neticede önemli bir hata yapılmıştır çünkü algı, yorumlama kabiliyeti ve bilgi düzeyi düşüktür. Asıl vurgulanmak istenene gelince, varyasyonel ilke oldukça sistematik bir yaklaşımdır. Sadece enerji formülasyonlarını doğru ifade etmek ve türev–integral işlemleri gibi yüksek matematik cebrini iyi kullanmak gerekmektedir. Bu beceriler altında hata yapma ihtimali neredeyse yoktur. İşlemler sonucunda, hareket denklemleri, geometrik ve mekanik sınır şartları yerine göre işlem hacmi artsa da doğru bir şekilde elde edilebilir. “Kiriş ya da çubuk elemanı denge analizinde hangi kuvvetleri alacak ve ne tip deformasyonlar gerçekleştirecek?” gibi özellikle daha karmaşık kiriş ve çubuk problemlerinde kafamızı daha çok karıştırıp hata yapmamıza sebep olabilecek durumları barındırmaması açısından varyasyonel ilkenin kullanımı önemlidir.

3. Lagrange Denklemleri: Sistemin genelleştirilmiş koordinatları üzerinden kinetik ve potansiyel enerjileri ifadeleri kurulabiliyorsa hareket denklemleri ve sınır şartları belirlenebilir. Lagrange Denklemleri ile dinamik analiz bu tez çalışmasının dışındadır.

Hareket ve sınır denklemlerin türetilmesinde pratik olduğunu göstermek adına sadece Euler–Bernoulli kirişi ve basit eksenel çubuk için denge yaklaşımı kullanılmıştır. Buna ilaveten, tez çalışmasının tamamında yönetici denklemlerin ve sınır şartların türetilmesi için genel olarak varyasyonel ilke tercih edilmiştir. Ayrık sistemlerde ise hareket denklemleri ayrıca ele alacağımız Matris Hareket Formülasyonu ile oluşturulacaktır.

Özellikle sürekli sistem problemlerinde, elde edilecek olan denklemler genel olarak değişkenlere ayırma metodu ile çözülecektir. Bu metot kısmi türevli homojen ve mertebesi çok yüksek olmayan denklemlerin çözümünde kullanışlıdır. Metodun temel mantığı kısmi denklemin ayrıklaştırılarak adileştirilmesi ve adi denklemlerden bilinen basit metotlar vasıtasıyla çözülebilir hale getirilmesidir. Buna göre

$$\partial_{(n)x} f + \partial_{(n)t} f = 0 \quad (3.59)$$

şeklinde bir homojen kısmi diferansiyel denklem şablonu tanımlansın. Burada f diferansiyellenebilen (türevlenebilen) bir fonksiyon, ∂ kısmi türev operatörü, n türevleme miktarı, x ve t türevleme değişkenleri (birbirlerinden bağımsız) olarak adlandırılır. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$f(x, t) = D(x)T(t) \quad (3.60)$$

olarak verilir. Burada $f = f(x, t)$ türevleme değişkenlerini içermesi gereken ve haliyle bunlara bağlı olan çok değişkenli bir fonksiyon, $D(x)$ ve $T(t)$ sırayla ayrık türevleme değişkenleri olan x ve t ifadelerine bağlı ayrık fonksiyonlardır. Tez çalışması boyunca $D(x)$ mod denklemini ve $T(t)$ harmonik fonksiyonu ifade edecektir. Bu çalışmanın kapsamı modal analiz ve frekans hesabı olduğu için sadece $D(x)$ ve onu ilgilendiren adi diferansiyel denklem üzerinden hesaplar yürütülecektir.

Bazen değişkenlere ayırma üzerinden elde edilmiş olan denklemlere sınır şartların uygulanması, özellikle el hesabında çok ciddi karışıklıklara sebebiyet verebilir. Eğer yapının kesin geometrik davranışı biliniyorsa hareket denkleminde uygulanabilecek olan

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin(\alpha x) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.61)$$

seri çözümü Fourier Serisi olarak bilinir ve özellikle tutulu veya serbest gibi basit sınır koşullu eksenel çubukların ve her iki ucu basit mesnetli kirişlerin dinamik davranışını çözümlemede oldukça kullanışlıdır. Denklemden görülen W_n bilinmeyen Fourier katsayılarını, ω frekansı, t zamanı ve φ faz açısını tanımlar. Öte yandan α çubuğun geometrik (mekanik açıdan statik) davranışını yansıtan bir katsayıdır. Örneğin her iki ucu tam tutulu eksenel çubukta $\alpha = n\pi/L$ olurken bir ucu tam tutulu diğer ucu serbest eksenel çubukta $\alpha = (2n-1)\pi/2L$ olur. L eksenel çubuk uzunluğudur.

Değişkenlere ayırma metodu anlaşılacağı üzere analitik bir yöntemdir. Tabi ki de bazı problemlerin çözümünde bu metot yetersiz kalacaktır. Bu problemin aşılmasında Sonlu Elemanlar Metodu yoğun bir biçimde kullanılacaktır. Öncelikle sonlu elemanlar yönteminde hareket denklemlerini oluştururken Ağırlıklı Kalıntı Metodu (Kwon ve Bang 2000) kullanılacaktır. Metodun çok değişik tipleri mekanik olayların formülasyonlarına uygulanmaktadır ancak bu yüksek lisans tezinde kapsamın fazla dışına çıkmamak açısından en basit kalıntı formülasyonu verilecektir. Buna göre

$$I = \int_{x_i}^{x_j} hR \, dx \quad (3.62)$$

şeklinde tanımlı bir integralde h ağırlık fonksiyonunu ve R kalıntıyı ifade eder. Sonlu elemanlar yöntemi bu ağırlıklı kalıntıyı sıfıra eşitlemeye çalışır. Tez çalışmasında probleme uygun ağırlık fonksiyonları transpoze edilmek sureyiyle şekil fonksiyonu iken hareket denklemleri de kalıntıyı tanımlayacaktır. Sonlu elemanların genel çözüm denklemi ise

$$\det(\sum [K] - \omega^2 \sum [M]) = 0 \quad (3.63)$$

şeklindeki bir özdeğer problemidir. Burada $[K]$ yapının bütün pozitif ve negatif rijitlik katkı matrislerini içeren toplam küresel rijitlik (katılık) matrisidir. $[M]$ ise bütün kütle matrislerini içeren toplam küresel kütle matrisidir. n -serbestlik dereceli ayırık veya sonlu elemanlar kullanılarak n -serbestlik derecesine ayrıklaştırılmış sürekli sistemin bu serbestlik derecesine eşit dereceye sahip ve kökleri ω_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$ ve $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$) olan bir polinom teşkil eden bu denklemin bilinen sayısal metotlar veya bilgisayar programları kullanılarak kökleri hesaplanabilir.

3.4. Nano Ölçekli Eksenel Çubukların Serbest Titreşimi

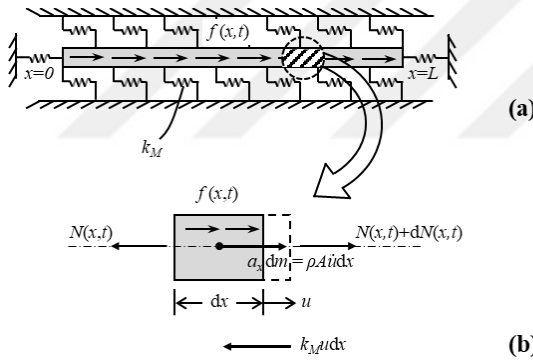
Bu altbaşlıkta doğrultulu eksenel nano çubukların yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşim analizi gerçekleştirilecektir. Bölüm kayma etkisini gözletmeyen basit eksenel çubuk, kayma ve polar atalet etkilerini içeren Love–Bishop çubuğu ve burulma çubuğu olmak üzere üç altbaşlığa ayrılmaktadır.

3.4.1. Basit çubuk teorisi (SRT)

Basit çubuklar, kayma etkisini gözletmeyen eksenel çubuklardır. Bu biraz ileri bir teknik tanımdır. Basit anlamda bu çubuk, uzunluğu doğrultusundaki etkilerle karakterize edilebilen elemandır. Yani kesitin eni ve yüksekliği boyunca hiçbir şekil değişimi olmaz. Çubukta sadece eksenel gerilme ve şekil değiştirmeler rol oynar. Önceden belirtildiği gibi, uygulama çeşitliliğini göstermek için hem Denge Yaklaşımı hem de Varyasyonel İlke Yaklaşımına göre hareket denklemleri ve sınır şartlar elde edilecektir.

Denge yaklaşımına göre hareket denkleminin türetilmesi

Şekil 3.4'te görülen elastik ortama gömülü eksenel çubuk düşünölsün. Elastik ortam, çubuğun hareketine karşı ve lineer şekilde formöle edilebilecek bir tepki koyar.



Şekil 3.4. a) Elastik ortama gömülü eksenel çubuk **b)** Serbest cisim diyagramı

Şekil 3.4'te görülen sonsuz küçük elemanın Newton denge denklemleri

$$\sum F_{net} = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.64)$$

burada ρ birim hacim ağırlığı, A eksenel çubuk kesit alanı, dx sonsuz küçük elemanın uzunluğu ve $u = u(x, t)$ eksenel yerdeğiştirme bileşenidir. Sonsuz küçük elemanın serbest cisim diyagramı göz önüne alınarak denge denklemleri uygulanacak olursa

$$N + dN - N - k_M u dx + f dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.65)$$

yazılır. Burada $N = N(x, t)$ aksenal iç kuvvet, k_M aksenal ortam rijitliği ve $f = f(x, t)$ aksenal dış uyarıdır. Diferansiyel iç aksenal kuvvet için ilgili adi-kısmi diferansiyel bağıntı Denklem (3.65)'de yerine yazılacak olursa

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_M u - f \quad (3.66)$$

elde edilir. Yerel olmayan elastisitenin kurucu denklemi olan Denklem (3.13)'te yerel olmayan aksenal gerilme ortak paranteze alındıktan sonra kesit alan üzerinden her iki taraftan integre edilirse

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \int_A \sigma dA = \int_A \sigma_c dA \quad (3.67)$$

yazılır. Gerilme integrasyonları neticesinde aksenal kuvvet iç tesirleri elde edilir oluşan denklemin konuma göre bir defa türevi alınır

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial N}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.68)$$

yazılır. Denklem (3.66), (3.67)'de kullanılırsa

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_M u + f + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (3.69)$$

şeklinde elde edilen denklem basit çubuğun yerel olmayan aksenal zorlanmış titreşim hareket denklemdir.

Denge yaklaşımına göre mekanik yapıdaki sınır şartın türetilmesi

Bu konunun önemiyetini bir de burada açıklaya gerek yoktur. Buna göre ilk olarak Denklem (3.13)'te her iki tarafı kesit alana göre integre ettikten sonra oluşacak ifadede Denklem (3.68) yerine yazılacak olursa

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial u}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.70)$$

elde edilir. Bu ifade aksenal kuvvet sınır şartını, başka bir deyişle dinamik sınır şartını ifade eder. Buradan sonra hem hareket denkleminin hem de dinamik sınır şartın Varyasyonel yaklaşım ile eldesi ele alınacaktır.

Varyasyon cebrine göre denklemlerin türetilmesi

Varyasyon cebrinin mühendislik mekaniği üzerindeki uygulama alanı, sürekli elemanın enerji denklemleri üzerinedir. Serbest titreşim problemi açısından, yapının bazı enerji formülasyonları yazıldıktan sonra kurulması gereken nihai enerji formülasyonunun

varyasyonu sayesinde hem hareket denklemi hem de dinamik sınır şartı bir arada elde edilebilir.

Buna göre ilk olarak cismin iç şekil değiştirme enerjisini elde etmeliyiz. Cismin enerji denklemi gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerine bağlıdır. Sürekli elemanın kinematığı gereğince şekil değiştirmeler de o elemanın deformasyonlarından meydana gelir. Basit eksenel çubuğun şekil değiştirme bileşenleri

$$u(x,t)=u, \quad v(x,t)=0, \quad w(x,t)=0 \quad (3.71)$$

şeklindedir. Burada u eksenel deplasmandır. v ve w sırasıyla yanal ve enine deformasyonları temsil eder ve çubuk Poisson etkilerini ihmal ettiğinden bunlar sıfıra eşittir. Deformasyon bileşenlerinden şekil değiştirmelere

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.72)$$

olarak geçilir. Detayı Ek-2’de verilen diferansiyel denklemleri gereğince eksenel gerilmeye dair bağıntı

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_M \frac{u}{A} - \frac{f}{A} \quad (3.73)$$

şeklindedir. Böylece yerel olmayan eksenel gerilme ve diğer gerilme bileşenleri

$$\sigma_{xx} = \left(E + \frac{(e_0 a)^2 k_M}{A} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^2}{A} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.74)$$

şeklinde yazılır. İlk olarak, cismin enerji formülasyonlarından iç şekil değiştirme formülasyonu oluşturulabilir. En temelde iç şekil değiştirme formülasyonu

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dA dx \quad (3.75)$$

şeklindedir. Ancak yüksek lisans tezi çalışması kapsamında elastik ortam ve uç eklentisi gibi çok değişik etkiler bir arada gözetilecektir. Buna göre işimizi görecekt en genel iç şekil değiştirme formülasyonu

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left(E \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^2 k_M}{A} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2}{A} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dA dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L k_M u^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{a,i} (u(x_i, t))^2 \quad (3.76)$$

olarak yazılır. Burada ilk kez görülen bir terim olan k_a noktasal elastik yay eklentisi sabitini belirtir. Eklentiler n sayıdaki ayırık nokta için genelleştirilebilir. Tez çalışmasında eklentiler elemanın ucunda seçilmiştir. Enerji denklemi nihai olarak aşağıdaki biçimde toparlanabilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 k_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_M u^2 dx + \frac{1}{2} k_a (u(0, t))^2 + \frac{1}{2} k_a (u(L, t))^2 \quad (3.77)$$

Öte yandan aksenal çubuğun kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{a,i} \left(\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial u(L, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.78)$$

şeklindedir. Burada genelleştirilen ifadede gözümüze çarpan m_a eklenti kütlesidir ve sadece uçlarda göz önünde bulundurulacağından denklemin devamındaki gibi düzenlenmiştir. Enerji denkleminin son bileşeni olan dış kuvvetlerin cisim üzerinde iş yapabilme potansiyelini ifade eden enerji

$$W = \int_0^L f u dx \quad (3.79)$$

olarak verilir. Cisimlerin serbest titreşimi için varyasyon cebrinin uygulaması Hamilton İlkesidir. Hamilton İlkesine göre cismin (t_1, t_2) zaman aralığındaki potansiyel enerjisinin birinci varyasyonu sıfıra eşit olmalıdır

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - (T + W)) dt = 0 \quad (3.80)$$

burada δ varyasyon sembolüdür. Denklem (3.76)–(3.78)'de tanımlanmış olan tüm enerji formülasyonlarının birinci varyasyonu oluşturulmalıdır. Bunlar aşağıdaki gibi sunulmuştur:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(2EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right. \\
& + 2(e_0 a)^2 k_M \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial f}{\partial x} \Big) dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_M u \delta u dx dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a u(0, t) \delta u(0, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a u(L, t) \delta u(L, t) dt
\end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} m_a \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} dt + \int_{t_1}^{t_2} m_a \frac{\partial u(L, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(L, t)}{\partial t} dt \quad (3.82)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f \delta u dx dt \quad (3.83)$$

Bu ifadeler Denklem (3.80)'de yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & \int_{t_1}^{t_2} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial u}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta u \Big|_0^L + k_a u(L, t) + k_a u(0, t) \\
& + m_a \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} + m_a \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} \Big] dt + \int_0^L \frac{1}{2} (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_0^L \frac{1}{2} (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t_1}^{t_2} \\
& - m_a \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - m_a \frac{\partial u(L, t)}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\
& \left. - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k_M u - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f \right) \delta u dx dt = 0
\end{aligned} \quad (3.84)$$

elde edilir. Denklemde görülen tüm parçaların sıfıra eşit olması gerektiği için çift integrallli ifadeden de görüldüğü üzere $\delta u \neq 0$ için yazılabilecek ifade

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k_M u - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f = 0 \quad (3.85)$$

olur ve bu ifade hareket denklemini belirtir. Sınır şartlara bakıldığında, ilk olarak $\delta u(L, t) \neq 0$ için

$$EA \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} + k_a u(L, t) + m_a \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.86)$$

ifadesi yazılabilir. Son olarak $\delta u(0, t) \neq 0$ için

$$EA \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} - k_a u(0,t) - m_a \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.87)$$

elde edilir. Tabi sınır şartlarda görülen eklenti ifadeleri Denklem (3.70)'de görülmez çünkü diferansiyel denge eklenti içermez. Eklentili durumda dinamik şartlar eksenel iç kuvvete eşitleneceğinden, eklenti noktasında kurulacak olan denge denklemi sayesinde eklenti kuvvetleri dinamik dengeye ilave olur. İşte varyasyon ilkesinde bir de bunu düşünmeye gerek yoktur. Görüldüğü üzere doğru bir enerji ifadesinin kurulması ile her türlü etki gözetilebilmektedir. Türev ve integral işlemlerinin doğru yapılabilmesi yapılabilmelidir.

Basit eksenel çubuğun hareket denklemi ve sınır şartlarının çözümü

Bu tez çalışmasının konusu serbest titreşim olduğu için $f = 0$ alınacaktır. Böylece Denklem (3.69)'da görülen diferansiyel denklemde geriye sadece eksenel yerdeğiştirmenin bileşenleri kalıyor. Oluşan çift değişkenli ve homojen kısmi diferansiyel denklemde

$$u(x,t) = U(x) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.88)$$

şeklinde bir değişkenlere ayırık ifade kullanılabilir. İfade Denklem (3.69)'a uygulanırsa

$$\left(EA \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 \rho A U - k_M U - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A \frac{d^2 U}{dx^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{d^2 U}{dx^2} \right) T = 0 \quad (3.89)$$

elde edilir. Çalışmamızın konusu modal analiz ve frekans hesabı olduğu için

$$EA \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 \rho A U - k_M U - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A \frac{d^2 U}{dx^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \quad (3.90)$$

kısmı incelenecektir. Bu denklem

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \eta^2 U = 0 \quad (3.91)$$

şeklinde yazılmak suretiyle

$$\eta^2 = \frac{\omega^2 \rho A - k_M}{EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M} \quad (3.92)$$

olarak tanımlanan bir katsayıdır. Böylece hareket denklemi kısmiden adiye ayrıştırılmıştır. Detayı verilmeyecek olup çözüm

$$U = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x \quad (3.93)$$

şeklindedir. Burada C_1 ve C_2 uç koşullar kullanılarak belirlenebilen sabitlerdir. Sınır şartlara gelince, Denklem (3.86) veya (3.87)'de görülen denklemlerden uygun olanı kullanılacaktır. Biz şimdilik her iki eklentinin sadece aksenal çubuğun sağ ucunda bulunduğunu varsayarak mevzuyu örnekleyelim:

$$EA \frac{dU(L)}{dx} - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A \frac{dU(L)}{dx} + (e_0 a)^2 k_M \frac{dU(L)}{dx} + k_a U(L) - \omega^2 m_a U(L) = 0 \quad (3.94)$$

böylece dinamik denge ifadesi çözülerek frekans denklemine geçilebilir. Tabi bu mevzu buradan itibaren ele alacağımız uygulamaları içeren kısma aittir.

Uygulamalar

Bu bölümde yerel olmayan aksenal serbest titreşimin hareket ve sınır şart denklemlerinin Çizelge 3.1'de sunulan farklı sınır şartlı çubuklar için uygulamaları gerçekleştirilecektir. Çubukların frekans denklemleri elde edilecektir.

1. Her iki ucu tutulu çubuk: Bu çubuk tipinde tutulu uçların aksenal deplasman yapmayacağını belirten geometrik sınır şartlar kullanılmalıdır:

$$U(0) = 0, \quad U(L) = 0 \quad (3.95)$$

ilk sınır şartın Denklem (3.93)'te kullanımı ile $C_1 = 0$ elde edilirken diğer sınır şartın kullanımı ile

$$C_2 \sin \eta L = 0 \quad (3.96)$$

elde edilir. Bu ifadede $C_2 \neq 0$ olamayacağına göre (çünkü böyle olursa çubuk titreşim modu gerçekleştirilmemiş demektir)

$$\sin \eta L = 0 \quad (3.97)$$

şeklindeki trigonometrik denklemin çözümü

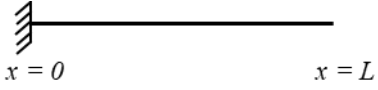
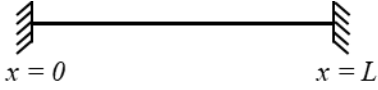
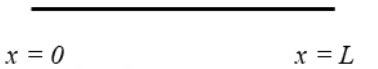
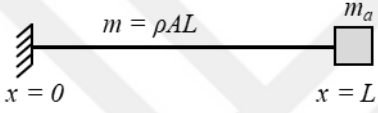
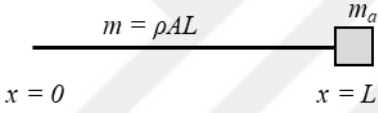
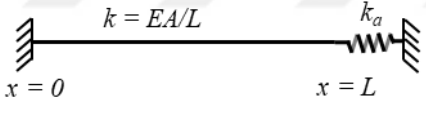
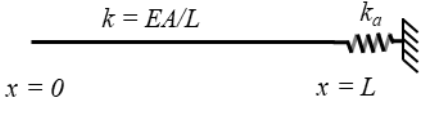
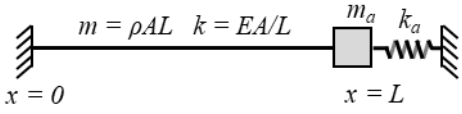
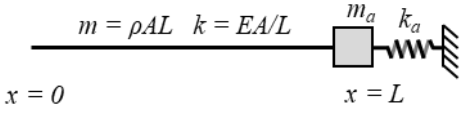
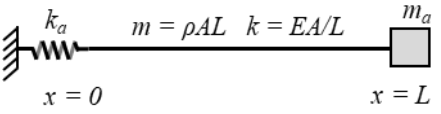
$$\eta = \frac{n\pi}{L} \quad (3.98)$$

olarak elde edilir. Burada $n = 1, 2, 3, \dots$ mod sayısıdır. Bu ifade Denklem (3.92)'de yerine koyulacak olursa

$$\omega^2 = \frac{\left[EA + (e_0 a)^2 k_M \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_a \right]}{\rho A \left[1 + (e_0 a)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]} \quad (3.99)$$

olarak serbest titreşim frekans denklemi elde edilir.

Çizelge 3.1. Eksenel serbest titreşim analizi yapılacak olan nano çubuk modelleri

Gösterim	İsim	Kısaltma
	Bir ucu tutulu diğer ucu serbest	C-F
	Her iki ucu tutulu	C-C
	Her iki ucu serbest	F-F
	Bir ucu tutulu diğer ucu kütle eklentili	C-MA
	Bir ucu serbest diğer ucu kütle eklentili	F-MA
	Bir ucu tutulu diğer ucu yay eklentili	C-SA
	Bir ucu serbest diğer ucu yay eklentili	F-SA
	Bir ucu tutulu diğer ucu hem yay hem kütle eklentili	C-SMA
	Bir ucu serbest diğer ucu hem yay hem kütle eklentili	F-SMA
	Bir ucu yay diğer ucu kütle eklentili	SA-MA

2. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest çubuk: Tutulu ucun aksenal deplasman yapmamasının yanı sıra serbest uçta aksenal normal kuvvet iç tesir olmaz. Eklenti parametreleri Denklem (3.94)'te 0 alınırsa

$$(EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M) \frac{dU(L)}{dx} = 0 \quad (3.100)$$

yazılır. Katsayı 0'a eşit olamayacağından

$$\frac{dU(L)}{dx} = 0 \quad (3.101)$$

olmalıdır. Tutulu olma durumu ile ilgili sınır şartı uygulandığı zaman $C_1 = 0$ elde edilir. Geriye kalan mod denkleminde Denklem (3.101) uygulanırsa

$$C_2 \eta \cos \eta L = 0 \quad (3.102)$$

elde edilir. Burada C_2 ve η sifira eşit olamayacağından dolayı

$$\cos \eta L = 0 \quad (3.103)$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$\eta = \frac{2n-1}{2L} \pi \quad (3.104)$$

elde edilir. Böylece frekans denklemi

$$\omega^2 = \frac{\left[EA + (e_0 a)^2 k_M \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2 + k_M \right]}{\rho A \left[1 + (e_0 a)^2 \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2 \right]} \quad (3.105)$$

olarak elde edilir.

3. Her iki ucu serbest çubuk: Çubuğun iki ucu da aksenal kuvvet almayacağından

$$\frac{dU(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dU(L)}{dx} = 0 \quad (3.106)$$

olarak sınır şartlar verilir. İlk sınır şartın kullanımı ile $C_2 = 0$ elde edilir. Diğer sınır şartın kullanımı ile

$$-C_1 \eta \sin \eta L = 0 \quad (3.107)$$

elde edilir. Denklem C_1 ve η sifira eşit olamayacağından dolayı

$$\sin \eta L = 0 \quad (3.108)$$

olur. Bu denklemin çözümü için frekans denklemi

$$\omega^2 = \frac{\left[EA + (e_0 a)^2 k_M \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_M \right]}{\rho A \left[1 + (e_0 a)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]} \quad (3.109)$$

şeklindedir.

4. Bir ucu tutulu diğer ucu kütle eklentili çubuk: Bu çubuk tipinde tutulu ucun nasıl ifade edildiği artık bilinmektedir. Kütle eklentili uçta yazılabilecek olan dinamik sınır şartı Denklem (3.86)'dan dolayı

$$\left(EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M \right) \frac{dU}{dx} = \omega^2 m_a U \quad (3.110)$$

yazılır. Bu denklemde mod şeklinin kendisi ve türevi

$$\left(EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M \right) C_2 \eta \cos \eta L = \omega^2 m_a C_2 \sin \eta L \quad (3.111)$$

olarak değerlendirilebilir. C_2 katsayıları her iki taraftan sadeleştirildikten sonra birkaç matematiksel düzenleme ile

$$\eta \cot \eta L = \frac{\omega^2 m_a}{EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M} \quad (3.112)$$

elde edilir. Denklem (3.92) bu denklemde

$$\eta \cot \eta L = \frac{\omega^2 m_a \eta^2}{\omega^2 \rho A - k_M} \quad (3.113)$$

olarak yerine yazılabilir. η sadeleştirildikten sonra denklemin sağ tarafı $\beta_m = m_a / \rho A L$ olarak belirtilen kütle eklenti oranı ile sadeleştirilsin:

$$\cot \eta L = \frac{\omega^2 m_a \eta}{\omega^2 \rho A - k_M} \frac{\beta_m \rho A L}{m_a} \quad (3.114)$$

gereken son düzenlemelerle beraber frekans denklemi

$$\cot \eta L = \eta L \beta_m \frac{\omega^2 \rho A}{\omega^2 \rho A - k_M} \quad (3.115)$$

olarak elde edilmiş olur.

5. Bir ucu serbest diğer ucu kütle eklentili çubuk: Bir önceki uygulamadan farklı olarak tutulu uç yerine serbest uç olduğundan dolayı

$$-(EA - \omega^2(e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M) C_1 \eta \sin \eta L = \omega^2 m_a C_1 \cos \eta L \quad (3.116)$$

yazılır. Bazı matematiksel işlemler ile

$$\eta \tan \eta L = -\frac{\omega^2 m_a \eta^2}{\omega^2 \rho A - k_M} \quad (3.117)$$

olarak yerine yazılabilir. Yine η sadeleştirildikten sonra denklemin kütle oranı kullanılırsa

$$\tan \eta L = -\frac{\omega^2 m_a \eta}{\omega^2 \rho A - k_M} \frac{\beta_m \rho A L}{m_a} \quad (3.118)$$

elde edilir. Böylece frekans denkleminde

$$\tan \eta L = -\eta L \beta_m \frac{\omega^2 \rho A}{\omega^2 \rho A - k_M} \quad (3.119)$$

şeklinde ulaşılır.

6. Bir ucu tutulu diğer ucu elastik yay eklentili çubuk: Tutulu uca ait işlemin gerçekleştirilmesinden sonra yay eklentili uca ait dinamik denge ifadesi Denklem (3.86) kullanılarak

$$-(EA - \omega^2(e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M) C_2 \eta \cos \eta L = -k_a C_2 \sin \eta L \quad (3.120)$$

olarak yazılır. Bu denklem bazı matematiksel işlemler yapılarak

$$\eta L \cot \eta L = -\frac{\beta_k EA}{EA - \omega^2(e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M} \quad (3.121)$$

şekline getirilir. Bu denklemde görülen

$$\beta_k = \frac{k_a}{k_r} = \frac{k_a L}{EA} \quad (3.122)$$

eklenti rijitliğinin aksenal çubuk rijitliğine oranıdır. Denklem (3.92) üzerinden

$$EA = \frac{\omega^2 \rho A}{\eta^2} - \frac{k_M}{\eta^2} + \omega^2(e_0 a)^2 \rho A - (e_0 a)^2 k_M \quad (3.123)$$

$$EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M = \frac{\omega^2 \rho A - k_M}{\eta^2} \quad (3.124)$$

yazabiliriz. Bu ifadelerin Denklem (3.121)'de kullanımı ile oluşturulabilen

$$\eta L \cot \eta L = -(1 + (e_0 a)^2 \eta^2) \beta_k \quad (3.125)$$

ifadesi çubuğun frekans denklemini belirtir.

7. Bir ucu serbest diğer ucu elastik yay eklentili çubuk: Bu çubuğun işlemleri de bir önceki çubukla büyük benzerlik göstermektedir. Bu nedenle, hem sınır şartlar artık idrak edilebildiğinden, hem de daha fazla işlem kalabalığı yapmaya lüzum görülmediğinden frekans denklemini vermek yeterlidir. Frekans denklemi

$$\eta L \tan \eta L = (1 + (e_0 a)^2 \eta^2) \beta_k \quad (3.126)$$

8. Bir ucu tutulu diğer ucu kütle ve elastik yay eklentili çubuk: Çift eklentiye sahip çubuklarda her bir eklenti için önceden elde edilmiş olan frekans denklemleri birleştirilebilir. Şöyle ki, kütle eklentisi için Denklem (3.115) ηL çarpanı ile büyütüldükten sonra Denklem (3.125) ile toplanırsa

$$\eta L \cot \eta L = (\eta L)^2 \beta_m \frac{\omega^2 \rho A}{\omega^2 \rho A - k_M} - (1 + (e_0 a)^2 \eta^2) \beta_k \quad (3.127)$$

elde edilir.

9. Bir ucu serbest diğer ucu kütle ve elastik yay eklentili çubuk: Bir önceki çubuğa benzer biçimde bu sefer Denklem (3.119) ηL ile çarpılıp Denklem (3.126)'ya eklenirse

$$\eta L \tan \eta L = -(\eta L)^2 \beta_m \frac{\omega^2 \rho A}{\omega^2 \rho A - k_M} + (1 + (e_0 a)^2 \eta^2) \beta_k \quad (3.128)$$

elde edilir.

10. Bir ucu elastik yay diğer ucu kütle eklentili çubuk: $x = 0$ ucunda elastik yay ve $x = L$ ucunda kütle eklentisine sahip çubuğun dinamik sınır şartları sırayla

$$(EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M) C_2 \eta = k_a C_1 \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} (EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M) (-C_1 \eta \sin \eta L + C_2 \eta \cos \eta L) \\ = m_a \omega^2 (C_1 \cos \eta L + C_2 \sin \eta L) \end{aligned} \quad (3.130)$$

olarak verilir. Bu denklemler $(EA - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A + (e_0 a)^2 k_M) = R$ denilerek

$$k_a C_1 - R\eta C_2 = 0 \quad (3.131)$$

$$(R\eta \sin \eta L + m_a \omega^2 \cos \eta L) C_1 + (-R\eta \cos \eta L + m_a \omega^2 \sin \eta L) C_2 = 0 \quad (3.132)$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem sistemini matris formda yazacak olursak

$$\begin{bmatrix} k_a & -R\eta \\ R\eta \sin \eta L + m_a \omega^2 \cos \eta L & -R\eta \cos \eta L + m_a \omega^2 \sin \eta L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.133)$$

şeklinde yazılan ifadenin katsayılar matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenirse ve devamında kütle ve rijitlik oranı ile ilgili parametreler kullanılırsa frekans denklemi elde edilebilir:

$$\left(-\beta_k \frac{EA}{L} + \beta_m \rho AL \omega^2 \right) R\eta \cot \eta L + \beta_k \beta_m E \rho A^2 \omega^2 + (R\eta)^2 = 0 \quad (3.134)$$

olarak ortaya çıkan ifade frekans denklemidir.

3.4.2. Love–Bishop çubuk teorisi (LBRT)

Bu altbaşlıkta kayma ve yanal atalet etkili eksenel çubukların yerel olmayan eksenel titreşim denklemleri türetilecek ve çözülecektir. Bu tip çubuklarda yanal şekil değiştirme yani Poisson etkisinden kaynaklı kuvvetleri ve özellikle eklenti durumundaki dinamik kuvvetleri belirlemek zor olabileceğinden denge yaklaşımı terk edilecek, onun yerine varyasyon cebri kullanılacaktır.

Hareket ve sınır şart denklemlerinin türetilmesi

Bir önceki altbaşlıkta hareket denkleminin türetilmesinin en temelinde çubuk elemanın kinematik ilişkilerinin yer aldığını belirtmiştik. Tabi kinematik ilişkilerin oluşturulabilmesi için çubuğun deformasyon ifadeleri bilinmelidir. Bunlar,

$$u(x, t) = u, \quad v(x, t) = -\nu y \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w(x, t) = -\nu z \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.135)$$

şeklindedir. Burada u , v ve w sırasıyla x , y ve z - eksenleri doğrultusundaki yer değiştirme bileşenleridir. ν ise Poisson oranı olup çubuğun yanal şekil değiştirmesinin eksenel şekil değiştirmesine olan oranını tanımlar. Temelde, eksenel deformasyon dışındaki diğer iki deformasyon bileşeni, ilgili eksenlerdeki oldukça küçük yerdeğişikliklerin sonsuzda bir limitinin tanımlı olmasından ileri gelir. Deformasyon bileşenlerinden şekil değiştirmelere

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.136)$$

şeklinde geçilir. Çubuğun diferansiyel dinamik dengesi gereği gerilme bağıntıları

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k_M}{A} u - \frac{f}{A}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.137)$$

olarak yazılır. Bu ifadelerin yerel olmayan elastisitenin kurucu denklemi olan Denklem (3.13) ve (3.14)'te kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (e_0 a)^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{k_M}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2}{A} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \sigma_{xy} &= -(e_0 a)^2 \rho \nu y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \sigma_{xz} &= -(e_0 a)^2 \rho \nu z \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (3.138)$$

yazılabilir. Bunların haricindeki bütün gerilme bileşenleri sıfıra eşittir. Böylece toplam şekil değiştirme enerjisi

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left[\left((e_0 a)^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{k_M}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2}{A} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad + 2 \left(-(e_0 a)^2 \rho \nu y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ &\quad \left. + 2 \left(-(e_0 a)^2 \rho \nu z \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] dA dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L k_M u^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{a,i} (u(x_i, t))^2\end{aligned}\quad (3.139)$$

olur. İfade düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[(e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \left[EA + (e_0 a)^2 k_m \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. + (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G I_p \nu^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_M u^2 dx \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} k_a (u(0, t))^2 + \frac{1}{2} k_a (u(L, t))^2 \right] \quad (3.140)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada görülmekte olan

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (3.141)$$

ifadesi eksenel çubuk kesitinin polar atalet momentini tanımlar. Ayrıca kinetik enerji de

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} \int_V \rho & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{a,i} \left(\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\
= \frac{1}{2} \int_0^L & \left[\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \rho I_p \nu^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial u(L, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.142)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Son olarak dış yükün eksenel çubuk üzerinde iş yapabilme potansiyeli

$$W = \int_0^L f u dx \quad (3.143)$$

olarak verilir. Enerjilerin ifadelerinin varyasyonları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L & \left(2 \left[EA + (e_0 a)^2 k_m \right] \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right. \\
& + 2 G I_p \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial f}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& \left. + (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_M u \delta u dx dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a u(0, t) \delta u(0, t) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} k_a u(L, t) \delta u(L, t) dt \quad (3.144)
\end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\rho A \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho I_p v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} m_a \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} dt + \int_{t_1}^{t_2} m_a \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} dt \quad (3.145)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f \delta u dx dt \quad (3.146)$$

Bu ifadeler Denklem (3.80)'de yerleştirilerek hareket ve sınır şart denklemleri türetilir. Neticede varyasyon cebirinin uygulamasını bildiğimizden ve fazla da işlem kalabalığı yapmamak gerektiğinden sadece ilgili varyasyon işleminin neticeleri vermek uygun görülmüştür. Buna göre hareket denklemi

$$\left[EA + (e_0 a)^2 k_M \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_M u + f + \left[(e_0 a)^2 \rho A + \rho I_p v^2 \right] \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G I_p v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (3.147)$$

şeklindedir. $\delta u(L,t) \neq 0$ için mekanik sınır şart

$$\left[EA + (e_0 a)^2 k_M \right] \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \left[(e_0 a)^2 \rho A + \rho I_p v^2 \right] \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x \partial t^2} - G I_p v^2 \frac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 \frac{\partial^5 u(L,t)}{\partial x^3 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f(L,t)}{\partial x} + k_a u(L,t) + m_a \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.148)$$

şeklindedir ve benzer biçimde $\delta u(0,t) \neq 0$ için mekanik sınır şart

$$\left[EA + (e_0 a)^2 k_M \right] \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \left[(e_0 a)^2 \rho A + \rho I_p v^2 \right] \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x \partial t^2} - G I_p v^2 \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 \frac{\partial^5 u(0,t)}{\partial x^3 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} - k_a u(0,t) - m_a \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.149)$$

olarak karşımıza çıkar. Tabi varyasyon işleminde bir diğer sınır $\delta u' \neq 0$ için diğer mekanik sınır şart

$$\left(G I_p v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \Big|_0^L = 0 \quad (3.150)$$

olarak elde edilir. $\delta u \neq 0$ mekanik şartının anlamı eksenel iç kuvvet iken $\delta u' \neq 0$ için mekanik şart bir kesme kuvvetini tanımlar. Ancak burada bir şey iyi bilinmelidir. Kesme kuvveti zikredilirken akla enine etkiler gelmemelidir aksi halde eksenel çubuk tanımımız

bozulur. Burada kesme kuvveti kavramı Poisson etkisinden ortaya çıkan yanıl etkiler kaynaklı bir kuvvettir.

Hareket ve sınır şart denklemlerinin çözümü

Gerek denge denkleminde gerekse sınır şartlara değışkenlere ayırma metodunun nasıl uygulandığı artık iyi bilinmektedir. Bundan dolayı bu kısmı fazla derinleştirmeye gerek yoktur. İlk olarak hareket denklemini tanımlayan Denklem (3.148) ifadesinde değışkenlere ayırma metodunu uygularsak ve serbest titreşimden dolayı dış uyarı $f = 0$ olarak alırsak mod denklemini

$$\left[\omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 - G I_p \nu^2 \right] \frac{d^4 U}{dx^4} + \left[EA + (e_0 a)^2 k_M - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A - \omega^2 \rho I_p \nu^2 \right] \frac{d^2 U}{dx^2} + (\omega^2 \rho A - k_M) U = 0 \quad (3.151)$$

bu adi diferansiyel denklemin çözümü, detayına girilmeden,

$$U(x) = C_1 \cos(\sqrt{-M_1} x) + C_2 \sin(\sqrt{-M_1} x) + C_3 \cosh(\sqrt{M_2} x) + C_4 \sinh(\sqrt{M_2} x) \quad (3.152)$$

şeklindedir. Burada

$$M_1 = \frac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3}}{2m_1}, \quad M_2 = \frac{-m_2 - \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3}}{2m_1} \quad (3.153)$$

olarak verilmek suretiyle

$$m_1 = \omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 - G I_p \nu^2, \quad m_2 = EA + (e_0 a)^2 k_M - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A - \omega^2 \rho I_p \nu^2, \\ m_3 = \omega^2 \rho A - k_M \quad (3.154)$$

şeklindedir.

Uygulamalara geçmeden önce sınır şart denklemlerinin çözümünden de bahsedilmelidir. Basit eksenel çubuktan farklı olarak Love–Bishop çubuğunda iki farklı mekanik sınır denklem olduğunu belirtmiştik. Bunlardan ilkinin ifade eden Denklem (3.148) ve (3.159) ifadelerinden eklentilerin sadece sağ uçta yer alacağı varsayımı ile Denklem (3.148)’i ele alalım. Değışkenlerine ayrık ifadenin uygulanması ile

$$\left[\omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 - G I_p \nu^2 \right] \frac{d^3 U(L)}{dx^3} + \left[EA + (e_0 a)^2 k_M - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A - \omega^2 \rho I_p \nu^2 \right] \frac{dU(L)}{dx} + k_a U(L) - \omega^2 m_a \frac{d^2 U(L)}{dt^2} = 0 \quad (3.155)$$

neticesi elde edilir. Benzer şekilde Denklem (3.150) için

$$\left[GI_p v^2 - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p v^2\right] \frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \quad (3.156)$$

olmalıdır.

Uygulamalar

Öncelikle şunu belirtmekte yarar vardır ki tezde ele alacağımız sınır şartlardan sadece her iki ucu gevşek tutulu çubuk analitik olarak el çözümüne müsaittir. Ek olarak, sınır koşulları tutulu veya serbest gibi genel bilinen çubuklar daha önceden bahsettiğimiz Fourier serileri yardımıyla çözülebilir ancak, özellikle eklentili çubukların frekans denklemi için bizi çözüme götürebilecek hiçbir analitik yöntem mevcut değildir. Bu tip çubukların sınır şartları elle uygulandıktan sonra elde edilen ve matris yapıda birleştirilebilen dört adet denklem bilgisayarda kodlanırsa determinant aldırılmak suretiyle titreşim frekansları hesaplanabilir. Bu mevzu ileride yeri geldiğinde daha detaylı anlatılacaktır. Biz bu bölümde frekans denklemleri elde edilebilen çubukları ele alacağız.

1. Her iki ucu tutulu çubuk: Çubuk uçlarda eksenel deplasman yapmaz. Çubuğun tam şekil değiştirmesinin karakteristiği gereği deplasmanın birinci türevi de sifıra eşit olmalıdır. O halde şartlar

$$U(0)=0, \quad \frac{dU}{dx}(0)=0, \quad U(L)=0, \quad \frac{dU}{dx}(L)=0 \quad (3.157)$$

şeklinde sıralanabilir. Bu ifadeler Denklem (3.152)'ye uygulandıktan sonra elde edilen denklemler matris formda birleştirilebilir. Ancak oluşan denklem takımında katsayılar matrisinin elle determinantını hesaplamak zordur. Kısacası değişkenlere ayırma metodu işe yarayamamıştır. Bunun yerine bahsetmiş olduğumuz Fourier serileri kullanılabilir. Denklem (3.61)'de görülen ifadede, her iki ucu tam tutulu çubuğun davranışını $\alpha = n\pi/L$ katsayısının yansıttığını belirtmiştik. O halde çubuğun eksenel yerdeğiştirme denklemi

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.158)$$

şeklinde olmalıdır. Fourier denklemini kullanmanın bir avantajı da sınır koşullar vasıtasıyla oluşacak denklemler üzerinden yapılması gereken işlemlerin fazlalığını azaltıyor olmasıdır. Hareket denklemi olan Denklem (3.147)'de, Denklem (3.158) ve gereken türevleri yazılırsa

$$\begin{aligned} & m_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) - m_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) \\ & + m_3 \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

burada seri ifadeleri sadeleştirilecek olursa

$$m_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - m_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + m_3 = 0 \quad (3.160)$$

Denklem (3.154)'te görülen ifadeler yerine koyulursa

$$\left[\omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 - G I_p \nu^2 \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - \left[EA + (e_0 a)^2 k_M - (e_0 a)^2 \omega^2 \rho A - \omega^2 \rho I_p \nu^2 \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + (\omega^2 \rho A - k_M) = 0 \quad (3.161)$$

elde edilir. Buradan frekans ifadesi

$$\omega^2 = \frac{G I_p \nu^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \left[EA + (e_0 a)^2 k_M \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_M}{(e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \left[(e_0 a)^2 \rho A + \rho I_p \nu^2 \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \rho A} \quad (3.162)$$

şeklinde oluşturulabilir.

2. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest çubuk: Çubuk eleman tutulu uçtaki şartlara ek olarak serbest uça eksenel kuvvet ve kesme kuvveti almaz. O halde sınır şartlar

$$U(0)=0, \quad \frac{dU}{dx}(0)=0, \quad m_1 \frac{d^3 U}{dx^3}(L) + m_2 \frac{dU}{dx}(L)=0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2}(L)=0 \quad (3.163)$$

şeklinde oluşturulur. Yine çözüm elle imkansız olacağından alternatif çözüm olan Fourier serileri kullanılabilir. Denklem (3.162)'de Fourier katsayısı değiştirilerek frekans ifadesi

$$\omega^2 = \frac{G I_p \nu^2 \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^4 + \left[EA + (e_0 a)^2 k_M \right] \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2 + k_M}{(e_0 a)^2 \rho I_p \nu^2 \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^4 + \left[(e_0 a)^2 \rho A + \rho I_p \nu^2 \right] \left(\frac{2n-1}{2L} \pi \right)^2 + \rho A} \quad (3.164)$$

olarak verilebilir.

3. Her iki ucu gevşek tutulu çubuk: Gevşek tutululuktaki çubukların uçları eksenel deformasyon yapmadıkları gibi kesme kuvveti de almazlar. Bu durumda sınır şartlar

$$U(0)=0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2}(0)=0, \quad U(L)=0, \quad \frac{d^2 U}{dx^2}(L)=0 \quad (3.165)$$

olarak verilir. Bu şartlardan en soldakini Denklem (3.152)'ye uygulayalım

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + C_3 \cosh 0 + C_4 \sinh 0 = 0 \quad (3.166)$$

Soldan ikinci şartı uygulayalım

$$C_1 M_1 \cos 0 + C_2 M_1 \sin 0 + C_3 M_2 \cosh 0 + C_4 M_2 \sinh 0 = 0 \quad (3.167)$$

Denklem (3.166) ve (3.167)'nin ortak çözümünden $C_1 = C_3 = 0$ elde edilir. Hareket denkleminin kalan haline soldan üçüncü ve en sonda görülen şartları sırayla uygularsak

$$C_2 \sin(\sqrt{-M_1} L) + C_4 \sinh(\sqrt{M_2} L) = 0 \quad (3.168)$$

$$C_2 M_1 \sin(\sqrt{-M_1} L) + C_4 M_2 \sinh(\sqrt{M_2} L) = 0 \quad (3.169)$$

bu iki denklem ifadesi matris formda

$$\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{-M_1} L) & \sinh(\sqrt{M_2} L) \\ M_1 \sin(\sqrt{-M_1} L) & M_2 \sinh(\sqrt{M_2} L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.170)$$

yazılabilir. Katsayılar matrisinin determinanı

$$(M_1 - M_2) \sin(\sqrt{-M_1} L) \sinh(\sqrt{M_2} L) = 0 \quad (3.171)$$

olarak ortaya çıkan ifade frekans denklemidir. Bu ifade şöyle analiz edilebilir: $(M_1 - M_2) = 0$ olması için iki kökün eşit olması gerekiyor. Denklem (3.151)'in karakteristik denkleminin kökler toplamının pozitif, kökler çarpımının negatif olmasından doğan iki farklı kök tespitinden dolayı bu durum gerçekleşemez. Öte yandan $\sinh(\sqrt{M_2} L) = 0$ olması için $M_2 = 0$ olmalıdır ki az evvel bir negatif bir de pozitif işaretli kesin kesin kök var demiştik. Dolayısı ile son ihtimal olan

$$\sin(\sqrt{-M_1} L) = 0 \quad (3.172)$$

denkleminin çözümünü araştıracağız. Buna göre,

$$-M_1 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (3.173)$$

olur. Denklem (3.153)'ten,

$$\frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3}}{2m_1} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (3.174)$$

oluşur. Denklem (3.154)'teki ifadeleri burada kullanabilmemiz için bu denklemi biraz düzenlememiz gerekir. Öncelikle,

$$\frac{m_2}{2m_1} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = -\frac{\sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3}}{2m_1} \quad (3.175)$$

yazılabilir. Daha sonra her iki tarafın karesini alalım,

$$\left(\frac{m_2}{2m_1}\right)^2 - \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 = \frac{m_2^2}{4m_1^2} - \frac{m_3}{m_1} \quad (3.176)$$

geriye aşağıdaki ifade kalır,

$$m_1\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - m_2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m_3 = 0 \quad (3.177)$$

Denklem (3.154)'te görülen ifadeler yerine konur ve frekans çekilirse,

$$\omega^2 = \frac{GI_P \nu^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + [EA + (e_0 a)^2 k_M] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_M}{(e_0 a)^2 \rho I_P \nu^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + [(e_0 a)^2 \rho A + \rho I_P \nu^2] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \rho A} \quad (3.178)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, frekans denklemi her iki ucu tam tutulu çubukla aynıdır.

4. Eklentili Uçlar: Eklentiye sahip ucun dinamik dengesini ifade eden denklemler Denklem (3.148) ve (3.149) olarak verilmişti. Tez çalışmasında basit eksenel çubuklar için uygulamalar kapsamında vermiş olduğumuz tüm çubuk modellerinin Love–Bishop teorisi ile de uygulaması yapılacaktır. Eklentili çubukları ilgili altbaşlıkta olduğu gibi bu altbaşlıkta da sıralamaya ihtiyaç duyulmamıştır. Bunun yerine dinamik sınır şartlar direkt aşağıda sunulmuştur:

- $x = 0$ 'da kütle eklentisi: $m_1 U''' + m_2 U' = -\omega^2 m_a U$
- $x = 0$ 'da elastik yay eklentisi: $m_1 U''' + m_2 U' = k_a U$
- $x = L$ 'de kütle eklentisi: $m_1 U''' + m_2 U' = \omega^2 m_a U$
- $x = L$ 'de elastik yay eklentisi: $m_1 U''' + m_2 U' = -k_a U$

Bu ifadeler eksenel dinamik sınır şartını belirtir ancak aynı uçta bir de kesme denklemi olan Denklem (3.156) yazılmalıdır. Aynı uçta iki eklentinin olması durumu için dinamik sınır şart denklemleri birleştirilebilir.

3.4.3. Çubukların yerel olmayan burulma titreşimi

Çubuklar eksenel etkilerden dolayı titreşim yapabildiği gibi kendi ekseninde zamana bağlı dönmeye zorlayıcı momente maruz kalırsa burulma titreşimi gerçekleştirebilir. Özellikle daire ve halka kesitli ve doğrusal eksenli çubukların kendi burulma titreşimi çözümlemesi önemlidir ve analitik olarak basitçe çözümlenebilir. Ancak bu kesitlerin dışındaki kesitler için gerilme yığılmasının yanı sıra çarpılmanın da öne çıktığı kesit tiplerinde burulma analizi zorlaşmaktadır. Özellikle daire kesitlerin burulmasını oldukça iyi açıklayan Bernoulli–Navier kuramına göre burulmadan önce dairesel kesitler burulmadan sonra yine daireseldir ancak burulmadan önce çubuk eksenine paralel bütün ipçikler (lifçikler) burulmadan sonra bir eliptik yay halini alır. Ayrıca dairesel kesitin burulma açısı, çubuk ekseninin doğrusal bir fonksiyonudur. Bu alt

başlıkta da yerel olmayan burulma titreşiminin varyasyonel ilke ile çözümleri gerçekleştirilecek olup uygulamaları verilecektir.

Hareket ve sınır şart denklemlerinin türetilmesi

Hatırlanacak olursa varyasyonel ilke ile analizin ilk adımı kinematik ilişkilerin belirlenmesiydi. Bunun için çubuğun burulma altında şekil değiştirme bileşenleri (Rao 2007)

$$u(x,t)=0, \quad v(x,t)=-z\theta(x,t), \quad w(x,t)=y\theta(x,t) \quad (3.179)$$

olarak verilir. Burada $\theta = \theta(x,t)$ kesitin zamana bağlı burulma açısıdır. Bu ifadelerden birim şekil değişimlerine

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{z}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{y}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (3.180)$$

şeklinde geçer. Burulma olayı kayma gerilmeleri ile karakterize edilen bir durumdur. Öte yandan çubuğun dinamik denge denklemleri

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\rho z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{k_T}{I_p} z \theta + \frac{m}{I_p} z, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{k_T}{I_p} y \theta - \frac{m}{I_p} y \quad (3.181)$$

şeklinde. Burada, elastik ortam nedeniyle θ kadar dönme hareketi için $m_r = k_T \theta$ kadar bir direngen reaksiyon oluşur ve k_T elastik ortamın rijitliğidir. $m = m(x,t)$ dinamik dış burulma zorudur. Love–Bishop eksenel çubuk kuramından hatırlanacak olduğu üzere I_p kesitin polar atalet momentidir. Ayrıca kayma şekil değişimleri

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = y \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (3.182)$$

şeklinde. Denklem (3.181) ve (3.182), (3.14)'te kullanılarak kayma gerilmelerine

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -(e_0 a)^2 \rho z \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} - G z \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2 k_T z}{I_p} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{(e_0 a)^2 z}{I_p} \frac{\partial m}{\partial x}, \\ \tau_{xz} &= (e_0 a)^2 \rho y \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + G y \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{(e_0 a)^2 k_T y}{I_p} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2 y}{I_p} \frac{\partial m}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.183)$$

olarak geçilebilir. Artık enerji denklemlerini kurabiliriz. İlk olarak iç şekil değişimi aşağıdaki gibi yazıldıktan sonra devamındaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \varepsilon_{yz}) dV + \frac{1}{2} \int_0^L k_t \theta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{a,i} [\theta(x_i, t)]^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left[G I_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + (e_0 a)^2 \rho I_p \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + (e_0 a)^2 k_t \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - (e_0 a)^2 k_t \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \theta + k_T \theta^2 \right] dx + \frac{1}{2} k_a [\theta(0, t)]^2 + \frac{1}{2} k_a [\theta(L, t)]^2 \quad (3.184)
\end{aligned}$$

burada k_a noktasal elastik burulma yayı eklentisi sabitini belirtir. Burulma çubuğunun kinetik enerjisi

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{a,i} \left(\frac{\partial \theta(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} I_a \left(\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} I_a \left(\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.185)
\end{aligned}$$

şeklinde. Yine genelleştirilen ifadeye gözümüze çarpan I_a kütle eklentisinin dönel atalet momentidir ve uygulamalar sunulurken kütle eklentisi bir disk elemanı ile teşkil edilecektir. Son olarak burulma momentinin dış enerjisi

$$W = \int_0^L m \theta dx \quad (3.186)$$

olarak verilir. Bu ifadelerin birinci varyasyonları,

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(2G I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho I_p \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \right. \\
&\quad \left. + 2(e_0 a)^2 k_T \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial m}{\partial x} \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \frac{\partial m}{\partial x} \right) dx dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_T \theta \delta \theta dx dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a \theta(0, t) \delta \theta(0, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a \theta(L, t) \delta \theta(L, t) dt \quad (3.187)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} I_a \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial t} dt + \int_{t_1}^{t_2} I_a \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial t} dt \\
&\quad (3.188)
\end{aligned}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \delta \theta dx dt \quad (3.189)$$

Bu ifadeler Denklem (3.80)'de yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(GI_P \frac{\partial \theta}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_T \frac{\partial \theta}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial m}{\partial x} \right) \delta \theta \right]_0^L + k_a \theta(L, t) + k_a \theta(0, t) \\ & + I_d \frac{\partial^2 \theta(L, t)}{\partial t^2} + I_d \frac{\partial^2 \theta(0, t)}{\partial t^2} \Big] dt + \int_0^L \left(\frac{1}{2} (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right)_{t_1}^{t_2} dx \\ & - \int_0^L \left(\frac{1}{2} (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{t_1}^{t_2} dx - I_a \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - I_a \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(GI_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - k_T \theta - \rho I_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m \right) \delta \theta dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.190)$$

elde edilir. İlk olarak $\delta \theta \neq 0$ için yazılabilen

$$GI_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - k_T \theta - \rho I_P \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m = 0 \quad (3.191)$$

ifadesi hareket denklemini tanımlar. $\delta \theta(L, t) \neq 0$ için

$$GI_P \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial^3 \theta(L, t)}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_T \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial m}{\partial x} + k_a \theta(L, t) + I_a \frac{\partial^2 \theta(L, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.192)$$

ve $\delta u(0, t) \neq 0$ için

$$GI_P \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho I_P \frac{\partial^3 \theta(0, t)}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_T \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial m}{\partial x} - k_a \theta(0, t) - I_a \frac{\partial^2 \theta(0, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.193)$$

yazılabilen ifadeler de dinamik sınır şartlarıdır.

Hareket ve sınır şart denklemlerinin çözümü

Serbest titreşimden dolayı dış burulma zoru $m = 0$ alınarak Denklem (3.191) $\theta(x, t) = \varphi(x)T(t)$ şeklinde bir kalıpla çözümlerse elde edilecek olan

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \eta^2 \varphi = 0 \quad (3.194)$$

diferansiyel denkleminde

$$\eta^2 = \frac{\omega^2 \rho I_p - k_T}{GI_p - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p + (e_0 a)^2 k_T} \quad (3.195)$$

olarak elde edilir. Eksenel titreşime benzer şekilde Denklem (3.194) ifadesinin çözümü

$$\varphi = C_1 \cos \eta x + C_2 \sin \eta x \quad (3.196)$$

şeklindedir. C_1 ve C_2 uç koşullar kullanılarak belirlenir. Öte yandan eklentilerin sadece sağ uçta bulunduğu varsayımı altında dinamik sınır şartının ayrıklaştırılmış hali

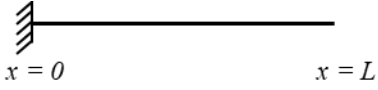
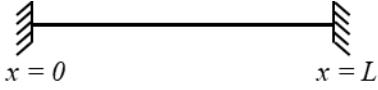
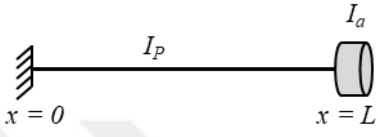
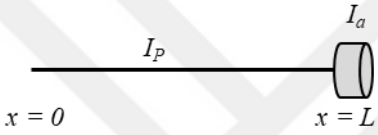
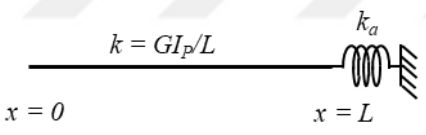
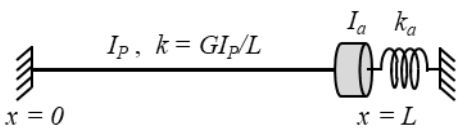
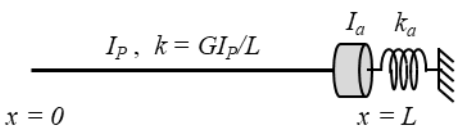
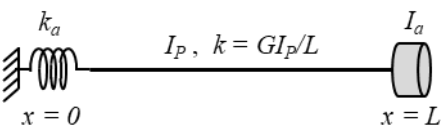
$$GI_p \frac{d\varphi(L)}{dx} - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho I_p \frac{d\varphi(L)}{dx} + (e_0 a)^2 k_T \frac{d\varphi(L)}{dx} + k_a \varphi(L) - \omega^2 I_a \varphi(L) = 0 \quad (3.197)$$

şeklindedir. Böylece dinamik denge ifadesi çözülerek frekans denkleminde geçilebilir. Tabi bu mevzu buradan itibaren ele alacağımız uygulamaları içeren kısma aittir. Buradan itibaren uygulamalar verilebilir.

Uygulamalar

Tezde yerel olmayan dinamik burulma analizi gerçekleştirilecek olan çubuk modelleri Çizelge 3.2’de sunulmuştur.

Çizelge 3.2. Serbest burulma titreşimi analizi yapılacak olan nanoçubuk modelleri

Gösterim	İsim	Kısaltma
	Bir ucu tutulu diğer ucu serbest	C-F
	Her iki ucu tutulu	C-C
	Bir ucu tutulu diğer ucu dönel kütle eklentili	C-MA
	Bir ucu serbest diğer ucu dönel kütle eklentili	F-MA
	Bir ucu tutulu diğer ucu dönel yay eklentili	C-SA
	Bir ucu serbest diğer ucu dönel yay eklentili	F-SA
	Bir ucu tutulu diğer ucu hem dönel kütle hem de dönel yay eklentili	C-SMA
	Bir ucu serbest diğer ucu hem dönel kütle hem de dönel yay eklentili	F-SMA
	Bir ucu dönel yay diğer ucu dönel disk eklentili	SA-MA

Burulma titreşimi analizi, basit eksenel çubuğun titreşimiyle çok fazla benzerlik gösterdiği için uygulamalarda fazla detaya girilmeyecektir. Bunun yerine frekans denklemleri direkt sunulacaktır:

- Bir ucu tutulu diğer ucu serbest:

$$\omega^2 = \frac{\left[GI_p + (e_0 a)^2 k_T\right] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_T}{\rho I_p \left[1 + (e_0 a)^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]}$$

- Her iki ucu tutulu:

$$\omega^2 = \frac{\left[GI_p + (e_0 a)^2 k_T\right] \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 + k_T}{\rho I_p \left[1 + (e_0 a)^2 \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2\right]}$$

- Bir ucu tutulu diğer ucu dönel kütle eklentili:

$$\cot \eta L = \eta L \beta_I \frac{\omega^2 \rho I_p}{\omega^2 \rho I_p - k_T}, \quad \beta_I = \frac{I_a}{\rho I_p L}$$

- Bir ucu serbest diğer ucu dönel kütle eklentili:

$$\tan \eta L = -\eta L \beta_I \frac{\omega^2 \rho I_p}{\omega^2 \rho I_p - k_T}, \quad \beta_I = \frac{I_a}{\rho I_p L}$$

- Bir ucu tutulu diğer ucu dönel yay eklentili:

$$\eta L \cot \eta L = -\left(1 + (e_0 a)^2 \eta^2\right) \beta_k, \quad \beta_k = \frac{k_a}{k_r} = \frac{k_a L}{GI_p}$$

- Bir ucu serbest diğer ucu dönel yay eklentili:

$$\eta L \tan \eta L = \left(1 + (e_0 a)^2 \eta^2\right) \beta_k, \quad \beta_k = \frac{k_a}{k_r} = \frac{k_a L}{GI_p}$$

- Bir ucu tutulu diğer ucu hem dönel kütle hem de dönel yay eklentili:

$$\eta L \cot \eta L = (\eta L)^2 \beta_I \frac{\omega^2 \rho I_p}{\omega^2 \rho I_p - k_T} - \left(1 + (e_0 a)^2 \eta^2\right) \beta_k, \quad \beta_I = \frac{I_a}{\rho I_p L}, \quad \beta_k = \frac{k_a}{k_r} = \frac{k_a L}{GI_p}$$

- Bir ucu serbest diğer ucu hem dönel kütle hem de dönel yay eklentili:

$$\eta L \tan \eta L = -(\eta L)^2 \beta_I \frac{\omega^2 \rho I_p}{\omega^2 \rho I_p - k_T} + \left(1 + (e_0 a)^2 \eta^2\right) \beta_k, \quad \beta_I = \frac{I_a}{\rho I_p L}, \quad \beta_k = \frac{k_a}{k_r} = \frac{k_a L}{GI_p}$$

- Bir ucu dönel yay diğer ucu dönel disk eklentili:

$$\left(-\beta_k \frac{GI_p}{L} + \beta_l \rho I_p L \omega^2 \right) R \eta \cot \eta L + \beta_k \beta_l E \rho I_p^2 \omega^2 + (R \eta)^2 = 0,$$

$$\beta_l = \frac{I_a}{\rho I_p L}, \quad \beta_k = \frac{k_a}{k_r} = \frac{k_a L}{GI_p}$$

3.4.4. Eksenel çubuklar için yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu

Bu altbaşlıkta, eksenel elemanlarda analitik olarak ele aldığımız üç problem tipi için yerel olmayan sonlu elemanlar metodunun formülasyonu sunulacaktır. Daha önceden bahsedildiği gibi, sonlu elemanlar formülasyonlarının türetilmesinde ağırlıklı kalıntı metodu kullanılacaktır.

3.4.4.1. Basit eksenel çubuk

Hareket denklemi kalıntıyı tanımlayacağı için kalıntı ifadesi

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k_M u - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f = 0 \quad (3.198)$$

şeklinde verilir. Böylece ağırlıklandırılmış artık

$$h \left(EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k_M u - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f \right) = hR \quad (3.199)$$

olarak karşımıza çıkar. Bu ifadenin eleman uzunluğu boyunca integrali olan

$$I = \int_0^L h \left(EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k_M u - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f \right) dx \quad (3.200)$$

ifadesi ortalama ağırlıklı kalıntıyı tanımlar. Bu ifadenin düzenlenmesi Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin temelini oluşturur. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemine ufak bir giriş yapmak durumundayız. Daha önceden de bahsettiğimiz gibi, eksenel çubuğun

$$u = \phi \mathbf{d} \quad (3.201)$$

şeklindeki hareket tanımında görülen ifadeleri hatırlayalım:

$$\phi = [\phi_1 \quad \phi_2] = [1 - \xi \quad \xi] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right], \quad \mathbf{d} = \{u_1 \quad u_2\}^T \quad (3.202)$$

Sonlu elemanlar formülasyonlarının oluşturulmasında çok önemli bir ifade görev alır. Buna göre, çubuğun şekil değiştirmesini tanımlayan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = D^k u = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.203)$$

denkleminde D^k kinematik operatörü tanımlar ve $D^k \phi = \mathbf{B}$ olarak verilir.

Denklem (3.200), 7 farklı integrale ayrılabilir ve devamında bazı integraller kısmi integrasyona tabi tutulabilir:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L EA h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = EA h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L EA \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ I_2 &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A h \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 \rho A h \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx, \\ I_3 &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_M h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 k_M h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ I_4 &= \int_0^L (e_0 a)^2 h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 h \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad I_5 = \int_0^L k_M h u dx, \\ I_6 &= \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx, \quad I_7 = \int_0^L h f dx \end{aligned} \quad (3.204)$$

bu integral ifadeleri Denklem (3.200)'de yerine yazılıp ağırlıklı kalıntı 0'a eşitlenirse,

$$\begin{aligned} &EA h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^L + (e_0 a)^2 \rho A h \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right|_0^L + (e_0 a)^2 k_M h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^L - (e_0 a)^2 h \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L EA \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &- \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx - \int_0^L k_M h u dx \\ &- \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \int_0^L h f dx = 0 \end{aligned} \quad (3.205)$$

elde edilir. Bu ifadenin daha da düzenlenebilmesi için

$$h = \phi^T, \quad \mathbf{B} = D^k \phi, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = (\phi^T)' = \mathbf{B}^T, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.206)$$

bağıntıları yerine yazılırsa ağırlıklı kalıntının zayıf formülasyonu, diğer bir deyişle eksenel çubukların yerel olmayan serbest titreşiminin sonlu eleman hareket denklemi

$$-\int_0^L EA (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{d}} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d} dx + \int_0^L (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' dx - \int_0^L k_M (\phi^T \phi) \mathbf{d} dx$$

$$-\int_0^L \rho A (\phi^T \phi) \ddot{\mathbf{d}} dx + \int_0^L \phi^T f dx = 0 \quad (3.207)$$

olarak elde edilebilir. Bu denklem aşağıda görülen formda yazılabilir:

$$(K + K_{M,c} + K_{M,nl}) \mathbf{d} + (M_c + M_{nl}) \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_{nl} \quad (3.208)$$

burada görülen ifadelerden $\mathbf{d}$ yer değiştirmeyi, $\ddot{\mathbf{d}}$ hareketin ivmesini tanımlar. Diğer ifadeler ise aşağıda hesaplanmaktadır ve tanımları verilmektedir:

$$K = \int_0^L EA (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L EA \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2] dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.209)$$

$$K_{M,c} = \int_0^L k_M (\phi^T \phi) dx = \int_0^L k_M \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2] dx = \frac{k_M L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.210)$$

$$K_{M,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2] dx = \frac{(e_0 a)^2 k_M}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

$$M_c = \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \rho A \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2] dx = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.212)$$

$$M_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2] dx = \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.213)$$

$$\mathbf{f}_c = \int_0^L f \phi^T dx = \int_0^L f \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} dx = \frac{fL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.214)$$

$$\mathbf{f}_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \mathbf{B}^T dx = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 f'}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.215)$$

Burada görülmekte olan K sonlu elemanın eksenel rijitlik matrisini, $K_{M,c}$ eksenel ortamın klasik rijitlik matrisini ve $K_{M,nl}$ eksenel ortamın yerel olmayan rijitlik matrisini belirtir. Bu üç ifade, toplam rijitlik matrisi altında pozitif olarak birleşir. M_c klasik kütle ve M_{nl} yerel olmayan kütle matrisidir. Bunlar da elemanın toplam kütle matrisi adı altında pozitif olarak birleşir. Son olarak $\mathbf{f}_c$ ve $\mathbf{f}_{nl}$ sırayla klasik ve yerel olmayan dış yük vektörünü ifade etmektedir.

Sonlu elemanlar yönteminde, toplam eleman matrislerinin her bir sonlu elemanın serbestlikleri doğrultusunda toplandığını vurgulamıştık. Böylece sistemin küresel matrisleri elde edilir. Sınır şartlar küresel matrislere uygulanır. Oluşan yeni küresel matrislerin idare ettiği lineer cebrik denklem, sayısal analizden bilinen metotlarla çözülür ve sonlu elemanlar metodunun işlem prosesi tamamlanır.

Sınır şartların uygulanması

İki tip sınır şartın var olduğunu analitik yöntemlerle çözümde vurgulamıştık. Bu sınır şartlar, basit eksenel çubuklar için ucun tam tutulu olduğunu ifade eden geometrik şartlar ve serbest uçta eksenel kuvvet oluşmayacağını/eklentili uçta eksenel kuvvet oluşacağını gösteren dinamik sınır şartlardır. Geometrik sınır şartlar, sonlu elemanın hangi serbestliğine atıfta bulunursa (daha teknik bir ifadeyle adresleme yaparsa) o doğrultuya tekabül eden satır ve sütunlar silinir. Şu örnek verilebilir: Konsol eksenel çubuğu $n > 1$ olmak üzere n sonlu elemana bölümler, kurulacak sonlu eleman ağında da ilk sonlu elemanın sol ucu tam tutulu ucu adreslesin. Buna göre sistemin tüm küresel matrisleri $(n+1) \times (n+1)$ boyutundadır. Tam tutulu uç geometrik açıdan eksenel şekil değiştirme yapmayacağı için küresel matrislerin birinci satırı ve sütunu silinir. O halde geriye kalan $n \times n$ boyutunda matrisler indirgenmiş küresel matrislerini temsil eder ve titreşim probleminde bu matrislerin oluşturacağı standart özdeğer problemi kurulup karakteristik denklemin kökleri aranmalıdır. Bu kökler farklı modların doğal titreşim frekanslarını tanımlar.

Geometrik açıdan olay basitçe yukarıdaki paragrafta anlatıldığı gibidir. Ancak eklentili uç halinde farklı davranılmalıdır. Eklentili uç, bulunduğu uçtaki sonlu elemanı indirgemez, aksine onu destekler. Şöyle ki, bir ucu tutulu diğer ucu elastik yay ekli çubuğu düşünelim. Çubuğu sonlu elemanlara böldüğümüzü varsayalım. En sondaki elemanın sağ ucu, eklentili ucu adreslemek sureti ile bu çubuğun 2×2 boyutundaki eksenel rijitlik matrisinin 22 indisli girdisine eklenti elastik yay sabiti dahil olur. Kısacası küresel rijitlik matrisi hem tutulu uçta bir indirgeme hem de elastik yay eklentili uçta bir ekleme ile teşkil edilir. Mevzubahis kütle matrisi için de geçerlidir. Bu sefer bir ucu tutulu diğer ucu kütle eklentili çubuğu düşünelim. Bu sefer kütle eklentisini adresleyen sonlu elemanın kütle matrisinin 22 indisli girdisine kütle eklentisinin değeri dahil olur. Yukarıdaki paragrafta anlatıldığı gibi kurulacak olan özdeğer probleminin çözümü yapılır. Bu söylenenler yeterli olduğu için gerek kaymalı çubukta, burulmada, kirişlerde, gerekse ayırık sistemlerde sınır şartların nasıl uygulanacağı hakkında detaylı bilgi vermeye lüzum kalmayacaktır.

3.4.4.2. Love–Bishop çubuğu

Basit çubukta olduğu gibi kaymalı çubuklarda da işlem mantığı aynıdır ancak ufak bir farklılık söz konusudur ve bu farklılık yeri gelince açıklanacaktır. İlk olarak ortalama ağırlıklı kalıntı

$$I = \int_0^L h \left(EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_M u + f + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho I_p v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G I_p v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx \quad (3.216)$$

olarak yazılır. Bu ifade aşağıda verilen 10 farklı kısmi integrale ayrılabilir:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^L EA h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = EA h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L EA \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\
I_2 &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_M h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 k_M h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\
I_3 &= \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx, \quad I_4 = \int_0^L k_M h u dx, \quad I_5 = \int_0^L h f dx, \\
I_6 &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A h \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 \rho A h \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_7 &= \int_0^L \rho I_P v^2 h \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \rho I_P v^2 h \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right|_0^L - \int_0^L \rho I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx \\
I_8 &= \int_0^L G I_P v^2 h \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx = G I_P v^2 h \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_0^L - \int_0^L G I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx, \\
I_9 &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 h \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 h \left. \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} dx, \\
I_{10} &= \int_0^L (e_0 a)^2 h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 h \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (3.217)
\end{aligned}$$

Basit çubuktan hatırlanacak olursa, kısmi integral ifadeleri kullanılarak oluşturulacak ağırlıklı kalıntı formülasyonu Denklem (3.208)'de görülen ifadeler vasıtasıyla düzenlenip sonlu eleman hareket denklemi elde edilebiliyordu. Fakat Denklem (3.208)'deki ifadelerden bazıları şuan ele almakta olduğumuz çubuk eleman için yetersizdir. Buna göre, yukarıda görülen ifadelerden I_8 ve I_9 şekil fonksiyonunun konuma göre üçüncü türevini içerir. Bu sorun iki hususun bilinmesi ile aşılar. Buna göre birinci husus I_8 ve I_9 integrallerine yine kısmi integrasyon işleminin uygulanmasıdır:

$$\begin{aligned}
I_8 &= G I_P v^2 h \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_0^L - G I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0^L + \int_0^L G I_P v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, \\
I_9 &= (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 h \left. \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} \right|_0^L - (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right|_0^L + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx \quad (3.218)
\end{aligned}$$

Mantıken ağırlık fonksiyonu ve hareketin türevleme miktarları aynı olmalıdır ki matris çarpımı yapılabilirsin. Dikkat edilirse yeni oluşan bu integrallerde türevler eşit ve ikinci mertebededir. Tam da bu noktada, doğru şekil fonksiyonlarının seçimi olarak nitelendirilen ikinci husus devreye girer: Yenilenmiş olan yukarıdaki ifadelerin ağırlıklı kalıntı formülasyonunda düzenlenmesi için koordinata göre iki kere türev alınacaktır. Eğer, lineer şekil fonksiyonları kullanılırsa ikinci türevden ifade gelemmez ve devamında herhangi bir sonlu eleman matrisi türetilemez. Ancak, üç düğümlü ya da diğer ifadesiyle ikinci mertebeden polinomal şekil fonksiyonları kullanılırsa bu sorun çözülür. Böylece

3.2.1.1 altbaşlığındaki ikinci mertebeden şekil fonksiyonlarını türetme nedenimiz idrak edilebilmiştir. Neticede, tüm integrasyonlar Denklem (3.216)'da yerine koyulacak olursa,

$$\begin{aligned}
& EA h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L EA \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + (e_0 a)^2 k_M h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \\
& - \int_0^L k_M h u dx + \int_0^L h f dx + (e_0 a)^2 \rho A h \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx + \rho I_P v^2 h \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L \\
& - \int_0^L \rho I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx - G I_P v^2 h \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_0^L + G I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^L - \int_0^L G I_P v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\
& - (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 h \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} \Big|_0^L + (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx \\
& - (e_0 a)^2 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0
\end{aligned} \tag{3.219}$$

elde edilir. Buradan toplam integralli ifadenin kendisini

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L EA \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \int_0^L k_M h u dx + \int_0^L h f dx \\
& - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L \rho I_P v^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L G I_P v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\
& - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0
\end{aligned} \tag{3.220}$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemin düzenlenebilmesi için, Denklem (3.206)'da yazılan ifadeler ek olarak

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mathbf{B}'^T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathbf{B}'d \tag{3.221}$$

yazılır. Bu ifadeler Denklem (3.220)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L EA (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d dx - \int_0^L (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d dx - \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) \ddot{d} dx - \int_0^L k_M (\phi^T \phi) d dx + \int_0^L \phi^T f dx \\
& - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{d} dx - \int_0^L \rho I_P v^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{d} dx - \int_0^L G I_P v^2 (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d dx - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P v^2 (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{d} dx \\
& + \int_0^L (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' dx = 0
\end{aligned} \tag{3.222}$$

bu denklemin matris formu

$$(K + K_I + K_{M,c} + K_{M,nl})\mathbf{d} + (M_c + M_{I,c} + M_{nl} + M_{I,nl})\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_{nl} \quad (3.223)$$

şeklinde yazılabilir. Burada görülen ifadeler,

$$K = \int_0^L EA(\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L EA \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] dx = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.224)$$

$$K_I = \int_0^L GI_P \nu^2 (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L GI_P \nu^2 \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3] dx = \frac{GI_P \nu^2}{L^3} \begin{bmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 76 \end{bmatrix} \quad (3.225)$$

$$K_{M,c} = \int_0^L k_M (\phi^T \phi) dx = \int_0^L k_M \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] dx = \frac{k_M L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.226)$$

$$\begin{aligned} K_{M,nl} &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 k_M \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] dx \\ &= \frac{(e_0 a)^2 k_M}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.227)$$

$$M_c = \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \rho A \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] dx = \frac{\rho A L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.228)$$

$$M_{I,c} = \int_0^L \rho I_P \nu^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \rho I_P \nu^2 \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] dx = \frac{\rho I_P \nu^2}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

$$\begin{aligned} M_{nl} &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] dx \\ &= \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.230)$$

$$\begin{aligned}
M_{I,nl} &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_p v^2 \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 \rho I_p v^2}{L^3} \begin{bmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 76 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.231}$$

$$\mathbf{f}_c = \int_0^L f \phi^T dx = \int_0^L f \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} dx = \frac{fL}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.232}$$

$$\mathbf{f}_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \mathbf{B}^T dx = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 f'}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{3.233}$$

şeklinde hesaplanır. Burada K eksenel rijitlik matrisini, K_I yanal atalet rijitlik matrisini, $K_{M,c}$ eksenel ortamın klasik rijitlik matrisini, $K_{M,nl}$ eksenel ortamın yerel olmayan rijitlik matrisini belirtir. M_c klasik kütle ve M_{nl} yerel olmayan kütle matrisine ek olarak $M_{I,c}$ klasik kütle ataleti matrisi ve $M_{I,nl}$ yerel olmayan kütle ataleti matrisidir. İlgili birleştirmeler yapılarak elemanların rijitlik, kütle ve kuvvet bütünlükleri elde edilebilir.

Sınır şartların uygulanması

Bu tip çubuklarda tüm sayısal analizler için üç düğümlü sonlu eleman kullanılacaktır. Bu tip sonlu elemanda her bir noktada sadece eksenel serbestlik var olduğundan dolayı çubuğu n adet sonlu elemana ayırırsak, çubuk $2n+1$ serbestliğe sahip olur. Küresel matrisler hazırlandıktan sonra geometrik sınır şartlar için gereken satır-sütun indirgeme işlemleri gerçekleştirildikten sonra kurulan özdeğer problemi çözülebilir.

Eklentili şartlara gelince, ilgili eklenti parametresi elemanın ucunda topaklı kabul edileceğinden elemanın ilgili matrisinin 33 indisine eklenmelidir. Bu kısmı daha fazla detaylandırmaya gerek yoktur.

3.4.4.3. Burulma çubuğu

Burulma çubuğunun sonlu eleman formülasyonunun türetilişi basit eksenel çubukla birebir aynıdır. Sadece elemanların kütle ve rijitlik matrislerinin katsayıları değişkenlik gösterir. Bu nedenle fazla detaya girmeden formülasyonu açıklayacağız. Buna göre, burulma çubuğunun sonlu eleman hareket denklemini

$$(K + K_{T,c} + K_{T,nl})\boldsymbol{\theta} + (I_c + I_{nl})\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{m}_c + \mathbf{m}_{nl} \tag{3.234}$$

olarak verebiliriz. Burada $\boldsymbol{\theta}$ açısal dönmeyi ve $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ açısal ivmeyi tanımlar. Diğer ifadeler,

$$K = \int_0^L GI_P (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L GI_P \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} dx = \frac{GI_P}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.235)$$

$$K_{T,c} = \int_0^L k_T (\phi^T \phi) dx = \int_0^L k_M \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} dx = \frac{k_T L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.236)$$

$$K_{T,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 k_T (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 k_T \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 k_T}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.237)$$

$$I_c = \int_0^L \rho I_P (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \rho I_P \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho I_P L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.238)$$

$$I_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I_P \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 \rho I_P}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.239)$$

$$\mathbf{m}_c = \int_0^L m \phi^T dx = \int_0^L m \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} dx = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.240)$$

$$\mathbf{m}_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 m' \mathbf{B}^T dx = \int_0^L (e_0 a)^2 m' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 m'}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.241)$$

olarak yazılır. Burada K sonlu elemanın burulma rijitliği matrisi, $K_{T,c}$ burulmaya karşı elastik ortamın rijitlik matrisi ve $K_{T,nl}$ burulmaya karşı elastik ortamın yerel olmayan rijitlik matrisidir. I_c klasik burulma ataleti ve I_{nl} yerel olmayan burulma ataleti matrisidir. Bunlar elemanın kütsel bütünlüğünden ileri gelir. Ek olarak $\mathbf{m}_c$ ve $\mathbf{m}_{nl}$ sırayla klasik ve yerel olmayan dış burulma momenti vektörünü tanımlar.

3.5. Nano Ölçekli Eğilme Çubuklarının Serbest Titreşimi

Buraya kadar eksenel çubuk elemanların farklı titreşimlerini inceledik. Bu altbaşlıktan itibaren eğilme elemanlarını inceleyeceğiz. Daha önceki kısımlarda eğilme elemanlarının kesme ve eğilme etkilerinin en az biri ile karakterize edilmesi nedeniyle eksenel elemanlardan farklı olduğunu belirtmiştik. Kirişlerin mekanik davranışlarını ifade edebilmek adına çok farklı teoriler geliştirilmiş olup bunlardan en yaygın bilinen ikisi, kayma etkilerinden dolayı görülen şekil değişimlerini göz ardı eden Euler–Bernoulli Kiriş Teorisi ve bu şekil değişimlerini hesaba katan Timoshenko Kiriş Teorisidir. Bunların dışındaki teorilere parabolik, trigonometrik, hiperbolik gibi yüksek mertebeden terimli kesme deformasyonlu kiriş formülasyonları örneklenebilir. Rayleigh gibi yüksek mertebeden terimleri değil de, sadece dönel atalet etkilerini gözetten teorilerden de söz edilebilir. Benzer durum eksenel çubuklarda da yanal ataletin ihmal ile formüle edilebilen Love (Rayleigh'nin adıyla da anılır) teorisi için de belirtilebilir.

Eksenel çubuklarla ilgili altbaşlıklarda basit çubuğun sadece eksenel yöndeki deformasyonları düşündüğünü yani Poisson gibi ikincil etkileri ihmal ettiğini ve Love–

Bishop çubuğunun yanal (kayma) ve kütsel atalet etkilerini göz önünde bulundurduğunu vurgulamıştık. Yukarıdaki paragrafta anlatılanlar da dikkate alındığında, eğilme ve eksenel çubuk kuramları arasında Çizelge 3.3'te gösterilen bir analoji (benzeşim) kurulabilir.

Çizelge 3.3. Eğilme ve eksenel çubuk kuramları arasındaki analogiler

Eğilme Çubuğu Kuramı	Eksenel Çubuk Kuramı	Analojinin Nedeni
Euler–Bernoulli Kiriş Teorisi →	Basit Çubuk Teorisi	Sadece birincil etkiler
Timosheko Kiriş Teorisi →	Love–Bishop Çubuk Teorisi	Kayma ve kütle ataleti
Rayleigh Kiriş Teorisi →	Love Çubuk Teorisi	Kütle ataleti

Tabi şunu da vurgulamalıyız: Euler–Bernoulli ve Timoshenko Kiriş kuramları arasındaki farklılık, eğilme, titreşim, burkulma veya bunların birleşik hali gibi her türlü mekanik analizde kendini gösterir. Ancak, kirişlerdeki Rayleigh teorisi ve diğer teoriler arasındaki farklılık sadece titreşim problemini etkiler. Ek olarak, eksenel çubuklardaki kuram farklılığı kendini yine sadece titreşim probleminde gösterir.

3.5.1. Euler–Bernoulli Kiriş Teorisi (EBBT)

Bu kiriş formülasyonunda eğilme olayından önce çubuk eksenine dik ve düzlem haldeki kesitler eğilme şekil değişiminden sonra da dik ve düzlem kalırlar. Ancak eğilme esnasında kayma gerilmeleri kaynaklı şekil değişimleri ihmal edilir. Bu kiriş teorisinin fazla yüksek olmayan, fazla kısa olmayan ve tekil yüklerin fazla öne çıkmadığı kirişlerde kullanışlı olduğu bilinmektedir.

Daha önceden de belirttiğimiz gibi sadece bu kirişlerde hareket ve sınır şart denklemlerini önce denge sonra da varyasyon cebri yaklaşımına göre türeteceğiz. İlk olarak denge yaklaşımına bakalım.

Denge yaklaşımına göre hareket denkleminin türetilmesi

Ele alacağımız kiriş eleman modeli Şekil 3.5'te görülen, çift parametrelili elastik zemine oturan ve sıcaklık etkisi altında, homojen, sabit kesitli ve düz eksenli bir çubuktur. Elastik zemini oluşturan bileşenler olan Winkler ve Pasternak zeminlerinin davranışları farklıdır. Buna göre Winkler zemini, kirişin yapacağı yerdeğiştirmeye zıt yönde ve bu yer değiştirme ile orantılı bir kuvvet oluşturur. Pasternak zemini ise, yerdeğiştirme ile aynı yönde bir iç tesir meydana getirir. Winkler zemini doğrusal tabaka ve Pasternak zemini kesme tabakası olarak nitelendirilebilir. Eksenel çubuklarda olduğu gibi kiriş elemanlarda da denge denklemi

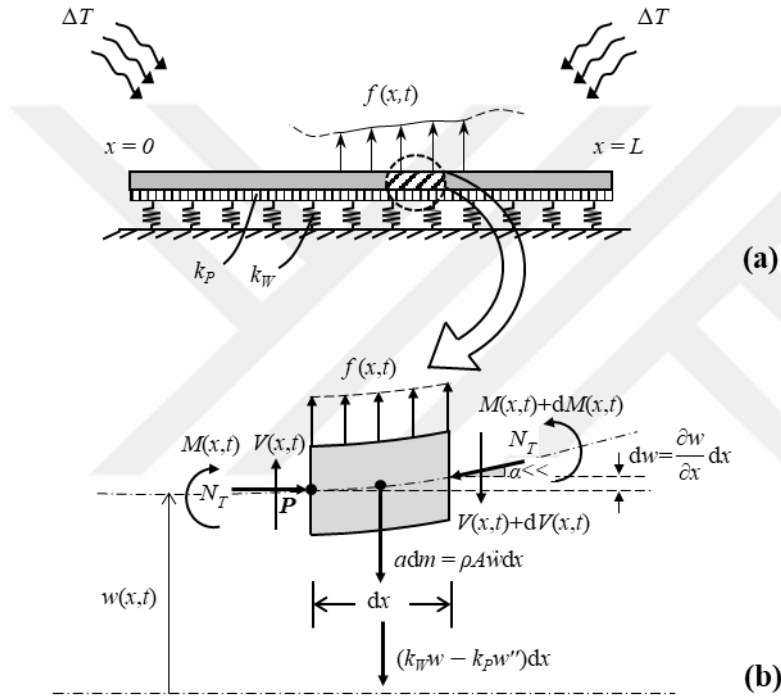
$$\sum F_{net} = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.242)$$

olarak verilebilir. Burada öncekilerden farklı bir terim olan $w = w(x, t)$ kirişin enine deplasmanıdır. Eğilme elemanlarında iç tesir olarak eğilme momenti $M = M(x, t)$ ve

kesme kuvveti $V = V(x, t)$ oluşur. Buna göre w kadar enine yerdeğiştirme yapacak olan dx uzunluğundaki sonsuz küçük elemanda oluşan bütün kuvvetlerin düşey dengesi, Şekil 3.5b'den,

$$V - (V + dV) - \left(k_w w - k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + f dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.243)$$

olarak yazılır. Burada k_w Winkler zemini sabiti, k_p Pasternak zemini sabiti, $f = f(x, t)$ enine dış uyarıdır.



Şekil 3.5. a) Çift parametrelili elastik zemine oturan ve termal etkiler altındaki kiriş elemanı **b)** Serbest cisim diyagramı

Kesme iç tesiri için ilgili adi-kısmi diferansiyel bağıntı Denklem (3.243)'de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f - k_w w + k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.244)$$

elde edilir. Öte yandan P noktasına göre moment denklemi

$$M + dM - M - (V + dV) dx + (k_w w - k_p w'') dx \frac{dx}{2} + f dx \frac{dx}{2} + N_T \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V - N_T \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.245)$$

olur. Burada denklem düzenlenirken çarpımdan gelen yüksek mertebeden diferansiyel terim $(dx)^2 \cong 0$ alınabileceğinden ilgili terimler düşürülmüştür. Öte yandan denklemde görülmekte olan N_T sıcaklıktan kaynaklanan eksenel (burkulma) yüküdür ve

$$N_t = EA\alpha_L \Delta T \quad (3.246)$$

ile hesaplanır. Burada α_L termal genleşme katsayısıdır. Pozitif sıcaklık artışı çekme kuvveti ve negatif sıcaklık artışı basınç kuvveti doğurur. Denklem (3.244) konuma göre bir kez türetildikten sonra Denklem (3.244)'te yerleştirilirse

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -k_w w + k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA\alpha_L \Delta T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f \quad (3.247)$$

elde edilir. Yerel olmayan hareket denkleminin elde edilmesi için Denklem (3.13) ifadesinde normal gerilme ortak çarpan parantezine alınır, her iki taraf enine koordinat y ile çarpılır ve kesit alan boyunca integrali alınırsa

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \int_A \sigma_{ii} y dA = \int_A s_{ii} y dA \quad (3.248)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\int_A \sigma_{ii} y dA = M_{nl} = M, \quad \int_A s_{ii} y dA = M_c = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.249)$$

olarak verilir ve burada M_{nl} yerel olmayan eğilme momenti, M_c klasik eğilme momenti, E elastisite modülü ve I eğilme yönündeki kesitin atalet momentidir ve kiriş modelimizde eğilme yönü x eksenidir. Klasik eğilme momentine ait bağıntının türetilmesi için Ek-2'ye bakılabilir. Denklem (3.248)'in her iki taraftan arka arkaya iki defa x 'e göre türev alınırsa ve oluşan yeni ifadede Denklem (3.247) yerine konursa,

$$\begin{aligned} & \left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA\alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[k_p + (e_0 a)^2 k_w - EA\alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w - f \\ & + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.250)$$

elde edilir. Bu denklem kirişin hareket denklemdir.

Denge yaklaşımına göre mekanik yapıdaki sınır şartların türetilmesi

Daha önceki altbaşlıklarda, denge yaklaşımı ile sadece hareket denkleminin türetilmesinin yeterli olmadığını sebebiyle belirtmiştik. Uygulama olarak da eksenel

çubukların hareket denklemini türettikten sonra eksenel iç tesir fonksiyonunu elde etmiştik. Eğilme çubuklarında, çökme ve dönme gibi geometrik sınır şartların yanı sıra eğilme momenti ve kesme kuvveti gibi mekanik yapıdaki sınır şartlar ifade edilebilmelidir. Denklem (3.248) kullanılarak yerel olmayan eğilme momenti iç tesiri

$$M(x,t) = \left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 k_w w - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 f \quad (3.251)$$

şeklindedir. Kesme kuvveti iç tesirine gelince, bu ifade Denklem (3.245)'te yerine konulacak olursa

$$V(x,t) = \left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left[(e_0 a)^2 k_w - EA \alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial w}{\partial x} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.252)$$

elde edilir ancak bilinmesi gereken bir husus vardır. Kesme kuvveti kayma tabakasının iç kuvvetini de içermelidir:

$$V_T(x,t) = V(x,t) + V_p(x,t), \quad V_p(x,t) = k_p \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$V_T(x,t) = \left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left[(e_0 a)^2 k_w - k_p - EA \alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial w}{\partial x} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.253)$$

burada V_p kayma tabakasında oluşan iç kuvvettir.

Eğilme elemanlarında varyasyon cebirinin uygulanması

Varyasyonel cebir uygulanması için enerji denklemlerinin oluşturulması gerektiğini önceki bölümlerde vurgulamıştık. Tabi enerji denklemlerinin elde edilebilmesinin öncesinde giriş elemanının

$$u(x,t) = u^* + z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x,t) = 0, \quad w(x,t) = w \quad (3.254)$$

şeklindeki deplasman bileşenleri oluşturulmalıdır. Burada u^* saf eksenel deplasmanı ve w enine deplasmanı yani titreşim hareketini belirtir. Aslında literatürdeki kaynakların büyük bir kısmında $u = u^* - zw'$ olarak verilir ancak bu tezdeki konuyla ilgili eleman modelinde konkav hareket incelendiği için $u = u^* + zw'$ olarak alınmalıdır. Deplasman bileşenlerinden şekil değişimlerine

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (3.255)$$

şeklinde geçebiliriz. Burada γ_{xy} , γ_{yz} ve γ_{xz} açılmal (kayma) şekil değişimleridir. Sadece enine titreşim inceleneceği için $u^* = 0$ alınmıştır. Bunların yanı sıra, eğilme çubuğunun diferansiyel dinamik dengesi

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = -\frac{k_w}{I} z w + \frac{k_p}{I} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho A}{I} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EA \alpha \Delta T}{I} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{f}{I} z \quad (3.256)$$

olarak yazılır. Böylelikle yerel olmayan eksenel gerilme

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & Ez \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2 k_w}{I} z w + \frac{(e_0 a)^2 k_p}{I} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{I} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{(e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T}{I} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + \frac{(e_0 a)^2 f}{I} z \end{aligned} \quad (3.257)$$

olarak yazılır. Kiriş elemanı için şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve dış kuvvet işi

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\tau_{xy} \gamma_{xy} + 2\tau_{xz} \gamma_{xz} + 2\tau_{yz} \gamma_{yz}) dV + \frac{1}{2} \int_0^L k_w w^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L k_p \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{a,i} [w(x_i, t)]^2 \\ = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - (e_0 a)^2 k_w w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx + \frac{1}{2} k_a [w(0, t)]^2 + \frac{1}{2} k_a [w(L, t)]^2 \end{aligned} \quad (3.258)$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{a,i} \left(\frac{\partial w(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\ = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial w(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m_a \left(\frac{\partial w(L, t)}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.259)$$

$$W = \int_0^L f w dx + \int_0^L N_T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L f w dx + \int_0^L (EA \alpha \Delta T) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.260)$$

şeklindedir. Bu ifadelerin birinci varyasyonları,

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(2 \left[EI + (e_0 a)^2 k_p + (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 k_w w \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\
& \left. - (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_w w \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a w(0, t) \delta w(0, t) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} k_a w(L, t) \delta w(L, t) dt
\end{aligned} \quad (3.261)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} m_a \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} dt + \int_{t_1}^{t_2} m_a \frac{\partial w(L, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial w(L, t)}{\partial t} dt \quad (3.262)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (EA \alpha_L \Delta T) \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.263)$$

olarak yazılır. İlgili varyasyonlar hesaplanıp Denklem (3.80)'de yerine koyulursa ve ilgili ifade düzenlenirse hareket denklemleri ve sınır şartlar elde edilir. Bu kısmın detayına girilmeyecektir.

Hareket ve sınır şart denklemlerinin çözümü

Eksenel çubuklarda hareket denklemlerinin değişkenlere ayırma metodu ile çözümü üç farklı başlık altında verildi. Dolayısı ile kirişler için de bir değişkenlere ayırma çözümü verilmesi gerek görülmemiştir. Aslında kirişlerin değişkenlere ayırma ile çözümü, Love–Bishop çubuklarının çözümüne çok benzemektedir. İlgili altbaşlıkta yapılanlar doğrultusunda, $w(x) = W(x) \sin(\omega t - \alpha)$ ifadesini kullanarak kirişlerin genel çözümünü

$$W(x) = C_1 \cos(\sqrt{-M_1} x) + C_2 \sin(\sqrt{-M_1} x) + C_3 \cosh(\sqrt{M_2} x) + C \sinh(\sqrt{M_2} x) \quad (3.264)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada M_1 ve M_2 Denklem (3.153)'te yazıldığı gibidir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
m_1 &= EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T, \\
m_2 &= k_p + (e_0 a)^2 k_w - EA \alpha_L \Delta T - \omega^2 (e_0 a)^2 \rho A, \quad m_3 = k_w - \omega^2 \rho A
\end{aligned} \quad (3.265)$$

olarak verilir. Bunun haricinde moment ve kesme denklemlerini, noktasal eklenti durumu olmaksızın yazalım:

$$M(x) = m_1 W'' + p_1 W \quad (3.266)$$

$$V(x) = m_1 W''' + p_2 W' \quad (3.267)$$

burada ilk defa görülmekte olan katsayılar

$$p_1 = (e_0 a)^2 \rho A \omega^2 - (e_0 a)^2 k_w, \quad p_2 = (e_0 a)^2 \rho A \omega^2 - (e_0 a)^2 k_w + k_p + EA \alpha_L \Delta T \quad (3.268)$$

Uygulamalar

Öncelikle, tezde analiz edilecek olan tüm kiriş modelleri Çizelge 3.4'te sunulmuştur. Eğilme çubuklarında sadece her iki ucu basit mesnetli kiriş el çözümüne müsaittir. Bunun haricinde kayıcı ankastre mesnetli uca sahip elemanlarda frekans denklemi elde edilebilir ancak elle çözülemez.

1. Basit mesnet: Hem deplasman hem de eğilme momenti olmayacağına göre, her iki ucu basit mesnet durumunda

$$W(0) = 0, \quad m_1 W''(0) + p_1 W(0) = 0, \quad W(L) = 0, \quad m_1 W''(L) + p_1 W(L) = 0 \quad (3.269)$$

yazılabilir. Bu ifadeler

$$W(0) = 0, \quad W''(0) = 0, \quad W(L) = 0, \quad W''(L) = 0 \quad (3.270)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu ifadeler Love–Bishop çubuklarındaki her iki ucu gevşek tutulu ile aynıdır. İlgili çubuk eleman kuramı ile bu kiriş kuramının mod denkleminin matematiksel karakteristikleri de aynı olduğundan sınır şartların uygulaması benzer olacaktır. Bu nedenle burada detaylı bir frekans çözümü vermeye gerek yoktur. Onun yerine, kısa da olması açısından, seri çözümü gerçekleştirilecektir. Her iki ucu basit mesnetli kirişlerin titreşim modlarının karakteristiği

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.271)$$

denklemi ile sağlanabilir. Bu seri ve ilgili türevleri Denklem (3.250)'de yerine konursa ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & m_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) + m_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) \\ & + m_3 \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (3.272)$$

yazılabilir. Seri ifadesi sadeleştirilirse

$$m_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + m_2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m_3 = 0 \quad (3.273)$$

elde edilir. Denklem (3.265)'te görülen ifadeler yerine koyulur ve frekans yalnız bırakılırsa

$$\omega^2 = \frac{\left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + \left[k_p + (e_0 a)^2 k_w - EA \alpha_L \Delta T \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_w}{(e_0 a)^2 \rho A \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \rho A} \quad (3.274)$$

şeklinde oluşturulabilir.

2. Ankastre mesnet: Bu tip bağlantılar çökme ve dönme almazlar:

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad (3.275)$$

3. Serbest uç: Serbest uçlarda da eğilme momenti ve kesme kuvveti görülmez:

$$m_1 W'' + p_1 W = 0, \quad m_1 W''' + p_2 W' = 0 \quad (3.276)$$

4. Kayıcı ankastre mesnet: Kayıcı ankastre mesnetler dönme yapmaz ancak kesme yönünde hareket serbestliğine sahiptirler. O halde kesme kuvveti de almazlar. Böylece sınır şartlar

$$W' = 0, \quad m_1 W''' + p_2 W' = 0 \quad (3.277)$$

şeklinde dir. Buradan kesme şartı düzenlenebilir:

$$W''' = 0 \quad (3.278)$$

Her iki ucu basit mesnetli elemanların sınır şartlarının basitleştirilebildiğini Denklem (3.270)'te görmüştük. Kayıcı ankastre mesnetin de şartları yukarıda görüldüğü gibi basitleştirilebildiği için bir ucu basit mesnetli ve diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli kirişin frekans çözümü yapılabilir. Bu işlem, değişkenlere ayırma temelli el çözümünden ortaya çıkan determinantı hesaplayarak yapılabilir gibi

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.279)$$

şeklindeki seriyi kullanmak suretiyle de yapılabilir. Dikkat edilirse bu seri tüm sınır şartları sağlar. O halde işlem detayına gerek kalmadan frekans denklemi

$$\omega^2 = \frac{\left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \right] \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^4 + \left[k_p + (e_0 a)^2 k_w - EA \alpha_L \Delta T \right] \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 + k_w}{(e_0 a)^2 \rho A \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 + \rho A} \quad (3.280)$$

olarak elde edilebilir.

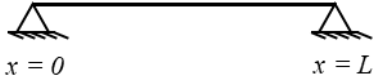
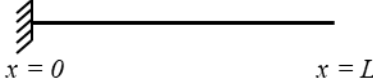
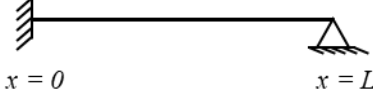
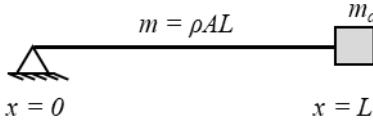
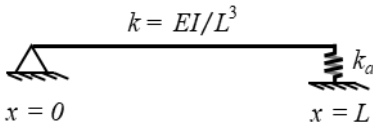
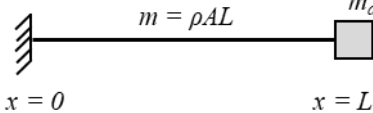
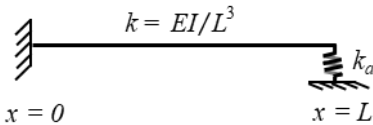
Bir ucu tam ankastre diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli elemanın sınır şartları her ne kadar basit yapıda görünse de frekans denklemi, determinantın boyutunun yüksek olması nedeniyle (başka bir ifadeyle, sınır şartlar determinantın boyutunu indirgeyemediğinden) el işlemleriyle elde edilemez. Öte yandan, çözüme uygun bir Fourier seri açılımı mevcut değildir. Neticede, program kodları vasıtasıyla çözüme gitmek gerekmektedir.

4. Eklentili uçlar: Bu altbaşlıkta enine titreşim analizi araştırıldığı için eklenti parametresinden kaynaklanan dinamik denge o uçtaki kesme kuvvetini etkilemelidir. Ek olarak belirtilmelidir ki, eğilme serbestliği yönünde tesir alabilen dönel yay veya dönel kütle eklentisi mevcut olursa o zaman moment de dinamik sınır şart olarak işlem görür ancak bu tip eklenti modelleri tezin dışında tutulmuştur. O halde eklentili uçlara ait dinamik sınır şartları

- $x = 0$ 'da kütle eklentisi: $m_1 W''' + p_2 W' = \omega^2 m_a W$
- $x = 0$ 'da elastik kesme yayı eklentisi: $m_1 W''' + p_2 W' = -k_a W$
- $x = L$ 'de kütle eklentisi: $m_1 W''' + p_2 W' = -\omega^2 m_a W$
- $x = L$ 'de elastik kesme yayı eklentisi: $m_1 W''' + p_2 W' = k_a W$

şeklindedir. Dinamik sınır şartlarına ek olarak aynı uçta bir de eğilme denklemi olan Denklem (3.266) yazılmalıdır. Aynı uçta iki eklentinin olması durumu için dinamik sınır şart denklemleri birleştirilebilir. Tabi not düşmek gerekir ki, bu tip elemanların da frekans denklemleri elde edilemez çünkü ortaya çıkan determinantın boyutu yüksektir.

Çizelge 3.4. Serbest eğilme titreşimi analizi yapılacak olan nanoçubuk (kiriş) modelleri

Gösterim	İsim	Kısaltma
	Her iki ucu basit mesnetli	S-S
	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest	C-F
	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest	C-S
	Her iki ucu ankastre	C-C
	Bir ucu basit diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli	S-G
	Bir ucu ankastre diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli	C-G
	Bir ucu basit mesnetli diğer ucu kütle eklentili	S-MA
	Bir ucu basit mesnetli diğer ucu elastik kesme yayı eklentili	S-SA
	Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu kütle eklentili	C-MA
	Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu elastik kesme yayı eklentili	C-SA

3.5.2. Timoshenko kiriş teorisi (TKT)

Eğilme elemanlarının çoğu durumu için normal gerilme ve ondan doğan şekil değiştirmeye dayanan mekanik analizler yeter doğrulukta sonuçlar vermektedir. Ancak, bu elemanların bazı durumları için kayma gerilmeleri de önem kazanmaktadır. Örnek verecek olursak, yükseklik/kalınlık oranının yüksek olması, kısa açıklık, sadece makaslama (kesme) kuvvetlerine maruz olma gibi durumlarda kayma gerilmeleri önemli hale gelebilir ve hesaba katılmalıdır. Yüksek mertebeden başka terimler zikredilmedikçe, bu tip gerilmeleri hesaba katan formülasyonların bütünü Timoshenko Kiriş Teorisi olarak bilinir.

Hatırlanacak olursa Euler–Bernoulli kirişlerinde denge yaklaşımı ile hareket denklemleri elde edilebiliyordu. Ancak sınır şartlar türetilirken Pasternak zemin parametresini ilgilendiren terim dışarıdan eklenmişti. Bu durum denge yaklaşımının bir zayıflığıdır. Varyasyonel yaklaşımda bu zayıflık görülmez. Timoshenko teorisinde de benzer durum vardır. Bu sefer Love–Bishop çubuğu gibi denge denklemlerinin kurulma zorluğu görülmez. Denge denklemleri Euler–Bernoulli’ye birkaç ufak ekleme ile kurulabilir ancak bu noktada yine bazı parametrelerin yerel olmayan elastisiteden bağımsız olarak dışarıdan eklenmesi gerekmektedir. Bu nedenle daha sağlıklı bir şekilde netice veren varyasyonel cebri kullanacağız. Önceki uygulamalardan da hatırladığımız üzere gerilmelerden yola çıkarak elde ettiğimiz dinamik dengeyi kullanırsak hareket ve sınır şart denklemlerine ulaşabiliyorduk. Bu teoride dinamik sınır şartlar kurulabilir ancak hem eğilme hem de kesme gerilmelerinden gelen dinamik dengeler biraz uzun ifadeler olduğu için integrasyon neticeleri biraz zahmetli olacaktır. Dinamik dengeden ortaya çıkan gerilmeleri varyasyona tabi tutmak yerine bu sefer gerilmelerden doğan iç tesirleri ve şekil değiştirmeleri varyasyona tabi tutacağız. Direkt olarak hareket ve sınır şart denklemlerini elde edemeyeceğiz, sadece iç tesirleri elde edeceğiz. Tabi, iç tesirleri de yerel olmayan elastisitenin kurucu denklemlerinde yerleştirdiğimiz zaman hareket denklemlerini elde edebileceğiz.

Hareket denkleminin elde edilmesi

Bu kiriş formülasyonunun hareket bileşenleri

$$u(x, t) = z\varphi, \quad v(x, t) = 0, \quad w(x, t) = w \quad (3.281)$$

olarak yazılır. Burada ilk kez görülen φ elastik eğrinin kayma gerilmeleri nedeniyle dönmesidir. Şekil değiştirme bileşenleri de,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.282)$$

şeklindedir. Şimdi, dinamik dengeler değil sadece gerilmeler kurulmalıdır. Buna göre,

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = Ez \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{1}{2}G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \quad (3.283)$$

olarak yazılır. Kiriş elemana ait şekil değiştirme, kinetik ve dış kuvvet enerjileri,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\tau_{xy} \gamma_{xy}) dV + \frac{1}{2} \int_0^L k_w w^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_p \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{a,i} [w(x_i, t)]^2 \\ &= \int_0^L \left[M \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_w w^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_p \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_a [w(0, t)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} k_a [w(L, t)]^2 \end{aligned} \quad (3.284)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_{a,i} \left(\frac{\partial w(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} M_a \left(\frac{\partial w(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} M_a \left(\frac{\partial w(L, t)}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.285)$$

$$W = \int_0^L f w dx + \frac{1}{2} \int_0^L N_T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.286)$$

şeklindedir. Enerji ifadelerinin birinci varyasyonları,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(M \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V \delta \frac{\partial w}{\partial x} + V \delta \varphi \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_w w \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} k_a w(0, t) \delta w(0, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} k_a w(L, t) \delta w(L, t) dt \end{aligned} \quad (3.287)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho I \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} M_a \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} M_a \frac{\partial w(L, t)}{\partial t} \delta \frac{\partial w(L, t)}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (3.288)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L N_T \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.289)$$

olarak yazılır. Varyasyon içeren integrallerin kısmi integrasyonları,

$$\begin{aligned}
\int_0^L M \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} dx &= M \delta \phi \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial M}{\partial x} \delta \phi dx, \quad \int_0^L V \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx = V \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial V}{\partial x} \delta w dx, \\
\int_0^L k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx &= k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx, \\
\int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} dx &= \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx, \\
\int_{t_1}^{t_2} \rho I \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} dx &= \rho I \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \phi dx, \\
\int_{t_1}^{t_2} M_a \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} dt &= M_a \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} \delta w(0,t) - \int_{t_1}^{t_2} M_a \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} \delta w(0,t) dt, \\
\int_{t_1}^{t_2} M_a \frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \delta \frac{\partial w(L,t)}{\partial t} dt &= M_a \frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \delta w(L,t) - \int_{t_1}^{t_2} M_a \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2} \delta w(L,t) dt \quad (3.290)
\end{aligned}$$

şeklinde. Bu ifadeler Denklem (3.80)'de yerine yerleştirildikten sonra elde edilen ifade düzenlenirse, ilk olarak $\delta \phi$ için

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.291)$$

yazılabilir. Bu ifadenin mekanik anlamı eğilme dengesidir. Öte yandan, δw için

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_w w + (N_T - k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.292)$$

elde edilir ve bu ifade de kesme dengesini belirtir. Denklem (3.291) ve (3.292)'den yola çıkılarak hareket denklemi ileride elde edilecektir. Bunlarla beraber, $\delta \phi \neq 0$ için

$$M(0,t) = 0, \quad M(L,t) = 0 \quad (3.293)$$

yazılabilir. Bu ifadenin anlamı da eğilme momenti sınır şartıdır. Son olarak, $\delta w \neq 0$ için

$$\begin{aligned}
V(0,t) - (N - k_p) \frac{\partial w}{\partial x}(L) - k_a w(0) - m_a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0), \\
V(L,t) - (N - k_p) \frac{\partial w}{\partial x}(L) + k_a w(L) + m_a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(L) \quad (3.294)
\end{aligned}$$

olarak yazılan ifadeler kesme kuvveti sınır şartıdır. Bu ifadeler de ileride düzenlenecektir.

Hareket ve sınır şart denklemlerinin çözümü

Hareket denkleminin elde edilmesi için yerel olmayan elastisitenin kurucu denklemlerinin düzenlenmesi gerekiyor. Buna göre ilk olarak Denklem (3.13), her iki tarafından enine koordinat z ile çarpıldıktan sonra kesit alana göre integre edilirse,

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.295)$$

yazılır. Denklem (3.14)'ün de her iki tarafı kesit alana göre integre edilirse

$$V - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \quad (3.296)$$

denkleminde ulaşılır. Burada k kesme düzeltme katsayısıdır.

İşlemlerimize ilk olarak Denklem (3.292)'yi, (3.291)'in x 'e göre bir kez türetilmiş halinde yerine yazarak başlayalım. Daha sonra eğilme momentini çekelim,

$$\begin{aligned} M = & (e_0 a)^2 k_w w + (e_0 a)^2 (N_t - k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 f + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} \\ & + EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.297)$$

Denklem (3.292)'nin x 'e göre bir kez türevi alınır, Denklem (3.296)'da yerine yazılır ve kesme kuvveti çekilirse,

$$V = (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial w}{\partial x} + (e_0 a)^2 (N_t - k_p) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + kGA \frac{\partial w}{\partial x} + kGA \varphi \quad (3.298)$$

elde edilir. Bu ifadeler Denklem (3.291) ve (3.292)'de yerine yazılırsa sırayla

$$EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - kGA \frac{\partial w}{\partial x} - kGA \varphi - \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.299)$$

$$\begin{aligned} & (e_0 a)^2 (N_t - k_p) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [(e_0 a)^2 k_w - (N_t - k_p) + kGA] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + kGA \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ & + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_w w + f = 0 \end{aligned} \quad (3.300)$$

denklemlerine ulaşılır. Buradan itibaren iki tip çözüm izlenebilir ancak öncesinde serbest titreşim incelendiğinden $f = 0$ alınması gerektiği hatırlanmalıdır. İlk çözüme göre, Denklem (3.299) ve (3.300)'ün ifade ettiği denklem takımlarında

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin(\alpha x) \sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos(\alpha x) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.301)$$

olarak verilen seriler kullanılırsa oluşan denklem takımının determinantı tanımlanmış bir α için hesaplanmak suretiyle frekans hesaplaması yapılabilir. İkinci çözüme göre Denklem (3.300)'dan $\partial\varphi/\partial x$ çekilir, Denklem (3.299)'un birinci türevinde yerine yazılır. Daha sonra elde edilen sekizinci mertebeden homojen ve kısmi diferansiyel denklem değişkenlerine ayrık kalıp ile veya sadece $w(x, t)$ için Fourier serileri vasıtasıyla çözülebilir. Kısaca ilk çözüm ayrık, ikinci çözüm birleştirilmiş bir yaklaşımı temsil eder. Bu tezde birleştirilmiş yaklaşımın kullanımı tercih edilmiştir. Buna göre ilk olarak Denklem (3.300)'den $\partial\varphi/\partial x$ ifadesini çekelim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = & -\frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p)}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA]}{kGA} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & + \frac{\rho A}{kGA} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k_w}{kGA} w = 0 \end{aligned} \quad (3.302)$$

Daha sonra Denklem (3.299)'un x 'e göre bir kez türevini alalım

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - kGA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - kGA \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \right) = 0 \quad (3.303)$$

Denklem (3.302), (3.303)'de yerine konursa

$$\begin{aligned} & -\frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p) EI}{kGA} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] EI}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} \\ & + \frac{\rho EI}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{k_w EI}{kGA} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{EI}{kGA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - kGA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_w w \\ & + (e_0 a)^2 (N_T - k_p) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f + \frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p) \rho I}{kGA} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2 \frac{(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} \\ & + \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \frac{(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & + \frac{\rho I}{kGA} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 (N_T - k_p) \rho I}{kGA} \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial t^4} \\ & - \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] (e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.304)$$

olarak hareket denklemi yazılır. Eğilme momenti ve kesme sınır şart denklemlerinin türetilmesi hakkında bilgi burada değil Ek-3'de verilmiştir. Yine de bilgi vermek

açısından, eğilme momenti denklemi Denklem (3.300)'den çekilen $\partial\varphi/\partial x$ ifadesinin Denklem (3.297)'de yazılmasıyla elde edilir. Kesme sınır denkleminin belirlenmesi ise biraz farklıdır: Denklem (3.298), (3.294)'te yerine yazılır. Elde edilen bu eşitlikte φ çekilir ve Denklem (3.302)'de yerine konur. Böylece oluşan ifade kesme sınır şartını tanımlar.

Hareket denkleminin çözümü

Değişkenlerine ayırma metodu hareket denklemini belirten Denklem (3.304)'e uygulanırsa altıncı mertebeden adi ve homojen bir diferansiyel denklem ortaya çıkar ve

$$P_1 \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + P_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + P_4 W = 0 \quad (3.305)$$

formunda yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p) EI}{kGA} + \omega^2 \frac{(e_0 a)^4 (N_T - k_p) \rho I}{kGA}, \\ P_2 &= -\frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] EI}{kGA} + (e_0 a)^2 (N_T - k_p) + \omega^2 \left[\frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p) \rho I}{kGA} + \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] (e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \right] + \omega^4 \left[-\frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \right], \\ P_3 &= \frac{k_w EI}{kGA} + (e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + \omega^2 \left[-\frac{\rho EI}{kG} - (e_0 a)^2 \rho A - \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] \rho I}{kGA} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \right] + \omega^4 \left[\frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \right], \\ P_4 &= -k_w + \omega^2 \left(\rho A + \frac{k_w \rho I}{kGA} \right) + \omega^4 \left(-\frac{\rho^2 I}{kG} \right) \end{aligned} \quad (3.306)$$

olarak verilir.

Uygulamalar

Denklem (3.305)'de görülmekte olan diferansiyel denklemin karakteristik polinomunun elle çözümü mümkün değildir. Bununla beraber bir diğer sorumuz, altıncı mertebeden bu denklemin çözümünü verecek olan altı bilinmeyen katsayılı ifade, frekans çözümünde işe yarar özellik gösteremez çünkü elimizde en az altı değil dört adet sınır şart mevcuttur. Aslında sıcaklığı ve elastik zemini gözetmeyen yerel olmayan Timoshenko kirişinin serbest titreşimi sınır şartlar ve hareket denklemlerince çözümlenebilir ancak sıcaklık ve çift parametrelili elastik zemin işi çok ciddi bir şekilde

zorlaştırmaktadır. Elimizde yeterli sınır şart olmadığı için sınır şart denklemlerinin türetilmesi işlemi bir önceki kısımda verilmemiştir. Bunun yerine, mesnet tipleri için kısaca şu bilgiler verilebilir:

- Basit mesnetli uç: Çökme w ve eğilme momenti M oluşmaz.
- Ankastre mesnetli uç: Çökme w ve kesme dönmesi ϕ oluşmaz.
- Serbest uç: Kesme kuvveti V^* ve eğilme momenti M oluşmaz.
- Kayıcı ankastre mesnetli uç: Kesme kuvveti V^* ve kesme dönmesi ϕ oluşmaz.
- Eklentili uç: Kesme kuvveti V^* eklenti kuvvetlerine eşittir ve eğilme momenti M oluşmaz.

Tabi burada kesme denklemi bazı işlemlerin gerçekleştirilmesi ile belirlenebileceğinden ve V ile karıştırılmaması gerektiğinden V^* ile gösterilmiştir.

Son olarak belirtebiliriz ki, her iki ucu basit mesnetli ve bir ucu basit diğer ucu kayıcı ankastre mesnetli kirişlerin Fourier serisi ile çözülebileceği açıktır. Ancak dikkat edilirse elde edilecek frekans denklemi Euler–Bernoulli veya eksenel çubuklardaki seri çözümünü içeren uygulamalarda görüldüğü gibi sadece ω^2 çarpanını içermez. İlgili mesnetlenme tarzlarındaki Timoshenko kirişleri için bir de ω^4 çarpanlı ifadeler karşımıza çıkar. Sonuç olarak Fourier serileri ile çözüm de işimizi fazla kolaylaştıramaz ancak elektronik ortamda programlanabilir. Tekrardan hatırlatılması gerekirse, özellikle bu kiriş kuramında karşılaştığımız zorluklar silsilesi, sıcaklık ve çift parametrelili elastik zemin sebebiyledir.

3.5.3. Eğilme elemanlarında bazı paradokslar

Daha önceden yapılmış çalışmalara dair taramanın verildiği altbaşlıkta yerel olmayan parametrenin atomik ölçekli yapının rijitliğini düşürdüğünden bahsedilmişti. Bunun sonucu olarak atomik parametrenin ilgili mekanik olaya özgü çıktının şiddetini de etkilemesi gerekir. Örneğin statik eğilme probleminde çökmenin artması, burkulma probleminde kritik yük taşıma kapasitesinin düşmesi, titreşimde de frekansların azalması beklenir. Ancak bir ucu ankastre ve diğer ucu boş yani konsol kiriş elemanında bazı çelişkiler görülür. Örneğin yayılı yük altındaki konsolda boş ucu çökmesi atomik parametrenin şiddetinin artmasına karşın azalırken kirişin serbest titreşim frekansları artışa geçer. Çeşitli bilim adamları, bazı matematiksel yaklaşımları yerel olmayan elastisite ile ilişkilendirerek bu paradoksun üstesinden gelmeye çalışmışlardır. Bu çalışmalar hakkında ilgili altbaşlıkta yeterli bilgi sunulmuştur.

Bu altbaşlıkta, kiriş elemanların paradoksu ele alınacaktır. Sadece Euler–Bernoulli formülasyonu üzerinden gidilecektir. Paradoks çözümü için sadece Challamel vd. (2014) tarafından çalışılan kendine-eş yerel olmayan modelden bahsedilecektir. Buna göre yerel olmayan şekil değiştirme tansörü

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_0^L G(x, y) \varepsilon(y) dy \quad (3.307)$$

şeklindedir. Burada $G = G(x, y)$ Green fonksiyonudur ve uçlarda dönme serbestliği olması durumu için (basit mesnet) aşağıdaki şekilde verilir:

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e_0 a} \frac{\sinh\left(\frac{1}{\phi} - \frac{y}{e_0 a}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\phi}\right)} \sinh\left(\frac{x}{e_0 a}\right) & \text{için } x \leq y \\ \frac{1}{e_0 a} \frac{\sinh\left(\frac{1}{\phi} - \frac{x}{e_0 a}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\phi}\right)} \sinh\left(\frac{y}{e_0 a}\right) & \text{için } x \geq y \end{cases} \quad (3.308)$$

burada $\phi = e_0 a / L$ ifadesi boyutsuz atomik parametredir. Green fonksiyonu simetriktir ($G(x, y) = G(y, x)$). Öte yandan serbest uç için bu fonksiyon

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e_0 a} \frac{\cosh\left(\frac{1}{\phi} - \frac{y}{e_0 a}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\phi}\right)} \cosh\left(\frac{x}{e_0 a}\right) & \text{için } x \leq y \\ \frac{1}{e_0 a} \frac{\cosh\left(\frac{1}{\phi} - \frac{x}{e_0 a}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\phi}\right)} \cosh\left(\frac{y}{e_0 a}\right) & \text{için } x \geq y \end{cases} \quad (3.309)$$

şeklindedir. Yerel olmayan elastisitede Green fonksiyonu,

$$G(x, y) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} = \delta(x - y) \quad (3.310)$$

burada $\delta(x - y)$ Dirac fonksiyonudur. Atomik yapının iç şekil değiştirme enerjisi,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L M(x) \chi(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI(w'')^2 dx \quad (3.311)$$

olarak yazılır. Burada χ eğriliktir. Ayrıca aşağıdaki varyasyonel eğrilik bağıntısı verilebilir (Challamel ve Wang 2008):

$$\int_0^L \chi \delta \bar{\chi} dx = \int_0^L \bar{\chi} \delta \chi dx - \mu \left(\bar{\chi}' \delta \bar{\chi} \right) \Big|_0^L + \mu \left(\bar{\chi} \delta \bar{\chi}' \right) \Big|_0^L \quad (3.312)$$

bu denklemde görülmekte olan $\bar{\chi}$ yerel olmayan eğriliktir ve bununla alakalı olarak

$$\bar{\chi} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial x^2} = \chi \quad (3.313)$$

ifadesi yazılabilir. Eğrilik ve eğilme momenti ilişkileri de

$$M = EI\chi, \quad \bar{M} = EI\bar{\chi} \quad (3.314)$$

şeklindedir. Yerel olmayan eğilme momenti için Denklem (3.311)

$$\frac{\mu}{EI} \left(\bar{M}' \delta \bar{M} \right) \Big|_0^L - \frac{\mu}{EI} \left(\bar{M} \delta \bar{M}' \right) \Big|_0^L = 0 \quad (3.315)$$

olarak düzenlenebilir. Böylelikle serbest ucun sağlaması gereken mekanik sınır şart

$$\bar{M}(L) = \bar{M}'(L) = 0 \quad (3.316)$$

şeklindedir. Bu arada Adali (2009) tarafından kinetik enerji,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + (e_0 a)^2 \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (3.317)$$

olarak verilir. Denklem (3.311) ve (3.317)'nin ilgili varyasyonları Hamilton ilkesinde yerine konursa

$$\left[-EIw''' + (e_0 a)^2 \rho A \ddot{w}' \right] \delta w \Big|_0^L = 0, \quad (3.318)$$

$$\left[EIw'' \delta w' \right]_0^L = 0 \quad (3.319)$$

elde edilir. Eringen'in yerel olmayan diferansiyel modeli (kendine-eş olmayan model) için kesme ve moment sınır şartları

$$\bar{M} = -EIw'' + (e_0 a)^2 \rho A \ddot{w}, \quad (3.320)$$

$$\bar{V} = \bar{M}' = -EIw''' + (e_0 a)^2 \rho A \ddot{w}' \quad (3.321)$$

şeklindeydi. Bu model $(e_0 a)^2 \rho A \ddot{w}'$ teriminin oluşumunu açıklayamaz. Yeni model olan kendine-eş model ise sınır şartlarını Denklem (3.318) ve (3.319)'da görüldüğü gibi ortaya

koyabilir ancak $(e_0 a)^2 \rho A \ddot{w}' = 0$ alınmalıdır. Böylece konsol kiriş elemanına ait sınır şartlar

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad EI w''(L) = 0, \quad -EI w'''(L) = 0 \quad (3.322)$$

olarak yazılır. Sınır şartların uygulanmasının neticesinde frekans eşitliği

$$2 + \left(\frac{K_1}{K_2} + \frac{K_2}{K_1} \right) \cos(\sqrt{K_2} L) \cosh(\sqrt{K_1} L) + \left(\sqrt{\frac{K_1}{K_2}} - \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \right) \sin(\sqrt{K_2} L) \sinh(\sqrt{K_1} L) = 0 \quad (3.323)$$

şeklindedir. Burada görülmekte olan

$$K_1 = \frac{1}{2EI} \left(-(e_0 a)^2 m_0 \omega^2 + \sqrt{[(e_0 a)^2 m_0 \omega^2]^2 + 4EI m_0 \omega^2} \right),$$

$$K_2 = \frac{1}{2EI} \left(-(e_0 a)^2 m_0 \omega^2 - \sqrt{[(e_0 a)^2 m_0 \omega^2]^2 + 4EI m_0 \omega^2} \right) \quad (3.324)$$

şeklinde tanımlanır.

3.5.4. Eğilme çubukları için yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu

Bu altbaşlıkta, kirişler için sonlu eleman formülasyonları ağırlıklı kalıntı metodu tabanlı olarak oluşturulacaktır. İlk olarak Euler–Bernoulli formülasyonu ile başlayalım.

3.5.4.1. Euler–Bernoulli kirişi

Denklem (3.250) kullanılarak ağırlıklandırılmış artık ifadesi

$$h \left(\left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha \Delta T \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[k_p + (e_0 a)^2 k_w - EA \alpha \Delta T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w - f \right. \\ \left. + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = hR \quad (3.325)$$

ve ağırlıklandırılmış artık

$$I = \int_0^L h \left(\left[EI + (e_0 a)^2 k_p - (e_0 a)^2 EA \alpha \Delta T \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[k_p + (e_0 a)^2 k_w - EA \alpha \Delta T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w - f \right. \\ \left. + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx \quad (3.326)$$

olarak yazılabilir. Eksenel çubuklara benzer biçimde enine hareket

$$w = \phi d \quad (3.327)$$

biçiminde. Burada ϕ kiriş elemanlar için şekil fonksiyonu ve $\mathbf{d}$ deplasman vektörüdür. Ayrıca kinematik operatör D^k ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = D^k w = \mathbf{Bd} \quad (3.328)$$

Denklem (3.325)'in içinde görülmekte olan ortak çarpanlı tüm terimleri ayırılım ve kısmi integrasyon işlemlerini gerçekleştirelim:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L EIh \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = EIh \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_0^L - EI \left. \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_0^L + \int_0^L EI \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\ I_2 &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_p h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = (e_0 a)^2 k_p h \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_0^L - (e_0 a)^2 k_p \left. \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_0^L + \int_0^L (e_0 a)^2 k_p \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\ I_3 &= \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T h \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_0^L - (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \left. \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_0^L \\ &\quad + \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\ I_4 &= \int_0^L k_p h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = k_p h \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L k_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\ I_5 &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_w h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 k_w h \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\ I_6 &= \int_0^L EA \alpha_L \Delta T h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = EA \alpha_L \Delta T h \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L EA \alpha_L \Delta T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \quad I_7 = \int_0^L k_w h w dx, \\ I_8 &= \int_0^L h f dx, \quad I_9 = \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx, \\ I_{10} &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 \rho A h \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \\ I_{11} &= \int_0^L (e_0 a)^2 h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 h \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (3.329)$$

Bu ifadeler Denklem (3.325)'te yerine yerleştirilip ağırlıklı kalıntı sıfıra eşitlenirse zayıf formülasyon

$$\begin{aligned} &\int_0^L EI \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L (e_0 a)^2 k_p \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L k_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \\ &+ \int_0^L (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int_0^L EA \alpha_L \Delta T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L k_w h w dx - \int_0^L h f dx + \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \end{aligned}$$

$$+ \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (3.330)$$

Bu ifadenin düzenlenmesi için

$$h = \phi^T, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = (\phi^T)' = \mathbf{B}^T, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = (\mathbf{B}^T)' = \mathbf{D}^T, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathbf{B}' \mathbf{d}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.331)$$

bağıntıları Denklem (3.330)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{d}x + \int_0^L (e_0 a)^2 k_p (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{d}x - \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{d}x + \int_0^L k_p (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{d}x \\ & + \int_0^L (e_0 a)^2 k_w (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{d}x - \int_0^L EA \alpha_L \Delta T (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{d}x + \int_0^L k_w (\phi^T \phi) d\mathbf{d}x - \int_0^L \phi^T f dx + \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) \ddot{\mathbf{d}} dx \\ & + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{d}} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' dx = 0 \end{aligned} \quad (3.332)$$

elde edilir. Bu denklem matris formunda

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{W,c} + \mathbf{K}_{W,nl} + \mathbf{K}_{P,c} + \mathbf{K}_{P,nl} - \mathbf{K}_{T,c} - \mathbf{K}_{T,nl}) \mathbf{d} + (\mathbf{M}_c + \mathbf{M}_{nl}) \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_{nl} \quad (3.333)$$

biçiminde yazılmak suretiyle denklemde görülen ifadeler

$$\mathbf{K} = \int_0^L EI (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{d}x = \int_0^L EI \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] d\mathbf{d}x = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.334)$$

$$\mathbf{K}_{W,c} = \int_0^L k_w (\phi^T \phi) d\mathbf{d}x = \int_0^L k_w \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] d\mathbf{d}x = \frac{k_w L}{420} \begin{bmatrix} 156L & 22L^2 & 54L & -13L^2 \\ 22L^2 & 4L^3 & 13L^3 & -3L^3 \\ 54L & 13L^2 & 156L & -22L^2 \\ -13L & -3L^3 & -22L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (3.335)$$

$$\mathbf{K}_{W,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 k_w (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{d}x = \int_0^L (e_0 a)^2 k_w \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} [\phi_1' \quad \phi_2' \quad \phi_3' \quad \phi_4'] d\mathbf{d}x$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 k_w}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.336)$$

$$K_{P,c} = \int_0^L k_p (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L k_p \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3 \quad \phi'_4] dx = \frac{k_p}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.337)$$

$$K_{P,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 k_p (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L (e_0 a)^2 k_p \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \\ \phi''_4 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3 \quad \phi''_4] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 k_p}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.338)$$

$$K_{T,c} = \int_0^L EA \alpha_L \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L EA \alpha_L \Delta T \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \\ \phi''_4 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3 \quad \phi''_4] dx$$

$$= \frac{EA \alpha_L \Delta T}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.339)$$

$$K_{T,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \\ \phi''_4 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3 \quad \phi''_4] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 EA \alpha_L \Delta T}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.340)$$

$$M_c = \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \rho A \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156L & 22L^2 & 54L & -13L^2 \\ 22L^2 & 4L^3 & 13L^3 & -3L^3 \\ 54L & 13L^2 & 156L & -22L^2 \\ -13L & -3L^3 & -22L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (3.341)$$

$$M_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_1 & \phi'_2 & \phi'_3 & \phi'_4 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.342)$$

$$\mathbf{f}_c = \int_0^L f \phi^T dx = \int_0^L f \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} dx = \frac{L}{12} f \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (3.343)$$

$$\mathbf{f}_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \mathbf{B}^T dx = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} dx = (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.344)$$

şeklinde verilir. Burada K eğilme rijitliği, $K_{W,c}$ Winkler zemininin klasik rijitliği, $K_{W,nl}$ Winkler zemininin yerel olmayan rijitliği, $K_{P,c}$ Pasternak zemininin klasik rijitliği, $K_{P,nl}$ Pasternak zemininin yerel olmayan rijitliği matrisleridir. T_c sıcaklık değişiminden kaynaklı klasik ve T_{nl} sıcaklık değişiminden kaynaklı yerel olmayan rijitlikleri belirtir. Öte yandan M_c klasik kütle ve M_{nl} yerel olmayan kütle matrisini tanımlar. $\mathbf{f}_c$ ve $\mathbf{f}_{nl}$ ise sırayla klasik ve yerel olmayan dış zor vektörleridir.

Sınır şartların uygulanması

Kirişlerde iki düğümlü–dört serbestlikli sonlu eleman modeli kullanılacağı için n adet sonlu elemana ayrılmış bir kirişte $2n + 2$ adet serbestlik oluşur. Mesnetlenme tiplerinin belirttiği geometrik sınır şartlara göre satır–sütun indirgeme işlemleri gerçekleştirilir. Eklentili uç şartlar içinse, ilgili eklenti parametresi kesme yönünde bir rijitlik veya kütle değişimi teşkil edeceğinden ilgili matrisin 33 girdisine dahil olur.

3.5.4.2. Timoshenko kirişi

Bu kiriş formülasyonu için ortalama ağırlıklandırılmış artık

$$\begin{aligned}
 I = \int_0^L & \left(-\frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p) EI}{kGA} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] EI}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right. \\
 & - \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{\rho EI}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{k_w EI}{kGA} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{EI}{kGA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
 & - kGA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_w w + (e_0 a)^2 (N_T - k_p) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + f - \frac{k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(e_0 a)^2 (N_T - k_p) \rho I}{kGA} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} \\
 & + 2 \frac{(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\
 & - 2 \frac{(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho I}{kGA} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{[(e_0 a)^2 k_w - (N_T - k_p) + kGA] (e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} \\
 & + \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 (N_T - k_p) \rho I}{kGA} \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial t^4} \\
 & \left. + \frac{(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) dx = 0 \quad (3.345)
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılmalıdır. Tabi aynı türevli terime farklı mekanik parametreler girdiği için tüm integrasyonları bu mekanik parametreleri ayırarak gerçekleştirilmelidir. Buna göre ayrılmış parametrelerin kısmi integrasyon sonuçları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 I_1 = \int_0^L & \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} dx = \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} h \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_0^L \\
 & + \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} dx = \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} h \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Big|_0^L \\
&\quad + \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx, \\
I_3 &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} h \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\
I_4 &= \int_0^L \frac{N_T EI}{kGA} h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = \frac{N_T EI}{kGA} h \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - \frac{N_T EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{N_T EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\
I_5 &= \int_0^L \frac{k_p EI}{kGA} h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = \frac{k_p EI}{kGA} h \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - \frac{k_p EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{k_p EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\
I_6 &= \int_0^L EI h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = EI h \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - EI \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \quad I_7 = \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx, \\
I_8 &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} h \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_9 &= \int_0^L \frac{\rho EI}{kG} h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{\rho EI}{kG} h \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\rho EI}{kG} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{10} &= \frac{k_w EI}{kGA} h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \frac{k_w EI}{kGA} h \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{k_w EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\
I_{11} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} h \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx = \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} h \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx, \\
I_{12} &= \int_0^L \frac{EI}{kGA} h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = \frac{EI}{kGA} h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx, \quad I_{13} = \int_0^L k_w h w dx, \\
I_{14} &= \int_0^L (e_0 a)^2 N_T h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = (e_0 a)^2 N_T h \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - (e_0 a)^2 N_T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L (e_0 a)^2 N_T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\
I_{15} &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_p h \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = (e_0 a)^2 k_p h \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_0^L - (e_0 a)^2 k_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L (e_0 a)^2 k_p \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{16} &= \int_0^L (e_0 a)^2 k_w h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 k_w h \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\
I_{17} &= \int_0^L N_T h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = N_T h \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L N_T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\
I_{18} &= \int_0^L k_p h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = k_p h \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L k_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\
I_{19} &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 \rho A h \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \quad I_{20} = \int_0^L f h dx, \\
I_{21} &= \int_0^L \frac{k_w \rho I}{kGA} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx, \quad I_{22} = \int_0^L (e_0 a)^2 h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx, \\
I_{23} &= \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} h \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{24} &= \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} h \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{25} &= \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} dx = \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} h \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial t^4} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial t^4} dx, \\
I_{26} &= \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} h \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{27} &= \int_0^L \frac{N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{N_T \rho I}{kGA} h \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{28} &= \int_0^L \frac{k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{k_p \rho I}{kGA} h \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{29} &= \int_0^L \rho I h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \rho I h \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \rho I \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx, \quad I_{30} = \int_0^L \frac{\rho^2 I}{kG} h \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} dx, \\
I_{31} &= \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} h \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} h \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{32} &= \int_0^L \frac{\rho I}{kGA} h \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} h \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} h \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{34} &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I h \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 \rho I h \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{35} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} h \frac{\partial^6 f}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} h \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{36} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} h \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} h \frac{\partial^7 w}{\partial x^5 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} dx, \\
I_{37} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} h \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} h \frac{\partial^7 w}{\partial x^5 \partial t^2} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} \Big|_0^L \\
&\quad + \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} dx, \\
I_{38} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} h \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial t^4} dx = \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} h \frac{\partial^7 w}{\partial x^3 \partial t^4} \Big|_0^L - \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} dx, \tag{3.346}
\end{aligned}$$

bu integrasyon ifadeleri Denklem (3.345)'te yerine konursa ağırlıklı kalıntının zayıf formülasyonu

$$\begin{aligned}
I = & -\int_0^L \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\
& - \int_0^L \frac{N_T EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L \frac{k_p EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L \rho A h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \\
& + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^L \frac{\rho EI}{kG} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^L \frac{k_w EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \\
& - \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx - \int_0^L \frac{EI}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \int_0^L k_w h w dx - \int_0^L (e_0 a)^2 N_T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\
& + \int_0^L (e_0 a)^2 k_p \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int_0^L N_T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L k_p \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \\
& + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L f h dx + \int_0^L \frac{k_w \rho I}{kGA} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx - \int_0^L (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \\
& - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^L \frac{k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx \\
& + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial t^4} dx + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L \frac{N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx \\
& + \int_0^L \rho I \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^L \frac{\rho^2 I}{kG} h \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} dx - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^L \frac{\rho I}{kGA} h \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dx \\
& + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx - \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial t^2} dx \\
& - \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} dx + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} dx \\
& + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} dx
\end{aligned} \tag{3.347}$$

olarak elde edilir. Euler–Bernoulli kiriş teorisindeki uygulamaya benzer olarak ilgili kinematik bağıntılar bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_P EI}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_W EI}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} \\
& - \int_0^L \frac{N_T EI}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{k_P EI}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L EI (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) d\mathbf{x} \\
& + \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{\rho EI}{kG} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{k_W EI}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} \\
& - \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \mathbf{B}^T f'' d\mathbf{x} - \int_0^L \frac{EI}{kGA} \mathbf{B}^T f' d\mathbf{x} + \int_0^L k_W (\phi^T \phi) d\mathbf{x} - \int_0^L (e_0 a)^2 N_T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} \\
& + \int_0^L (e_0 a)^2 k_P (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L (e_0 a)^2 k_W (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} - \int_0^L N_T (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^L k_P (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} \\
& + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} - \int_0^L \phi^T f d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{k_W \rho I}{kGA} (\phi^T \phi) d\mathbf{x} - \int_0^L (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' d\mathbf{x} \\
& - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_P \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{k_P \rho I}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} \\
& + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_W \rho I}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} - \int_0^L \frac{N_T \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} \\
& + \int_0^L \rho I (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{\rho^2 I}{kG} (\phi^T \phi) d\mathbf{x} - \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \mathbf{B}^T \ddot{f} d\mathbf{x} - \int_0^L \frac{\rho I}{kGA} \phi^T f'' d\mathbf{x} \\
& + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_W \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} - \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \mathbf{B}'^T f'' d\mathbf{x} \\
& - \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_P \rho I}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') d\mathbf{x} + \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} = 0
\end{aligned} \tag{3.348}$$

elde edilir. Bu denklem matris notasyonunda

$$(\sum K) \mathbf{d} + (\sum M_1) \ddot{\mathbf{d}} + (\sum M_2) \ddot{\ddot{\mathbf{d}}} = \sum \mathbf{f} \tag{3.349}$$

şeklinde yazılabilir. Burada M_2 , hareketin dördüncü mertebeden türevinden kaynaklanan bir kütle matrisidir. Rijitlik ve kütle matrisleri ile beraber dış zor vektörü

$$\begin{aligned}
\sum K &= K + K_{W,c} + K_{W,nl} + K_{P,c} + K_{P,nl} + K_{W,R,c} + K_{W,R,nl} + K_{P,R,c} + K_{P,R,nl} - K_{T,c} \\
&\quad - K_{T,nl} - K_{T,R,c} - K_{T,R,nl}
\end{aligned} \tag{3.350}$$

$$\begin{aligned}
\sum M_0 &= M_{A,c} + M_{A,nl} + M_{I,c} + M_{I,nl} + M_{A,R,c} + M_{A,R,nl} + M_{I,W,c} + M_{I,W,nl} + M_{I,P,c} \\
&\quad + M_{I,P,nl} - M_{I,T,c} - M_{I,T,nl} + M_{I,W,HO-nl} + M_{I,P,HO-nl} - M_{I,T,HO-nl}
\end{aligned} \tag{3.351}$$

$$\sum M_1 = M_{I,R,c} + M_{I,R,nl} + M_{I,R,HO-nl} \quad (3.352)$$

$$\sum \mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_{nl} + \mathbf{f}_{R,c} + \mathbf{f}_{R,nl} + \mathbf{f}_{I,c} + \mathbf{f}_{I,nl} + \mathbf{f}_{I,HO-nl} \quad (3.353)$$

şeklindeki toplamlarla sembolize edilebilir. Toplam sembollerine ait eşitliklerde görülmekte olan tüm matrisler ve vektörler aşağıda tek tek elde edilmiştir.

$$K = \int_0^L EI (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L EI \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \ \phi_2'' \ \phi_3'' \ \phi_4''] dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.354)$$

$$K_{W,c} = \int_0^L k_w (\phi^T \phi) dx = \int_0^L k_w \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4] dx = \frac{k_w L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.355)$$

$$K_{W,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 k_w (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 k_w \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} [\phi_1' \ \phi_2' \ \phi_3' \ \phi_4'] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 k_w}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.356)$$

$$K_{P,c} = \int_0^L k_p (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L k_p \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} [\phi_1' \ \phi_2' \ \phi_3' \ \phi_4'] dx = \frac{k_p}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.357)$$

$$K_{P,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 k_p (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L (e_0 a)^2 k_p \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \ \phi_2'' \ \phi_3'' \ \phi_4''] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 k_p}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.358)$$

$$\begin{aligned} K_{W,R,c} &= \int_0^L \frac{k_w EI}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \frac{k_w EI}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3 \quad \phi'_4] dx \\ &= \frac{k_w EI}{30kGAL} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.359)$$

$$\begin{aligned} K_{W,R,nl} &= \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \\ \phi''_4 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3 \quad \phi''_4] dx \\ &= \frac{(e_0 a)^2 k_w EI}{kGAL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.360)$$

$$\begin{aligned} K_{P,R,c} &= \int_0^L \frac{k_p EI}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{k_p EI}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \\ \phi''_4 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3 \quad \phi''_4] dx \\ &= \frac{k_p EI}{kGAL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.361)$$

$$K_{P,R,nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi'''_1 \\ \phi'''_2 \\ \phi'''_3 \\ \phi'''_4 \end{Bmatrix} [\phi'''_1 \quad \phi'''_2 \quad \phi'''_3 \quad \phi'''_4] dx$$

$$= \frac{36(e_0 a)^2 k_p EI}{kGA L^5} \begin{bmatrix} 4 & 2L & -4 & 2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \\ -4 & -2L & 4 & -2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (3.362)$$

$$K_{T,c} = \int_0^L EA \alpha \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] dx$$

$$= \frac{EA \alpha \Delta T}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.363)$$

$$K_{T,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L (e_0 a)^2 EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 EA \alpha \Delta T}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.364)$$

$$K_{T,R,c} = \int_0^L \frac{N_T EI}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{N_T EI}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] dx$$

$$= \frac{N_T EI}{kGA L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.365)$$

$$K_{T,R,nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 N_T EI}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1''' \\ \phi_2''' \\ \phi_3''' \\ \phi_4''' \end{Bmatrix} [\phi_1''' \quad \phi_2''' \quad \phi_3''' \quad \phi_4'''] dx$$

$$= \frac{36(e_0 a)^2 N_T EI}{kGAL^5} \begin{bmatrix} 4 & 2L & -4 & 2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \\ -4 & -2L & 4 & -2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (3.366)$$

$$M_{A,c} = \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \rho A \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] dx = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156L & 22L^2 & 54L & -13L^2 \\ 22L^2 & 4L^3 & 13L^3 & -3L^3 \\ 54L & 13L^2 & 156L & -22L^2 \\ -13L & -3L^3 & -22L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (3.367)$$

$$M_{A,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3 \quad \phi'_4] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.368)$$

$$M_{I,c} = \int_0^L \rho I (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \rho I \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3 \quad \phi'_4] dx = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.369)$$

$$M_{I,nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho I \begin{Bmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \\ \phi''_3 \\ \phi''_4 \end{Bmatrix} [\phi''_1 \quad \phi''_2 \quad \phi''_3 \quad \phi''_4] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 \rho I}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.370)$$

$$M_{A,R,c} = \int_0^L \frac{\rho EI}{kG} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \frac{\rho EI}{kG} \begin{Bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{Bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3 \quad \phi'_4] dx$$

$$= \frac{\rho EI}{30kGL} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.371)$$

$$M_{A,R,nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kGL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.372)$$

$$M_{I,W,c} = \int_0^L \frac{k_w \rho I}{kGA} (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \frac{k_w \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{k_w \rho IL}{420kGA} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.373)$$

$$M_{I,W,nl} = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{2(e_0 a)^2 k_w \rho I}{30kGAL} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.374)$$

$$M_{I,P,c} = \int_0^L \frac{k_p \rho I}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \frac{k_p \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{k_p \rho I}{30kGAL} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.375)$$

$$M_{I,P,nl} = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] dx$$

$$= \frac{2(e_0 a)^2 k_p \rho I}{kGAL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.376)$$

$$M_{I,T,c} = \int_0^L \frac{N_T \rho I}{kGA} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \frac{N_T \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} [\phi_1' \quad \phi_2' \quad \phi_3' \quad \phi_4'] dx$$

$$= \frac{N_T \rho I}{30kGAL} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.377)$$

$$M_{I,T,nl} = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] dx$$

$$= \frac{2(e_0 a)^2 N_T \rho I}{kGAL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.378)$$

$$M_{I,W,HO-nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} [\phi_1'' \quad \phi_2'' \quad \phi_3'' \quad \phi_4''] dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^4 k_w \rho I}{kGA L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.379)$$

$$M_{I,P,HO-nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1''' \\ \phi_2''' \\ \phi_3''' \\ \phi_4''' \end{Bmatrix} [\phi_1''' \quad \phi_2''' \quad \phi_3''' \quad \phi_4'''] dx$$

$$= \frac{36(e_0 a)^4 k_p \rho I}{kGA L^5} \begin{bmatrix} 4 & 2L & -4 & 2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \\ -4 & -2L & 4 & -2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (3.380)$$

$$M_{I,T,HO-nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA} \begin{Bmatrix} \phi_1''' \\ \phi_2''' \\ \phi_3''' \\ \phi_4''' \end{Bmatrix} [\phi_1''' \quad \phi_2''' \quad \phi_3''' \quad \phi_4'''] dx$$

$$= \frac{36(e_0 a)^4 N_T \rho I}{kGA L^5} \begin{bmatrix} 4 & 2L & -4 & 2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \\ -4 & -2L & 4 & -2L \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \quad (3.381)$$

$$M_{I,R,c} = \int_0^L \frac{\rho^2 I}{kG} (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \frac{\rho^2 I}{kG} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] dx$$

$$= \frac{\rho^2 I L}{420 kG} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.382)$$

$$M_{I,R,nl} = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} [\phi_1' \quad \phi_2' \quad \phi_3' \quad \phi_4'] dx$$

$$= \frac{2(e_0 a)^2 \rho^2 I}{30kGL} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.383)$$

$$M_{I,R,HO-nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kGL^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.384)$$

$$\mathbf{f}_c = \int_0^L \phi^T f dx = \int_0^L f \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} dx = \frac{L}{12} f \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (3.385)$$

$$\mathbf{f}_{nl} = \int_0^L (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' dx = \int_0^L (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} dx = (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.386)$$

$$\mathbf{f}_{R,c} = \int_0^L \frac{EI}{kGA} \mathbf{B}^T f' dx = \int_0^L \frac{EI}{kGA} f' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} dx = \frac{EI}{kGA} f' \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.387)$$

$$\mathbf{f}_{R,nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} \mathbf{B}'^T f'' dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} f'' \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 EI}{kGA} f'' \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (3.388)$$

$$\mathbf{f}_{I,c} = \int_0^L \frac{\rho I}{kGA} \phi^T f'' dx = \int_0^L \frac{\rho I}{kGA} f'' \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} dx = \frac{\rho IL}{12kGA} f'' \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} \quad (3.389)$$

$$\mathbf{f}_{I,nl} = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \mathbf{B}^T \ddot{\mathbf{f}}' dx = \int_0^L \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \ddot{\mathbf{f}}' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} dx = \frac{2(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \ddot{\mathbf{f}}' \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.390)$$

$$\mathbf{f}_{I,HO-nl} = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} \mathbf{B}^T f'' dx = \int_0^L \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} f'' \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^4 \rho I}{kGA} f'' \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (3.391)$$

Görölmekte olan ifadeleri teker teker tanıtmak uzun olacaktır. Bunun yerine şöyle bir tanımlama yapılabilir: Rijitlik veya kütle notasyonunun alt indisinde görölmekte olan W Winkler zemini parametresinin, P Pasternak zemin parametresinin, T sıcaklık parametresinin, R kayma rijitliği (kGA) ve eğilme rijitliği (EI) ifadelerinden en az birinin ilgili katılık matrisinin oluşmasında etken faktör olduğunu simgeler. c klasik ve nl yerel olmayan elastisiteyi gösterir. Ek olarak kütle matrisleri ve dış zor vektörlerinde karşılaştığımız A kütle bütünlüğünün ve I atalet bütünlüğünün kütle matrisinde yer aldığını belirtir. Şimdiye kadar tezde karşılaştığımız yerel olmayan parametre $(e_0 a)^2$ ifadesinden daha yüksek mertebeli yerel olmayan parametre olan $(e_0 a)^4$ çarpanını içeren matrisleri ve vektörleri zikrederken $HO-nl$ alt indisi kullanılmıştır.

Sınır şartların uygulanması

Euler-Bernoulli kirişlerinde olduğu gibi aynı şekil fonksiyonları ve ağırlıklı kalıntı prosedürü uygulandığı için sınır şartların uygulanması hususunda bir farklılık mevcut değildir.

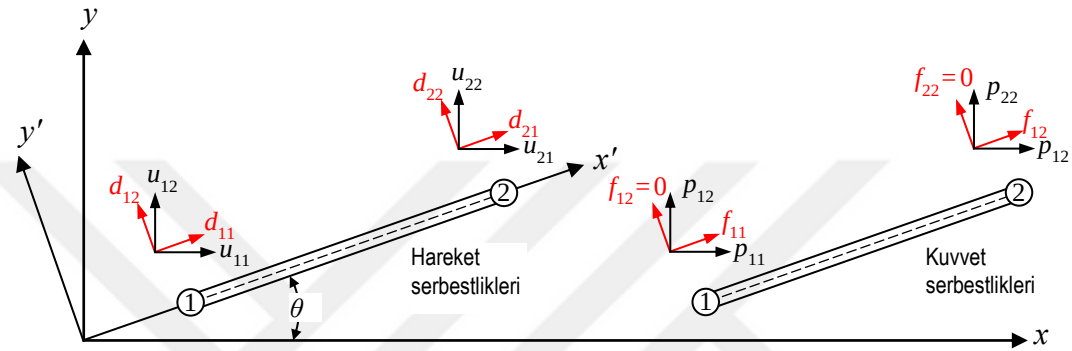
3.6. Nano Ölçekli Ayırık Eksenel Sistemler

Eksenel çubukların sadece kendi eksenleri yönündeki (veya kesit alanına dik) şekil değiştirmelerle karakterize edildiğinden bahsedilmişti. Tabi eksenel yapılar tek başına sürekli bir ortam teşkil ederler yani sürekli ortam yaklaşımları ile analiz edilebilirler ki tezin ilgili bölümü de bu mevzubahsi esas almıştır. Bunun yanı sıra eksenel üyelerden meydana gelen ancak sürekli değil ayırık sistem teşkil eden tipteki yapılar, yapı mühendisliğinde sıkça karşılaşılan sistem tipidir. Sürekli ortam mekaniğine göre sürekli sistem bir bütündür, hiçbir nokta diğerinden bağımsız değildir. Ancak ayırık yapı mekaniğinde yapı ayırık üyelere ayrılabilir. Her ayırık üye önce kendi içerisinde incelenir. Genel çözüme geçildiğinde ise birbiri ile ilişkilendirilmesi gereken elemanlar kullanılır. Sonlu elemanlar yöntemi, ayırık yapılardaki bu süreci doğrudan yönetir. Buna göre tüm ayırık elemanların önce kendi denklemleri oluşturulur, daha sonra denklemler küresel matrisleri temsil etmek üzere birleştirilir.

Üst paragrafta vurgulananlar aslında sürekli sistemlerde de sonlu elemanlar tarafından yapılmaktadır ancak bir şey iyi ayırt edilmelidir. Sürekli sistemlerde sistemin ne kadar parçaya ayrılacağı çözümleyici kişinin tercihinine bağlıdır. Ancak ayırık yapılarda böyle bir tercih meselesi yoktur çünkü her ayırık üye tek başına bir adet sonlu elemanı

temsil edecektir. Genellikle ayrı sistemler için sonlu elemanlar formülasyonu yapı mühendisliğinde Matris Deplasman Metodu olarak anılmaktadır. Yüksek lisans tez çalışmasının kalan kısmında ayrı yapılarından bahsedilecektir.

Ayrı sistemlerin analizinde en temel konu üyelerin yönelimidir. Üyeler sistemin geometrisine bağlı olarak farklı yönelimlerde olabilir. Matris formülasyonunun doğru bir şekilde ifade edilebilmesi için elemanların yönelimine dair bir dönüşüm (transformasyon) ifadesi kurulmalıdır. Sistemdeki tüm ayrı üyeler için ortak (genel) ve yataya göre α kadar yönelim yapmış bir üyeye özgü (bölgesel) koordinat takımları üzerinde eksenel üyenin incelenmesi Şekil 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.6. Eksenel üyenin genel (xy) ve bölgesel (x'y') koordinat takımında uç hareket ve kuvvet serbestlikleri

Eksenel üyenin uç hareket serbestlikleri için geometriden dolayı

$$\begin{aligned} d_{11} &= u_{11} \cos \theta + u_{12} \sin \theta, & d_{12} &= -u_{11} \sin \theta + u_{12} \cos \theta, \\ d_{21} &= u_{21} \cos \theta + u_{22} \sin \theta, & d_{22} &= -u_{21} \sin \theta + u_{22} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.392)$$

şeklindeki bağıntılar kurulabilir. Burada d_{11} ve d_{21} bölgesel eksenel, d_{12} ve d_{22} bölgesel enine hareket bileşenleridir. u_{11} ve u_{21} genel eksenel, u_{12} ve u_{22} genel enine hareket bileşenleridir. θ üyenin yönelim açısıdır. Eksenel üyelerden oluşan sistemler eğilme iç tesiri almaz ancak eğilme elemanlarındaki kesme serbestliğinde çizgisel hareket edebilir. Sürekli eksenel çubukların hareketine benzer şekilde ayrı eksenel çubuğun hareketi

$$\mathbf{u}^t = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (3.393)$$

ile tanımlanır. Burada $\mathbf{u}^t$ hareket vektörü, ϕ şekil fonksiyonları matrisi, $\mathbf{u}$ genel koordinat takımı deplasman vektörüdür. Bununla beraber Denklem (3.292)'de görülen ifadeler

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{21} \\ d_{22} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (3.394)$$

şeklinde birleştirilebilir. Burada $\mathbf{d}$ bölgesel koordinat takımında deplasman vektörü ve T transormasyon matrisidir. Gösterim kolaylığı olması bakımından $c = \cos \theta$ ve $s = \sin \theta$ olarak verilmektedir. Bunlara ek olarak kuvvet serbestliği için

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} \quad (3.395)$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{p}$ sırayla bölgesel ve genel koordinat takımlarının kuvvet serbestliği vektörlerini belirtmektedir.

Temel bir fiziksel bağıntı olarak Hooke denklemi

$$\mathbf{f} = K\mathbf{d} \quad (3.396)$$

şeklinde dir. Burada K rijitlik matrisidir. Eksenel çubuklardaki Denklem (3.209) üzerinden ayrı sistemler için mantık yürütülürse Denklem (3.295)'in

$$\begin{Bmatrix} f_{11} \\ 0 \\ f_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{21} \\ d_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.397)$$

şeklinde yazılması gerekir çünkü uçlar kesme kuvveti almaz. Öte yandan Denklem (3.393)'te görülmekte olan şekil fonksiyonu matrisi göz önünde bulundurulursa klasik ve yerel olmayan kütle matrisleri

$$M_c = \int_0^L \rho A (\phi^T \phi) dx = \int_0^L \rho A \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.398)$$

$$\begin{aligned}
M_{nl} &= \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^L (e_0 a)^2 \rho A \begin{bmatrix} \phi'_1 & 0 \\ 0 & \phi'_1 \\ \phi'_2 & 0 \\ 0 & \phi'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_1 & 0 & \phi'_2 & 0 \\ 0 & \phi'_1 & 0 & \phi'_2 \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.399}$$

olarak elde edilebilir.

Denklem (3.394) ve (3.395), (3.396)'da yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{u} \tag{3.400}$$

elde edilir. Transformasyon matrisinin ortogonalite (diklik) özelliği olan $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ ifadesi bu denklemin her iki tarafıyla çarpılırsa

$$\underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}}_I \mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}}_k \mathbf{u} \tag{3.401}$$

yazılabilir. Burada k eksenel üyenin bölgesel takımdaki rijitliği olup

$$\begin{aligned}
k = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \times \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \\
&= \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.402}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer durum $\mathbf{f} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}$ için de geçerlidir. Buna göre,

$$m_c = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_c \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \times \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.403)$$

$$m_{nl} = T^T M_{nl} T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \times \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.404)$$

ifadeleri yazılabilir. Burada m_c ve m_{nl} sırayla genel koordinatlardaki klasik ve yerel olmayan kütle matrisleridir. Toplam kütle matrisi

$$m = m_c + m_{nl} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ \text{sim.} & & m_{33} & m_{34} \\ & & & m_{44} \end{bmatrix} \quad (3.405)$$

olarak verilmek suretiyle

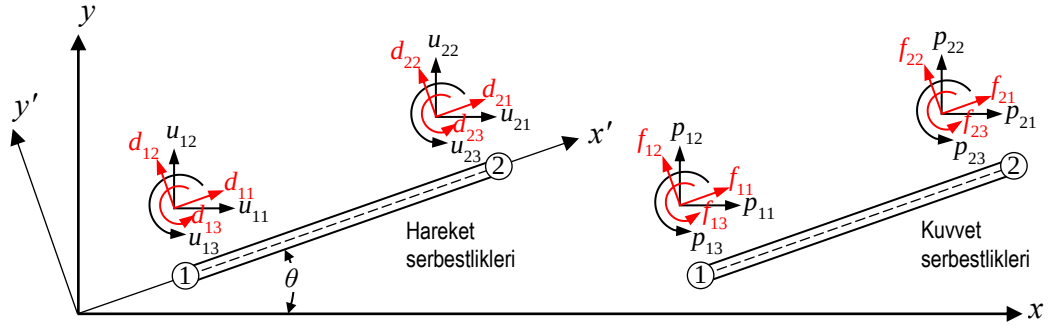
$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = \rho A \left(\frac{L}{3} + \frac{(e_0 a)^2}{L} \right), \quad m_{12} = m_{14} = m_{23} = m_{34} = 0,$$

$$m_{13} = m_{24} = \rho A \left(\frac{L}{6} - \frac{(e_0 a)^2}{L} \right) \quad (3.406)$$

şeklindeki girdilerle tanımlanabilir. Sistemin serbestlikleri gözetilerek kurulan matrisler sınır şartlar etkisinde indirgenir ve özdeğer denkleminde tabi tutulursa boyut etkili doğal titreşim frekansları hesaplanabilir.

3.7. Nano Ölçekli Ayrık Eğilme Sistemleri

Eğilme üyeleri eksenel zorlara ek olarak kesme kuvveti ve eğilme momenti altında da çalışırlar. Bir eğilme üyesinin genel ve bölgesel koordinatlardaki uç hareket ve kuvvet serbestlikleri Şekil 3.8’de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Eğilme üyesinin genel (xy) ve bölgesel ($x'y'$) koordinat takımında uç hareket ve kuvvet serbestlikleri

Transformasyonun yazılabilmesi için Denklem (3.292) ifadelerine ek olarak

$$d_{13} = u_{13}, \quad d_{23} = u_{23} \quad (3.407)$$

ifadesi yazılabilir. Burada d_{13} ve d_{23} uçların bölgesel takımdaki dönme serbestliği, u_{13} ve u_{23} uçların genel takımdaki dönme serbestliğidir. Böylece serbestliklerin dönüşümü

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (3.408)$$

şeklinde dir. Kuvvet bileşenleri için de

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} \quad (3.409)$$

olarak verilir. Eksenel sürekli çubukların kendi serbestlikleri ayrı üyenin eksenel serbestliklerine ve eğilme sürekli çubuklarının da kendi serbestlikleri ayrı üyenin enine ve dönme serbestliklerine ait girdilere yazılırsa ayrı üyenin bölgesel takımdaki rijitlik ve kütle matrisleri oluşturulabilir. Şöyle ki,

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.410)$$

$$M_c = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.411)$$

$$M_{nl} = (e_0 a)^2 \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (3.412)$$

rijitlik ve kütle matrislerinin genel koordinat takımındaki transformasyon işlemleri

$$k = T^T K T = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & \text{sim.} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (3.413)$$

$$m = \underbrace{T^T M_c T}_{m_c} + \underbrace{T^T M_{nl} T}_{m_{nl}} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ & & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ \text{sim.} & & & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ & & & & m_{55} & m_{56} \\ & & & & & m_{66} \end{bmatrix} \quad (3.414)$$

şeklindeki açık matris notasyonları ile verilebilir. İlk olarak rijitlik matrisinin girdileri

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{44} &= \frac{EA}{L} c^2 + \frac{12EI}{L^3} s^2, \quad k_{12} = k_{45} = \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) cs, \quad k_{13} = k_{16} = -\frac{6EI}{L^2} s, \\ k_{14} &= -\frac{EA}{L} c^2 - \frac{12EI}{L^3} s^2, \quad k_{15} = k_{24} = \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) cs, \quad k_{22} = k_{55} = \frac{EA}{L} s^2 + \frac{12EI}{L^3} c^2, \\ k_{23} = k_{26} &= \frac{6EI}{L^2} c, \quad k_{25} = -\frac{EA}{L} s^2 - \frac{12EI}{L^3} c^2, \quad k_{33} = k_{66} = \frac{4EI}{L}, \quad k_{34} = k_{46} = \frac{6EI}{L^2} s, \\ k_{35} = k_{56} &= -\frac{6EI}{L^2} c, \quad k_{36} = \frac{2EI}{L} \end{aligned} \quad (3.415)$$

olarak hesaplanır. Kütle matrisinin girdileri de

$$\begin{aligned} m_{11} = m_{44} &= \left(\frac{\rho AL}{3} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \right) c^2 + \left(\frac{13\rho AL}{35} + \frac{6(e_0 a)^2 \rho A}{5L} \right) s^2, \\ m_{12} = m_{45} &= \left(-\frac{4\rho AL}{105} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{5L} \right) cs, \quad m_{13} = \left(-\frac{11\rho AL^2}{210} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) s, \\ m_{14} &= \left(\frac{\rho AL}{6} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \right) c^2 + \left(\frac{9\rho AL}{70} - \frac{6(e_0 a)^2 \rho A}{5L} \right) s^2, \\ m_{15} = m_{24} &= \left(\frac{4\rho AL}{105} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{5L} \right) cs, \quad m_{16} = \left(\frac{13\rho AL^2}{420} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) s, \\ m_{22} = m_{55} &= \left(\frac{\rho AL}{3} + \frac{6(e_0 a)^2 \rho A}{5L} \right) c^2 + \left(\frac{13\rho AL}{35} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \right) s^2, \\ m_{23} &= \left(\frac{11\rho AL^2}{210} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) c, \quad m_{25} = \left(\frac{9\rho AL}{70} - \frac{6(e_0 a)^2 \rho A}{5L} \right) c^2 + \left(\frac{\rho AL}{6} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{L} \right) s^2, \\ m_{26} &= \left(-\frac{13\rho AL^2}{420} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) c, \quad m_{33} = m_{66} = \frac{\rho AL^3}{105} + \frac{2(e_0 a)^2 \rho AL}{15}, \end{aligned}$$

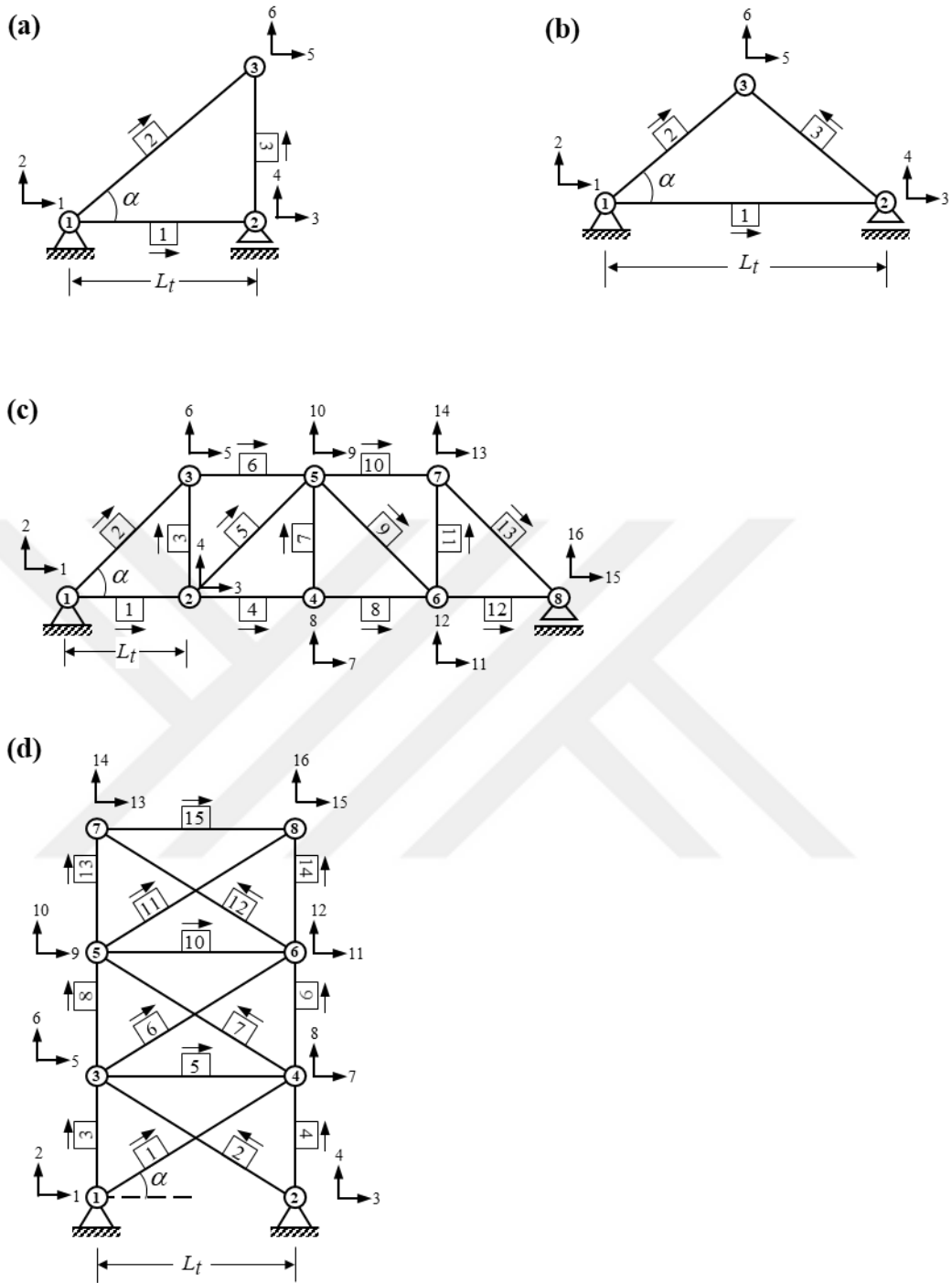
$$\begin{aligned}
m_{34} &= \left(-\frac{13\rho AL^2}{420} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) s, & m_{35} &= \left(\frac{13\rho AL^2}{420} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) c, \\
m_{36} &= -\frac{\rho AL^3}{140} - \frac{(e_0 a)^2 \rho AL}{30}, & m_{46} &= \left(\frac{11\rho AL^2}{210} + \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) s, \\
m_{56} &= \left(-\frac{11\rho AL^2}{210} - \frac{(e_0 a)^2 \rho A}{10} \right) c
\end{aligned} \tag{3.416}$$

şeklindedir.

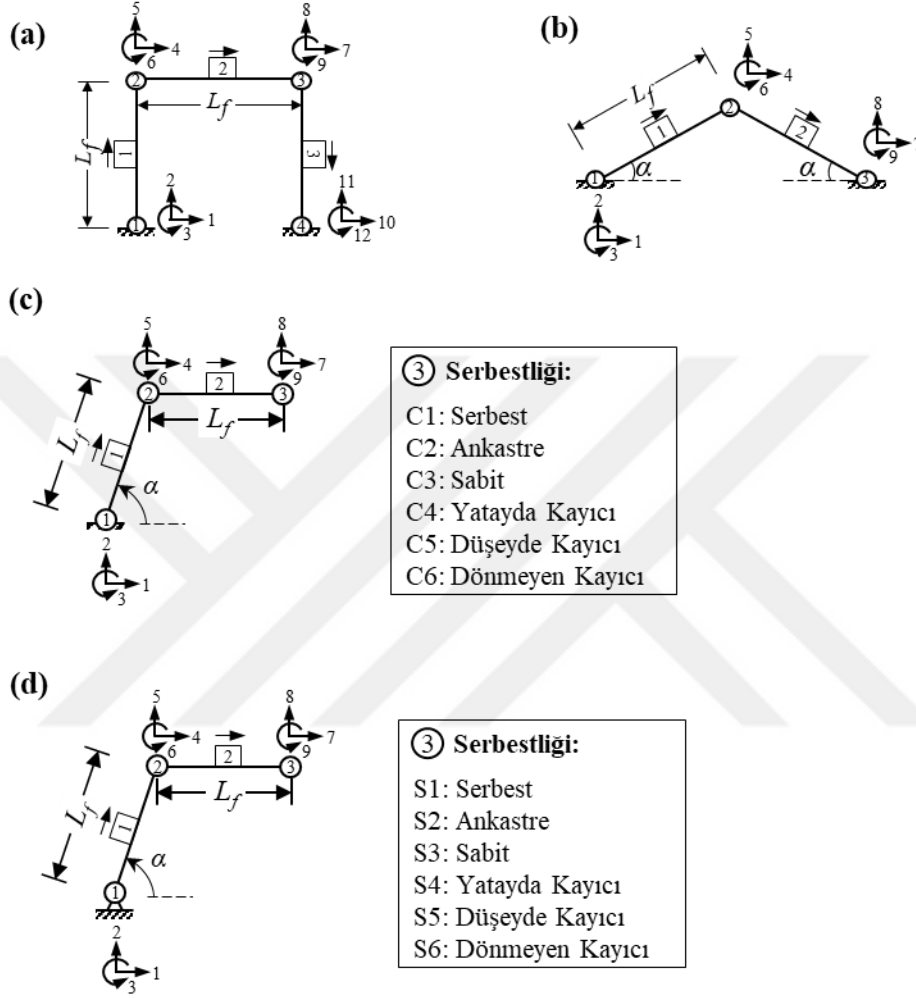
Uygulamalar

Yerel olmayan titreşim analizi yapılacak olan kafes ve çerçeve örnekleri sırayla Şekil 3.9 ve 3.10'da gösterilmiştir. İlk olarak Şekil 3.9a ve b'de üç üyeli ancak farklı geometrilerdeki kafesler verilmiştir. Şekil 3.9c ve d'de sırayla köprü ve kule tipi kafesler yer almaktadır.

Çerçeve şekillerine bakıldığında, Şekil 3.10a, tek açıklıklı, tek katlı ve iki ayağı da ankastre mesnetli çerçevedir. Şekil 3.10b, daha sonra modellenmesine değinilecek olan V-şekilli çerçevedir. Elemanlarda mesnetlenmenin etkisine değinmek adına Şekil 3.10c ve d'de görülen iki üyeli ve farklı mesnetli çerçeveleri de analiz edilecektir.



Şekil 3.8. Analiz edilecek olan kafes sistemler ve sonlu eleman modelleri **a)** Üç üyeli kafes (Kafes-a) **b)** Üç üyeli kafes (Kafes-b) **c)** Köprü tipi kafes (Kafes-c) **d)** Kule tipi kafes (Kafes-d)



Şekil 3.9. Analiz edilecek olan çerçeve sistemler ve sonlu eleman modelleri **a)** Tek katlı ve tek açıklıklı çerçeve (Çerçeve-a) **b)** V-şekilli çerçeve (Çerçeve-b) **c)** Bir üyesi ankastre mesnetli ve diğer üyesi değişken mesnetli iki üyeli çerçeve (Çerçeve-c) **d)** Bir üyesi basit mesnetli ve diğer üyesi değişken mesnetli iki üyeli çerçeve (Çerçeve-d)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Nano Ölçekli Yapıların ve Sistemlerin Mekanik Modellenmesi

Bilimsel bir çalışma, hedeflediği noktaya varmadan önce ele aldığı problemin neye isnat ettiğine açıklık getirmek zorundadır. Daha açık bir ifade ile “Bu çalışma yapılıyor ama neden yapılıyor?” sorusunun cevabı mümkünse laf oyunu yapmadan verilebilir olmalıdır. Hatırlanacak olursa bu tez çalışmasının 2.1.6 altbaşlığında nano ölçekli sistem örneklerinden fazla detaya girmeden bahsetmiştik. Ama ilgili bölümde, bir konunun detayına ileride gireceğimizi özellikle belirtmiştik. Şimdi, nano sistemlerdeki bileşenlerin modellenmesinden söz edelim. Şekil 2.12’de görülmekte olan atomik kuvvet mikroskobu, tek doğrultulu basit bir konsol giriş/eksenel çubuk modelini teşkil edebilir. Uçtaki mikroskop bileşeni ise topaklı kütle eklentisi gibi düşünülebilir. Oldukça bariz bir örnek, Şekil 2.13a’daki karbon nanotüp tek doğrultulu sürekli mekanik sistemi temsil ederken kaynak ve akım elektrotları ankastre mesnede/tam tutulu uca örnek olabilir. Silikon dioksit ve substrat, yapının oturduğu elastik zemin gibi düşünülebilir. Dahası, Şekil 2.13b’deki eş-eksenli alan etkili transistörde karbon nanotüp yapısı eksenel/burulma çubuğunu ve karbon nanotüpün gömüldüğü oksit substrat da elastik rijit ortam modeline örnek olarak önerilebilir. Buna benzer olarak, Şekil 2.14’teki çinko oksit nanotelin sürekli çubuğu temsil ettiğini varsayarsak, polimetil metakrilat ortamın da elastik rijit ortama model oluşturduğunu belirtebiliriz. Şekil 2.15’teki görülenler tek doğrultulu eleman modelleri için diğer örneklerdir. Şekil 2.16’da görülmekte olan nanotel oluşumunda görev alan gümüş substrat tam tutulu ucu, kısmen sıkı katman tam tutulu uca göre adı üzerinde kısmi bir rijitlik sağlayacağından yay eklentili uç gibi düşünülebilir. Tabi sürekli sistem örneklerinden bahsederken ayırık sistemleri de atlamamak gerekir. Şekil 2.17’de görülmekte olan ve elektrik alanın oluşmasında etkili olan Platin çerçeve yapı mühendisliğindeki birçok problemin analizinde rol model olan tek katlı tek açıklıklı çerçeve gibi düşünülebilir. Öte yandan, Şekil 2.18’de sunulan V-şekilli giriş yapısı da adında yer alan kırıktan ziyade, sivri uçta serbestçe hareket edebileceğinden çerçeve yapısı gibi varsayılabilir. Voltaj kaynakları ise ankastre bir ayak gibidir.

Netice olarak, nanoyapıların görev aldıkları ve farklı dış etkilere maruz kaldıkları sistemlerde öncelikle doğru mekanik modeli kurmak önemlidir. Bu modellerin de gerekli mekanik analizleri mümkün olduğunca doğru bir şekilde yapılabilmelidir çünkü mühendisliğin bir işlevi olan tasarıma giden yol buradan geçer. Yalnız, analizin gerçekleştirilebilmesi için analitik yöntemlerin az randıman gösterdiği yahut hiç varlık gösteremediği durumlarda da sayısal çözüm geliştirilmelidir ki ele alacağımız birçok analizde bu mevzu görülecektir. Böylece bu tez çalışmasının hedefi olan nano yapıların serbest titreşim davranışının çözümlenmesi mevzusunun neye dayandığı anlaşılabilir.

4.2. Sayısal Çalışma ve Tartışma

Bu yüksek lisans tezi, nano ölçekli giriş ve eksenel çubuk gibi sürekli sistemlerin yanı sıra kafes ve çerçeve gibi ayırık sistemlerin boyut etkili sürekli ortam teorilerinden olan yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşim analizini konu almıştır. Her bir problem tipine ait yönetici denklemler için sonlu elemanlar formülasyonu oluşturulmuştur. Sonlu elemanlar formülasyonunun sonucunda elde edilen özdeğer problemini çözebilmek için MATLAB programlama dili kullanılmıştır. Bu bölümde, boyutsuz serbest titreşim frekansları tablo ve grafiklerle sunulmuş olup analizlere etki

eden parametreler göz önünde bulundurularak detaylı bir tartışma yapılmıştır. Bazı analizler için serbest titreşim frekansları hem analitik hem de sonlu elemanlarla hesaplanmıştır ve mukayese edilmiştir. Böylece sonlu elemanlar formülasyonunun yerel olmayan elastisite ile serbest titreşim probleminde kullanılabilirliği gösterilmiştir. Dahası, analitik yöntemlerce sonuç alınamayan analizlerde sonlu eleman sonuçları sunulmuştur ve bunların sonlu eleman sonuçlarının doğruluğuna dair bazı irdemeler yapılmıştır.

Bütün sayısal sonuçlarda, aksi belirtilmedikçe şu malzeme özellikleri ve geometrik özellikler kullanılacaktır: Elastisite modülü $E = 1 \text{ TPa}$, birim hacim kütlesi $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.19$, kayma modülü $G = 420 \text{ GPa}$ (Reddy ve Pang 2008), kesme düzeltme katsayısı $k = 5/6$ (Reddy 2007), dairesel kesit çapı $d = 1 \text{ nm}$, sürekli sistemlerde uzunluk $L = 20 \text{ nm}$, ayırık sistemlerde kafes ve çerçeve uzunluk parametreleri $L_t = L_f = 20 \text{ nm}$. Bunlara ek olarak, sayısal sonuçlarda kullanılan boyutsuz parametreler

$$\begin{aligned} \varpi_r &= \omega_r L \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \varpi_b = \omega_b L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad \varpi_T = \omega_T L \sqrt{\frac{\rho}{G}}, \quad \varpi_t = \omega_t L \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \\ \varpi_f &= \omega_f L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad \alpha = \frac{e_0 a}{L}, \quad \beta_m = \frac{m_a}{\rho A L}, \quad \beta_{k(r)} = \frac{k_a}{EA/L}, \\ \beta_I &= \frac{I_a}{I_p}, \quad \beta_{k(b)} = \frac{k_a}{EI/L^3}, \quad \beta_{k(T)} = \frac{k_a}{GI_p/L}, \quad K_M = \frac{k_M L^2}{EA}, \\ K_T &= \frac{k_T L^2}{GI_p}, \quad K_W = \frac{k_W L^4}{EI}, \quad K_P = \frac{k_P L^2}{EI}, \quad N_T = \frac{(\alpha_L EA \Delta T) L^2}{EI} \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde. Burada ω serbest titreşim frekansı ve ϖ boyutsuz frekans parametresidir. Frekans parametrelerinin alt indisleri için r eksenel çubuğu, b kirişi, T burulma çubuğunu, t kafesi ve f çerçeveyi temsil eder. Öte yandan, α boyutsuz yerel olmayan parametredir. Eksenel çubukta ve kirişte m_a noktasal eklenti kütlesi, burulma çubuğunda I_a noktasal eklentinin dönel atalet momentini, k_a noktasal eklentinin rijitliğini (çubuklarda eksenel rijidite, burulmada dönel rijidite ve kirişte kesme rijiditesi) tanımlar. β_m , β_I ve β_k sırayla kütle, atalet ve rijitlik oranlarıdır. K_M ve K_T sırayla elastik rijit ortamın boyutsuz eksenel ve burulma rijitlikleridir. K_W ve K_P ise sırayla Winkler ve Pasternak elastik zeminlerinin boyutsuz rijitliklerini tanımlar. Son olarak N_T boyutsuz ortam sıcaklığı parametresidir.

Buradan itibaren elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler halinde sunulacak ve detaylı tartışmaları yapılacaktır.

Çizelge 4.1. Çeşitli sınır şartlardaki nano çubukların klasik eksenel titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)

Sınır Şart	Mod Numarası				
	1	2	3	4	5
C-F	1.57080	4.71239	7.85398	10.99557	14.13717
C-C	3.14159	6.28318	9.42478	12.56637	15.70796
F-F	3.14159	6.28318	9.42478	12.56637	15.70796
C-MA	0.43284	3.20394	6.31485	9.44595	12.58227
F-MA	1.68868	4.75443	7.87936	11.01373	14.15130
C-SA	2.65366	5.45435	8.39135	11.40863	14.46987
F-SA	1.31384	4.03357	6.90959	9.89275	12.93522
C-SMA	1.05791	3.21047	6.31565	9.44619	12.58237
F-SMA	0.88519	1.74065	4.75635	7.87977	11.01388
SA-MA	0.39269	2.71726	5.48774	8.41393	11.42558

Çizelge 4.2. Çeşitli sınır şartlardaki nano çubukların yerel olmayan eksenel titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)

α	Sınır Şart	Mod Numarası				
		1	2	3	4	5
0.2	C-F	1.49858	3.42933	4.21782	4.55152	4.71386
	C-C	2.66009	3.91239	4.41692	4.64576	4.76445
	C-MA	0.43123	2.69762	3.92000	4.41909	4.64656
	F-MA	1.59990	3.44543	4.22173	4.55280	4.71438
	C-SA	2.40458	3.79375	4.37351	4.62813	4.75629
	F-SA	1.28319	3.23998	4.14645	4.52432	4.70204
	C-SMA	1.05386	2.70336	3.92053	4.41921	4.64660
	F-SMA	0.88404	1.65125	3.44689	4.22197	4.55287
	S-MA	0.39170	2.44904	3.80323	4.37607	4.62903
0.4	C-F	1.33005	2.20846	2.38223	2.43778	2.46180
	C-C	1.95620	2.32288	2.41643	2.45195	2.46893
	C-MA	0.42650	1.97098	2.32447	2.41679	2.45207
	F-MA	1.39936	2.21274	2.38293	2.43798	2.47427
	C-SA	1.89329	2.31379	2.41429	2.45123	2.47815
	F-SA	1.19712	2.18577	2.37806	2.43658	2.47403
	C-SMA	1.04194	1.97580	2.32482	2.41686	2.45209
	F-SMA	0.87998	1.45082	2.21381	2.38308	2.43802
	SA-MA	0.38875	1.91190	2.31558	2.41467	2.45135

İlk olarak 10 farklı tipteki nano ölçekli eksenel çubukların yerel ve yerel olmayan titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekans parametreleri sırayla Çizelge 4.1 ve 4.2’de sunulmuştur. Sonuçlar analitik yöntemle göre verilmekte olup basit çubuk formülasyonu (SRT) kullanılmıştır. Zira Love-Bishop çubuk kuramı (LBRT) değişkenlere ayırma tabanlı analitik çözümle frekans eldesine uygun değildir. Yerel (klasik) elastisiteye dayanan titreşim için $\alpha = 0$ ’dır. Klasik elastisite sonuçları incelendiğinde, en yüksek frekansların eşit olarak her iki ucu tutulu (C-C) ve her iki ucu serbest çubuğa (F-F) ait olduğu görülmektedir. En düşük frekansları ise bir ucu yay diğer ucu kütle eklentili eksenel çubuk elemanı (SA-MA) vermektedir. C-C ve F-F çubuklarının frekansları parametrelerin aynı değerlerinde hep aynı olduğu için bundan sonra F-F çubuğu için analiz verilmeyecektir. Bu arada, basit çubuk için eklenti içeren sınır şartların

değişkenlere ayırma esaslı titreşim analizini yaparak frekanslarını hesaplayabilmek için MATLAB programlama dili kullanılarak ayrı bir program kodu yazılmıştır. Çünkü tezde eksenel çubukların uygulamasında fark edildiği üzere eklentili çubukların frekans denklemi elle çözülemeyecek yapıdadır. İlgili program kodu, klasik elastisite için istenildiği kadar titreşim modu frekansını sunabilmektedir. Ancak probleme ilave parametre dahil olursa işler zorlaşmaktadır. Mesela yerel olmayan elastisite durumunda mod numarası yükseldikçe frekans eldesi zorlaşmakta, ne yazık ki boyutsuz elastik ortam parametresi için kod hiç çalışmamaktadır. Tabii ki de sonlu elemanlar kullanılarak bu sorunun üstesinden gelinmiştir ancak şuan konu bu değildir. Tartışmaya dönecek olursak, mod sayısı yükseldikçe çubukların frekansları arasındaki makasın daraldığı görülmektedir. Sınır şartları arasındaki diğer kıyaslara göre, bir ucu tutulu ve diğer ucu yay eklentili çubuğun (C-SA) frekansları bir ucu tutulu diğer ucu serbest veya diğer adıyla eksenel konsol (C-F) çubuktan daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu beklenen bir sonuçtur çünkü noktasal yay eklentisi eksenel rijitliği artıran bir faktördür. Tersine eklenti kütle olursa (C-MA çubuğunu kastediyoruz) frekanslar C-F'ye göre daha düşük olacaktır. Temel yapı dinamiği ve deprem mühendisliği bilgisi olarak söyleyebiliriz ki kütle eklentisi, yapının eşdeğer kütlesi yükseldiği için frekansı azaltır. Başka bir kıyaslama için, bir ucu serbest ve diğer ucu yay eklentili çubukta (F-SA) elde edilen frekanslar F-F ile kıyaslanmalıdır, çünkü yay önceden serbest olan bir uca eklenmiştir. Görüldüğü üzere yay eklentisi, frekansları düşürmüştür. Kütle eklentisi de (F-MA çubuğunu kastediyoruz) aynı şekilde frekansları F-F'ye göre düşürmektedir. Ek bir kıyaslamaya göre, eklentilerin aynı uçta bulunması durumundan şunlar anlaşılabılır: C-F çubuğunda kütle eklentisi frekansı temel modda yaklaşık 4'te 1 seviyesine düşürmüştür. Ancak kütlenin yanına bir de yay eklendiği zaman (C-SMA) frekans 3 kattan daha az artmıştır. O halde kütle ve yay için eşit eklenti oranı altında etken eklenti kütledir. F-F çubuğunda herhangi bir uca kütle eklendiğinde frekans eşdeğer kütle artışından dolayı düşer, kütlenin yanına yay eklendiğinde ise (F-SMA) bu sefer rijiditeden düşer.

Yerel olmayan elastisiteye dair sonuçlara baktığımız zaman görülen en temel sonuç, atomik parametrenin tüm çubuk tiplerinde ve her modda frekans parametrelerini düşürdüğüdür. Bununla beraber, mod sayısı arttıkça her çubuğun klasiğe göre frekans azalması daha yüksektir. Boyutsuz atomik parametrenin artışı ile frekanslar daha da azalmaktadır. En rijit koşullarda titreşen C-C çubuğu atomik parametreden daha çok etkilenirken en düşük rijitlikli koşullarda titreşen SA-MA çubuğu ise en az etkilenmektedir. Bunlar yerel olmayan elastisiteye dair ilk izlenimlerimiz olarak not edilebilir.

Çizelge 4.3. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları

	α	Boyutsuz ortam rijitliği parametresi				
		$K_M = 0$	$K_M = 10$	$K_M = 20$	$K_M = 50$	$K_M = 100$
SRT	0.0	1.57080	3.53092	4.73998	7.24344	10.12262
	0.1	1.55177	3.52250	4.73371	7.23934	10.11968
	0.2	1.49858	3.49939	4.71654	7.22812	10.11166
	0.3	1.42093	3.46685	4.69245	7.21242	10.10045
	0.4	1.33005	3.43060	4.66573	7.19507	10.08806
	0.5	1.23534	3.39500	4.63962	7.17817	10.07601
LBRT	0.0	1.57078	3.53088	4.73992	7.24334	10.12248
	0.1	1.55176	3.52245	4.73364	7.23924	10.11954
	0.2	1.49857	3.49935	4.71648	7.22802	10.11152
	0.3	1.42092	3.46680	4.69238	7.21232	10.10031
	0.4	1.33003	3.43056	4.66567	7.19497	10.08792
	0.5	1.23533	3.39496	4.63956	7.17807	10.07587

Çizelge 4.4. Elastik ortama gömülü her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları

	α	Boyutsuz ortam rijitliği parametresi				
		$K_M = 0$	$K_M = 10$	$K_M = 20$	$K_M = 50$	$K_M = 100$
SRT	0.0	3.14159	4.45753	5.46531	7.73755	10.48187
	0.1	2.99717	4.35695	5.38359	7.68004	10.43949
	0.2	2.66009	4.13232	5.20347	7.55487	10.34776
	0.3	2.28622	3.90215	5.02263	7.43147	10.25801
	0.4	1.95620	3.71843	4.88126	7.33667	10.18954
	0.5	1.68713	3.58419	4.77979	7.26955	10.14132
LBRT	0.0	3.14149	4.45734	5.46505	7.73714	10.48131
	0.1	2.99707	4.35676	5.38333	7.67964	10.43893
	0.2	2.66000	4.13213	5.20321	7.55447	10.34720
	0.3	2.28615	3.90197	5.02237	7.43108	10.25745
	0.4	1.95613	3.71825	4.88101	7.33627	10.18898
	0.5	1.68707	3.58401	4.77954	7.26916	10.14076

Eksenel elastik ortama gömülü C–F ve C–C çubuklarının basit çubuk teorisine (SRT) ve Love–Bishop çubuk teorisine (LBRT) dayanan titreşimi için temel mod titreşim frekansı parametrelerinin farklı atomik parametre ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerleri için boyutsuz frekans parametreleri sırayla Çizelge 4.3 ve 4.4’te hesaplanmıştır. Eksenel elastik ortamsız titreşim için $K_M = 0$ sütununa bakılmalıdır. Öncelikle görülen sonuca göre genel olarak eksenel ortam (veya eksenel medya olarak da adlandırılmaktadır) frekansları artırır niteliktedir. Ancak bunun öncesinde LBRT’ye dayanan titreşim frekanslarının SRT’ye dayanan titreşim frekanslarından daha düşük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni LBRT’nin kayma (Poisson) etkilerini gözetmesi, SRT’nin ise onu ihmal etmesidir. Bunların yanı sıra boyutsuz ortam parametresi arttıkça SRT ve LBRT arasındaki fark az da olsa açılmaktadır. Benzer biçimde atomik parametrenin artışı da farkı az da olsa artırır. Sınır şart kıyaslamasına gelince, elastik

ortam parametresinin yüksek değerlerinde frekansların birbirine yaklaştığı görülmektedir. Boyutsuz atomik parametrenin artışının da aynı sonucu ortaya çıkardığı belirtilebilir.

Çizelge 4.5. Bir ucu tutulu ve diğer ucu kütle eklentili nano çubukların klasik eksenel titreşimi için farklı kütle oranı değerleri altında ilk beş mod boyutsuz frekanslarının ilgili referans ve bu tez çalışması için karşılaştırılması

Mod Sayısı	$\beta_m = 0.01$		$\beta_m = 0.1$		$\beta_m = 1$		$\beta_m = 10$	
	Rao (2007)	Bu Tez	Rao (2007)	Bu Tez	Rao (2007)	Bu Tez	Rao (2007)	Bu Tez
1	0.0998	0.09983	0.3111	0.31105	0.8603	0.86033	1.4289	1.42887
2	3.1448	3.14477	3.1731	3.17309	3.4256	3.42562	4.3058	4.30579
3	6.2848	6.28478	6.2991	6.29906	6.4373	6.43729	7.2281	7.22811
4	9.4248	9.42584	9.4354	9.43538	9.5293	9.52933	10.2003	10.20026
5	12.5672	12.56717	12.5743	12.57432	12.6453	12.64529	13.2142	13.21418

Çizelge 4.6. Çeşitli uç eklentili sınır koşullara sahip nano çubukların klasik eksenel titreşimi için farklı kütle/rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları

Sınır Şart	Mod Sayısı	Kütle Oranı β_m ve Rijitlik Oranı β_k				
		0	0.01	0.1	1	10
C-MA	1	1.57079	1.55525	1.42887	0.86033	0.31105
	2	4.71239	4.66577	4.30580	3.42562	3.17310
	3	7.85398	7.77637	7.22811	6.43730	6.29906
F-MA	1	3.14159	3.11050	2.86277	2.02876	1.63199
	2	6.28318	6.22105	5.76056	4.91318	4.73351
	3	9.42477	9.33173	8.70831	7.97867	7.86669
C-SA	1	1.57079	1.57714	1.63199	2.02876	2.86277
	2	4.71239	4.71451	4.73351	4.91318	5.76056
	3	7.85398	7.85525	7.86669	7.97867	8.70831
F-SA	1	3.14159	0.09983	0.31105	0.86033	1.42887
	2	6.28318	3.14477	3.17310	3.42562	4.30580
	3	9.42477	6.28478	6.29906	6.43730	7.22811
C-SMA ($\beta_m = \beta_k$)	1	1.57079	1.56158	1.48921	1.20779	1.03045
	2	4.71239	4.66788	4.32392	3.44824	3.17652
	3	7.85398	7.77764	7.23668	6.44095	6.29947
F-SMA ($\beta_m = \beta_k$)	1	3.14159	0.09934	0.29741	0.67625	0.93460
	2	6.28318	3.11367	2.89224	2.11708	1.66453
	3	9.42477	6.22264	5.77273	4.92125	4.73449
SA-MA ($\beta_m = \beta_k$)	1	3.14159	0.09934	0.29610	0.55597	0.29610
	2	6.28318	3.11368	2.89439	2.36950	2.89439
	3	9.42477	6.22265	5.77666	5.09966	5.77666

Çizelge 4.7. Uç eklentili sınır koşullara sahip nano çubukların yerel olmayan eksenel titreşimi için farklı kütle/rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\alpha = 0.25$)

Sınır Şart	Mod Sayısı	Kütle Oranı β_m ve Rijitlik Oranı β_k				
		0	0.01	0.1	1	10
C-MA	1	1.46210	1.44953	1.34559	0.84110	0.31012
	2	3.04952	3.03678	2.93058	2.60187	2.48591
	3	3.56436	3.55702	3.49983	3.39751	3.37671
F-MA	1	2.47067	2.45546	2.32798	1.80934	1.51107
	2	3.37425	3.36453	3.28558	3.10197	3.05522
	3	3.68210	3.67648	3.63488	3.76255	3.56554
C-SA	1	1.46210	1.46800	1.51887	1.86965	2.37560
	2	3.04952	3.05089	3.06314	3.16813	3.34527
	3	3.56436	3.56493	3.57010	3.61359	3.67332
F-SA	1	2.47067	0.09983	0.31102	0.85482	1.35800
	2	3.37425	2.47317	2.49536	2.67888	2.99443
	3	3.68210	3.37511	3.38274	3.44811	3.54881
C-SMA ($\beta_m = \beta_k$)	1	1.46210	1.45544	1.40231	1.18033	1.02726
	2	3.04952	3.03816	2.94298	2.61994	2.48878
	3	3.56436	3.55760	3.50405	3.39956	3.37694
F-SMA ($\beta_m = \beta_k$)	1	2.47067	0.09934	0.29739	0.67531	0.93303
	2	3.37425	2.45797	2.35197	1.89051	1.54375
	3	3.68210	3.36539	3.29261	3.10737	3.05590
SA-MA ($\beta_m = \beta_k$)	1	2.47067	0.09934	0.29607	0.55383	0.29537
	2	3.37425	2.45797	2.35361	2.09928	2.39263
	3	3.68210	3.36539	3.29473	3.20944	3.34799

Çizelge 4.5'te, bir ucu tutulu ve diğer ucu kütle eklentili çubukların serbest titreşimine ait ilk beş mod boyutsuz frekans parametrelerinin Rao (2007) ile karşılaştırılması yapılmıştır. İlgili referans, sürekli sistemlerin titreşimini inceleyen bir kitaptır ve yerel olmayan elastisite ile ilgili değildir. Dolayısı ile karşılaştırmalar sadece klasik elastisite için yapılmıştır. Öncelikle bu tezde elde edilen değerlerin referansla aynı olduğu vurgulanabilir. O halde analitik çözümü yapabilen kodun doğru çalıştığı bir kez daha belirtilebilir. Tartışmaya gelince, kütle oranı arttıkça boyutsuz frekansların yükselmekte olduğu görünmektedir. Bunun nedeni ilgili referansın kütle oranını, bu tezin belirlediği kütle oranının çarpma işlemine göre tersi olarak tanımlamasıdır. Daha basit bir ifade ile bu tez eklenti kütlelerini, çubuğun kütlelerine oranlayarak kütle oranını tanımlar. İlgili referans ise çubuğun kütlelerini eklentiye oranlar. O halde eklenti kütleleri arttıkça frekans artmıştır. Ancak bunun dışındaki analizlerde bu tezin eklenti oranı tanımlaması geçerli olacaktır. Bu nedenle burada verilebilecek bazı tartışmaların Çizelge 4.6'da verilmesi tercih edilmiştir. Buna göre Çizelge 4.6 eklentili elemanların klasik titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranına göre değişimini sunmaktadır. Kütle eklentisi arttıkça frekanslar düşmekte ve yay eklentisi arttıkça frekanslar, genel olarak yükselmektedir. Ayrıca, mod numarası arttıkça kütle eklentisinin frekans düşürücü ve yay eklentisinin frekans artırıcı etkisi azalmaktadır. Tabi eklentinin yüksek olduğu durumlarda en yüksek frekansların C-SA, en düşük frekansların SA-MA çubuğunda elde edildiği belirtilebilir. Fark edilirse eklenti oranı 0 olduğunda uç serbestleşeceğinden

sonuçlar diğer uç tutulu ise C–F ile serbest ise C–C ile aynı olacaktır. Yay eklentisi ile ilgili belirtebileceğimiz bir sonuca göre, C–SA çubuğunda eklenti C–F’ye göre frekansları artırır. Öte yandan F–SA çubuğunda eklenti F–F’ye göre frekansları önce düşürüp sonra artırır. Bunun nedeni grafik sonuçları tartışırken daha iyi anlaşılacaktır.

Çizelge 4.7 eklentili çubukların bu sefer yerel olmayan elastisite için ilk üç mod titreşim frekanslarını sunmaktadır. Öyle görünmektedir ki, eklenti oranlarının düşük değerinde F–MA, yüksek değerlerinde C–SA çubuğu atomik parametreden daha çok etkilenmektedir.

Çizelge 4.8. İki farklı sınır şartlı nano çubukların eksenel titreşimi için farklı çap/uzunluk değerleri altında ilk üç mod boyutsuz titreşim frekansları

Sınır Şartlar	D/L	$\alpha = 0.0$			$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.5$		
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Basit Çubuk Teorisi										
C–F	–	1.57080	4.71239	7.85398	1.46210	3.04952	3.56436	1.23534	1.84105	1.93815
C–C	–	3.14159	6.28319	9.42478	2.47067	3.37425	3.68210	1.68713	1.90578	1.95643
Love–Bishop Çubuk Teorisi										
C–F	0.1	1.57075	4.71102	7.84766	1.46205	3.04864	3.56149	1.23530	1.84052	1.93659
	0.2	1.57059	4.70693	7.82887	1.46191	3.04599	3.55296	1.23518	1.83892	1.93195
	0.4	1.56999	4.69078	7.75629	1.46135	3.03554	3.52002	1.23470	1.83261	1.91404
	0.6	1.56898	4.66458	7.64378	1.46041	3.01858	3.46896	1.23391	1.82237	1.88627
	0.8	1.56757	4.62932	7.50178	1.45910	2.99577	3.40452	1.23280	1.80860	1.85123
C–C	0.1	3.14119	6.27995	9.41386	2.47035	3.37251	3.67784	1.68691	1.90480	1.95417
	0.2	3.13997	6.27028	9.38156	2.46940	3.36733	3.66522	1.68626	1.90187	1.94746
	0.4	3.13514	6.23250	9.25864	2.46560	3.34703	3.61719	1.68366	1.89041	1.92195
	0.6	3.12719	6.17243	9.07368	2.45934	3.31477	3.54493	1.67939	1.87219	1.88355
	0.8	3.11625	6.09390	8.84937	2.45074	3.27260	3.45730	1.67352	1.84837	1.83699

Çizelge 4.8’de eklentisiz koşullara sahip nano çubukların ilk üç mod yerel ve yerel olmayan titreşim frekansı sonuçları SRT ve LBRT formülasyonlarına göre verilmiş olup çubuk çapının uzunluğuna oranının etkisi ele alınmıştır. Çap/uzunluk oranı basit çubukta boyutsuz frekansları etkilemezken Love–Bishop çubuğunda frekansları düşürücü bir etkiye sahiptir. Düşüş yüksek modlarda daha fazladır. Ancak yerel olmayan parametre arttıkça düşüş miktarı azalmaktadır. Sınır şartlara bakıldığında ise her iki ucu tutulu çubuğun frekansları çap/uzunluk veya yerel olmayan parametrenin düşürücü etkisinden daha çok etkilenmektedir. Ayrıca atomik parametre, mod sayısı ve çap/uzunluk parametresinin en yüksek değerlerini gösteren tablonun son bölümüne doğru C–F çubuklarının frekanslarının C–C çubuklarından daha yüksek hesaplanması ilginçtir.

Çizelge 4.9. Bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı yerel olmayan boyutsuz parametre değerleri altında ilk dört mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

α	i	Xu vd. (2016)	Analitik (Bu Tez)	NL-FEM Sonuçları					
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$		
İki Dügümlü Şekil Fonk.									
SRT	0	1	1.57080	1.57080	1.57081	1.57120	1.57241	1.73205	
		2	4.71239	4.71239	4.71283	4.72330	4.75610	–	
		3	7.85398	7.85398	7.85600	7.90454	8.05708	–	
		4	10.99557	10.99557	11.00111	11.13452	11.55418	–	
	0.1	1	1.55177	1.55177	1.55178	1.55216	1.55333	1.70664	
		2	4.26279	4.26279	4.26311	4.27086	4.29507	–	
		3	6.17668	6.17668	6.17766	6.20118	6.27401	–	
		4	7.39805	7.39805	7.39974	7.43994	7.56130	–	
	0.2	1	1.49858	1.49858	1.49860	1.49893	1.49999	1.63663	
		2	3.42933	3.42933	3.42950	3.43353	3.44607	–	
		3	4.21782	4.21782	4.21813	4.22559	4.24842	–	
		4	4.55152	4.55152	4.55191	4.56122	4.58876	–	
	Üç Dügümlü Şekil Fonk.								
		0	1	1.57080	1.57080	1.57080	1.57080	1.57080	1.57669
			2	4.71239	4.71239	4.71239	4.71240	4.71255	5.67280
			3	7.85398	7.85398	7.85398	7.85411	7.85599	–
4			10.99557	10.99557	10.99558	10.99626	11.00608	–	
0.1		1	1.55177	1.55177	1.55177	1.55177	1.55177	1.55745	
		2	4.26279	4.26279	4.26279	4.26280	4.26291	4.93417	
		3	6.17668	6.17668	6.17668	6.17674	6.17766	–	
		4	7.39805	7.39805	7.39805	7.39826	7.40125	–	
0.2		1	1.49858	1.49858	1.49858	1.49858	1.49858	1.50370	
		2	3.42933	3.42933	3.42933	3.42934	3.42940	3.75097	
		3	4.21782	4.21782	4.21782	4.21784	4.21813	–	
		4	4.55152	4.55152	4.55152	4.55157	4.55226	–	
LBRT		0	1	–	1.57078	1.57078	1.57080	1.57080	1.57669
			2	–	4.71205	4.71196	4.71239	4.71253	5.67277
			3	–	7.85240	7.85198	7.85405	7.85593	–
			4	–	10.99123	10.99009	10.99609	11.00590	–
	0.1	1	–	1.55176	1.55175	1.55177	1.55177	1.55745	
		2	–	4.26248	4.26244	4.26278	4.26289	4.93414	
		3	–	6.17543	6.17543	6.17669	6.17761	–	
		4	–	7.39513	7.39474	7.39815	7.40114	–	
	0.2	1	–	1.49857	1.49857	1.49858	1.49858	1.50370	
		2	–	3.42908	3.42908	3.42933	3.42939	3.75095	
		3	–	4.21697	4.08079	4.21780	4.21810	–	
		4	–	4.54972	4.08142	4.55150	4.55219	–	

Çizelge 4.10. Her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı yerel olmayan boyutsuz parametre değerleri altında ilk dört mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

α	i	Xu vd. (2016)	Analitik (Bu Tez)	NL-FEM Sonuçları			
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$
SRT	0	1	3.14159	3.14159	3.14159	3.14161	3.16228
		2	6.28319	6.28319	6.28323	6.28385	–
		3	9.42478	9.42478	9.42510	9.42972	–
		4	12.56637	12.56637	12.56770	12.58650	–
	0.1	1	2.99717	2.99717	2.99717	2.99719	3.01511
		2	5.32018	5.32018	5.32021	5.32058	–
		3	6.85867	6.85867	6.85879	6.86057	–
		4	7.82479	7.82479	7.82511	7.82964	–
	0.2	1	2.66009	2.66009	2.66009	2.66010	2.67261
		2	3.91239	3.91239	3.91241	3.91256	–
		3	4.41692	4.41692	4.41695	4.41743	–
		4	4.64576	4.64576	4.64583	4.64678	–
LBRT	0	1	–	3.14149	3.14159	3.14161	3.16227
		2	–	6.28237	6.28315	6.28320	–
		3	–	9.42204	9.42467	9.42499	–
		4	–	12.55989	12.56611	12.56744	–
	0.1	1	–	2.99707	2.99716	2.99717	3.01511
		2	–	5.31949	5.32015	5.32018	–
		3	–	6.85668	6.85859	6.85871	–
		4	–	7.82075	7.82463	7.82495	–
	0.2	1	–	2.66000	2.66009	2.66009	2.67261
		2	–	3.91189	3.91237	3.91239	–
		3	–	4.41564	4.41687	4.41690	–
		4	–	4.64336	4.64565	4.64573	–

Çizelge 4.9 itibariyle eksenel çubukların frekansları yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu çerçevesinde incelenecektir. Çizelge 4.9’da bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun ilk dört mod yerel olmayan boyutsuz titreşim frekansları, Xu vd. (2016) ile karşılaştırılmıştır. İlgili referans çalışmada basit çubuk formülasyonu için analitik çözüme ait sonuçlar verilmiştir. Tabi hesaplarımızın doğruluğunu göstermek adına bu tez kapsamında elde edilen analitik sonuçlar da verilmiştir. Analitik sonuçlardan hesaplarımızın doğru olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra belirtilebilir ki yerel olmayan sonlu elemanlar (NL-FEM) ile elde edilen sonuçlar, referans ile yüksek bir uyum göstermektedir. Sonlu eleman sayısının düşük olduğu durumda elde edilen frekanslar analitik sonuçlara daha uzaktır, sonlu eleman sayısının artışı ile bu sapma düşürülebilir yani sonuçlar daha doğru olarak elde edilebilir. Ancak dikkat edilirse, atomik parametrenin artışı ile analitik neticelerden sapma azalır. İki düğümlü elemanla elde edilen sonuçları kıyaslamak adına verilmiş üç düğümlü sonlu elemana dayanan çözümün daha düşük sonlu eleman sayısında dahi analitik yöntemle oldukça yakın sonuçlar verdiği hem SRT hem de LBRT formülasyonunda tespit edilmiştir (Bu arada, LBRT için sadece üç düğümlü eleman kullanılmıştır). Öte yandan, sonlu eleman sayısı 1 iken, sistemin sınır şartlarından kaynaklanan indirgemeler nedeniyle yüksek modlara ait frekanslar elde edilemez. Buradan itibaren eksenel ve burulma çubukları için tüm sonlu eleman analizlerinde üç düğümlü eleman kullanılacaktır.

Her iki ucu tutulu eksenel çubukların yerel olmayan ilk dört mod boyutsuz frekansları Çizelge 4.10’da ilgili referans ile karşılaştırılmıştır. Kullanılan boyut etkili sonlu elemanlar modeli, özellikle çok yüksek sonlu eleman sayısı için referansla birebir uyum yakalamıştır. Tabi LBRT formülasyonunda mod numarası yükseldikçe ufak da olsa analitik neticelerden sapma görülmektedir.

Çizelge 4.11. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (SRT)

K_M	α	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$
1	0	1	1.86210	1.86210	1.86210	1.86210	1.86707
		2	4.81732	4.81732	4.81733	4.81748	5.76027
		3	7.91739	7.91739	7.91752	7.91938	–
	0.1	1	1.84607	1.84607	1.84607	1.84607	1.85085
		2	4.37851	4.37851	4.37852	4.37863	5.03448
		3	6.25710	6.25710	6.25717	6.25807	–
	0.2	1	1.80160	1.80160	1.80160	1.80160	1.80586
		2	3.57216	3.57216	3.57216	3.57222	3.88198
		3	4.33474	4.33474	4.33476	4.33505	–
5	0	1	2.73265	2.73265	2.73265	2.73265	2.73605
		2	5.21600	5.21600	5.21600	5.21614	6.09760
		3	8.16609	8.16609	8.16621	8.16802	–
	0.1	1	2.72176	2.72176	2.72176	2.72176	2.72501
		2	4.81366	4.81366	4.81367	4.81377	5.41719
		3	6.56897	6.56897	6.56903	6.56989	–
	0.2	1	2.69179	2.69179	2.69179	2.69179	2.69465
		2	4.09394	4.09394	4.09394	4.09399	4.36689
		3	4.77389	4.77389	4.77390	4.77416	–
25	0	1	5.24094	5.24094	5.24094	5.24094	5.24271
		2	6.87071	6.87071	6.87071	6.87082	7.56179
		3	9.31048	9.31048	9.31059	9.31218	–
	0.1	1	5.23526	5.23526	5.23526	5.23526	5.23695
		2	6.57049	6.57049	6.57050	6.57057	7.02467
		3	7.94678	7.94678	7.94683	7.94754	–
	0.2	1	5.21975	5.21975	5.21975	5.21975	5.22122
		2	6.06303	6.06303	6.06303	6.06306	6.25058
		3	6.54141	6.54141	6.54142	6.54161	–

Çizelge 4.12. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu ve diğer ucu serbest çubuğun aksenal titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (LBRT)

K_M	α	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$
1	0	1	1.86208	1.86210	1.86210	1.86210	1.86707
		2	4.81696	4.81731	4.81732	4.81747	5.76023
		3	7.91577	7.91732	7.91745	7.91932	–
	0.1	1	1.84606	1.84607	1.84607	1.84607	1.85085
		2	4.37818	4.37850	4.37851	4.37861	5.03445
		3	6.25582	6.25705	6.25712	6.25802	–
	0.2	1	1.80158	1.80160	1.80160	1.80160	1.80586
		2	3.57189	3.57215	3.57215	3.57221	3.88196
		3	4.33383	4.33471	4.33473	4.33501	–
5	0	1	2.73262	2.73265	2.73265	2.73265	2.73605
		2	5.21557	5.21598	5.21599	5.21612	6.09756
		3	8.16435	8.16602	8.16615	8.16795	–
	0.1	1	2.72173	2.72176	2.72176	2.72176	2.72501
		2	4.81326	4.81365	4.81366	4.81375	5.41717
		3	6.56753	6.56891	6.56897	6.56983	–
	0.2	1	2.69176	2.69179	2.69179	2.69179	2.69465
		2	4.09358	4.09392	4.09393	4.09398	4.36688
		3	4.77277	4.77384	4.77386	4.77412	–
25	0	1	5.24086	5.24093	5.24093	5.24093	5.24270
		2	6.87002	6.87068	6.87069	6.87079	7.56174
		3	9.30821	9.31039	9.31050	9.31209	–
	0.1	1	5.23519	5.23526	5.23526	5.23526	5.23695
		2	6.56981	6.57047	6.57047	6.57054	7.02463
		3	7.94472	7.94670	7.94675	7.94746	–
	0.2	1	5.21968	5.21974	5.21974	5.21974	5.22122
		2	6.06237	6.06300	6.06301	6.06304	6.25055
		3	6.53953	6.54132	6.54134	6.54153	–

Çizelge 4.13. Elastik ortama gömülü her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (SRT)

K_M	α	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$
1	0	1	3.29691	3.29691	3.29691	3.29693	3.16228
		2	6.36227	6.36227	6.36231	6.36292	–
		3	9.47768	9.47768	9.47800	9.48259	–
	0.1	1	3.15959	3.15959	3.15959	3.15961	3.01511
		2	5.41335	5.41335	5.41337	5.41374	–
		3	6.93118	6.93118	6.93131	6.93307	–
	0.2	1	2.84184	2.84184	2.84185	2.84186	2.67261
		2	4.03817	4.03817	4.03818	4.03833	–
		3	4.52871	4.52871	4.52874	4.52920	–
5	0	1	3.85611	3.85611	3.85611	3.85613	3.87298
		2	6.66921	6.66921	6.66925	6.66984	–
		3	9.68640	9.68641	9.68672	9.69121	–
	0.1	1	3.73939	3.73939	3.73939	3.73940	3.75379
		2	5.77099	5.77099	5.77101	5.77136	–
		3	7.21397	7.21397	7.21408	7.21578	–
	0.2	1	3.47507	3.47507	3.47507	3.47508	3.48466
		2	4.50631	4.50631	4.50632	4.50645	–
		3	4.95068	4.95068	4.95070	4.95113	–
25	0	1	5.90505	5.90505	5.90505	5.90506	5.91608
		2	8.02985	8.02985	8.02988	8.03037	–
		3	10.66895	10.66895	10.66923	10.67331	–
	0.1	1	5.82950	5.82950	5.82950	5.82950	5.83874
		2	7.30098	7.30098	7.30100	7.30128	–
		3	8.48772	8.48772	8.48781	8.48925	–
	0.2	1	5.66357	5.66357	5.66358	5.66358	5.66947
		2	6.34877	6.34877	6.34877	6.34887	–
		3	6.67152	6.67152	6.67154	6.67186	–

Çizelge 4.14. Elastik ortama gömülü her iki ucu tutulu çubuğun eksenel titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (LBRT)

K_M	α	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$
1	0	1	3.29679	3.29690	3.29691	3.29692	3.31662
		2	6.36143	6.36223	6.36227	6.36289	–
		3	9.47491	9.47757	9.47789	9.48248	–
	0.1	1	3.15948	3.15959	3.15959	3.15960	3.17662
		2	5.41263	5.41332	5.41334	5.41372	–
		3	6.92914	6.93110	6.93123	6.93299	–
	0.2	1	2.84174	2.84184	2.84184	2.84185	2.85357
		2	4.03763	4.03815	4.03816	4.03831	–
		3	4.52735	4.52865	4.52869	4.52915	–
5	0	1	3.85596	3.85611	3.85611	3.85612	3.87298
		2	6.66828	6.66918	6.66922	6.66980	–
		3	9.68348	9.68629	9.68660	9.69109	–
	0.1	1	3.73924	3.73938	3.73938	3.73940	3.75378
		2	5.77016	5.77096	5.77098	5.77133	–
		3	7.21173	7.21388	7.21400	7.21569	–
	0.2	1	3.47492	3.47506	3.47506	3.47507	3.48465
		2	4.50563	4.50628	4.50629	4.50642	–
		3	4.94903	4.95060	4.95064	4.95107	–
25	0	1	5.90476	5.90504	5.90504	5.90505	5.91607
		2	8.02852	8.02979	8.02983	8.03031	–
		3	10.66536	10.66881	10.66909	10.67316	–
	0.1	1	5.82921	5.82948	5.82948	5.82949	5.83873
		2	7.29972	7.30093	7.30095	7.30123	–
		3	8.48463	8.48759	8.48769	8.48913	–
	0.2	1	5.66329	5.66356	5.66356	5.66357	5.66946
		2	6.34758	6.34871	6.34873	6.34882	–
		3	6.66880	6.67138	6.67143	6.67175	–

Çizelge 4.11 ve 4.12 basit çubuk formülasyonu için sırayla C–F ve C–C çubuklarının farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz atomik parametre etkisinde ilk üç mod boyutsuz frekanslarını listeler. Bu parametreler altında bu sefer LBRT ile çubukların modellenmesi durumunda elde edilen boyutsuz frekanslar Çizelge 4.13 ve 4.14’te sunulmuştur. Genel olarak, mod numarası arttıkça iki sınır şart tipinin de frekansları birbirine yaklaşmaktadır. Atomik parametrenin frekansları yüksek modlarda daha çok düşürdüğü anlaşılmaktadır. Yalnız bu düşürücü etki, elastik ortam parametresinin artışı ile azalmaktadır. Mod numarası yükseldikçe SRT ve LBRT ile hesaplanan frekanslar arasındaki fark belirginleşmektedir. Sınır şart kıyası açısından iki teori arasındaki fark C–C’de daha fazladır. Ayrıca, elastik ortam parametresinin yükselmesi ile SRT ve LBRT ile hesaplanan frekanslar arasındaki farklılık artmıştır. Bahsedilen bu farklılık C–C’de barizdir.

Çizelge 4.15. Uç eklentili nano çubukların eksenel titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekansların karşılaştırılması ($\beta_m = \beta_k = 10$, SRT)

Sınır Şartlar	Mod	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.25$		
		Numanoğlu vd. (2018)	FEM ($n = 100$)	Numanoğlu vd. (2018)	Bao vd. (2019)	NL-FEM ($n = 100$)
C-MA	1	0.31105	0.31105	0.31012	0.31012	0.31012
	2	3.17310	3.17310	2.48591	2.48591	2.48591
	3	6.29906	6.29906	3.37671	3.37671	3.37671
F-MA	1	1.63199	1.63199	1.51107	1.51107	1.51107
	2	4.73351	4.73351	3.05523	3.05523	3.05522
	3	7.86669	7.86669	3.56554	3.56555	3.56554
C-SA	1	2.86277	2.86277	2.37560	2.37560	2.37560
	2	5.76056	5.76056	3.34527	3.34527	3.34527
	3	8.70831	8.70831	3.67332	3.67368	3.67332
F-SA	1	1.42887	1.42887	1.35799	1.35780	1.35800
	2	4.30580	4.30580	2.99443	2.99443	2.99443
	3	7.22811	7.22811	3.54881	3.54881	3.54881
C-SMA	1	1.03044	1.03045	1.02726	1.02726	1.02726
	2	3.17652	3.17652	2.48878	2.48878	2.48878
	3	6.29947	6.29947	3.25693	3.25694	3.37694
F-SMA	1	—	0.93460	—	—	0.93303
	2	—	1.66453	—	—	1.54375
	3	—	4.73449	—	—	3.05590
SA-MA	1	—	0.29610	—	—	0.29537
	2	—	2.89439	—	—	2.39263
	3	—	5.77666	—	—	3.34799

Eklentili nano çubukların ilk üç mod frekanslarının daha önceden yapılmış bazı çalışmalar ile karşılaştırılması Çizelge 4.15'te verilmektedir. Buna göre, Numanoğlu vd. (2018) tarafından gerçekleştirilen çalışmada eklentili çubukların frekansları analitik yöntem olan değişkenlere ayırma tabanlı hesaplanmıştır. Bao vd. (2019) ise değişik tipte bir seri açılımı tabanlı çözüm gerçekleştirmişlerdir. Sonuçlar incelendiği zaman bu tez kapsamında yapılmış sonlu eleman çözümleri hem yerel hem de yerel olmayan titreşim için yazarların hesapladıkları değerlerle uyum içindedir. Analitik sonuçlara uygunluk açısından, NL-FEM ile hesaplanan sonuçların genel olarak Bao vd. (2019) tarafından verilmiş sonuçlara göre biraz daha önde olduğu belirtilebilir. Üç düğümlü elemanın boyut etkili titreşim problemlerinin analizi için gayet uygun olduğu tekrardan anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.16. Uç eklentili nano çubukların eksenel titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 10$, LBRT)

Sınır Şartlar	Mod	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$
		FEM ($n = 100$)	NL-FEM ($n = 100$)
C-MA	1	0.31105	0.31012
	2	3.17309	2.48590
	3	6.29903	3.37669
F-MA	1	1.63199	1.51106
	2	4.73350	3.05522
	3	7.86663	3.56551
C-SA	1	2.86277	2.37560
	2	5.76054	3.34526
	3	8.70824	3.67327
F-SA	1	1.42887	1.35800
	2	4.30579	2.99442
	3	7.22807	3.54878
C-SMA	1	1.03045	1.02726
	2	3.17652	2.48878
	3	6.29944	3.37692
F-SMA	1	0.93460	0.93303
	2	1.66453	1.54375
	3	4.73448	3.05589
SA-MA	1	0.29610	0.29537
	2	2.89439	2.39262
	3	5.77664	3.34797

Çizelge 4.15’te yapılan hesapların Love–Bishop çubuk teorisi için yinelenmiş hali Çizelge 4.16’da verilmiştir. Bu çubuk formülasyonunun analitik çözümüne ait kod çalışmadığı için analitik sonuç verilememiştir. Ancak geliştirilen sonlu elemanlar ile sonuç alınabilmektedir. Tabi bu sonuçları mümkün olduğunca doğru vermek adına 100 eleman kullanımı tercih edilmiştir. Çizelge 4.15’teki sonuçlara göre bir kıyaslama yapacak olursak eklentili çubukların LBRT ile hesaplanan frekanslarının da SRT ile hesaplanan frekanslarından daha düşük olduğu yorumlanabilir. Teoriler arasındaki frekans farklılığı mod sayısının artması ile artış gösterirken atomik parametrenin artışı ile çok az da olsa azalır.

Çizelge 4.17. Elastik ortama gömülü eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve eklenti oranı parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları ($K_M = 50$)

Sınır Şartlar	β_m, β_k	NL-FEM ($n = 100$) Sonuçları			
		SRT		LBRT	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$
C-MA	0.01	7.16421	7.15153	7.16421	7.15153
	1	2.56686	3.38872	2.56686	3.38872
	100	0.26582	0.37885	0.26582	0.37885
F-MA	0.01	7.02942	7.02968	7.02942	7.02968
	1	2.56685	3.38224	2.56685	3.38224
	100	0.26582	0.37813	0.26582	0.37813
C-SA	0.01	7.24482	7.22184	7.24481	7.22184
	1	7.35635	7.31407	7.35634	7.31406
	100	7.72497	7.48716	7.72496	7.48714
F-SA	0.01	7.07177	7.07177	7.07177	7.07177
	1	7.12321	7.12255	7.12321	7.12255
	100	7.24008	7.21844	7.24008	7.21844
C-SMA	0.01	7.16589	7.15300	7.16588	7.15300
	1	2.74187	3.50443	2.74187	3.50443
	100	1.03438	1.06818	1.03438	1.06818
F-SMA	0.01	7.03040	7.03064	7.03040	7.03064
	1	2.74186	3.49814	2.74186	3.49814
	100	1.03438	1.06792	1.03438	1.06792
SA-MA	0.01	7.02999	7.03025	7.02999	7.03025
	1	2.56685	3.38276	2.56685	3.38275
	100	0.26582	0.37876	0.26582	0.37876

Çizelge 4.18. Elastik ortama gömülü eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve eklenti oranı parametreleri altında ikinci mod boyutsuz frekansları ($K_M = 50$)

Sınır Şartlar	β_m, β_k	NL-FEM ($n = 100$) Sonuçları			
		SRT		LBRT	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$
C-MA	0.01	8.41300	7.66845	8.41296	7.66841
	1	7.75922	7.49582	7.75920	7.49580
	100	7.73776	7.49033	7.73774	7.49031
F-MA	0.01	7.65981	7.44341	7.65979	7.44339
	1	7.25010	7.22497	7.25010	7.22497
	100	7.24350	7.22069	7.24350	7.22069
C-SA	0.01	8.49862	7.70117	8.49859	7.70112
	1	8.61042	7.74836	8.61038	7.74829
	100	9.41815	7.83368	9.41808	7.83355
F-SA	0.01	7.73884	7.49110	7.73882	7.49108
	1	7.85715	7.56151	7.85714	7.56148
	100	8.47168	7.69850	8.47165	7.69845
C-SMA	0.01	8.41417	7.66898	8.41414	7.66894
	1	7.75959	7.49592	7.75958	7.49590
	100	7.73776	7.49033	7.73775	7.49031
F-SMA	0.01	7.66112	7.44424	7.66111	7.44423
	1	7.25024	7.22506	7.25023	7.22505
	100	7.24350	7.22069	7.24350	7.22069
SA-MA	0.01	7.66117	7.44431	7.66116	7.44430
	1	7.36519	7.31899	7.36518	7.31898
	100	7.72518	7.48721	7.72516	7.48720

Çizelge 4.19. Elastik ortama gömülü eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve eklenti oranı parametreleri altında üçüncü mod boyutsuz frekansları ($K_M = 50$)

Sınır Şartlar	β_m, β_k	NL-FEM ($n = 100$) Sonuçları			
		SRT		LBRT	
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$
C-MA	0.01	10.46374	7.90270	10.46363	7.90230
	1	9.50607	7.83685	9.50600	7.83671
	100	9.45977	7.83492	9.45970	7.83478
F-MA	0.01	9.36567	7.81258	9.36560	7.81248
	1	8.53395	7.70417	8.53391	7.70412
	100	8.49781	7.70066	8.49777	7.70061
C-SA	0.01	10.56906	7.91889	10.56895	7.91809
	1	10.66110	7.94091	10.66099	7.93484
	100	11.70817	7.97192	11.70801	7.93722
F-SA	0.01	9.46036	7.83526	9.46029	7.83513
	1	9.56236	7.86699	9.56230	7.86676
	100	10.51057	7.91794	10.51046	7.91718
C-SMA	0.01	10.46468	7.90294	10.46457	7.90253
	1	9.50660	7.83688	9.50653	7.83674
	100	9.45977	7.83492	9.45971	7.83478
F-SMA	0.01	9.36672	7.81293	9.36665	7.81283
	1	8.53446	7.70423	8.53442	7.70418
	100	8.49781	7.70066	8.49778	7.70061
SA-MA	0.01	9.36674	7.81297	9.36667	7.81287
	1	8.64707	7.75139	8.64703	7.75132
	100	9.41861	7.83370	9.41854	7.83357

Çizelge 4.17–19’da eksenel elastik ortama gömülü ve eklentili nano çubukların ilk üç mod frekansları SRT ve LBRT için karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Bu tip sonuçlar hem SRT hem de LBRT için, özellikle atomik parametre ve elastik ortam gibi ilave parametreler altında analitik metot tabanlı kodlarla elde edilemeyeceği için sadece sonlu eleman sonuçları verilmiştir. Bu arada, analitik metot tabanlı kodlar, mod denklemini ve sınır şartları kodlama şeklinde yazılabileceği gibi herhangi bir sınır şart için elle elde edilmiş ancak elle çözilemeyen yapıdaki frekans denkleminin sembolik kodlanması suretiyle de oluşturulabilir. Bu tip kodlarda frekans denkleminin kullanıcının gireceği bir civardaki kökü aranır. Kullanıcının gireceği başlangıç civarı bir değer ve bu başlangıcı lineer olarak artıracak bir aralık değeri için kodun koşturulması sonucunda arka arkaya çıkan aynı değerler, herhangi bir modun frekansıdır. Değerler değişmeye başladığında bir üst modun frekansına geçilmiştir. Tabi bu tip kodlarda kullanıcı oldukça dikkatli olmalıdır çünkü gireceği aralık değeri anlamsız derecede yüksek olursa mod atlanma riski çok yüksektir. Aralık anlamsız derecede küçük olursa da bir üst moda geçmek zaman alır. İşte elektronik ortamda analitik yöntemlere dayanan çözümlerin çok ciddi bir zayıflığı da budur. Konuyu çok da dağıtmadan belirtelim ki, oldukça düşük atomik parametre ve elastik ortam parametresi altında SRT için düşük modlara ait frekanslar, kodlar oldukça kötü performans gösterse de elde edilebilmektedir. Öte yandan, LBRT için yazılan kodlar bırakınız ilave etkileri, C–C ve C–F gibi elemanların klasik titreşiminde dahi çalışmaz. Bu gibi yüksek ciddiyete sahip olumsuz durumlardan

kurtulabilmek adına sayısal yöntemlerin kullanımının büyük bir avantaj olduğunu belirtebiliriz. Tez kapsamında yazılan sonlu eleman kodları, ne kadar ilave etki varsa hiçbir zaman kaybına uğramadan frekansları başarı ile hesaplamıştır. Tabi metoda ait algoritmanın iyi tanımlanması kodu yazıp başarı elde edebilmek için temel şarttır.

Sonuçları inceleyecek olursak, öncelikle F-MA, F-SMA ve SA-MA çubuklarında yerel olmayan parametrenin sadece temel mod frekanslarının yerel olmayan durumda klasik duruma göre arttığı görülmektedir. Bu tip ilginç sonuçların elastik ortam parametresinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Ek olarak bu tip çubuklarda eklenti oranı 1'e eşitken yerel olmayan frekansın klasik frekanslara göre diğer eklenti oranlarına kıyasla daha çok yükseldiği görülmüştür. Kütle eklentili çubuklarda eklenti frekansı yüksek oranda düşürürken yay eklentili çubuklarda eklentinin artışı frekansı az yükseltir. Bu söylenen ifade grafik sonuçlardan daha iyi anlaşılacaktır. Öte yandan, atomik etki bir uç tutulu iken yay ekli çubukları, bir uç serbest iken kütle ekli çubukları daha çok etkiler. Mod numarası yükseldikçe atomik parametrenin frekansı değiştirici etkisi bir ucu tutulu olan çubuklarda daha belirgindir.

Çizelge 4.20. Çeşitli sınır şartlardaki nanoçubukların burulma titreşimi için ilk beş mod klasik boyutsuz frekans parametreleri ($\beta_l = \beta_k = 5$)

Sınır Şart	Mod Numarası				
	1	2	3	4	5
C-F	3.14159	6.28319	9.42478	12.56637	15.70796
C-C	1.57080	4.71239	7.85398	10.99557	14.13717
F-F	3.14159	6.28319	9.42478	12.56637	15.70796
C-MA	0.43284	3.20394	6.31485	9.44595	12.58226
F-MA	1.68868	4.75443	7.87936	11.01373	14.15130
C-SA	2.65366	5.45435	8.39135	11.40863	14.46987
F-SA	1.31384	4.03357	6.90960	9.89275	12.93522
C-SMA	1.05790	3.21047	6.31566	9.44619	12.58237
F-SMA	0.88519	1.74065	4.75635	7.87977	11.01388
S-MA	0.39269	2.71726	5.48774	8.41393	11.42558

Grafik sonuçlara geçmeden önce bazı burulma analizlerinden de bahsetmekte fayda vardır. Çizelge 4.20, farklı sınır şartlı burulma çubuklarının klasik titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekans parametrelerini gösterirken bu analizlerin yerel olmayan elastisite için seçilmiş iki farklı boyutsuz atomik parametreye göre verdiği sonuçlar Çizelge 4.21'de listelenmiştir. Çok fazla değinilecek bir mevzu olmadığı düşünülmektedir. Ekli olsun eksiz olsun, klasik olsun yerel olmayan olsun, bütün frekans değerleri basit eksenel çubuklarla aynıdır (Bkz. Çizelge 4.1 ve 4.2).

Burulma çubuklarının eksenel çubuklarla serbest dinamik analiz sonuçlarının aynı olduğu anlaşıldığı için eksenel titreşimde verdiğimiz analizlerin burulma için tekrarlanmasına gerek görülmemiştir. Bunun yerine mümkün olduğunca özgün sonuçlara değinmek adına Çizelge 4.22 ve 4.23 hazırlanmıştır. Çizelge 4.22 iki farklı ve genel bilinen sınır koşula sahip burulma çubuklarının yerel olmayan titreşimindeki birinci ve ikinci modun farklı yerel olmayan atomik parametre değerleri altındaki boyutsuz frekanslarını İslam vd. (2014) ile karşılaştırmalı olarak göstermektedir. Sonlu eleman sonuçlarının ilgili referansa göre yeter doğrulukta uygun olduğu görülmektedir. Frekanslara etki eden parametrelerin etkisini irdelemek adına eksenel çubuklarda

söylenenlerin tamamı burulmada da geçerlidir.

Çizelge 4.21. Çeşitli sınır şartlardaki nano çubukların burulma titreşimi için ilk beş mod yerel olmayan boyutsuz frekansları ($\beta_I = \beta_k = 5$)

α	Sınır Şart	Mod Numarası				
		1	2	3	4	5
0.2	C-F	1.49858	3.42933	4.21782	4.55152	4.71386
	C-C	2.66009	3.91239	4.41692	4.64576	4.76445
	C-MA	0.43123	2.69762	3.92000	4.41909	4.64656
	F-MA	1.59990	3.44543	4.22173	4.55280	4.71438
	C-SA	2.40458	3.79375	4.37351	4.62813	4.75629
	F-SA	1.28319	3.23998	4.14645	4.52432	4.70204
	C-SMA	1.05386	2.70336	3.92053	4.41921	4.64660
	F-SMA	0.88404	1.65125	3.44689	4.22197	4.55287
	S-MA	0.39170	2.44904	3.80323	4.37607	4.62903
0.4	C-F	1.33005	2.20846	2.38223	2.43778	2.46180
	C-C	1.95620	2.32288	2.41643	2.45195	2.46893
	C-MA	0.42650	1.97098	2.32447	2.41679	2.45207
	F-MA	1.39936	2.21274	2.38293	2.43798	2.47427
	C-SA	1.89329	2.31379	2.41429	2.45123	2.47815
	F-SA	1.19712	2.18577	2.37806	2.43658	2.47403
	C-SMA	1.04194	1.97580	2.32482	2.41686	2.45209
	F-SMA	0.87998	1.45082	2.21381	2.38308	2.43802
	SA-MA	0.38875	1.91190	2.31558	2.41467	2.45135

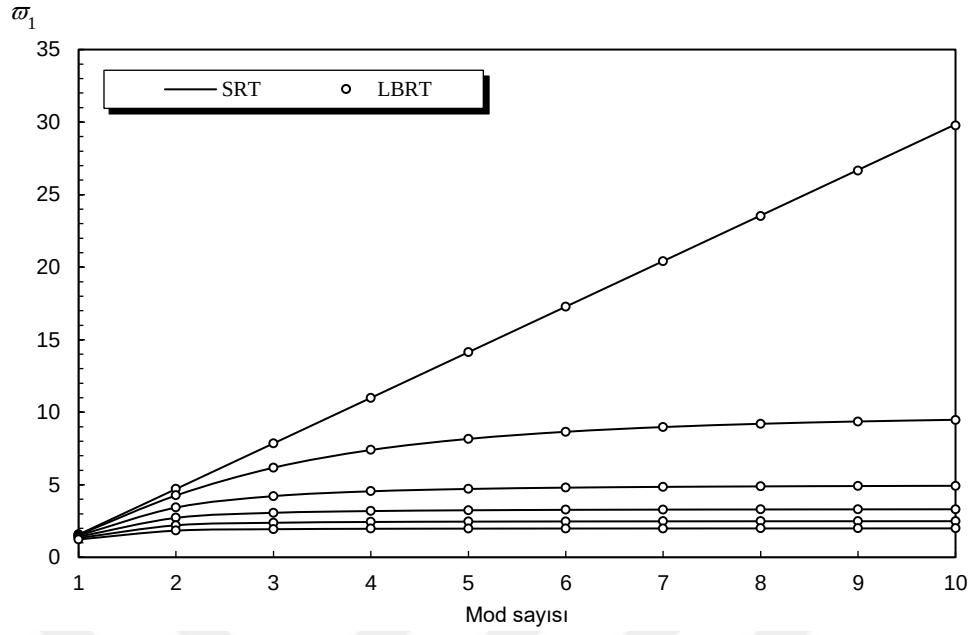
Çizelge 4.22. İki farklı sınır koşula sahip nano çubukların burulma titreşimi için farklı yerel olmayan boyutsuz parametre değerleri altında ilk iki mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

Sınır Şartlar	Mod Sayısı	α	İslam vd. (2014)	NL-FEM Sonuçları			
				$n = 100$	$n = 20$	$n = 10$	$n = 1$
C-F	1	0	1.5708	1.57080	1.57080	1.57080	1.57669
		0.04	1.5677	1.56770	1.56770	1.56771	1.57357
		0.08	1.5585	1.55854	1.55854	1.55854	1.56430
		0.12	1.5436	1.54361	1.54361	1.54361	1.54921
	2	0	4.7124	4.71239	4.71240	4.71255	5.67280
		0.04	4.6308	4.63084	4.63085	4.63099	5.53217
		0.08	4.4096	4.40945	4.40946	4.40958	5.16573
		0.12	4.1020	4.10196	4.10196	4.10206	4.68939
C-C	1	0	3.1416	3.14159	3.14159	3.14161	3.16228
		0.04	3.1171	3.11708	3.11708	3.11710	3.13728
		0.08	3.0468	3.04684	3.04684	3.04686	3.06570
		0.12	2.9396	2.93964	2.93964	2.93965	2.95656
	2	0	6.2832	6.28319	6.28323	6.28385	—
		0.04	6.0937	6.09368	6.09372	6.09428	—
		0.08	5.6139	5.61388	5.61391	5.61435	—
		0.12	5.0169	5.01694	5.01696	5.01728	—

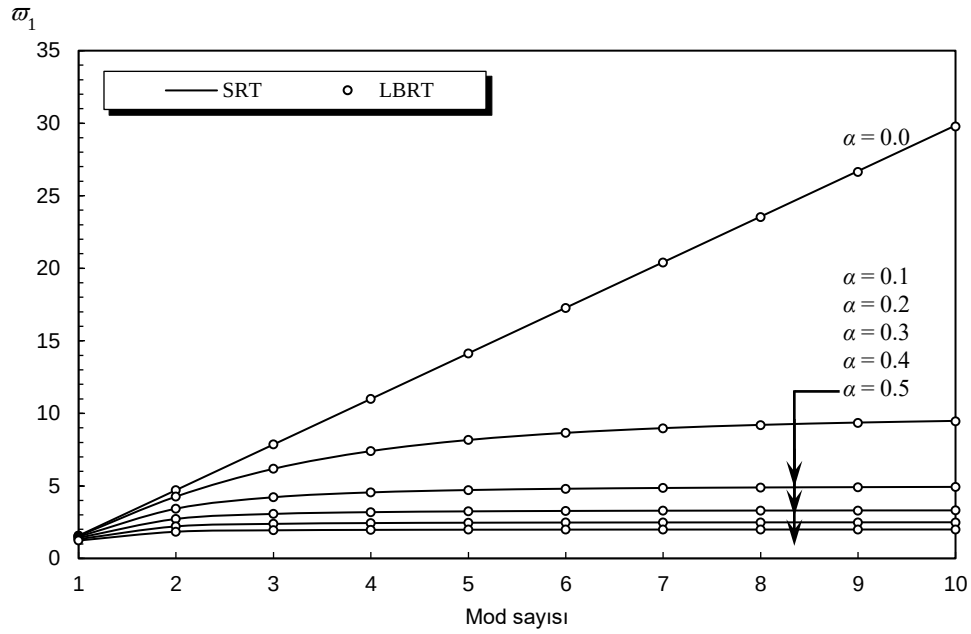
Çizelge 4.23. Elastik ortama gömülü iki farklı nano çubuğun farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve ortam rijitliği parametreleri altında ilk üç mod boyutsuz burulma frekansları

Sınır Şartlar	Mod Sayısı	α	Boyutsuz ortam rijitliği parametresi				
			$K_T = 0$	$K_T = 10$	$K_T = 20$	$K_T = 50$	$K_T = 100$
C-F	1	0.0	1.57080	3.53092	4.73998	7.24344	10.12262
		0.1	1.55177	3.52250	4.73371	7.23934	10.11968
		0.2	1.49858	3.49939	4.71654	7.22812	10.11166
		0.3	1.42093	3.46685	4.69245	7.21242	10.10045
		0.4	1.33005	3.43060	4.66573	7.19507	10.08806
		0.5	1.23534	3.39500	4.63962	7.17817	10.07601
	2	0.0	4.71239	5.67509	6.49666	8.49745	11.05471
		0.1	4.26279	5.30767	6.17830	8.25660	10.87067
		0.2	3.42933	4.66480	5.63563	7.85877	10.57168
		0.3	2.72134	4.17201	5.23504	7.57665	10.36367
		0.4	2.20846	3.85711	4.98771	7.40792	10.24096
		0.5	1.84105	3.65916	4.83627	7.30681	10.16806
	3	0.0	7.85398	8.46670	9.03798	10.56811	12.71554
		0.1	6.17668	6.93912	7.62570	9.38890	11.75378
		0.2	4.21782	5.27162	6.14736	8.23347	10.85311
		0.3	3.06842	4.40627	5.42358	7.70812	10.46017
		0.4	2.38223	3.95917	5.06705	7.46157	10.27983
		0.5	1.90578	3.70896	4.86128	7.33188	10.18609
C-C	1	0.0	3.14159	4.45753	5.46531	7.73755	10.48187
		0.1	2.99717	4.35695	5.38359	7.68004	10.43949
		0.2	2.66009	4.13232	5.20347	7.55487	10.34776
		0.3	2.28622	3.90215	5.02263	7.43147	10.25801
		0.4	1.95620	3.71843	4.88126	7.33667	10.18954
		0.5	1.68713	3.58419	4.77979	7.26955	10.14132
	2	0.0	6.28319	7.03409	7.71223	9.45930	11.81010
		0.1	5.32018	6.18905	6.95013	8.84897	11.32715
		0.2	3.91239	5.03059	5.94196	8.08126	10.73810
		0.3	2.94461	4.32097	5.35451	7.65968	10.42453
		0.4	2.32288	3.92374	5.03942	7.44283	10.26624
		0.5	1.93815	3.69215	4.87406	7.32339	10.17998
	3	0.0	9.42478	9.94115	10.43199	11.78246	13.74141
		0.1	6.85867	7.55257	8.18788	9.85096	12.12606
		0.2	4.41692	5.43224	6.28563	8.33722	10.93203
		0.3	3.14257	4.45823	5.46587	7.73794	10.48216
		0.4	2.41643	3.97984	5.08322	7.47256	10.28782
		0.5	1.95643	3.71855	4.88136	7.33673	10.18958

Çizelge 4.23, genel bilinen sınır koşullu nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve elastik ortam parametresi değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları listeler. Yerel olmayan parametre C-C'nin frekanslarını özellikle yüksek modlarda daha çok düşürür. Elastik ortam parametresi artarsa atomik parametrenin frekans indirgeyici etkisi azalır. Elastik ortam C-F'nin frekanslarını C-C'ye kıyasla daha çok artırmıştır. Bunun sonucu olarak elastik ortam parametresi arttıkça iki çubuk tipi arasındaki farklılık azalır. Atomik parametrenin artışı da benzer sonucu ortaya çıkarır.

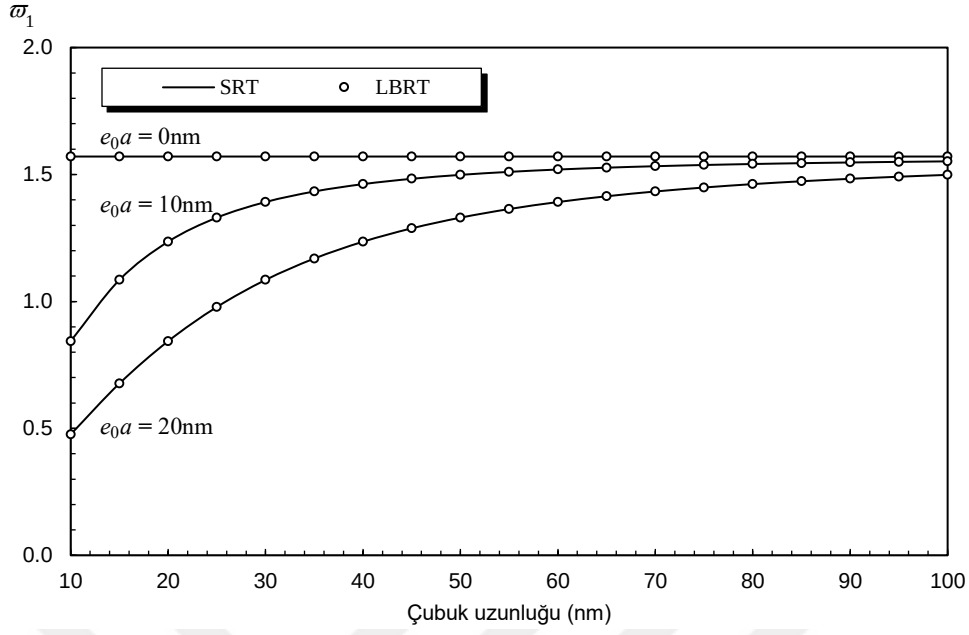


(a)

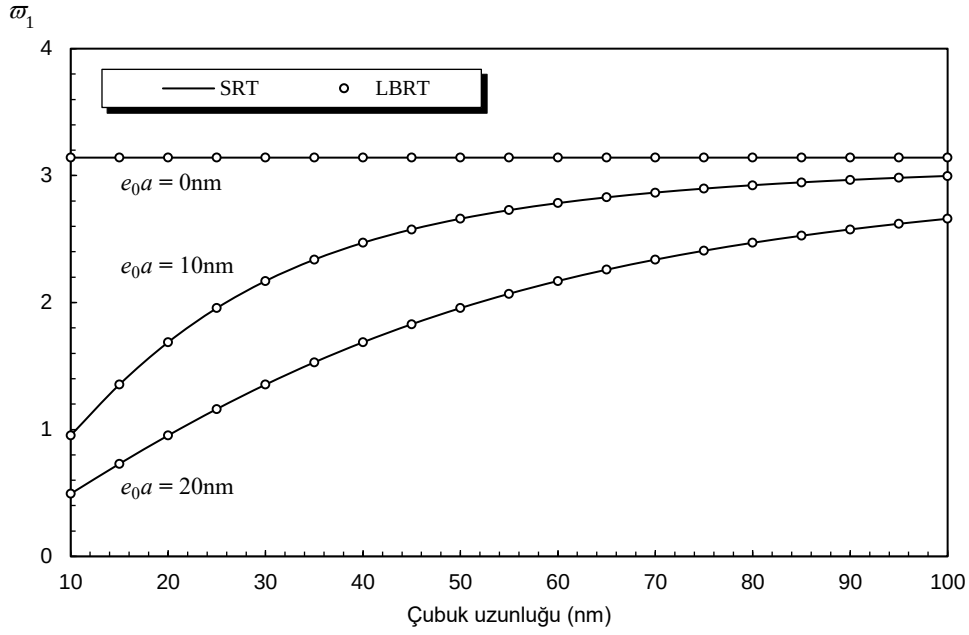


(b)

Şekil 4.1. Nano çubukların yerel olmayan boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi a) C-F b) C-C

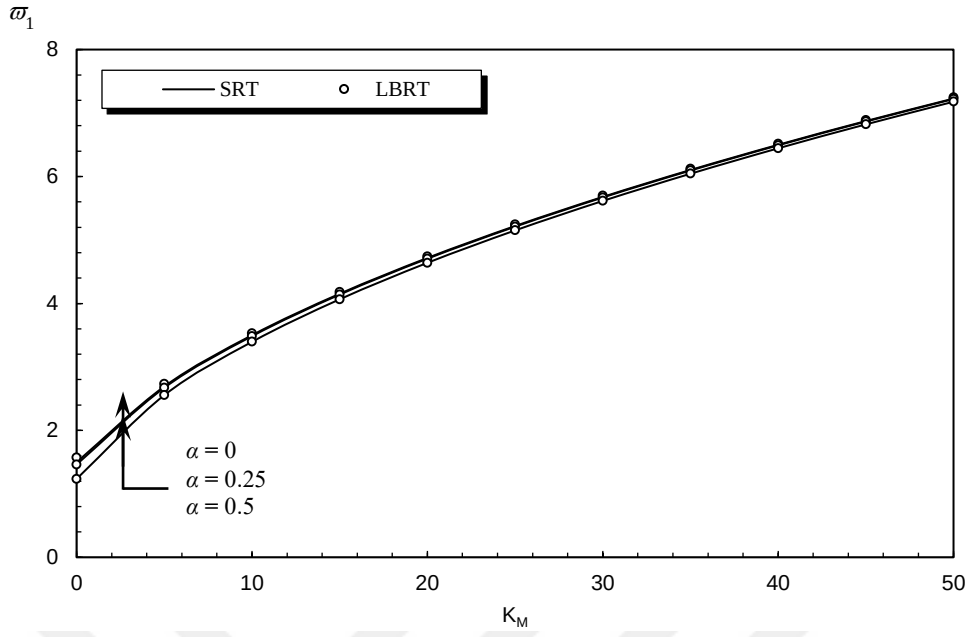


(a)

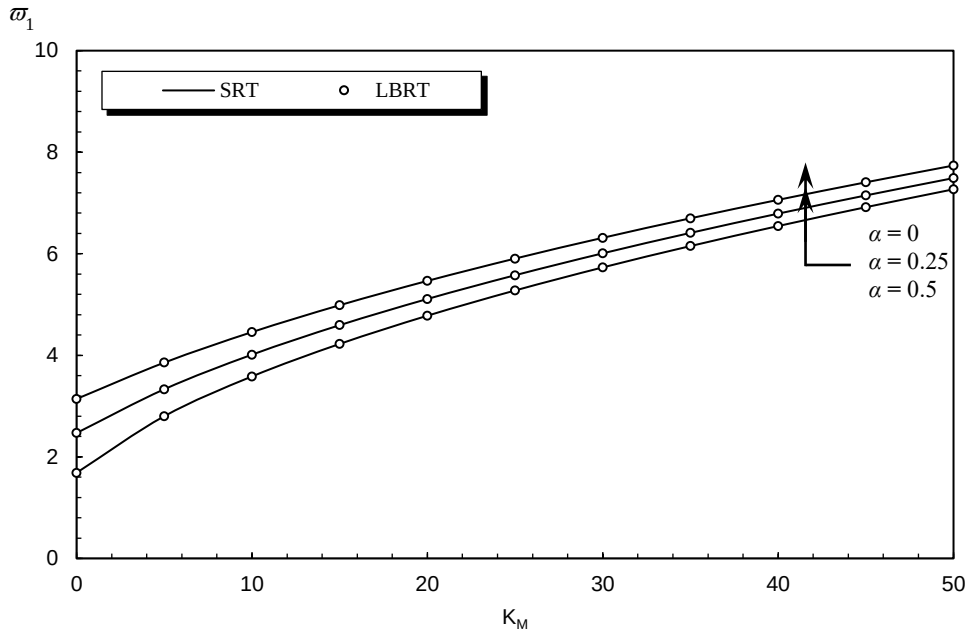


(b)

Şekil 4.2. Nano çubukların farklı yerel olmayan ifade değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının aksenal çubuk uzunluğuna göre değişimi **a)** C–F **b)** C–C

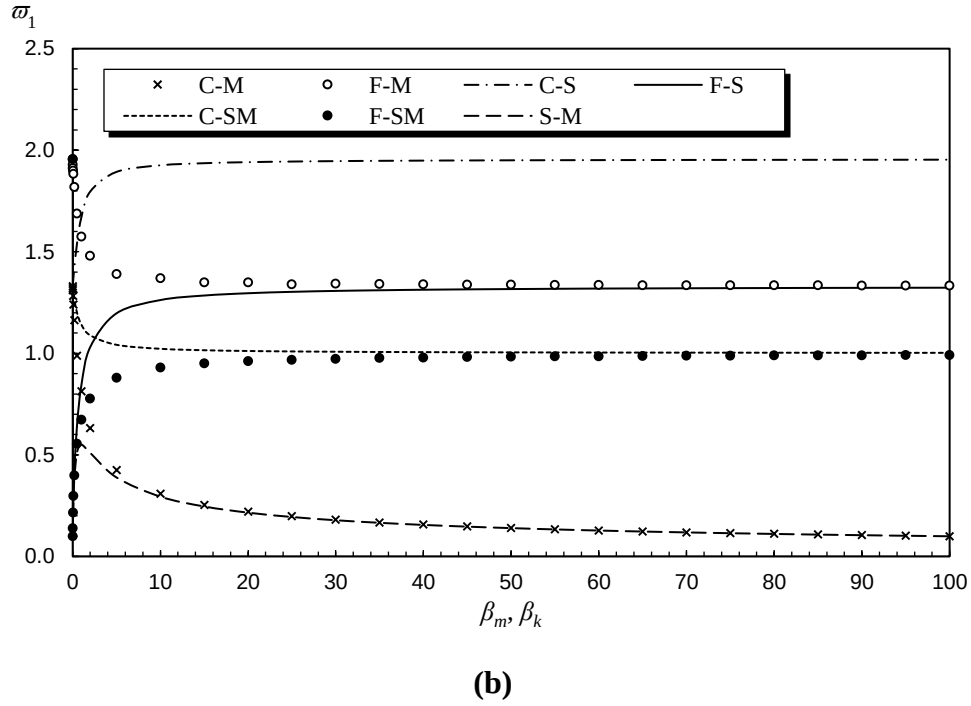
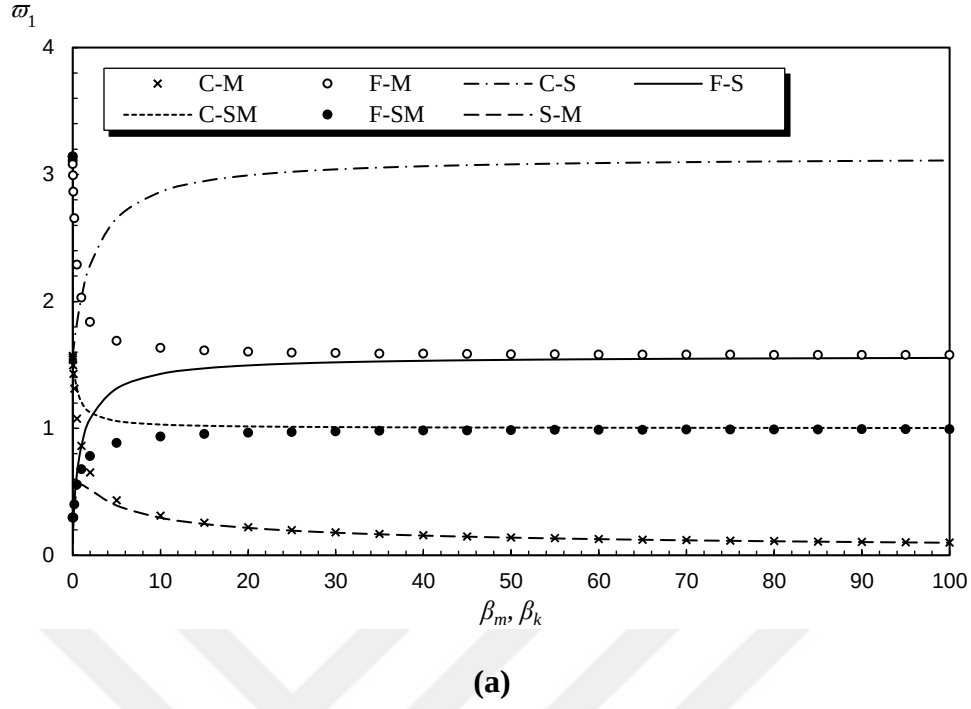


(a)



(b)

Şekil 4.3. Nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz elastik ortam parametresine göre değişimi
a) C-F b) C-C



Şekil 4.4. Eklentili nano çubukların temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının eklenti oranına göre değişimi **a)** $\alpha = 0$ **b)** $\alpha = 0.4$

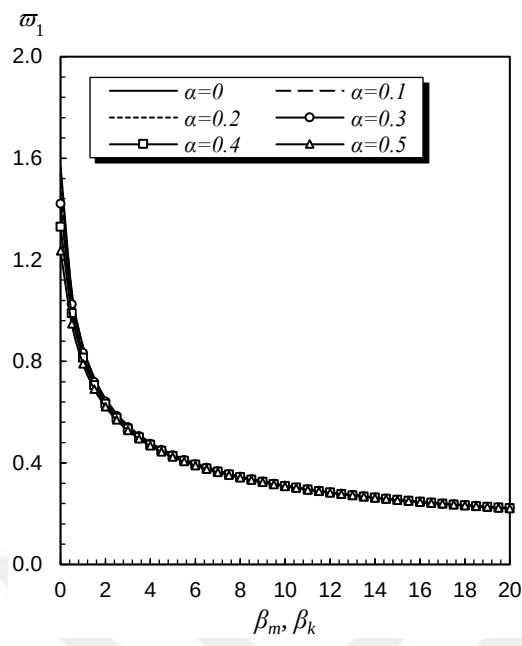
Nano ölçekli aksenal çubukların yerel olmayan serbest titreşimine ait grafik neticeleri tartışacak olursak, Şekil 4.1’de genel bilinen sınır koşullu çubukların mod sayısının artışına karşın boyutsuz frekanslarının yükselmesi üzerinde yerel olmayan parametrenin etkisi incelenmektedir. Klasik durumda boyutsuz frekansların lineer bir artışından söz edilebilirken yerel olmayan durumda bu bozulur. Atomik parametre

arttıkça mod sayısının artışının frekansları daha az yükselttiği görülmektedir. Tablo sonuçlarda elde ettiğimiz çıkarımların çoğu burada da geçerlidir (Bkz Çizelge 4.1, 4.2, 4.8, 4.9, 4.10).

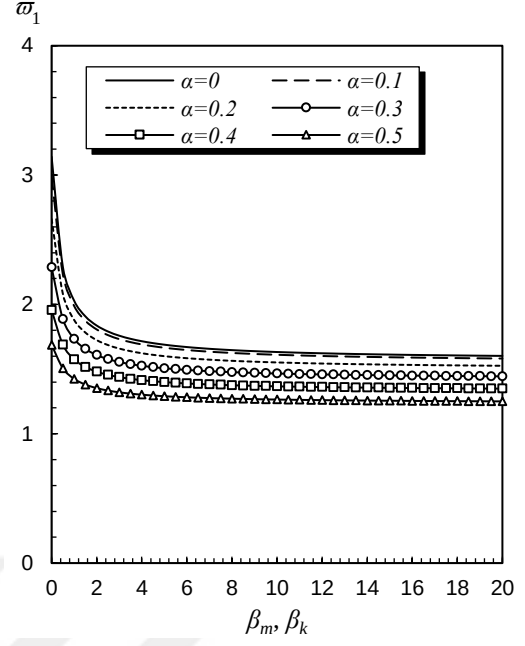
Şekil 4.2’de nano çubuk elemanının uzunluğunun değişimine göre farklı yerel olmayan uzunluk değerleri altında temel mod frekans parametrelerinin değişimi incelenmiştir. Klasik elastisitede ($e_0a = 0$ nm) uzunluk boyutsuz frekansı etkilemez. e_0a ’nın artışı durumunda frekanslar azalır. Ancak yerel olmayan durum için uzunluğun artması boyutsuz frekansları da yükseltir. Çubuğun uzunluğu yükseldikçe yerel olmayan ifadenin frekansları değiştirici etkisi azalır. Buradan yerel olmayan elastisitenin çok küçük uzunluklarda daha dikkate değer olduğunu anlıyoruz. Zira yapı uzunluğu makro ölçeğe doğru ilerlediği zaman boyut etkili sürekli ortam formülasyonlarının bir önemi kalmamaktadır. Bunların yanı sıra eleman uzunluğu veya atomik parametre artışının frekansları değiştirici etkisinin C–C’de daha çok olduğu gözlemlenmektedir.

Şekil 4.3’te elastik ortama gömülü genel bilinen eksenel çubukların temel mod frekanslarına eksenel ortam parametresinin değişiminin etkisi çizdirilmiştir. Genel olarak, eksenel ortam parametresi arttıkça boyutsuz frekansların artmakta olduğu görülmektedir. Elastik ortam parametresinin C–F’nin frekanslarını C–C’ye göre daha fazla artırdığı ve atomik parametrenin elastik ortam parametresi yükseldikçe boyutsuz frekansları daha az artırdığı bir kez daha anlaşılmıştır (Bkz. Çizelge 4.11–14).

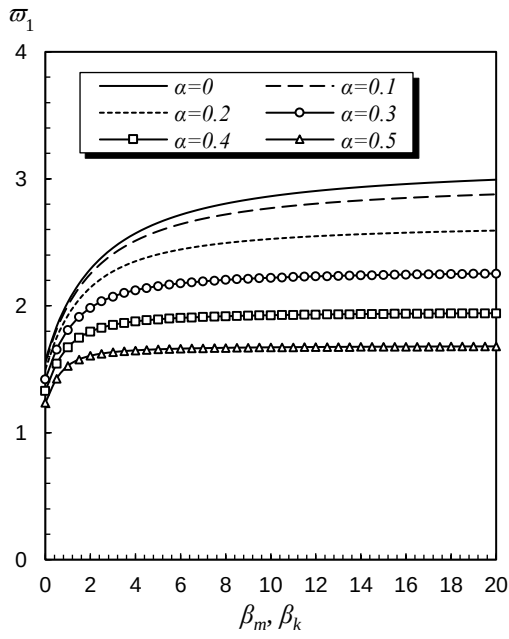
Eklentili sınır şartlara sahip nanoçubukların eklenti oranının artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi, klasik elastisite iç Şekil 4.1a’da, yerel olmayan elastisite için seçilmiş bir parametre altında Şekil 4.14b’de çizilmiştir. Klasik elastisite için, yay eklentili çubuklardan C–S’nin eklenti oranı artarsa frekanslar sabit bir değere gitmeye başlar. Bu sabit değerin C–C’nin klasik titreşim temel mod boyutsuz frekans değerine (3.14159) yakınsadığı görülmektedir. F–S çubuğunda ise eklenti parametresinin artışı için frekansların C–F’nin temel mod değerine (1.57080) yakınsayacak şekilde bir artış gösterdiğini belirtebiliriz. Aslında burada ele alınması gereken ayrı bir sonuç vardır ancak bunun Şekil 4.5d tartışılırken açıklanması tercih edilmiştir. Kütle eklentilere bakacak olursak, hem C–M hem de F–M çubuğunda kütle eklentisinin frekansları sürekli düşürdüğü görülmektedir. Tabi C–S’nin F–S’den, F–M’nin C–M’den daha yüksek boyutsuz frekanslara sahip olduğu da eklenmelidir. İki eklentinin bir arada bulunma durumuna değinecek olursak, F–SM’nin boyutsuz frekansları sürekli artarken C–SM’ninkiler azalmaktadır ve eklenti oranının yüksek değerlerinde iki çubuğun da boyutsuz frekansları yaklaşık aynı olmaktadır. Bir ucu yay diğer ucu kütle ekli elemanda da boyutsuz frekanslar azalmaktadır. O halde C–SM çubuğunda kütle, F–SM çubuğunda yay ve S–M çubuğunda kütle eklentisi diğer eklentiye göre etkindir. Öte yandan, eklenti oranının küçük değerlerinin frekansı değiştirici etkisinin daha yüksek olduğu tüm çubuklar için ortaktır. Yerel olmayan duruma gelince, ilk olarak atomik parametrenin en fazla C–S çubuğunun boyutsuz frekanslarını etkilediği bir kez daha görülmektedir (Bkz. Çizelge 4.7). Atomik parametre C–S ve F–S arasındaki boyutsuz frekans farklılığını azaltırken F–M ve F–S arasındaki farkı açmaktadır. Son olarak, şunu belirtebiliriz: F–S, F–SM, S–M gibi elemanlarda yerel olmayan titreşim analizi yapılırsa eklentinin frekans değerini değiştirmedeki kabiliyeti klasiğe göre artar (Tabi eklentinin değerinin düşük olduğu bölgede).



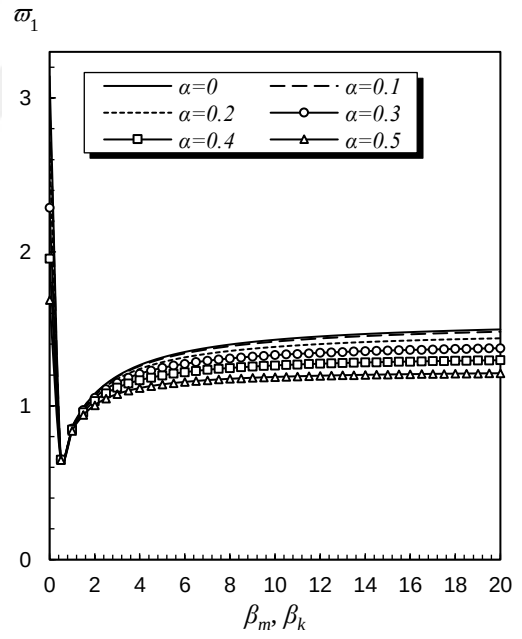
(a)



(b)

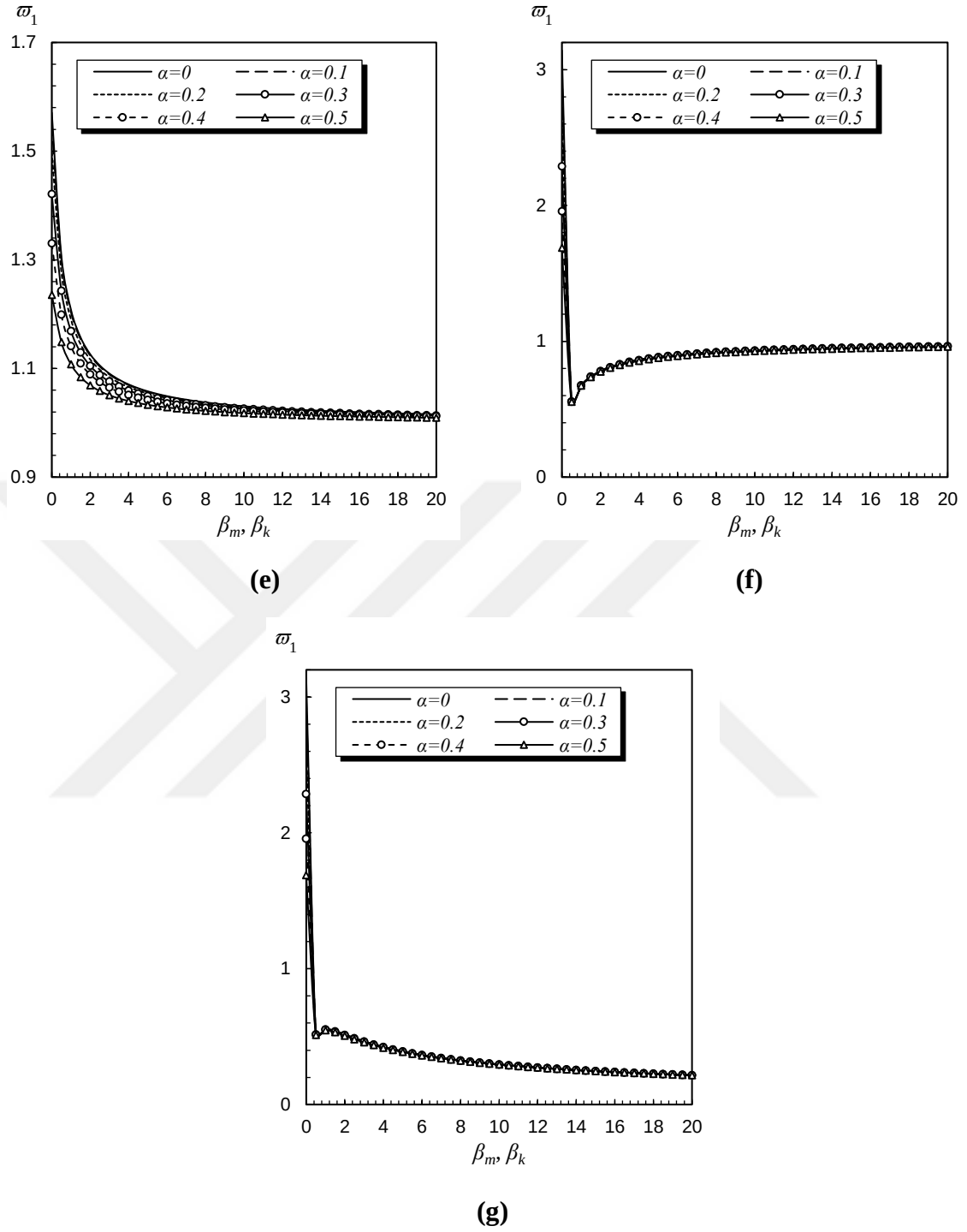


(c)



(d)

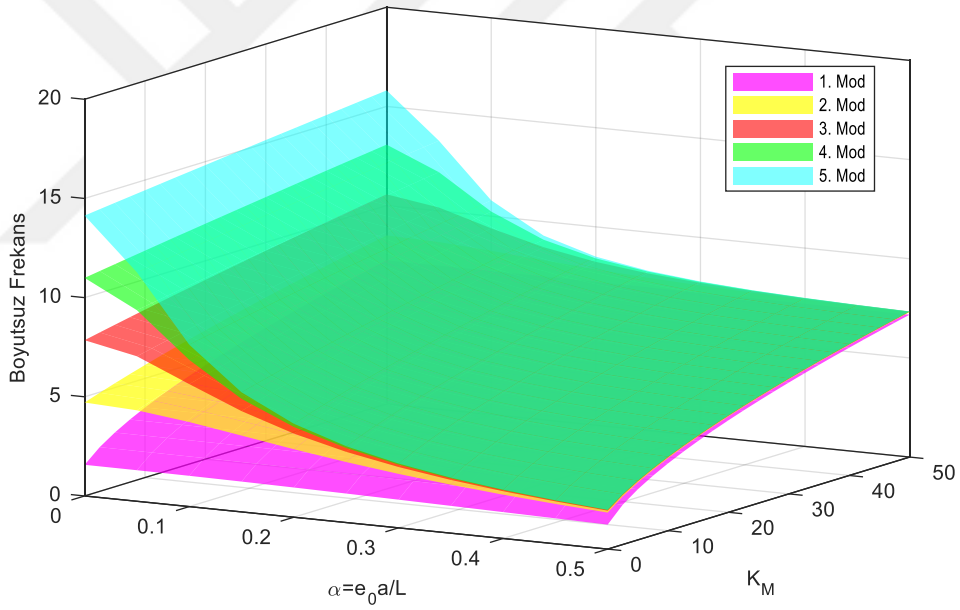
Şekil 4.5. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının eklenti oranına göre değişimi **a)** C–M **b)** F–M **c)** C–S **d)** F–S (Devamı arkada)



Şekil 4.5. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının eklenti oranına göre **e)** C–SM **f)** F–SM **g)** S–M

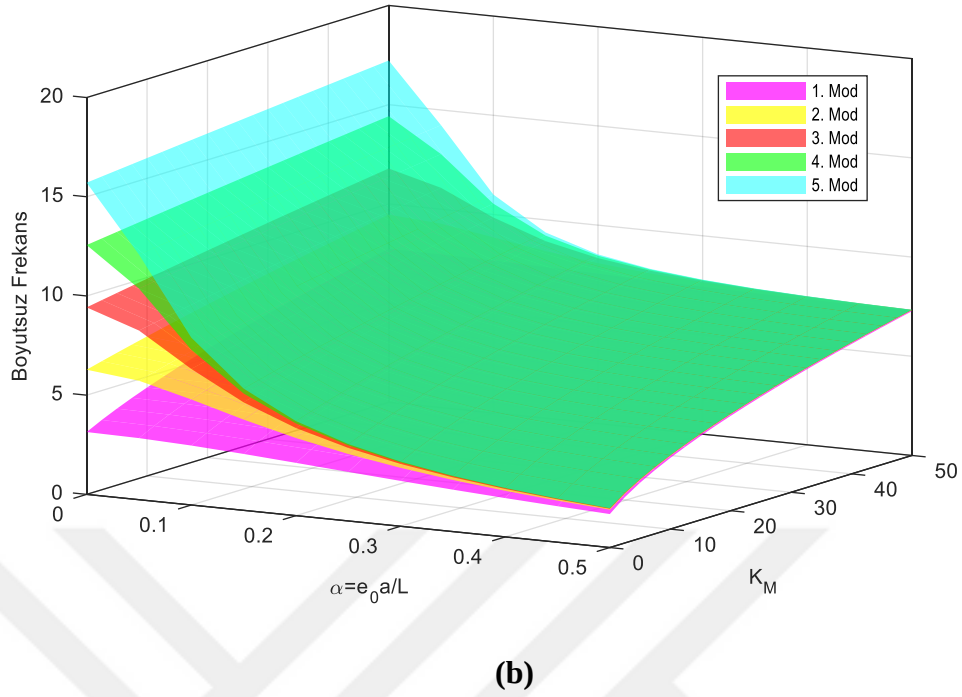
Şekil 4.5’te bütün eklentili nano çubukların eklenti oranının artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının farklı boyutsuz atomik parametre için değişimleri sunulmaktadır. Öncelikle belirtelim ki bu tip analizler, özellikle yüksek boyutsuz atomik parametre değerleri altında zorlaşacağından $n = 100$ sonlu eleman kullanılarak

gerçekleştirilmiştir. Sonuçların irdelemesine gelince, atomik parametrenin C–M, F–SM ve S–M elemanlarındaki frekans indirgeme etkisinin oldukça az olduğu görülmektedir. Bu etkinin en çok C–S çubuğunda olduğu en rahat bu analizlerde görülebilmektedir. Eklenti oranı değişimine gelince, eklenti artışının C–M’de F–M’ye göre daha yüksek bir değişim meydana getirdiği belirtilebilir. Girmemiz gereken ayrı bir mevzu, hiç bir ucu tutulu olmayan diğer ucu en az yay eklentili bir çubukta, mesela F–S (Şekil 4.7d), eklentinin varlığı eklenti oranının artışının ilk başında frekansları indirger çünkü eklentinin rijiditesi tutulu uç kadar değildir. Tutulu uç sonsuz rijitliğe sahip yay ekli uç gibi varsayılabilir. Neticede eklenti oranının varlık gösterdiği ilk durumda rijidite kaybı olduğundan boyutsuz frekanslar ani bir şekilde düşer. Ancak artış devam ettiğinde eşdeğer rijitlik artacağından frekanslar da yükselmelidir. Aynı durum Şekil 4.7f için de söylenebilir belki ama orada yay eklenti oranına eşit kütle eklenti oranı, frekanslarda oluşacak artışı ciddi şekilde sönümlemektedir. Son olarak S–M çubuğunda da keskin bir düşüşten sonra hafif bir yükselme ve sonrasında sürekli düşüş meydana gelir. Şekil 4.7 d–e–f’yi topluca göz önünde bulundurduğumuzda keskin düşüşün olduğu yerde kütle destekli daha fazla bir düşüş yaşanmadığı tespit edilmektedir. Söylenen son iki cümleden, küçük eklenti oranlarında yayın kütleyle göre az da olsa etkin olduğu sonucu çıkarılabilir.



(a)

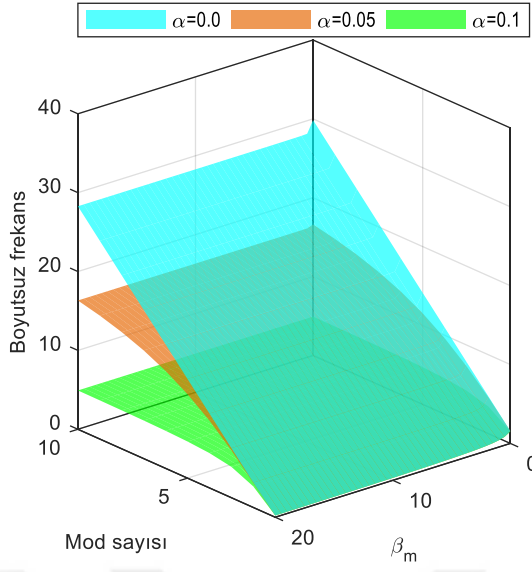
Şekil 4.6. Nano çubukların farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam parametresi değerlerine göre değişimi
a) C–F (devamı arkada)



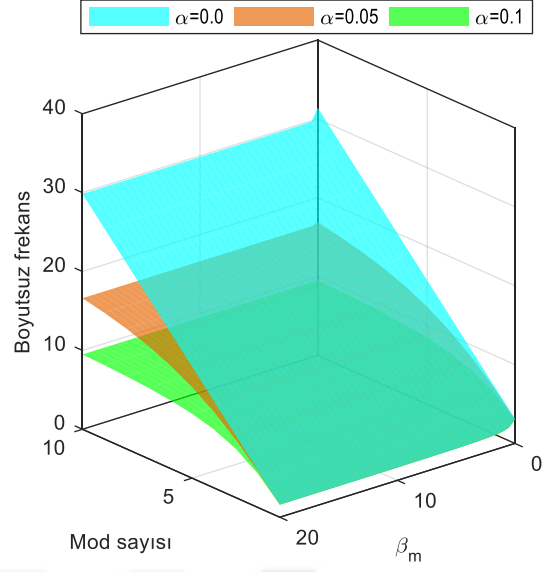
Şekil 4.6. Nano çubukların farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam parametresi değerlerine göre değişimi
b) C–C

Genel bilinen sınır koşullara sahip nano ölçekli eksenel çubukların boyutsuz atomik parametre ve elastik ortam parametresinin değişimlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekanslarına ait değişimleri gösteren yüzeyler Şekil 4.6’da sunulmuştur. Öncelikle, frekansları değiştirme konusunda, atomik parametrenin yüksek modlarda etkisi daha belirgin olmaktadır. Mod numarasının yüksek olduğu durumda, atomik parametrenin de yükselmesi için elastik ortamın frekansları daha çok artırdığını görmekteyiz. Mod numarası arttıkça C–C ve C–F arasındaki frekans farklılığına dair makasın daraldığı, özellikle yüksek atomik parametre ve elastik ortam etkisi altında iyice ortaya çıkmaktadır.

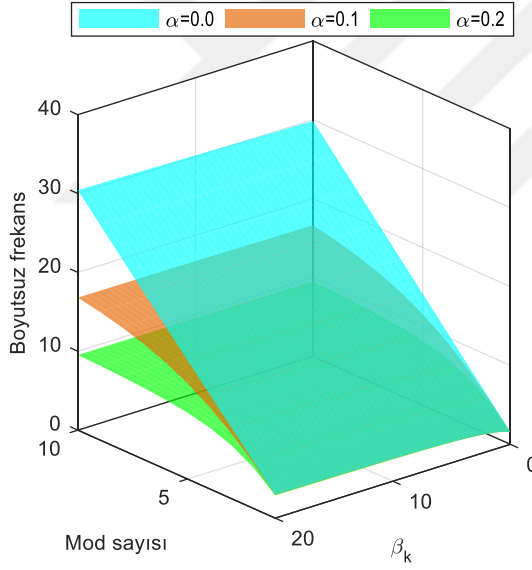
Şekil 4.7, eklentili bazı nano çubukların mod sayısı ve eklenti oranı değişimleri altında farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekansların değişimlerine ait yüzeyleri göstermektedir. Önce kütle ekli elemanları ele alalım. Eklenti oranının artmaya başladığı kısımda hızlı bir frekans düşüşünden sonra eklentinin daha da artışı için boyutsuz frekanslar yaklaşık olarak sabitlenir. İlk baştaki keskin düşüş mevzusu, mod sayısının yüksek değerlerinde daha belirgindir. Atomik parametre yükselirse düşüşün keskinliği azalmaktadır. Tabi atomik parametre F–M elemanını daha çok etkilemektedir. Yay eklentililer açısından, yüksek modlarda C–S çubuğunda frekanslar eklenti oranından çok etkilenmez. Ancak F–S çubuğunda başta keskin bir düşüş ve sonrasında gözle ayırt edilebilirliği az da olsa bir artış söz konusudur. Yine baştaki keskin düşüşün atomik parametre ile azaldığı hatta neredeyse kaybolduğu gözlemlenmektedir. Son olarak atomik parametrenin C–S elemanını F–S’ye göre daha fazla etkilediği görülmektedir ancak ikisi arasındaki makas, F–M ve C–M arasında olduğu kadar yüksek değildir.



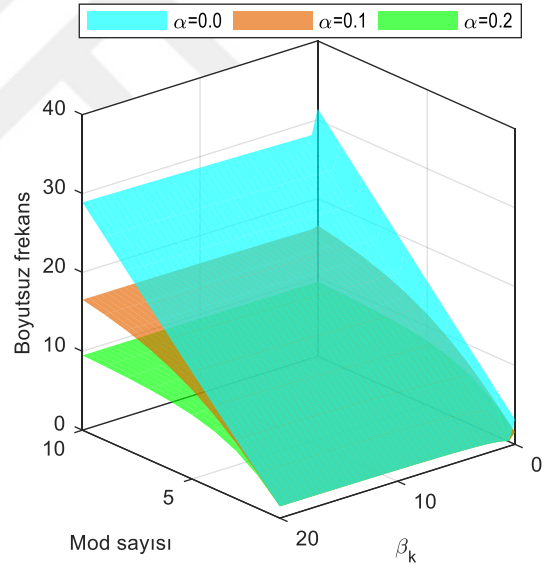
(a)



(b)

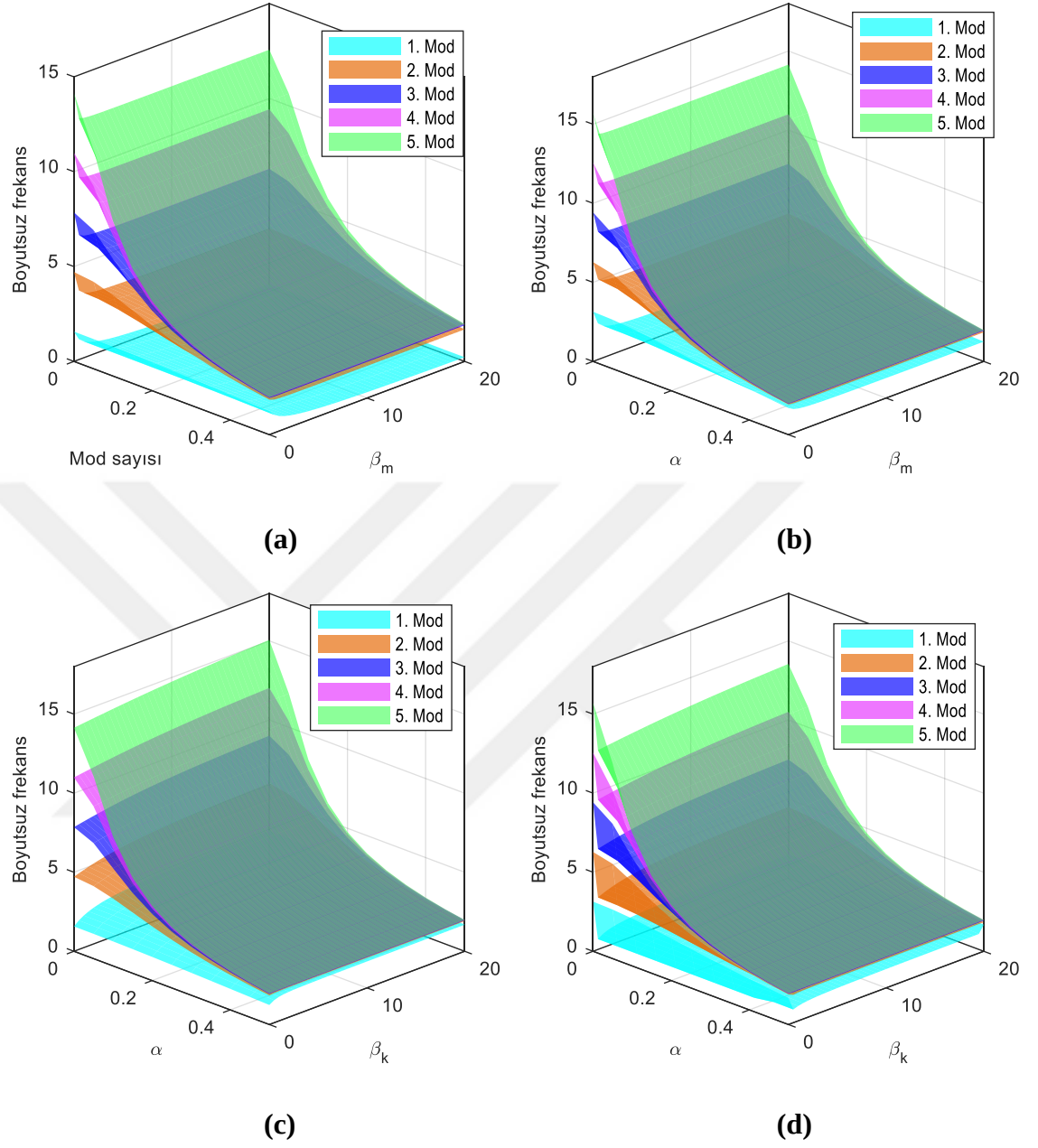


(c)

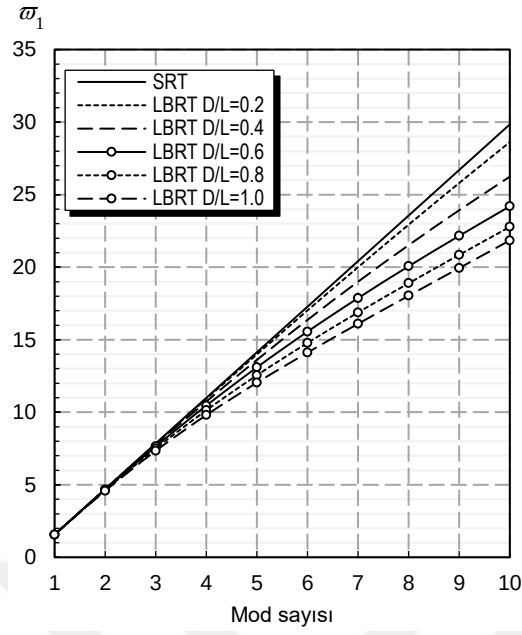


(d)

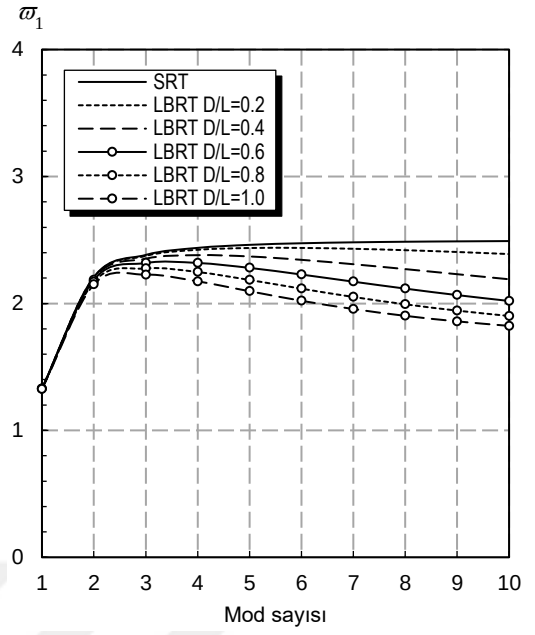
Şekil 4.7. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısı ve eklenti oranı değerlerine göre değişimi **a)** C–M **b)** F–M **c)** C–S **d)** F–S



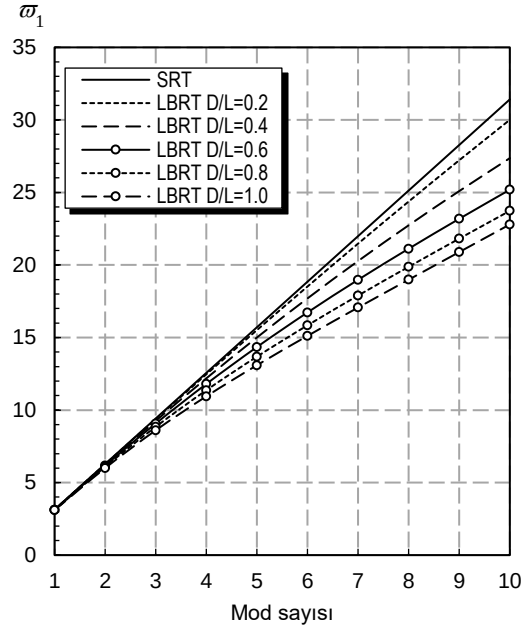
Şekil 4.8. Eklentili nano çubukların farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının boyutsuz atomik parametre ve eklenti oranı değerlerine göre değişimi **a)** C–M **b)** F–M **c)** C–S **d)** F–S



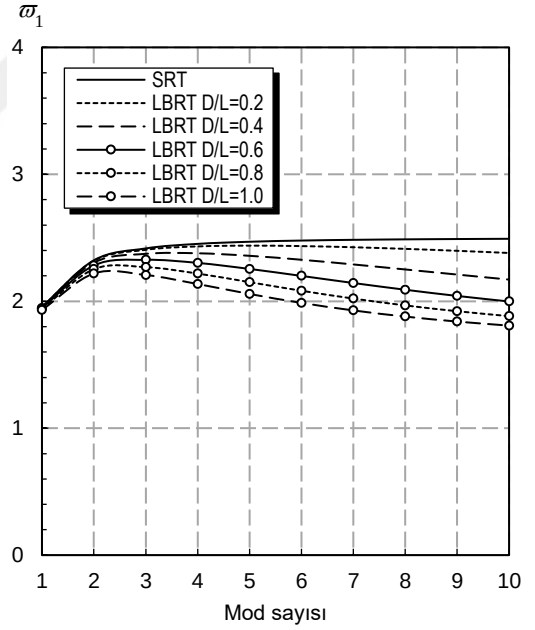
(a)



(b)

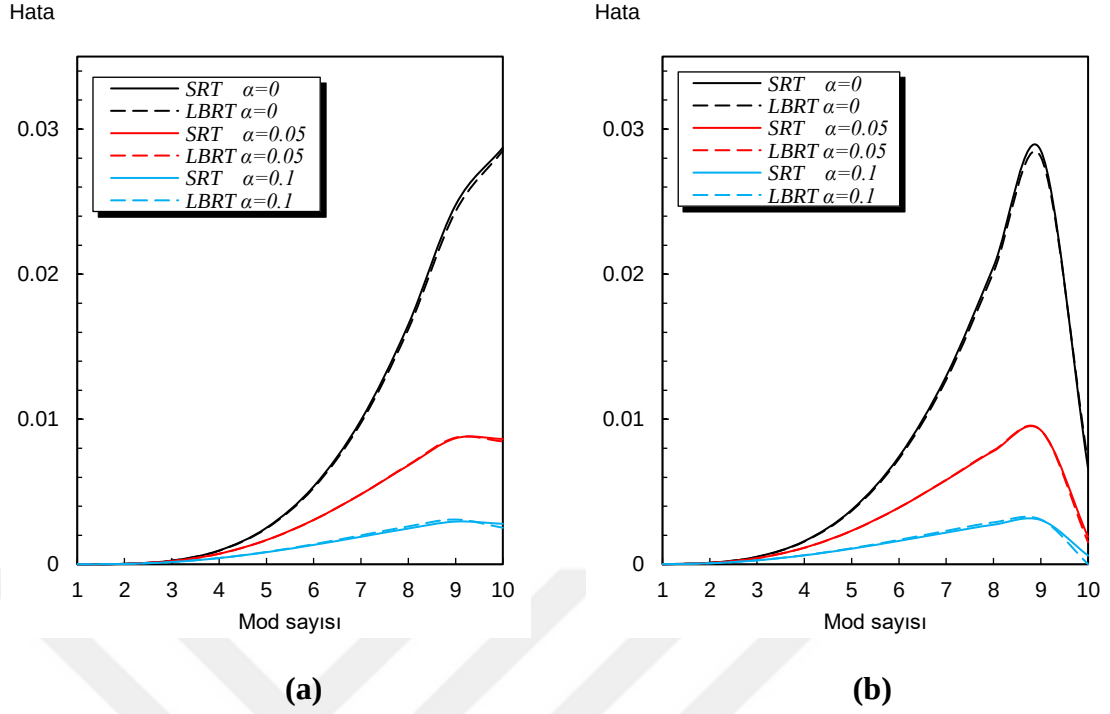


(c)



(d)

Şekil 4.9. Nano çubukların farklı çap/uzunluk oranları için boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimi **a)** C–F, $\alpha = 0$ **b)** C–F, $\alpha = 0.4$ **c)** C–C, $\alpha = 0$ **d)** C–C, $\alpha = 0.4$



Şekil 4.10. Nano çubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için $n = 10$ sonlu elemanla elde edilen boyutsuz frekanslarının analitik yöntemle elde edilen frekanslara göre sapmasının mod sayısına göre değişimi **a) C-F b) C-C**

Şekil 4.8’de farklı tipteki eklentili nano çubukların ilk beş mod boyutsuz frekanslarının yerel olmayan atomik parametre ve eklenti oranına göre değişimlerini gösteren yüzeyler çizilmiştir. Yine öncelikle kütle ekli çubukları tartışacak olursak, Şekil 4.7 ele alınırken bahsettiğimiz eklenti oranının artmasıyla başlayan keskin düşüş mevzusunun mod numarasının artışı ile daha belirgin olduğu gözlemlenmektedir. Tabi atomik parametre artarsa bu durum azalır. Buradan şu yorum yapılabilir: Eklenti oranı düşükse atomik parametre, eklenti oranının yüksek olduğu duruma göre daha çok indirgeme yapar. Ancak bu mevzu mod numarasının yüksek olduğu yüzeylerde daha rahat gözlemlenebilir. Eklenti oranının artışı ile oluşan keskin düşüşün, F–M elemanında C–M’ye göre daha az olduğu söylenebilir. Ek olarak, atomik parametrenin yüksek olduğu bölgeyi ele aldığımızda C–M’nin frekanslarının F–M’ye göre mod numarasının artışı ile daha çok değiştiği görülmektedir. Yay ekli çubuklarda da ilk olarak, C–S çubuğunun mod numarası yükseldikçe eklenti oranının artırıcı etkinliğinin azalmakta olduğu, F–S çubuğunda ise baştaki keskin düşüş miktarının çok etkilenmediği sonucu gözlemlenir. Yalnız, eklenti oranının düşük olduğu bölgede bahsedilen bu değişimler atomik parametrenin artışı ile daha çok azalır.

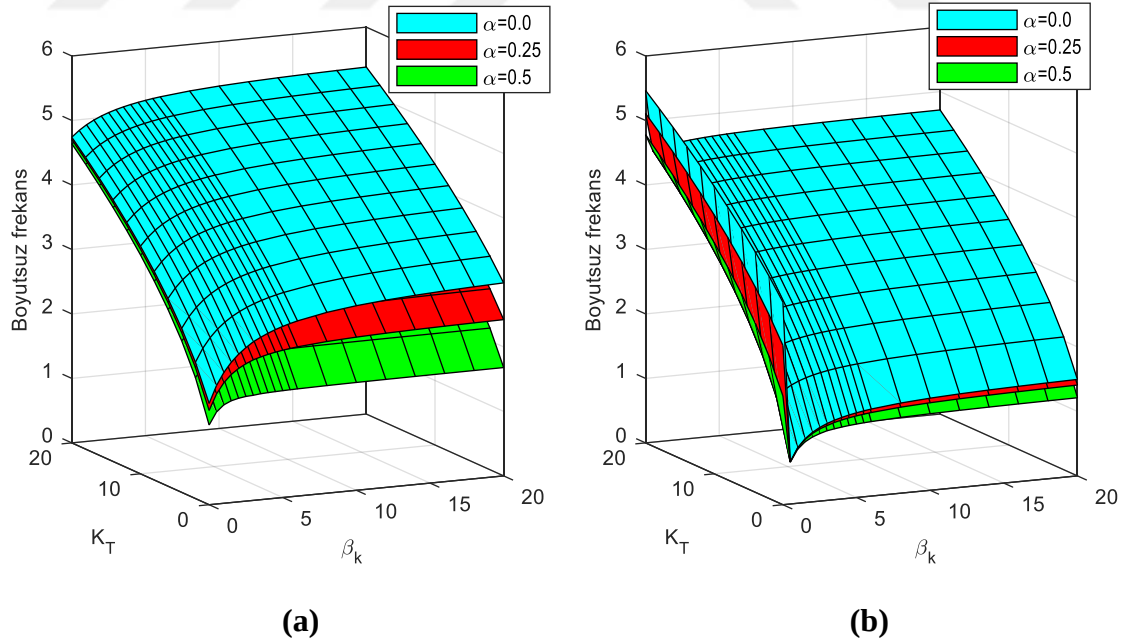
Şimdiye dek hiç konuşmadığımız bir sonuca göre, Şekil 4.1–3 grafiklerinde kullanılan SRT ile LBRT sonuçları arasında fark pek belli olmamaktadır. Bu nedenle Şekil 4.4–8 sonuçları hep SRT kullanılarak sunulmuştur. Tabi Şekil 4.9’da tekrardan bu iki farklı çubuk kuramı için bir karşılaştırma yapılmıştır. Buna göre mod numarasının yükselmesine karşın iki farklı genel bilinen çubuğun farklı çap/uzunluk oranları için boyutsuz frekansların değişimi sunulmuştur. Basit çubuk teorisinde çap/uzunluk oranı boyutsuz frekansları etkilemediğinden sadece düz ve işaretçisiz çizgi ile temsil edilmiştir.

İki çubuk tipinin klasik ve yerel olmayan frekanslarının kendi içinde ayırt edilmesinin zor olacağı düşüncesiyle kılavuz çizgilerinin verilmesi tercih edilmiştir. Sonuçlar ele alındığında, ilk söylenebilecek çıkarım çap/uzunluk oranının boyutsuz titreşim frekanslarını düşürmekte olduğudur. Klasik elastisite açısından, iki tip sınır şartlı çubuk arasındaki frekans farklılığı diğer parametrelerden etkilenmemiştir (Bkz. Şekil 4.9a ve c). Ancak yerel olmayan durumda, iki tip sınır şartlı çubukların özellikle düşük modlardaki frekans farklılığı yüksek modlarda azalmaktadır (Bkz. Şekil 4.9b ve d).

Şekil 4.10’da genel bilinen nano çubukların analitik ve sonlu elemanlarla hesaplanan titreşim frekansları arasındaki sapmanın mod sayısına göre değişimi SRT ve LBRT için mukayese edilmektedir. Hata (veya sapma) miktarı

$$\%Hata = \left| \frac{(NL - FEM Sonucu) - (Analitik Sonuç)}{Analitik Sonuç} \right| \times 100 \quad (4.2)$$

ile hesaplanmaktadır. Tablo sonuçlarda da bahsettiğimiz gibi mod numarası yükseldikçe hatanın arttığı burada da görülmektedir. Hata artışının artan hızda olması dikkat çekmektedir. Ancak grafiklerden elde edilen bir başka sonuca göre atomik parametre, hata miktarını düşürmektedir. Böylece yerel olmayan elastisite problemleri için sonlu elemanlar formülasyonunun kullanımının ciddi bir avantaj sağladığını belirtebiliriz. Bu arada belli bir mod değerinden sonra hata miktarlarının artış hızı düşmekte (C–F) hatta azalmaktadır (C–C). Başka bir sonuç, SRT ve LBRT formülasyonlarının hata miktarları kafa kafaya gitmektedir. Yani ilgili sayısal yöntemin SRT veya LBRT’de kullanımına dair bir avantaj farklılığından söz edemeyiz.



Şekil 4.11. Eklentili nano çubukların farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının boyutsuz elastik ortam parametresi ve eklenti oranı değerlerine göre değişimi **a) C–S b) F–S**

Eksenel çubuklardaki son grafik neticeleri gösteren Şekil 4.11’de yay eklentili eksenel çubukların temel mod boyutsuz frekans parametrelerinin elastik ortam parametresi ve eklenti oranına göre değişimini belirten yüzeyler sunulmaktadır. Daha önce elde ettiğimiz bazı sonuçlara paralel olarak, atomik parametrenin yükselmesi ile düşük eklenti oranları etkisinde frekans değişim hızının azalmakta olduğu iki çubuk tipi için burada da göze çarpmaktadır. Ayrıca, C–S için düşük eklenti oranında elastik ortamın etkisi, yüksek eklenti oranındaki elastik ortamın etkisinden daha fazlayken F–S’de durum tam tersi görünmektedir.

Çizelge 4.24. Uç eklentisiz sınır şartlardaki nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları

	Sınır Şart	Mod Numarası				
		1	2	3	4	5
EBBT	S–S	9.86960	39.47842	88.82644	157.91367	246.74011
	C–F	3.51602	22.03449	61.69721	120.90192	199.85953
	C–S	15.41821	49.96486	104.24770	178.26973	272.03097
	C–C	22.37329	61.67282	120.90339	199.85945	298.55554
	S–G	2.46740	22.20661	61.68503	120.90265	199.85949
	C–G	5.59332	30.22585	74.63888	138.79131	222.68295
TBT	S–S	9.84042	39.01914	86.56234	151.00795	230.59286
	C–F	3.51261	21.85473	60.45815	116.43074	188.33547
	C–S	15.31187	49.03460	100.58325	168.35629	250.52798
	C–C	22.10984	60.02669	115.38248	186.24583	270.77298
	S–G	2.46557	22.05990	60.57722	116.77775	189.02473
	C–G	5.57662	29.86001	72.67317	132.55284	207.76010

Çizelge 4.25. Uç eklentili sınır şartlardaki nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)

	Sınır Şart	Mod Numarası				
		1	2	3	4	5
EBBT	S–MA	0.00000	10.06248	39.67503	89.02422	158.11203
	C–MA	0.75694	15.60235	50.16234	104.44564	178.46819
	S–SA	3.69207	16.08363	50.16682	104.34396	178.32592
	C–SA	5.60164	22.49843	61.86043	120.98487	199.90964
TBT	S–MA	0.00000	10.03272	39.21349	86.75518	151.19791
	C–MA	0.75645	15.49453	49.22849	100.77438	168.54411
	S–SA	3.69097	16.03054	49.53748	101.54494	170.23504
	C–SA	5.59668	22.31878	60.62144	116.51380	188.38573

Buradan itibaren nano kirişlerin yerel olmayan titreşim sonuçlarını ele alacağız. İlk olarak Çizelge 4.24–25’te sırayla eklentisiz ve eklentili nano kirişlerin klasik titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekanslarının Euler–Bernoulli kiriş teorisi (EBBT) ve Timoshenko kiriş teorisi (TBT) için karşılaştırması sunulmuştur. İlk söylememiz gereken sonuca göre, TBT ile elde edilen sonuçlar EBBT ile elde edilen frekans sonuçlarından daha düşüktür çünkü TBT formülasyonu kayma etkilerini hesaba katmaktadır. İki teori ile hesaplanan frekanslar arasındaki fark mod sayısı yükseldikçe artış göstermektedir. Hatta bu farklılık eksenel çubuklardaki gibi oldukça ufak da değildir. Bunlara ek olarak, eksiz çubuklarda en yüksek frekansları her iki ucu ankastre mesnetli kiriş (C–C), en düşük

frekansı bir ucu basit mesnetli ve diğer ucu kılavuz (düşeyde kayıcı ama dönmeyici) mesnetli kiriş (S–G) elemanı vermektedir. EBBT ile TBT arasındaki makas, en fazla C–C en az S–G kirişindedir. Ekli elemanlara bakacak olursak, bir ucu basit mesnetli ve diğer ucu kütle eklentili eleman (S–MA) temel modda titreşim gerçekleştirememiştir. En yüksek frekansları bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu kesme elastik yayı eklentili eleman (C–SA) vermiştir. Bu arada tekrar hatırlatalım, kütle ve yay eklentilerinin dinamik sınır şartı sadece Newton’un ikinci hareket kanununun iç tesirlerde karşılığı olan kesme denklemi üzerinde kurulmuştur. Bunun sonucu ileride ele alınacaktır. Ekli elemanlarda TBT ile çözüm için EBBT’ye göre en fazla frekans azalması olan sınır şart C–SA iken en az azalmanın olduğu şart S–MA’dır.

Çizelge 4.26. Uç eklentisiz sınır şartlardaki nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları

	α	Sınır Şart	Mod Numarası				
			1	2	3	4	5
EBBT	0.25	S–S	7.76184	21.20107	34.70298	47.89750	60.88868
		C–F	3.61803	15.85517	31.81968	44.76669	59.50261
		C–S	11.73758	26.08172	39.91067	53.29322	66.41396
		C–C	16.77871	31.13478	45.44631	58.75227	72.11587
		S–G	2.29666	14.37054	27.99440	41.33233	54.41256
		C–G	5.12088	18.95197	33.07079	46.64642	59.88000
	0.5	S–S	5.30027	11.97438	18.43896	24.82035	31.16433
		C–F	4.08816	8.66282	Hesaplanamadı		
		C–S	7.78370	14.68807	21.25630	27.70082	34.08748
		C–C	10.99137	17.27297	24.33239	30.48457	37.16445
		S–G	1.94046	8.67575	15.22217	21.63615	27.99557
		C–G	4.19468	11.36158	18.02897	24.51296	30.91853
TBT	0.25	S–S	7.73889	20.95442	33.81844	45.80290	56.90398
		C–F	3.61335	15.71014	31.06862	42.95705	55.66084
		C–S	11.66029	25.61973	38.56281	50.42384	61.30362
		C–C	16.58938	30.35746	43.49018	54.95032	65.69535
		S–G	2.29496	14.27560	27.49164	39.92217	51.46276
		C–G	5.10590	18.73451	32.23812	44.62355	55.98337
	0.5	S–S	5.28460	11.83507	17.96897	23.73494	29.12487
		C–F	4.07688	8.60358	Hesaplanamadı		
		C–S	7.73344	14.42774	20.53631	26.20560	31.45960
		C–C	10.86695	16.84304	23.27694	28.50683	33.84206
		S–G	1.93902	8.61843	14.94879	20.89798	26.47788
		C–G	4.18267	11.23174	17.57359	23.44653	28.90165

Çizelge 4.26–27, az önce ele alınan Çizelge 4.24–25’in seçilmiş iki farklı atomik parametre için yerel olmayan elastisitedeki uygulamalarını sunmaktadır. İki çizelge topluca ele alındığında, atomik parametrenin en çok C–C en az S–MA çubuğunu indirgediği görülmektedir. Mod numarası arttıkça frekansların atomik parametre tarafından daha fazla indirgendiyi kirişler için de tespit edilmiştir. İlginç bir sonuç olarak, yerel olmayan parametrenin C–F, C–MA ve C–SA çubuklarının temel mod frekanslarını klasiğe göre yükselttiği görülmüştür. Hatta atomik parametrenin daha yüksek olduğu tabloların ikinci bölmesinde, birinci bölme göre gene bir artış vardır. O halde yerel olmayan elastisitenin genel davranışına zıt bir durum olduğu görülmektedir. Bu durum

ileride yapacağımız bir analizde ayrıca ele alınacaktır. Bir de, Çizelge 4.24–27’de görülen sonuçlar analitik metot (değişkenlere ayırma) tabanlı kod ile elde edilmiştir ancak konsol (C–F) ve C–SA kirişlerinin yerel olmayan durumda bazı frekansları hesaplanamamıştır. Sonlu elemanlar ile bu gibi sorunların üstesinden geldiği de ileride görülecektir.

Çizelge 4.27. Uç eklentili sınır şartlardaki nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için ilk beş mod boyutsuz frekansları ($\beta_m = \beta_k = 5$)

	α	Sınır Şart	Mod Numarası				
			1	2	3	4	5
EBBT	0.25	S–MA	0.00000	7.91334	21.30676	34.78043	47.95783
		C–MA	0.75828	11.85908	26.19110	39.97308	53.35778
		S–SA	3.58067	12.42282	26.32974	40.05615	53.39645
		C–SA	5.63997	16.32883	32.02875	44.89021	59.59927
	0.5	S–MA	5.40360	12.03423	18.48021	24.85167	31.18953
		C–MA	0.76240	7.80760	14.79892	21.23640	27.78549
		S–SA	3.28093	8.57387	15.06280	21.50403	27.88719
		C–SA	5.99424	9.13334	Hesaplanamadı		
TBT	0.25	S–MA	0.00000	7.88969	21.05761	33.89153	45.85728
		C–MA	0.75776	11.78045	25.72534	38.62076	50.48067
		S–SA	3.57930	12.36661	25.91333	38.77163	50.60373
		C–SA	5.63247	16.18123	31.27255	43.07481	55.74956
	0.5	S–MA	5.38729	11.89330	18.00773	23.76304	29.14625
		C–MA	0.76185	7.75719	14.53372	20.51883	26.27842
		S–SA	3.27874	8.52631	14.80755	20.79070	26.39972
		C–SA	5.97327	9.07356	Hesaplanamadı		

Çizelge 4.28. Çift parametrelili elastik zemine oturan sıcaklık etkisi altındaki her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin enine titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite, elastik zemin rijitliği ve sıcaklık parametreleri altında temel mod boyutsuz frekansları

		α	$K_W = 0$		$K_W = 10$		$K_W = 100$	
			$K_P = 0$	$K_P = 10$	$K_P = 0$	$K_P = 10$	$K_P = 0$	$K_P = 10$
$N_T = 0$	EBBT	0.0	9.86960	14.00375	10.36384	14.35636	14.05023	17.20771
		0.1	9.41588	13.68776	9.93271	14.04830	13.73531	16.95154
		0.2	8.35692	12.98207	8.93522	13.36167	13.03220	16.38701
		0.3	7.18238	12.25898	7.84771	12.66028	12.31205	15.82032
		0.4	6.14558	11.68179	6.91145	12.10224	11.73747	15.37739
		0.5	5.30027	11.26006	6.17194	11.69568	11.31781	15.05951
	TBT	0.0	9.84042	13.97782	10.33531	14.33053	14.02431	17.18216
		0.1	9.38804	13.66312	9.90556	14.02375	13.71068	16.92714
		0.2	8.33221	12.96037	8.91126	13.34001	13.01050	16.36516
		0.3	7.16114	12.24040	7.82731	12.64168	12.29347	15.80110
		0.4	6.12741	11.66578	6.89419	12.08616	11.72145	15.36027
		0.5	5.28460	11.24599	6.15725	11.68148	11.30373	15.04393
$N_T = 2.5$	EBBT	0.0	8.52849	13.09317	9.09588	13.46964	13.14287	16.47517
		0.1	7.99905	12.75464	8.60144	13.14081	12.80566	16.20743
		0.2	6.72042	11.99417	7.42725	12.40404	12.04841	15.61602
		0.3	5.18773	11.20752	6.07557	11.64511	11.26555	15.02027
		0.4	3.61858	10.57309	4.80563	11.03586	10.63457	14.55301
		0.5	1.84900	10.10519	3.66317	10.58843	10.16950	14.21671
	TBT	0.0	8.49692	13.06687	9.06545	13.44350	13.11659	16.44963
		0.1	7.96862	12.72967	8.57226	13.11599	12.78070	16.18307
		0.2	6.69249	11.97225	7.40095	12.38223	12.02650	15.59430
		0.3	5.16194	11.18888	6.05230	11.62651	11.24691	15.00128
		0.4	3.59287	10.55718	4.78471	11.01993	10.61867	14.53621
		0.5	1.81400	10.09138	3.64353	10.57453	10.15569	14.20153

Çizelge 4.28’de her iki ucu basit mesnetli nano ölçekli kirişlerin yerel olmayan temel mod boyutsuz frekansları üzerinde elastik zemin ve sıcaklık etkileri ele alınmıştır. Buna göre boyutsuz Winkler ve Pasternak zemin katsayıları boyutsuz frekansları yükseltmekte ancak boyutsuz sıcaklık parametresi frekansları düşürmektedir. Genel olarak, birbirine eşit değerdeki boyutsuz elastik zemin parametrelerinden Pasternak zemin parametresinin etkisi Winkler zemininden daha yüksektir. Atomik parametre, elastik zemin parametrelerinin düşük olduğu durumlarda titreşim frekanslarını daha çok etkilemektedir. Sıcaklık durumunda bu indirgemenin şiddeti daha da yükselmektedir. Ancak, sıcaklık durumunda titreşim analizine bir de elastik zemin dahil olursa indirgemenin şiddeti düşmektedir.

Çizelge 4.29. Uç eklentili sınır koşullara sahip nano kirişlerin klasik eksenel titreşimi için farklı kütle ve rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları

	Sınır Şart	Mod Sayısı	Kütle Oranı β_m ve Rijitlik Oranı β_k				
			0	0.01	0.1	1	10
EBBT	S-MA	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		2	15.41821	15.12576	13.42962	10.71440	9.96779
		3	49.96486	49.04519	44.72176	40.39855	39.57756
	C-MA	1	3.51602	3.44766	2.96784	1.55730	0.54138
		1*	1.87511	1.85679	1.72274	1.24792	0.73579
		1**	–	1.852	1.723	1.248	0.736
		2	22.03449	21.61996	19.35580	16.25009	15.51151
		2*	4.69409	4.64973	4.39952	4.03114	3.93847
		2**	–	4.650	4.399	4.031	3.938
		3	61.69721	60.56997	55.51825	50.89584	50.06435
	S-SA	1	0.00000	0.17319	0.54720	1.71561	4.97881
		2	15.41821	15.41950	15.43119	15.54868	16.77223
		3	49.96486	49.96526	49.96887	50.00496	50.37239
	C-SA	1	3.51602	3.52170	3.57239	4.04011	6.96392
		2	22.03449	22.03540	22.04357	22.12568	22.98024
		3	61.69721	61.69754	61.70046	61.72968	62.02591
TBT	S-MA	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		2	15.36513	15.07463	13.38772	10.68266	9.93832
		3	49.33547	48.43770	44.19497	39.92858	39.11715
	C-MA	1	3.51261	3.44438	2.96533	1.55621	0.54101
		2	21.85473	21.44673	19.21259	16.13695	15.40443
		3	60.45815	59.37533	54.47301	49.94847	49.13228
	S-SA	1	0.00000	0.17319	0.54720	1.71550	4.97592
		2	15.36513	15.36643	15.37811	15.49561	16.71895
		3	49.33547	49.33587	49.33947	49.37558	49.74313
	C-SA	1	3.51261	3.51829	3.56898	4.03661	6.95606
		2	21.85473	21.85564	21.86381	21.94593	22.80079
		3	60.45815	60.45847	60.46139	60.49062	60.78704

* Bir üstündeki satırın karekökü alınmak suretiyle elde edilen değerler

** Rao (2007)'den (*) ile karşılaştırmak suretiyle alınan değerler

Çizelge 4.29'da farklı eklentilere sahip nano kirişlerin klasik titreşiminin ilk üç mod boyutsuz frekansları farklı eklenti oranları için hesaplanmıştır. Eklenti oranı 0 alındığında uç boşta demektir. Sonuçlarda ek olarak, bir ucu tutulu ve diğer ucu kütle eklentili ve EBBT ile modellenmiş kirişlerin ilgili referansla karşılaştırılması yapılmıştır. İlgili referans eklenti oranını kirişlerde de eksenel çubuklarda olduğu gibi bu tezde tanımlananın çarpma işlemine göre tersi olarak almıştır. Ayrıca, ilgili referans boyutsuz frekans parametrelerinin karekökünü sunmuştur. Bu nedenle çizelgenin ilgili bölmesinde mukayesenin yapılabilmesi için gerekli işlem gerçekleştirilmiştir. Tez kapsamında elde edilen sonuçlar ilgili referansla uyumludur. O halde hesaplarımızın doğru olduğu kesindir. Sonuçları genel manada ele alacak olursak, eklenti oranı artışı ile frekansı en hızlı değişen eleman C-SA kirişidir. Tabi bunu ileride grafik sonuçlarda daha iyi göreceğiz. Bunlara ek olarak, mod numarası arttıkça eklenti oranı artışına karşın C-MA hariç tüm elemanların frekans değişim hızı yavaşlamaktadır. EBBT ve TBT ile

hesaplanan frekanslar arasındaki farklılık en çok C-SA elemanında iken en az S-MA elemanındadır.

Çizelge 4.30. Uç eklentili sınır koşullara sahip nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için farklı kütle ve rijitlik oranları altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\bar{l} = 0.25$)

	Sınır Şart	Mod Sayısı	Kütle Oranı β_m ve Rijitlik Oranı β_k				
			0	0.01	0.1	1	10
EBBT	S-MA	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		2	11.73758	11.55965	11.55965	8.42220	7.83901
		3	26.08172	25.76359	25.76359	21.69693	21.25434
	C-MA	1	3.61803	3.54552	3.03668	1.56871	0.54187
		2	15.85517	15.63369	14.30942	12.28825	11.79911
		3	31.81968	31.41709	29.14615	26.60043	26.13677
	S-SA	1	0.00000	0.17318	0.54686	1.70494	4.69551
		2	11.73758	11.73892	11.75103	11.87274	13.10700
		3	26.08172	26.08221	26.08662	26.13082	26.58310
	C-SA	1	3.61803	3.62372	3.67445	4.13935	6.86169
		2	15.85517	15.85609	15.86440	15.94793	16.81898
		3	31.81968	31.82009	31.82383	31.86126	32.24007
TBT	S-MA	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		2	11.68370	11.50795	10.40100	8.39598	7.81570
		3	25.66937	25.36604	23.61776	21.43824	21.00643
	C-MA	1	3.61335	3.54105	3.03346	1.56753	0.54150
		2	15.71014	15.49383	14.19639	12.20467	11.72115
		3	31.06862	30.69379	28.55691	26.12019	25.67289
	S-SA	1	0.00000	0.17318	0.54686	1.70481	4.69201
		2	11.68370	11.68504	11.69710	11.81841	13.04801
		3	25.66937	25.66986	25.67419	25.71765	26.16258
	C-SA	1	3.61335	3.61904	3.66974	4.13433	6.84996
		2	15.71014	15.71105	15.71931	15.80237	16.66878
		3	31.06862	31.06903	31.07267	31.10918	31.47869

Çizelge 4.29’da sunulan analizlerin seçilmiş bir boyutsuz atomik parametre için uygulamaları Çizelge 4.30’da sunulmaktadır. Atomik parametre en çok S-MA en az C-SA kirişini etkilemektedir ancak bu mukayeseler bir bakışta yapılamamaktadır (Yani hızlıca bir yüzdelik hesap yapıldıktan sonra yorumda bulunulabilir). Bunların haricinde yapılabilecek birçok yorum önceki çizelgelere ait benzer analizlerde sunulmuştur.

Nano kirişlerin yerel olmayan titreşimine dair çizelge sonuçlar buradan itibaren sonlu eleman formülasyonu çerçevesinde verilecektir. İlk olarak Çizelge 4.31–32’de sırayla eklentili ve eklentisiz nano kirişlerin klasik titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekans parametreleri, sonlu elemanlar ile hesaplanmış ve listelenmiştir. Öncelikle analitik yöntemle elde edilmiş sonuçlara göre mukayeseler Çizelge 4.24 ve 4.29’a bakılarak gerçekleştirilecektir. Genel netice, sonuçların ciddi şekilde uyumlu olduğudur. Özellikle 100 sonlu elemanla yapılmış analizler, ihmal edilebilecek mertebede hata ile sonuç vermiştir (Hatanın yüz binde birler mertebesinde olduğuna dayanarak bu çıkarımı yapıyoruz). Sonuçlar EBBT’de tam anlamı ile uygunken TBT’de 100 elemanın kullanımı

sonuçları analitik neticelerin altına düşürmektedir. Dolayısı ile TBT’de sonlu eleman kullanımında biraz daha dikkatli olunmalıdır. Açıkçası sonlu elemanlar metodu eksenel çubuklara göre kirişlerde daha başarılı sonuçlar vermiştir ve “bu mesnetlenme tarzındaki kirişte hata en yüksekken şu mesnetlenme tarzında en düşüktür” diye cümle kurmak yersiz olacaktır.

Çizelge 4.31. Çeşitli sınır koşullara sahip nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması

Sınır Şart	Mod Sayısı	EBBT			TBT		
		$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$	$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$
S-S	1	9.86960	9.86967	10.95445	9.84039	9.84046	10.92160
	2	39.47842	39.48264	50.19960	39.01712	39.02129	49.57626
	3	88.82644	88.87390	–	86.54088	86.58707	–
C-F	1	3.51602	3.51602	3.53273	3.51110	3.51110	3.52763
	2	22.03449	22.03522	34.80689	21.82228	21.82299	34.20684
	3	61.69722	61.71292	–	60.30880	60.32361	–
C-S	1	15.41821	15.41846	20.49390	15.36500	15.36526	20.40801
	2	49.96486	49.97342	–	49.33139	49.33984	–
	3	104.24770	104.32431	–	101.41415	101.48855	–
C-C	1	22.37329	22.37406	–	22.29081	22.29158	–
	2	61.67282	61.68890	–	60.83426	60.85011	–
	3	120.90340	121.02272	–	117.45341	117.56904	–
S-G	1	2.46740	2.46740	2.47714	2.46557	2.46557	2.47530
	2	22.20661	22.20737	27.53491	22.05953	22.06028	27.34152
	3	61.68503	61.70104	–	60.56975	60.58547	–
C-G	1	5.59332	5.59333	5.68399	5.58815	5.58816	5.67846
	2	30.22585	30.22775	–	30.00317	30.00506	–
	3	74.63889	74.66723	–	73.19762	73.22539	–

Çizelge 4.32. Uç eklentisine sahip nano kirişlerin klasik enine titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması ($\beta_m = \beta_k = 10$)

Sınır Şart	Mod Sayısı	EBBT			TBT		
		$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$	$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$
S-MA	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	9.96779	9.96786	11.06654	9.93769	9.93776	11.03267
	3	39.57757	39.58180	50.34499	39.11281	39.11699	49.71625
C-MA	1	0.54137	0.54138	0.54138	0.54136	0.54136	0.54136
	2	15.51151	15.51177	20.64828	15.45700	15.45725	20.55995
	3	50.06435	50.07292	–	49.42674	49.43520	–
S-SA	1	4.97881	4.97882	5.06071	4.97509	4.97510	5.05692
	2	16.77223	16.77255	18.84083	16.63757	16.63789	18.67770
	3	50.37239	50.38096	70.63577	49.32243	49.33055	68.53877
C-SA	1	6.96392	6.96395	7.11755	6.95647	6.95650	7.10892
	2	22.98024	22.98107	35.96304	22.75693	22.75773	35.33488
	3	62.02591	62.04187	–	60.62581	60.64085	–

Çizelge 4.33. Çeşitli sınır koşullara sahip nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için farklı ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması ($\alpha = 0.25$)

Sınır Şart	Mod Sayısı	EBBT			TBT		
		$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$	$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$
S-S	1	7.76184	7.76190	8.59338	7.73887	7.73892	8.56563
	2	21.20107	21.20332	26.36612	20.95334	20.95553	25.93957
	3	34.70299	34.72122	–	33.81006	33.82705	–
C-F	1	3.08936	3.08937	3.09467	3.08538	3.08538	3.09062
	2	12.78014	12.78039	16.62335	12.70281	12.70305	16.48107
	3	26.65129	26.65667	–	26.20795	26.21310	–
C-S	1	11.73758	11.73780	14.96663	11.68359	11.68381	14.87077
	2	26.08172	26.08696	–	25.66687	25.67190	–
	3	39.91068	39.94423	–	38.61657	38.64722	–
C-C	1	16.77871	16.77952	–	16.65549	16.65630	–
	2	31.13478	31.14587	–	30.47571	30.48619	–
	3	45.44631	45.50591	–	43.61165	43.66479	–
S-G	1	2.29666	2.29666	2.30567	2.29496	2.46557	2.30395
	2	14.37054	14.37102	17.51072	14.27536	22.05953	17.36129
	3	27.99440	28.00158	–	27.48825	60.56975	–
C-G	1	5.12088	5.12089	5.18459	5.11436	5.11437	5.17778
	2	18.95197	18.95336	–	18.77127	18.77264	–
	3	33.07079	33.08538	–	32.29118	32.30487	–

Çizelge 4.34. Uç eklentisine sahip nano kirişlerin yerel olmayan enine titreşimi için farklı ilk üç mod boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması ($\alpha = 0.25$, $\beta_m = \beta_k = 10$)

Sınır Şart	Mod Sayısı	EBBT			TBT		
		$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$	$n = 100$	$n = 10$	$n = 1$
S-MA	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	7.80905	7.80910	8.64685	7.78565	7.78570	8.61859
	3	21.21619	21.21844	26.38684	20.96793	20.97012	25.95930
C-MA	1	0.53940	0.53940	0.54138	0.53938	0.53938	0.53938
	2	11.76408	11.76430	20.64828	11.70961	11.70983	14.91126
	3	26.09523	26.10047	–	38.61955	38.65021	–
S-SA	1	4.63247	4.63248	4.70715	4.62912	4.62913	4.70379
	2	10.13413	10.13421	11.11839	10.08702	10.08710	11.06141
	3	21.89465	21.89697	27.29671	21.62062	21.62287	26.82193
C-SA	1	6.27665	6.27667	6.34267	6.26944	6.26945	6.33496
	2	13.07560	13.07584	16.88388	12.99474	12.99498	16.73782
	3	26.68611	26.69147	–	26.24201	26.24716	–

Çizelge 4.33–34’te, Çizelge 4.31–32’de yapılmış olan analizlerin seçilmiş bir boyutsuz atomik parametre için uygulaması gerçekleştirilmiştir. Analitik yöntemle göre mukayeseler için Çizelge 4.24 ve 4.30’a bakılmalıdır. Eksenel çubukların ardından kirişlerin yerel olmayan titreşim probleminde de sonlu elemanlar formülasyonunun başarılı olduğu söylenebilir. Dahası, atomik parametrenin düşmesi ile hata miktarının düştüğü anlaşılmaktadır. Boyutsuz atomik parametrenin etkisi ile ilgili söylenebilecek çıkarımlar analitik neticelere ait çizelgeler sunulurken zaten verilmiştir.

Çizelge 4.35. Her iki ucu basit mesnetli kirişlerin enine titreşimi için farklı yerel olmayan ifade değerleri altında temel mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

L/D	$(e_0a)^2$	EBBT				TBT			
		Reddy (2007)	Pradhan (2012)	Bu Tez Analitik	Bu Tez $n = 100$	Reddy (2007)	Pradhan (2012)	Bu Tez Analitik	Bu Tez $n = 100$
100	0.0	9.8696	9.8696	9.86960	9.86960	9.8693	9.8679	9.86835	9.86835
	0.5	9.6347	9.6347	9.63474	9.63474	9.6335	9.6331	9.63352	9.63352
	1.0	9.4159	9.4159	9.41588	9.41588	9.4147	9.4143	9.41468	9.41468
	1.5	9.2113	9.2113	9.21129	9.21129	9.2101	9.2097	9.21012	9.21012
	2.0	9.0195	9.0195	9.01948	9.01948	9.0183	9.0180	9.01834	9.01834
	2.5	8.8392	8.8392	8.83918	8.83918	8.8380	8.8377	8.83805	8.83805
20	0.0	9.8696	9.8696	9.86960	9.86960	9.8381	9.8480	9.83844	9.83840
	0.5	9.6347	9.6347	9.63474	9.63474	9.6040	9.5942	9.60431	9.60428
	1.0	9.4159	9.4159	9.41588	9.41588	9.3858	9.3762	9.38615	9.38611
	1.5	9.2113	9.2113	9.21129	9.21129	9.1819	9.1725	9.18220	9.18217
	2.0	9.0195	9.0195	9.01948	9.01948	8.9907	8.9815	8.99100	8.99096
	2.5	8.8392	8.8392	8.83918	8.83918	8.8110	8.8020	8.81126	8.81123
10	0.0	9.8696	9.8696	9.86960	9.86960	9.7454	9.7056	9.74708	9.74653
	0.5	9.6347	9.6347	9.63474	9.63474	9.5135	9.4747	9.51513	9.51459
	1.0	9.4159	9.4159	9.41588	9.41588	9.2973	9.2595	9.29899	9.29847
	1.5	9.2113	9.2113	9.21129	9.21129	9.0953	9.0584	9.09694	9.09643
	2.0	9.0195	9.0195	9.01948	9.01948	8.9059	8.8696	8.90751	8.90701
	2.5	8.8392	8.8392	8.83918	8.83918	8.7279	8.6925	8.72944	8.72895

Çizelge 4.36. Çift parametrelili elastik zemine oturan her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin enine titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve elastik zemin rijitliği altında ilk beş mod boyutsuz frekanslarının referans çalışma ile karşılaştırılması

K_W	K_P	Mod Sayısı	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.1$	
			Togun ve Bağdatlı (2016)	Bu Tez ($n = 100$)	Togun ve Bağdatlı (2016)	Bu Tez ($n = 100$)
10	0	1	10.3638	10.36384	9.93271	9.93271
		2	39.6049	39.60487	33.5769	33.57692
		3	88.8827	88.88272	64.7187	64.71872
		4	157.945	157.94536	98.38	98.38006
		5	246.76	246.76048	132.544	132.54445
	50	1	24.513	24.51304	24.3339	24.33391
		2	59.5186	59.51862	55.6896	55.68959
		3	111.092	111.09212	92.8969	92.89691
		4	181.225	181.22478	132.568	132.56818
		5	270.606	270.60624	172.931	172.93075
100	0	1	14.0502	14.05023	13.7353	13.73531
		2	40.7252	40.72524	34.8914	34.89140
		3	89.3876	89.38757	65.4103	65.41034
		4	158.23	158.23001	98.8364	98.83641
		5	246.943	246.94277	132.883	132.88352
	50	1	26.2848	26.28477	26.1178	26.11779
		2	60.2699	60.26995	56.4919	56.49186
		3	111.496	111.49645	93.3801	93.38006
		4	181.473	181.47292	132.907	132.90719
		5	270.772	270.77249	173.191	173.19077

Çizelge 4.37. Çift parametrelili elastik zemine oturan her iki ucu ankastre mesnetli nano kirişlerin enine titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan elastisite ve elastik zemin rijitliği altında ilk beş mod boyutsuz frekanslarının referans çalışma ile karşılaştırılması

K_W	K_P	Mod Sayısı	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.1$	
			Togun ve Bağdatlı (2016)	Bu Tez ($n = 100$)	Togun ve Bağdatlı (2016)	Bu Tez ($n = 100$)
10	0	1	22.5957	22.59566	21.3446	21.34459
		2	61.7538	61.75384	51.0811	51.08115
		3	120.945	120.94475	85.7747	85.77475
		4	199.884	199.88452	121.389	121.38908
		5	298.572	298.57247	156.772	156.77244
	50	1	33.3266	33.32663	34.9378	34.93780
		2	78.0638	78.06375	74.1135	74.11351
		3	139.862	139.86172	116.255	116.25457
		4	220.285	220.28529	158.885	158.88511
		5	319.907	319.90676	201.157	201.15709
100	0	1	24.5064	24.50641	23.3579	23.35790
		2	62.4783	62.47829	51.9546	51.95463
		3	121.316	121.31625	86.2978	86.29779
		4	200.109	200.10952	121.759	121.75923
		5	298.723	298.72315	157.059	157.05922
	50	1	34.6506	34.65060	36.2029	36.20290
		2	78.6381	78.63809	74.7178	74.71822
		3	140.183	140.18309	116.641	116.64101
		4	220.489	220.48948	159.168	159.16808
		5	320.047	320.04740	201.381	201.38068

Çizelge 4.35’te her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı yerel olmayan uzunluk değerleri altında temel mod boyutsuz frekansları elemanın uzunluk/kesit yüksekliği oranı etkisinde hesaplanmıştır ve ilgili referanslarla karşılaştırılmıştır. Öncelikle, Reddy (2007) yapmış olduğu çalışmada boyutsuz frekansları analitik olarak hesaplamıştır. Dolayısı ile ana referans budur. Pradhan (2012) ise sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır. Sonuçların değerlendirilmesine gelince, ilgili oran parametresi EBBT’de frekansları etkilemez. Karşılaştırmalı sonuçlar ise birebir aynıdır. TBT açısından, ilgili oran parametresi azaldıkça frekansların da düştüğü görülmektedir. Oran parametresinin yüksek olduğu durumda yerel olmayan uzunluk daha çok indirgeme yapar. Ancak vurgulamak istediğimiz asıl sonuç şudur: Tez kapsamında yapılan sonlu eleman analizine ilişkin sonuçlar, Reddy (2007) ile mukayese bakımından, Pradhan (2012) tarafından yapılmış sonlu eleman analizlerine kıyasla açıkçası çok daha iyi sonuçlar vermiştir. Bunun kullanılan sonlu eleman sayısı ile hiçbir alakası yoktur. İlgili yazar, çalışmasında sonlu eleman formülasyonunu başka bir mantığa göre oluşturmuştur. Doğrusu, kullanılan mantık fazla da açık değildir. Ancak bu tez çalışmasında metodoloji (Ortalama ağırlıklı kalıntı veya yaygın adı ile Galerkin sonlu elemanlar formülasyonu) soru işaretine mahal vermeyecek şekilde kurgulanmıştır. Yalnız, oran parametresi arttıkça tezin hesapladığı değerlerin sapması Reddy (2007)’ye göre artmaktadır. Tabi yerel olmayan uzunluk arttıkça sapmanın azaldığını da belirtelim.

Çift parametrelili elastik zemine gömülü nano ölçekli kirişlerin farklı boyutsuz elastik zemin parametreleri etkisinde ilk beş mod boyutsuz frekanslarının Togun ve

Bağdatlı (2016) ile karşılaştırılması Çizelge 4.36’da S–S, Çizelge 4.37’de C–C kirişleri için sunulmuştur. Sonlu elemanlar açısından söylenebilecek fazla bir şey yoktur. Sonuçlar her iki çizelgede de ciddi bir uyum içerisindedir.

Çizelge 4.38. Çift parametrelili elastik zemine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki çeşitli sınır koşullara sahip nano kirişlerin enine titreşimi için ilk üç mod boyutsuz frekansları ($K_W = 100$, $K_P = 10$, $N_T = 2.5$, $\beta_m = \beta_k = 10$, $n = 100$ el.)

Sınır Şart	Mod Sayısı	$\alpha = 0$		$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.5$	
		EBBT	TBT	EBBT	TBT	EBBT	TBT
S–S	1	16.47517	16.44948	15.30582	15.28150	14.21671	14.19335
	2	44.21124	43.77197	29.07874	28.79700	23.22658	23.00426
	3	93.03943	90.80204	44.39027	43.34598	33.25949	32.48420
C–F	1	11.93974	11.93562	11.82116	11.81618	11.51326	11.50854
	2	28.69888	28.48591	20.42152	20.33232	17.26982	17.20503
	3	66.97304	65.58680	35.14694	34.63580	27.57141	27.15961
C–S	1	20.58018	20.54143	18.78757	18.73244	17.22321	17.15951
	2	54.01899	53.42778	34.43773	33.96240	27.33979	26.94003
	3	108.04068	105.28425	50.41021	48.89154	37.78339	36.61601
C–C	1	26.31398	26.25965	23.79734	23.66771	21.68465	21.51519
	2	65.17945	64.40672	40.16962	39.40827	31.39224	30.75292
	3	124.33498	120.99388	56.87531	54.71544	42.78432	41.06471
S–G	1	11.16215	11.15965	11.12565	11.12308	11.05762	11.05489
	2	27.56235	27.42710	21.74999	21.64513	18.48832	18.39965
	3	66.08843	65.00726	36.69229	36.10640	28.18425	27.73928
C–G	1	12.40908	12.40750	12.56296	12.55814	12.79748	12.78685
	2	34.62367	34.42851	26.45901	26.25842	22.28129	22.09212
	3	78.52294	77.14045	42.45062	41.54358	32.59464	31.86976
S–MA	1	1.80015	1.80186	2.00735	2.00871	2.44199	2.44292
	2	16.54154	16.51511	15.33700	15.31230	14.22709	14.20358
	3	44.31137	43.86858	29.09494	28.81258	23.23003	23.00757
C–MA	1	1.81859	1.82053	2.05985	2.06158	2.59565	2.59729
	2	20.66395	20.62402	18.81491	18.75925	17.22456	17.16083
	3	54.12127	53.52583	34.45236	33.97632	27.34938	26.94909
S–SA	1	11.97440	11.97068	11.79198	11.78844	11.35096	11.34849
	2	24.04069	23.89744	17.87456	17.81865	14.76108	14.73196
	3	56.30452	55.24006	29.95096	29.63583	23.32136	23.09558
C–SA	1	13.16569	13.16119	12.94725	12.94081	12.29009	12.28406
	2	29.43065	29.21087	20.65189	20.56001	17.27568	17.21082
	3	67.28476	65.88871	35.17492	34.66314	27.57866	27.16672

Çizelge 4.38’de bütün dış etmenler (elastik zemin ve sıcaklık) etkisindeki nano kirişlerin ilk üç mod boyutsuz frekansları sadece sonlu elemanlarla sunulmuştur çünkü S–S dışında diğer şartların el çözümü mümkün değildir. Ek olarak, mod şekli ve sınır şartlar programlanmak suretiyle eksenel çubuklarda bahsedilen kullanıcı tanımlı başlangıç–aralık–sınır değerler altında frekanslar sıralı olarak aratılabilir. Bu tip kodlarda hem EBBT hem de TBT, nonlokalite dahil belli bir randıman gösterir (Yüksek atomik parametreler yüzünden randıman bozulur). Hatırlanacak olursa TBT’nin eksenel çubuklarda benzeşiği olan LBRT için yazılan kod koşturulamıyordu. Ancak, işin içine

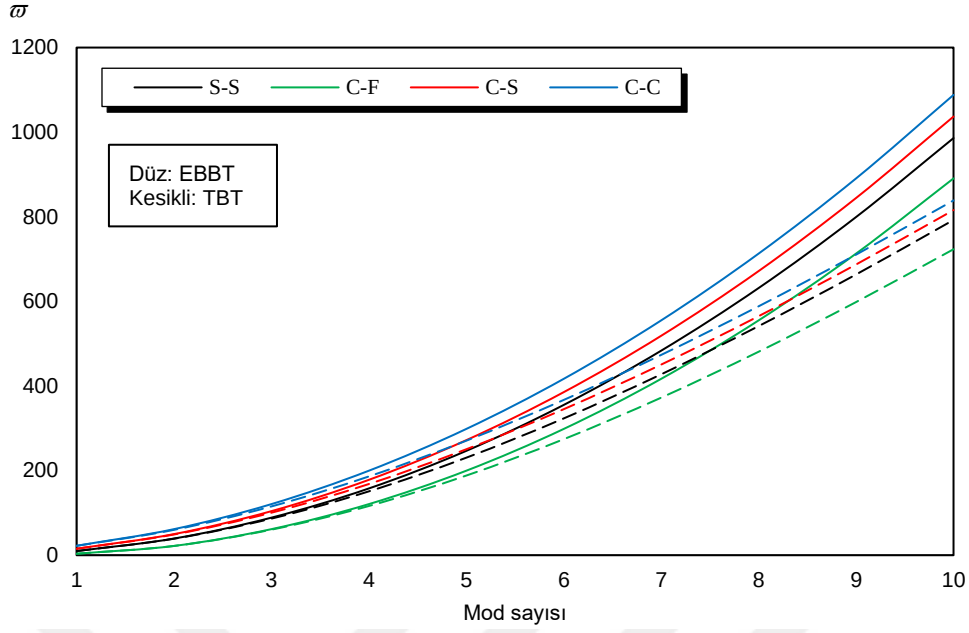
herhangi bir dış ortam parametresi girdiğinde sadece S–S elle çözülebilir, diğer elemanlar içinse yazılan kodlar hiç çalışmaz. İşte bu noktada sonlu elemanlar metodu işe yarar özellik göstermektedir ve şuan üzerinde durduğumuz analizin sonuçlarını yazılan kodlarda bir sıkıntı çıkarmadan hesaplayabilmiştir. Açıkçası bu sonuçlar hakkında tartışma yapılabilecek çok bir durum görülmektedir. Genel hususlardan bahsedilecek olursa, elastik zemin parametresi frekansları yükseltirken ortam sıcaklığı frekansları düşürmüştür. Bir de tablonun bazı bölmelerinde atomik parametrenin temel mod frekanslarını yükselttiği gözlemlenmektedir. Bu yerel olmayan elastisitenin temel davranışıyla çelişkili bir durum değil, dış ortam parametrelerinin şiddetinden dolayıdır. Bu arada, S–S için yakınsaklık mukayesesi Çizelge 4.28’e bakılarak yapılabilir. Tüm parametrelerin etkisi niceliksel olarak araştırılmak istenirse Çizelge 4.24, 4.26, 4.29 ve 4.30’a bakılabilir.

Çizelge 4.39. Yerel olmayan titreşim analizi sonuçlarının klasik titreşimle çelişkili olduğu sınır şartlar için ilk beş mod boyutsuz frekanslarının kendine–eş yerel olmayan model ve yerel olmayan sonlu elemanlar ile karşılaştırılması

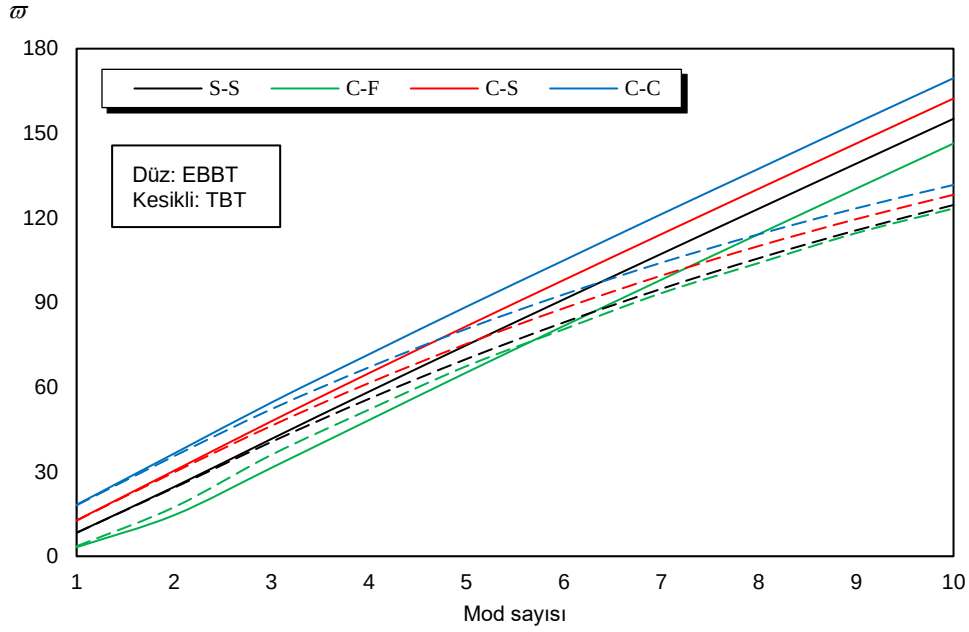
Sınır Şart	α	Formülasyon	Mod Numarası				
			1	2	3	4	5
C–F	0	CET	3.51602	22.03449	61.69721	120.90192	199.85953
	0.1	NSA	3.53128	20.67960	51.06382	85.68971	121.36150
		SA	3.43681	19.13637	46.49355	78.21310	111.81281
		FEM	3.43681	19.13637	46.49355	78.21310	111.81284
C–MA ($\beta_m = 10$)	0	CET	0.75694	15.60235	50.16234	104.44564	178.46819
	0.1	NSA	0.75715	14.77106	41.95996	74.99212	109.71506
		SA	0.54106	14.67350	41.84966	74.88548	109.61585
		FEM	0.54106	14.67350	41.84966	74.88549	109.61588
C–SA ($\beta_k = 10$)	0	CET	6.96392	22.98024	62.02591	121.06830	199.95989
	0.1	NSA	6.94574	21.62577	51.39898	85.86639	121.47503
		SA	6.84257	19.91151	46.67561	78.26685	111.83124
		FEM	6.84257	19.91151	46.67561	78.26685	111.83127

Çizelge 4.39’da, paradokslu sonuçlara sahip nano kirişlerin titreşim analizleri ayrı olarak ele alınmıştır. Paradoksu hatırlatmak adına klasik elastisite (CET) ve Eringen’in diferansiyel yasasına dayanan yerel olmayan elastisite ya da diğer tabirle kendine–eş olmayan model (NSA) sonuçları seçilmiş bir boyutsuz atomik parametre için verilmiştir. Bunların yanı sıra, aynı boyutsuz atomik parametre için titreşim analizleri Challamel vd. (2014) tarafından çalışılan kendine–eş (SA) yerel olmayan modelin bu tezde kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Hepsine ek olarak, tezin de konusunu yansıtmaması bakımından 100 eleman kullanılarak elde edilen yerel olmayan sonlu eleman sonuçları sunulmuştur. Açıkçası bu sefer resmen sayılar konuşmaktadır. Paradoksu düzelten kendine–eş model ile sonlu eleman sonuçları mükemmel bir uyuma sahiptir. Böylece sonlu elemanların yerel olmayan titreşim problemindeki başarısı bir kez daha gösterilmiştir. Ele alınan kiriş tiplerinde ilk dört mod SA ve FEM için bire bir aynı iken beşinci modda az da olsa farklılaşmalar bulunmaktadır.

Buradan itibaren nano kirişlerin küçük ölçek etkili serbest titreşim analizleri için grafiksel sonuçların üzerinde durulacaktır.



(a)

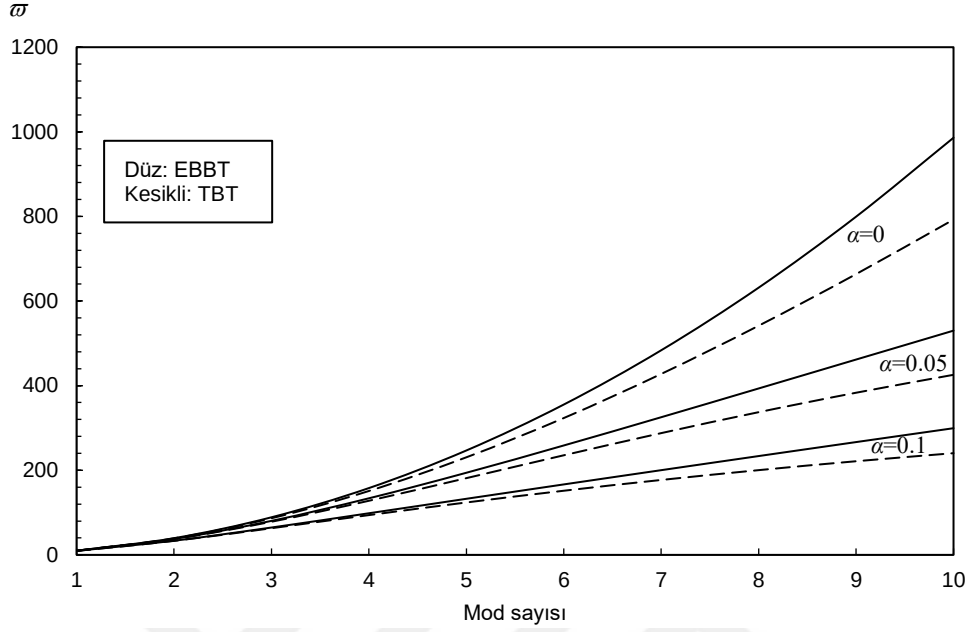


(b)

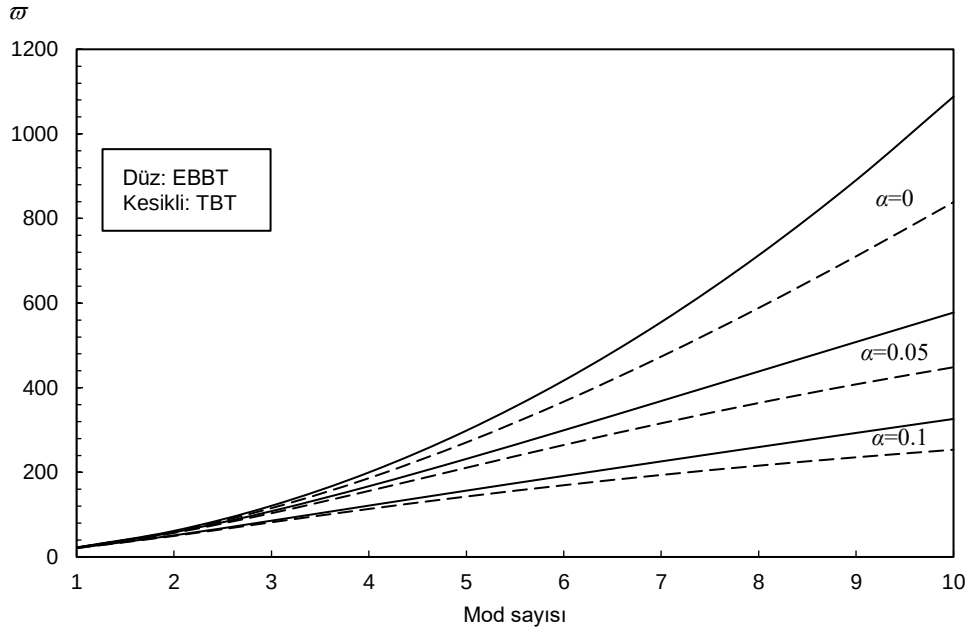
Şekil 4.12. Nano kirişlerin boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi
a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0.2$

Şekil 4.12’de eklentisiz nano ölçekli kirişlerin mod sayısının artışına karşın boyutsuz frekanslarının değişimi çizdirilmiştir. Tablolarda elde ettiğimiz sonuçlara paralel olarak, mod numarası arttıkça EBBT ve TBT ile hesaplanan boyutsuz frekanslar arasındaki farkın açıldığı görülmektedir. Sınır şartlar bazında, bu farkın en çok C–C en az C–F kirişinde olduğu görülmektedir. Atomik parametre ile yapılan analizlerde (Şekil

4.12b) de mod sayısının artışı ile en çok ve en az frekans farklılığı yine C-C ve C-F kirişlerindedir.

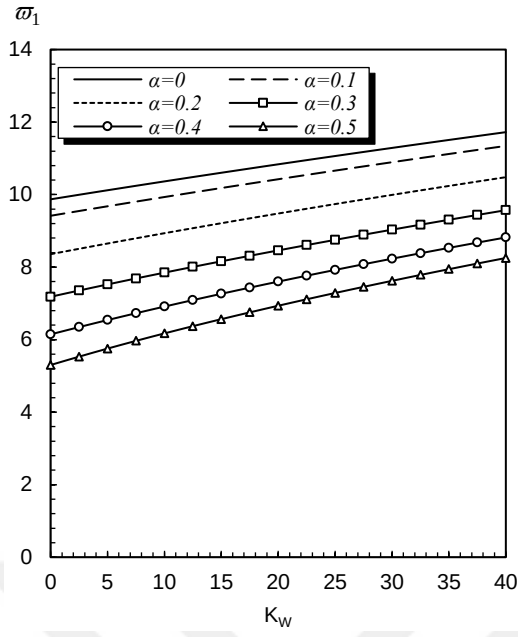


(a)

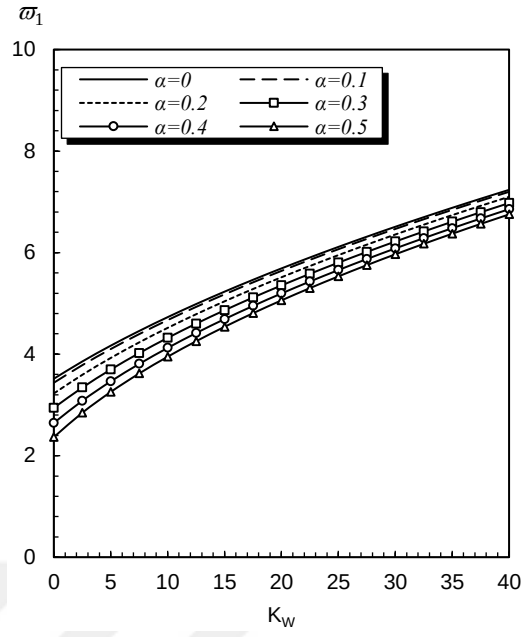


(b)

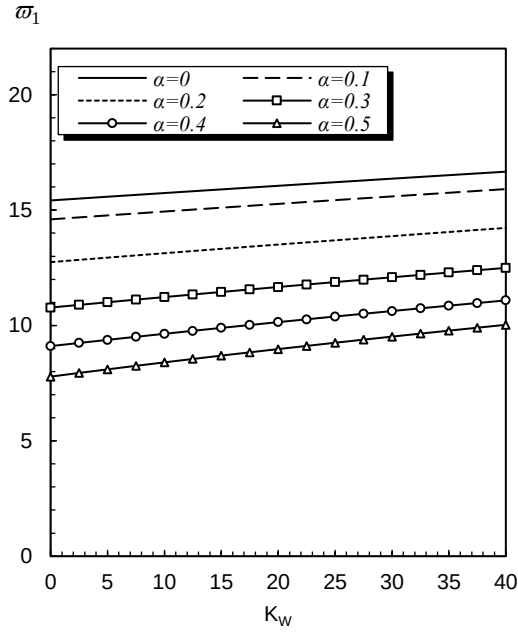
Şekil 4.13. Nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi **a)** S-S **b)** C-C



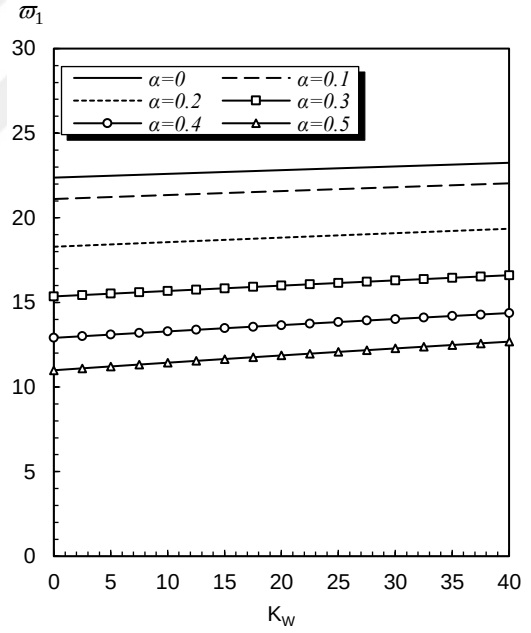
(a)



(b)

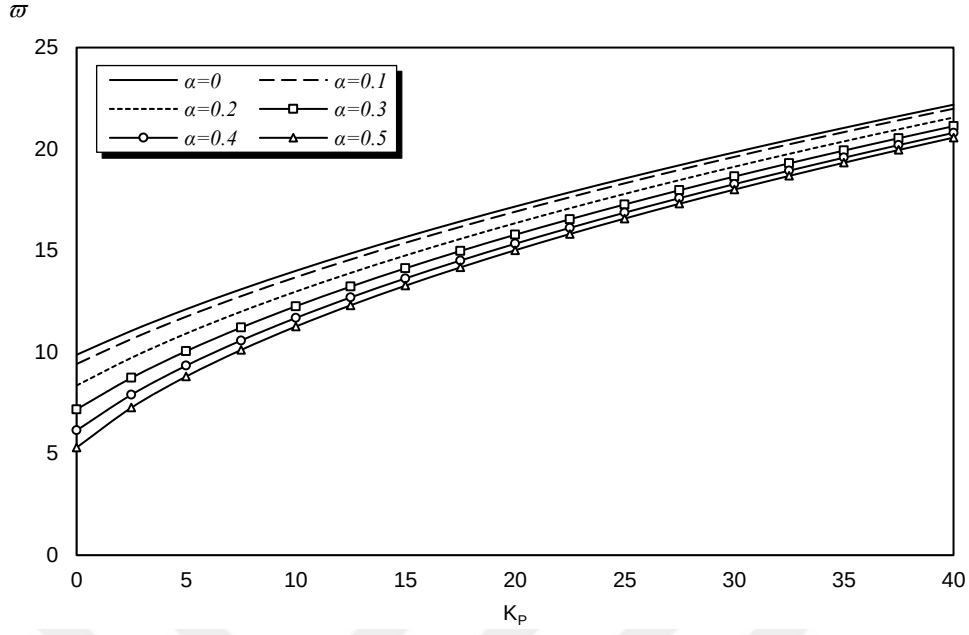


(c)

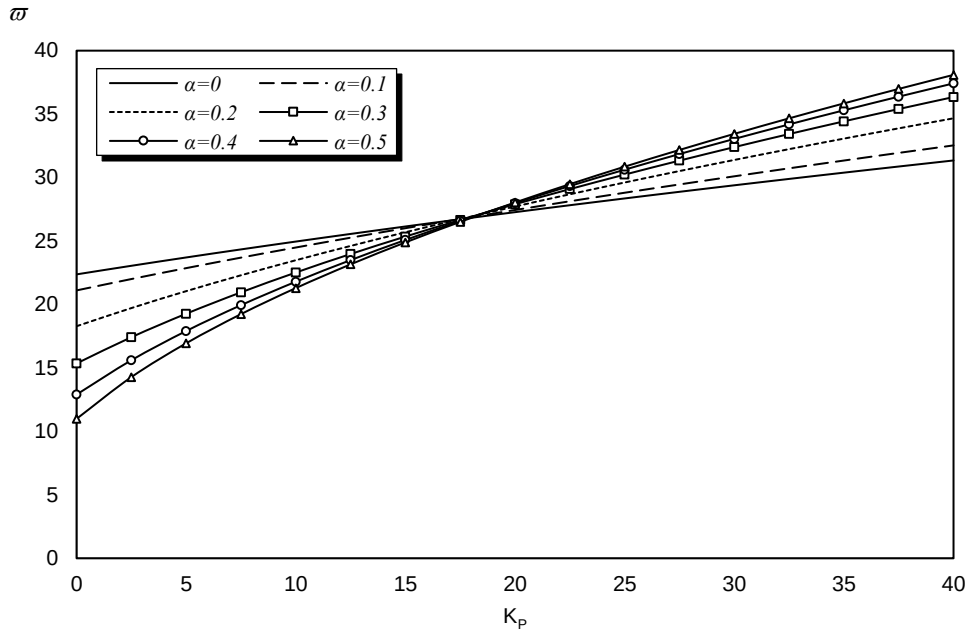


(d)

Şekil 4.14. Nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Winkler zemin parametresine göre değişimi **a)** S-S **b)** C-F **c)** C-S **d)** C-C

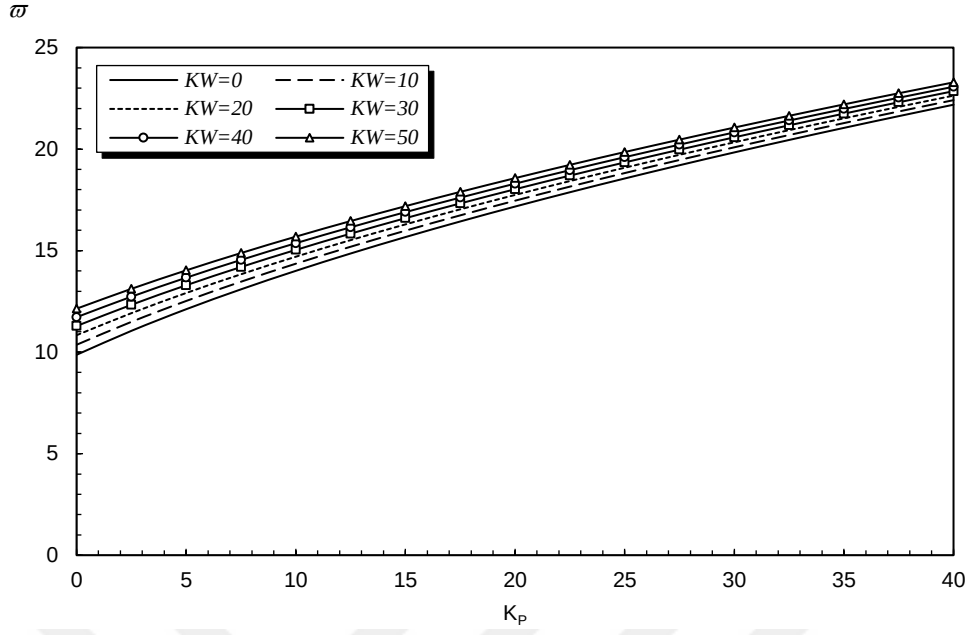


(a)

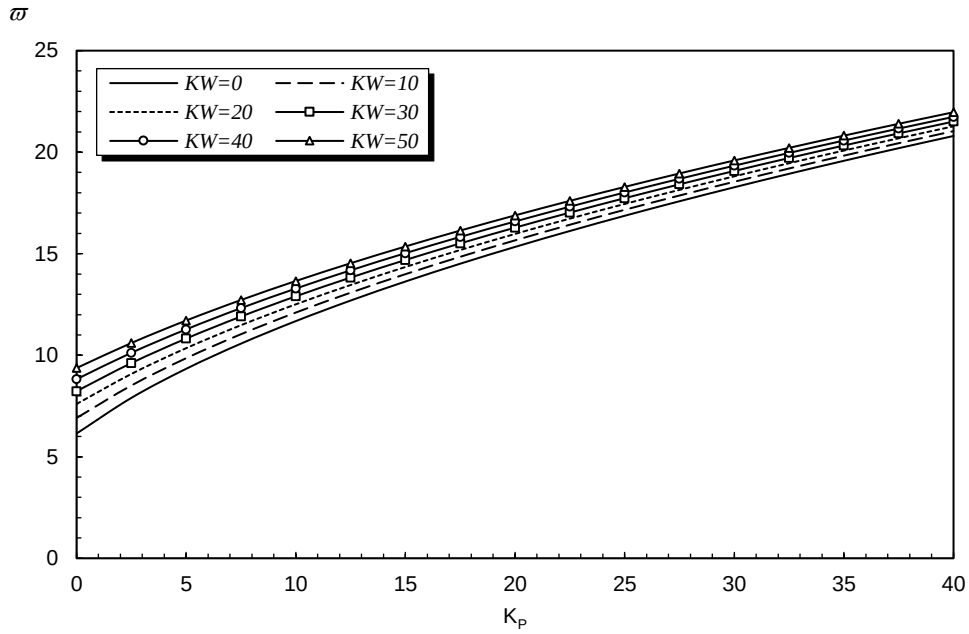


(b)

Şekil 4.15. Nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Pasternak zemin parametresine göre değişimi a) S-S c) C-C



(a)



(b)

Şekil 4.16. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz Winkler zemin parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Pasternak zemin parametresine göre değişimi **a)** $\alpha = 0$ **b)** $\alpha = 0.4$

Mod sayısının artışı için iki farklı tipteki nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametrelere göre boyutsuz frekanslarının değişimi Şekil 4.13'te çizdirilmiştir. EBBT ve TBT ile hesaplanan frekans farklılığı genel olarak atomik parametrenin artışı ile düşmektedir. Ancak frekans farklılığı mod numarasının artışı ile yükselmektedir.

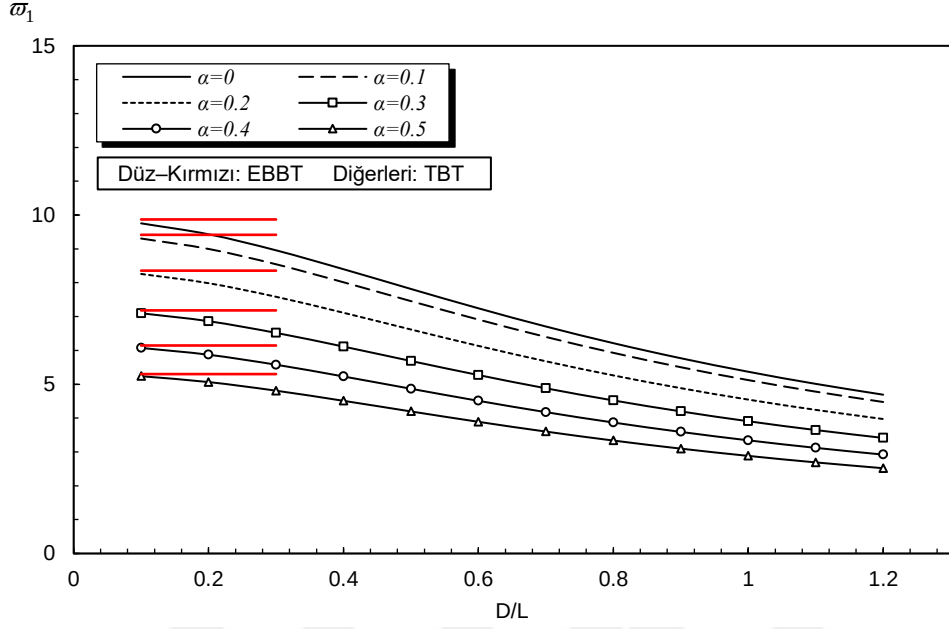
Şekil 4.14'te farklı sınır şartlı nano kirişlerin Winkler zemin parametresinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimleri çizdirilmektedir. Winkler parametresinin en çok C–F en az C–C kirişini etkilediği belirtilebilir. Atomik parametre en az C–F'nin frekanslarını azaltırken en fazla C–C'nin frekanslarını azaltır. Winkler zemininin artışı ile atomik parametrenin atomik parametrenin frekans indirgeme gücü C–F'de en azdır. Diğer elemanlarda bu konuda gözle görünür bir azalma yoktur. Bu arada ilgili grafik sonuçlar 100 sonlu eleman kullanılarak çizdirilmiştir.

Şekil 4.15'te iki tip nano ölçekli kirişin boyutsuz Pasternak zemin parametresinin artışına göre temel mod frekanslarının değişimi farklı boyutsuz atomik parametreler etkisinde 100 eleman kullanılarak çizdirilmiştir. S–S kirişinde genel olarak, Pasternak zemininin yüksek değerlerinde atomik parametrenin frekansı indirgeme gücü azalmaktadır. C–C kirişinde ise Pasternak zemininin rijiditesinin belirli bir değerinden sonra atomik parametre frekansları artırmaktadır. Bunun çelişkili bir durum olmadığı, ilgili dış faktörün şiddetinden kaynaklandığı bir kez daha belirtilmelidir. Öte yandan Pasternak zemin parametresinin artışına karşı farklı Winkler zemin parametresi değerleri için sadece S–S kirişinin temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi Şekil 4.16'da sunulmuştur. Genel olarak olaya etkiyen parametrelerin artışı ile fazla değişen bir durum olmadığı gözlemlenmektedir.

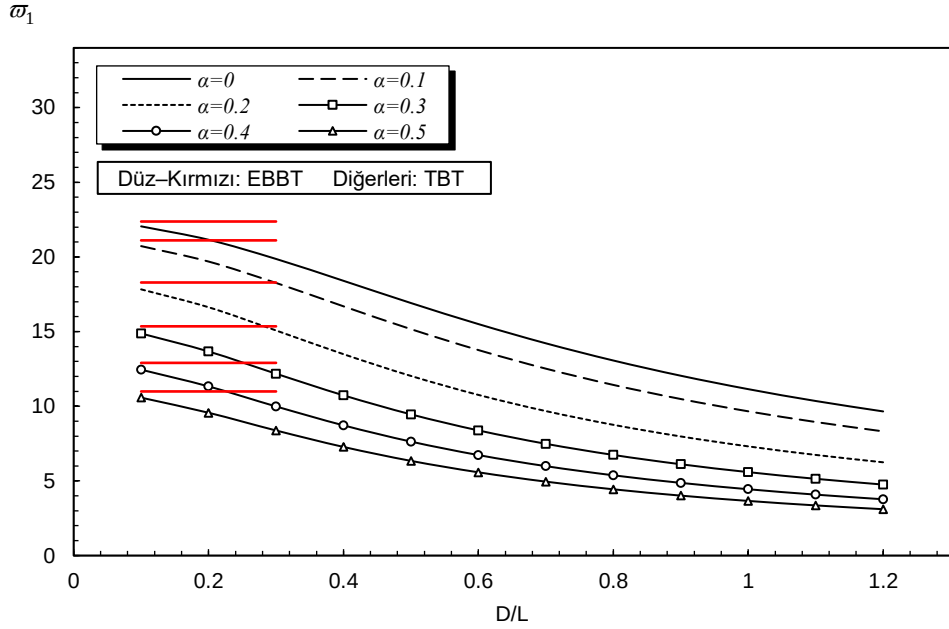
Şekil 4.17'de yine 100 sonlu eleman kullanılarak, artan çap/uzunluk oranına göre temel mod frekans değişiminin farklı boyutsuz atomik parametrelere göre karşılaştırmaları gösterilmektedir. Öncelikle çap/uzunluk oranı EBBT için boyutsuz frekans parametrelerini etkilemediğinden tek tip çizgi ile ve kısa verilmesi tercih edilmiştir. İlgili oran parametresinin ilk değerinde, EBBT ve TBT frekansları oldukça yakındır. Oran değerinin artışı ile TBT kullanılarak elde edilen değerler EBBT'den daha fazla sapmaya başlar. Bu sapma C–C'de daha fazladır. Dahası oran parametresinin artışı ile S–S'nin frekansları azalarak azalırken C–C'nin frekansları artarak azalma trendindedir. Öte yandan, oran parametresinin artışı ile atomik parametrenin frekansları azaltma etkisinin azalmakta olduğu gözlemlenmektedir.

Şekil 4.18'de, ortam sıcaklığının etkisi altındaki nano ölçekli ve her iki ucu basit mesnetli nano ölçekli kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının ortam sıcaklığına göre değişimleri çizdirilmiştir. Aslında her malzemenin sıcaklık değişimi esnasında termal genleşme katsayısı değişkenlik gösterebilir ancak hesaplarda basitlik olması açısından termal genleşme katsayısı sabit ve $\alpha_L = 0.45 \times 10^{-9} \text{ K}^{-1}$ alınmıştır. Sonuçların yorumlamasına gelince, sıcaklık frekansları genel olarak azaltır. Atomik parametre değerinin artışı durumunda, sıcaklık artarsa frekansların indirgenme şiddeti daha da katlanır. Bunu tablo sonuçları ele alırken de elde etmiştik (Bkz. Çizelge 4.28). Burada ele alınması gereken bir diğer mevzu, frekans değerleri bir noktaya kadar azaldıktan sonra artık reel değer olmaktan çıkar. Sıcaklığın daha da artışı ile sanal olarak hesaplanan frekanslar artışa geçer. Yani sanal kısım artmaktadır (reel kısım hep 0'a eşittir). Bu kısmın belki fiziksel bir anlamı olmayabilir ancak bilimsel yorumu önemli olabilir. Buna göre

sanal kısımda atomik parametrenin etkisi ile ilgili olan durumların tam tersi burada gözlemlenir. Yani sıcaklık artışının yanında bir de atomik parametre artarsa sanal frekansların indirgenme miktarı azalır. Tabi atomik parametre arttıkça reelden sanala geçiş sıcaklığı düşmektedir.

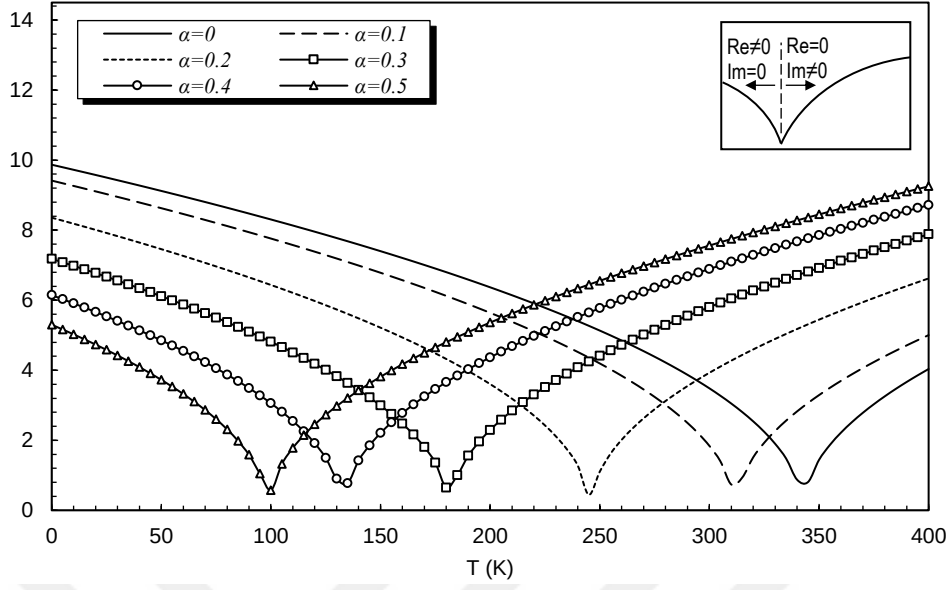


(a)

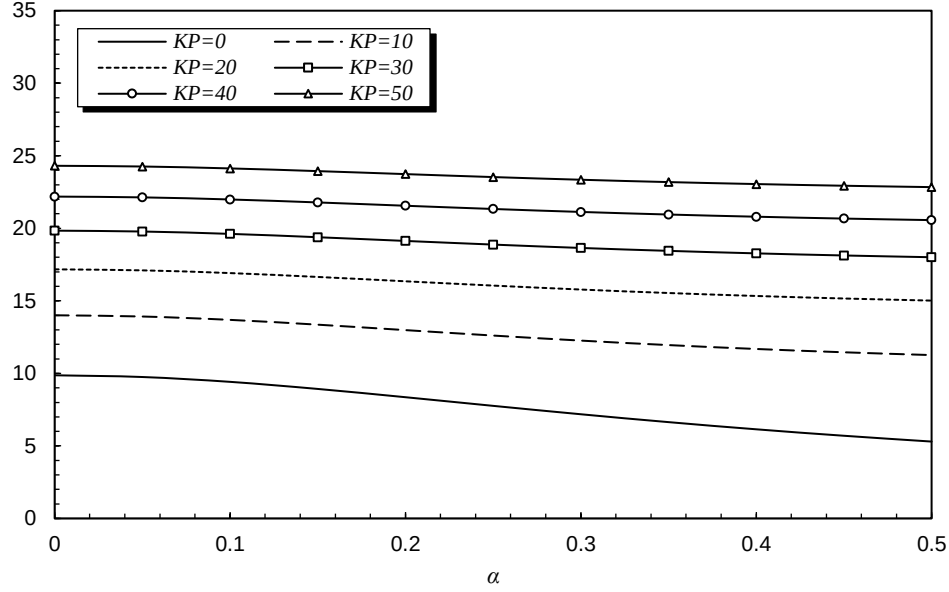


(b)

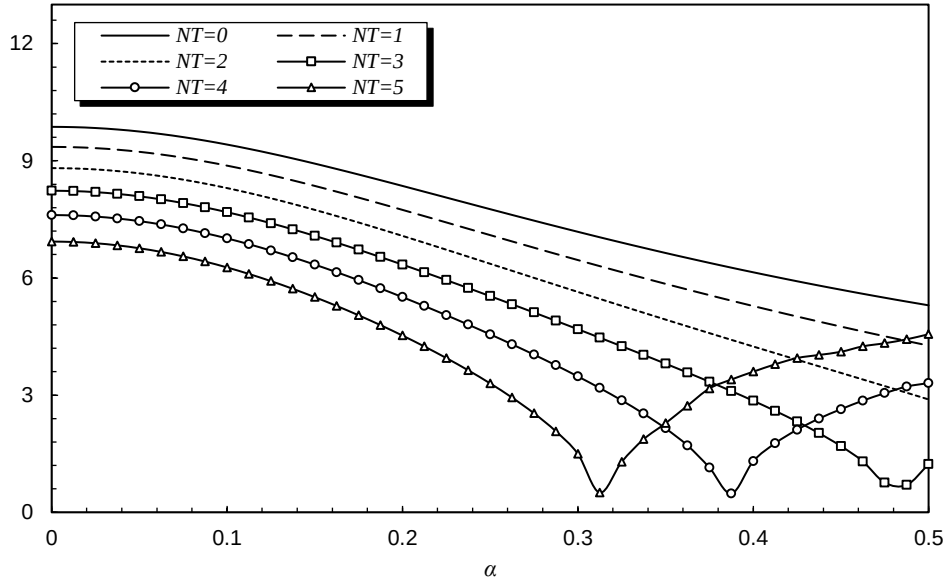
Şekil 4.17. Nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının çap/uzunluk oranına göre değişimi **a)** S-S **c)** C-C

$\varpi_1, \text{Im}(\varpi_1)$ 

Şekil 4.18. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının ortam sıcaklığına göre değişimi

 ϖ_1 

Şekil 4.19. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz Pasternak zemin parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametreye göre değişimi

$\omega_1, \text{Im}(\omega_1)$ 

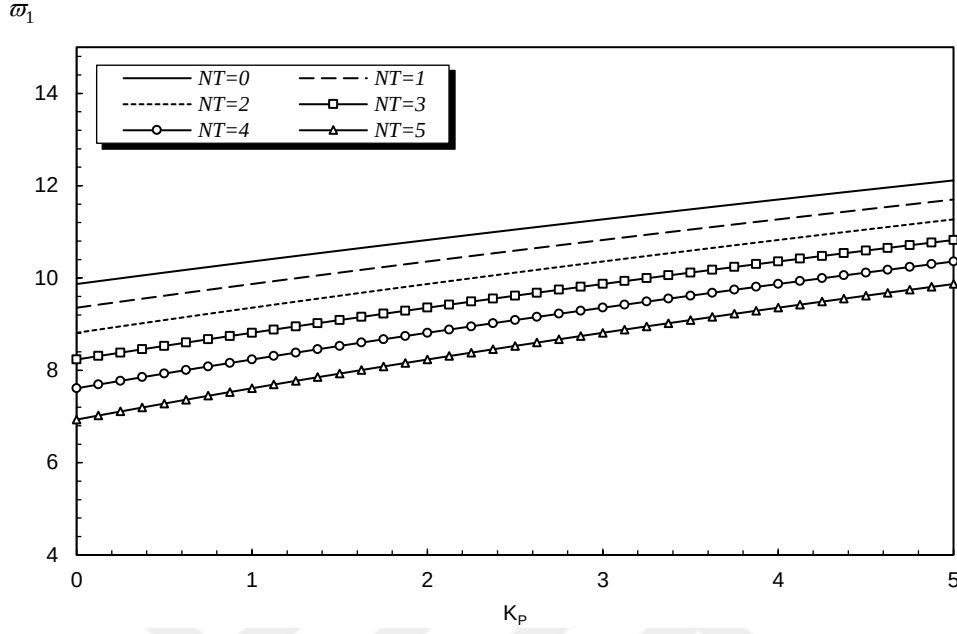
Şekil 4.20. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz sıcaklık parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametreye göre değişimi

Şekil 4.19’da her iki ucu basit mesnetli kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının boyutsuz atomik parametrenin artışına karşı değişimi farklı boyutsuz Pasternak zemin parametreleri için çizdirilmiştir. Öyle görünmektedir ki Pasternak zemininin rijitliği arttıkça atomik parametrenin boyutsuz frekansları değiştirme kabiliyeti azalmaktadır.

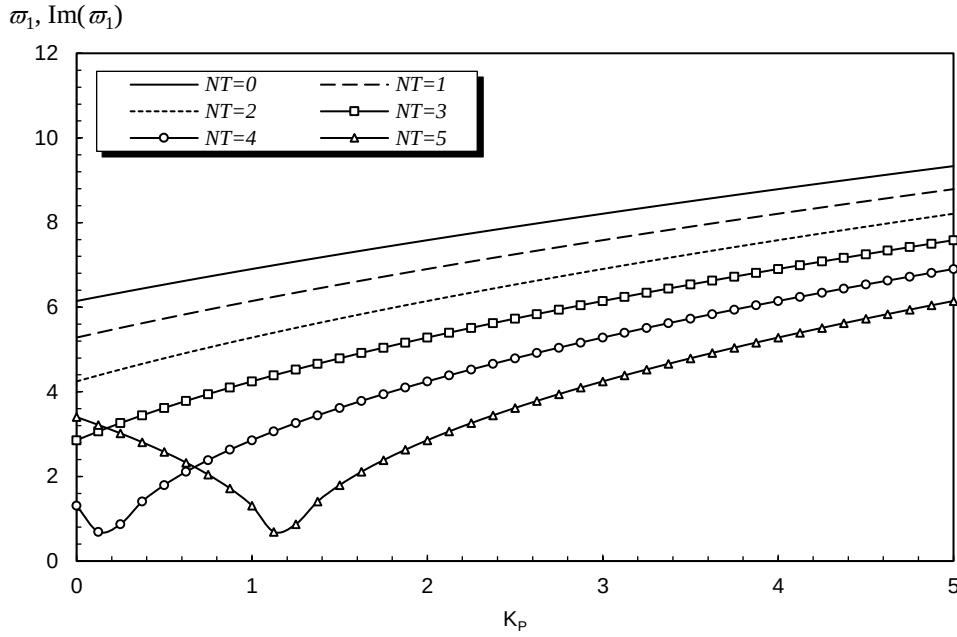
Şekil 4.20’de farklı boyutsuz ortam sıcaklığı parametreleri için yine her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının boyutsuz atomik parametrenin artışına göre değişimleri sunulmuştur. Öncelikle Pasternak zemini ve ortam sıcaklığı etkileri, denge denklemlerine girerken sadece işaret olarak birbirine zıt olduğu için frekans değişimi hususunda da birbirinin zıttı etkide bulunurlar. Tabi Pasternak zemininin boyutsuz formunun artışı boyutsuz frekansları belki az yükseltir ancak sıcaklığın boyutsuz formunun artışı boyutsuz frekansları çok yüksek düzeyde indirger ve bir yerden sonra frekans değerleri reelden sanala geçer. Sıcaklığın yanında bir atomik parametrenin artışı bu durumun gerçekleşmesi için yetip de artmaktadır.

Pasternak zemininin boyutsuz parametresinin artışına karşın farklı boyutsuz sıcaklık değerleri için her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının değişimleri Şekil 4.21’de gösterilmektedir. Klasik durumda, Pasternak zemini ve sıcaklığın boyutsuz formlarının denkleme girdiği mertebe aynı olduğu için ilgili parametrelerin artışının frekanslarda lineere yakın bir değişim meydana getirmesi normaldir. Ancak yerel olmayan durumda bu değişim durumu bozulur. Hatta boyutsuz sıcaklığın boyutsuz Pasternak zemininden daha yüksek olduğu bölgelerde bir de atomik parametre öne çıkarsa frekanslar başta sanal olarak hesaplanır. Pasternak zemininin öne çıkması durumunda belli bir noktadan sonra frekanslar sanaldan reele geçer ve sürekli

büyüklik olarak artar. Atomik parametrenin küçük olduğu durumlarda bu bahsedilenler meydana gelmez.

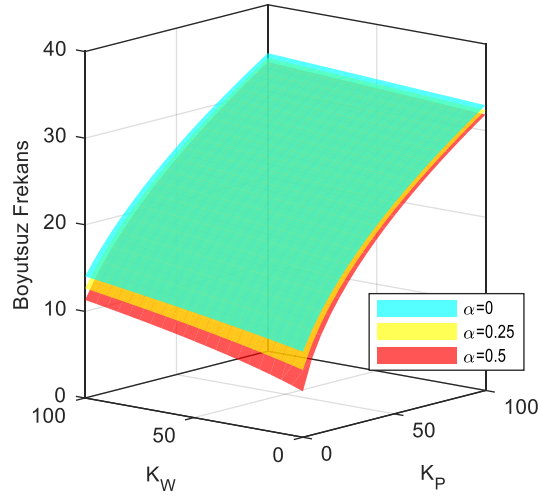


(a)

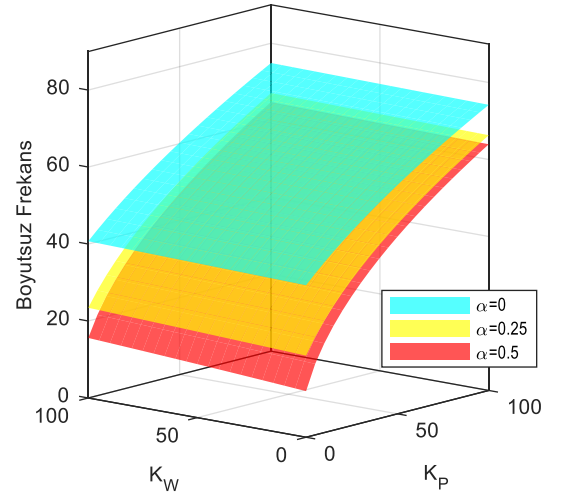


(b)

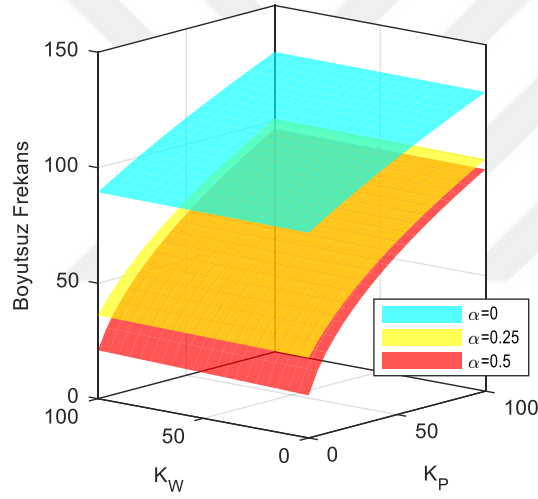
Şekil 4.21. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz sıcaklık parametresi değerleri için temel mod boyutsuz titreşim frekanslarının boyutsuz Pasternak zemin parametresine göre değişimi **a)** $\alpha = 0$ **b)** $\alpha = 0.4$



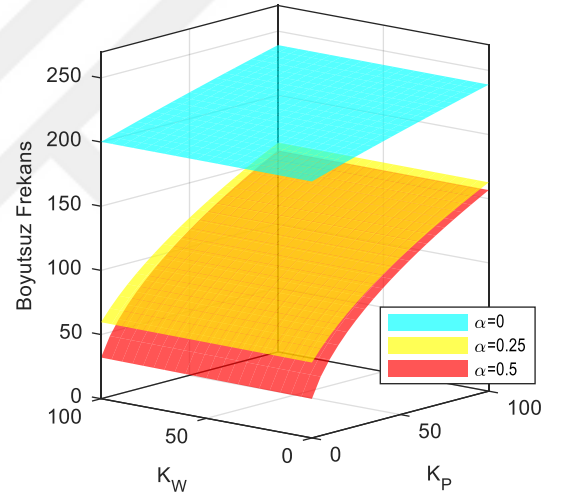
(a)



(b)

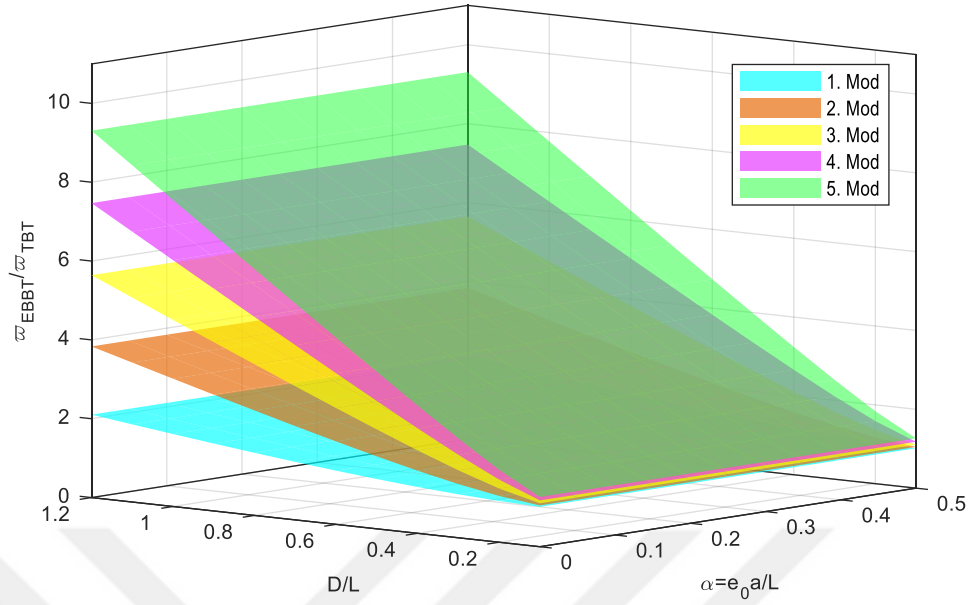


(c)



(d)

Şekil 4.22. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının boyutsuz elastik zemin parametrelerine göre değişimi **a)** 1. Mod **b)** 2. Mod **c)** 3. Mod **d)** 4. Mod

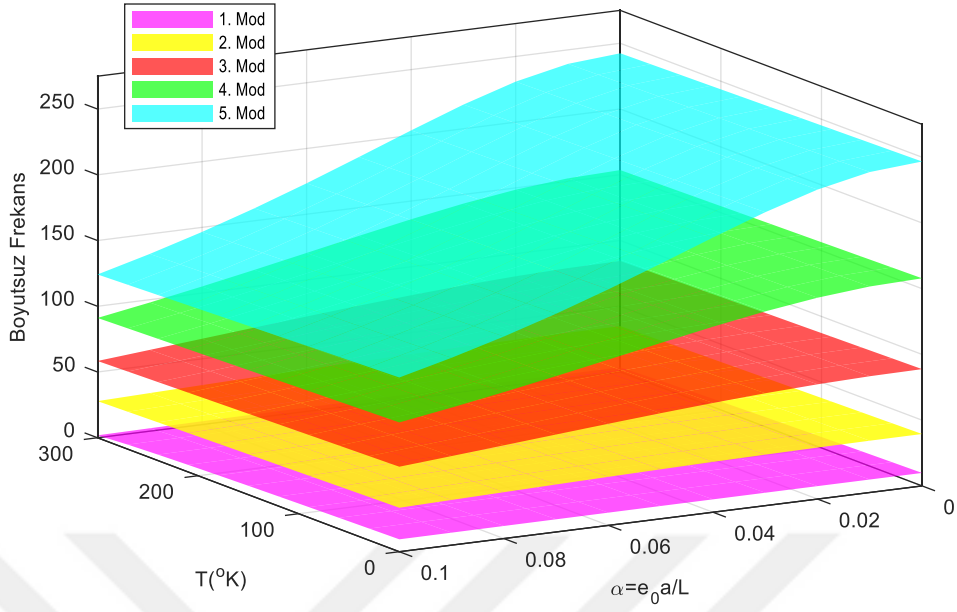


Şekil 4.23. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı mod sayıları için Euler-Bernoulli ve Timoshenko teorileri ile hesaplanmış boyutsuz frekanslarının oranının çap/uzunluk ve boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre değişimi

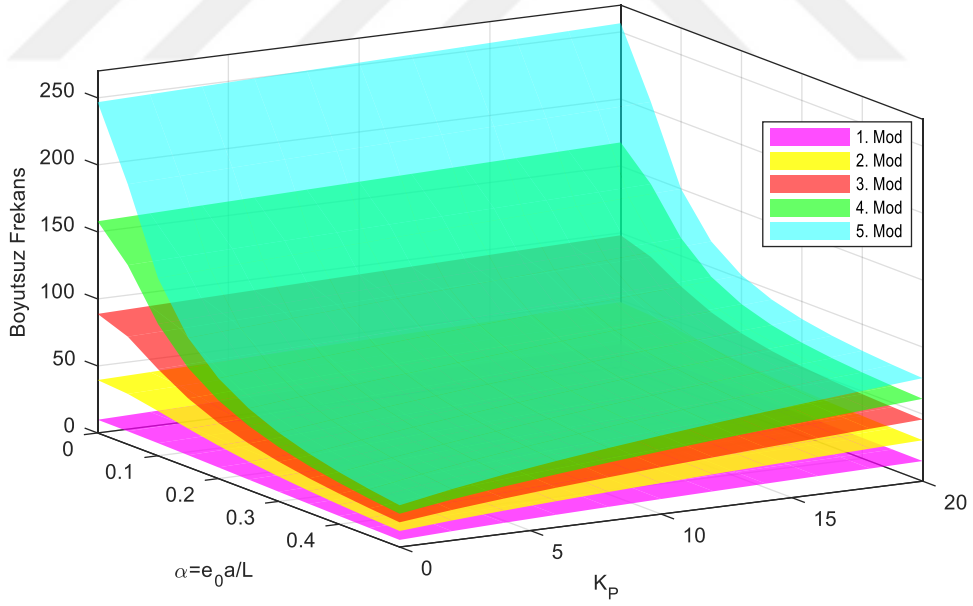
Her iki ucu basit mesnetli kirişlerin oturmakta olduğu çift parametrelili elastik zemine ait rijitliklerin artışı durumu için oluşan frekans değişimlerine ait yüzeyler farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için Şekil 4.22’de çizilmiştir. İlk dört mod için üç boyutlu grafikler ayrı ayrı sunulmuştur. Öncelikle elde edilen sonuç, Pasternak zemininin Winkler zemininden frekans artırma konusunda daha etkin olduğudur ancak bu etkinlik mod numarası yükseldikçe azalır. Öte yandan, mod numarası arttıkça klasik elastisiteye ait analizleri gösteren yüzeyler atomik parametrelili çözümleri gösteren yüzeylerden giderek uzaklaşır.

Şekil 4.23’de her iki ucu basit mesnetli kirişlerin çap/uzunluk oranı ve boyutsuz atomik parametrenin değişimine göre EBBT ve TBT ile hesaplanan boyutsuz frekanslarının oranını gösteren yüzeyler farklı mod sayıları için çizilmiştir. Grafikten genel olarak anlaşılmaktadır ki, herhangi bir modda EBBT ile hesaplanan frekanslar çap/uzunluk oranından etkilenmeyeceği için çap/uzunluk oranı arttıkça TBT frekansları düşer ve bu düşüş mod numarası ile daha çok şiddetlenir. Atomik parametrenin sonuçları hiçbir modda neredeyse etkilememesinden bu parametrenin EBBT ve TBT frekanslarını aynı yüzdelik oranda indirgemiş olduğu sonucuna varılabilir.

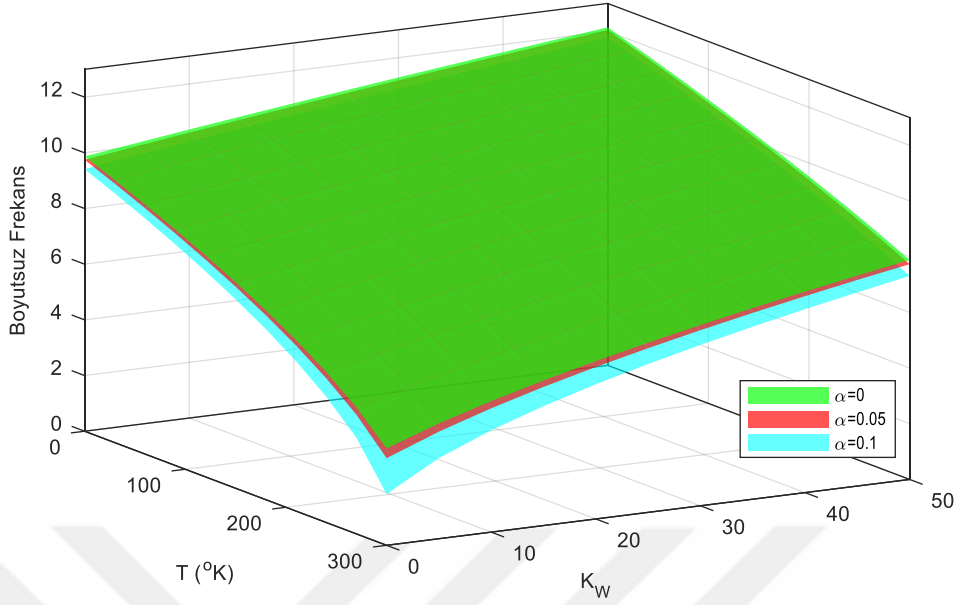
Şekil. 4.24’te her iki ucu basit mesnetli nano ölçekli kirişlerin ortam sıcaklığı ve boyutsuz atomik parametre etkisinde boyutsuz frekanslarının değişimini gösteren yüzeyler verilmiştir. Frekansların tamamı reel olarak hesaplanmıştır. Genel olarak, atomik parametrenin hiçbir değeri için boyutlu ortam sıcaklığı boyutsuz frekansları fazla etkileyememiştir.



Şekil 4.24. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının ortam sıcaklığı ve boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre değişimi



Şekil 4.25. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı mod sayıları için boyutsuz frekanslarının yerel olmayan parametre ve boyutsuz Pasternak zemin parametresi değerlerine göre değişimi



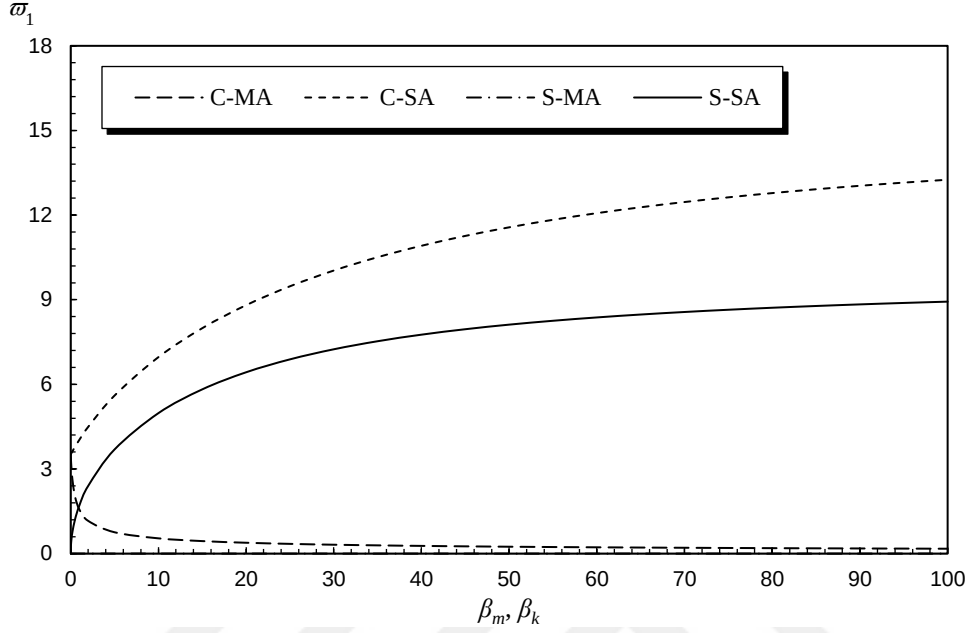
Şekil 4.26. Her iki ucu basit mesnetli nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan Parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının ortam sıcaklığı ve boyutsuz Winkler zemin parametresi değerlerine göre değişimi

Şekil. 4.25'te her iki ucu basit mesnetli nano ölçekli kirişlerin boyutsuz atomik parametre ve boyutsuz Pasternak zemin parametresi değerleri için farklı modlarına ait boyutsuz frekansların değişimini gösteren yüzeyler sunulmaktadır. Bir kez daha Pasternak zemin parametresi yükseldikçe atomik parametrenin frekansları daha az indirgediği sonucuna varılmaktadır. Mod numarası yükseldikçe atomik parametrenin frekansları indirgeme kabiliyetinin arttığı burada da görülebilir. Tabi Pasternak zeminin her modda ve klasik elastisitede frekansları yükseltme oranının değişmediği görülür. En azından gözle görülür bir değişim yoktur. Ancak, atomik parametre yükseldikçe Pasternak zemininin frekansları yükseltme kabiliyeti yüksek modlarda az da olsa gözle tespit edilebilir.

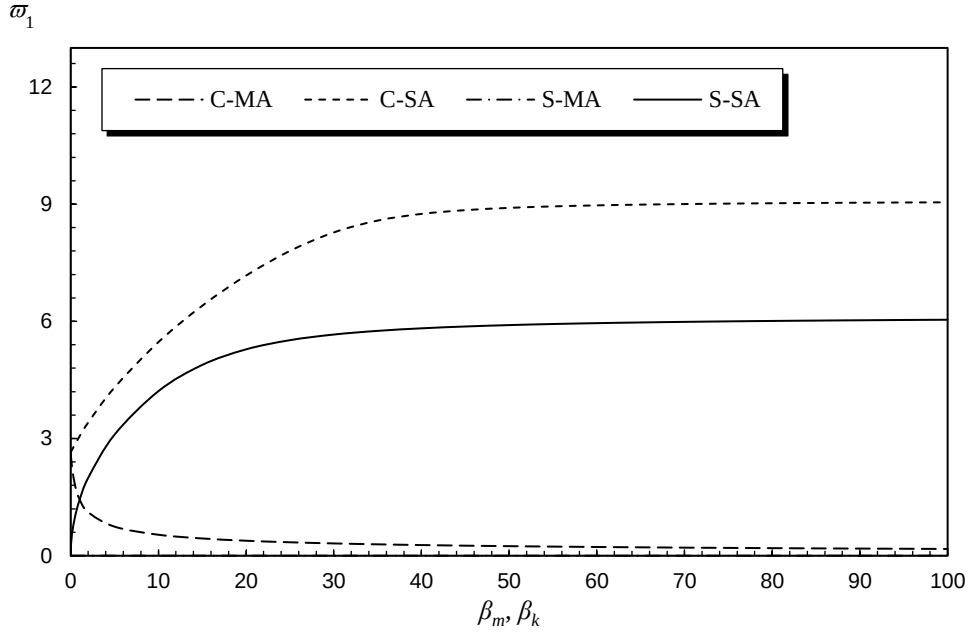
Her iki ucu basit mesnetli nano ölçekli kirişlerin ortam sıcaklığı ve boyutsuz Winkler zemini etkisinde farklı atomik parametreler için temel mod frekanslarının değişimini gösteren yüzeyler Şekil 4.26'da verilmektedir. Genel olarak, sıcaklığın yüksek olduğu durumda atomik parametre de yüksekse Winkler zemininin boyutsuz frekansları artırma etkisinin daha yüksek olduğu anlaşılmaktadır.

Şekil 4.27'de uç eklentisine sahip nano ölçekli kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranına göre değişimleri gösterilmiştir. Sonuçlarda S-MA elemanı görülemez çünkü bu elemanın temel modda titreşim yapmadığı tablo sonuçlarda da görülmüştü (Bkz. Çizelge 4.25, 4.27, 4.29, 4.30, 4.32, 4.34). Öte yandan, eklenti oranının artışı ile C-SA kirişinin frekansları en çok etkilenmektedir. Bu elemanda eklenti oranının artışı frekanslar C-S'nin temel moduna doğru (15.41821) yaklaşır (Dönme engelleyici eklenti olmadığı için yay ekli ucun ankastre mesnetli uçla tam bir benzeşimi kurulamaz). S-SA elemanında ise eklenti oranının artışı ile frekanslar S-S'nin temel moduna (9.8696) yaklaşır. Tabi aynı eklenti oranı için eksenel çubuklarda yaklaşım daha kolaydı. Mesela

C-SA eksenel çubuğu düşük eklentilerde bile C-C'ye oldukça yakınsayabiliyordu. Kirişlerde yüksek eklenti oranı için yeterli yakınsaklık sağlanamamıştır. Yerel olmayan analize bakıldığında bu yakınsaklığın düşük eklentilerde yüksek miktarda sağlanabildiği gözlemlenmektedir.

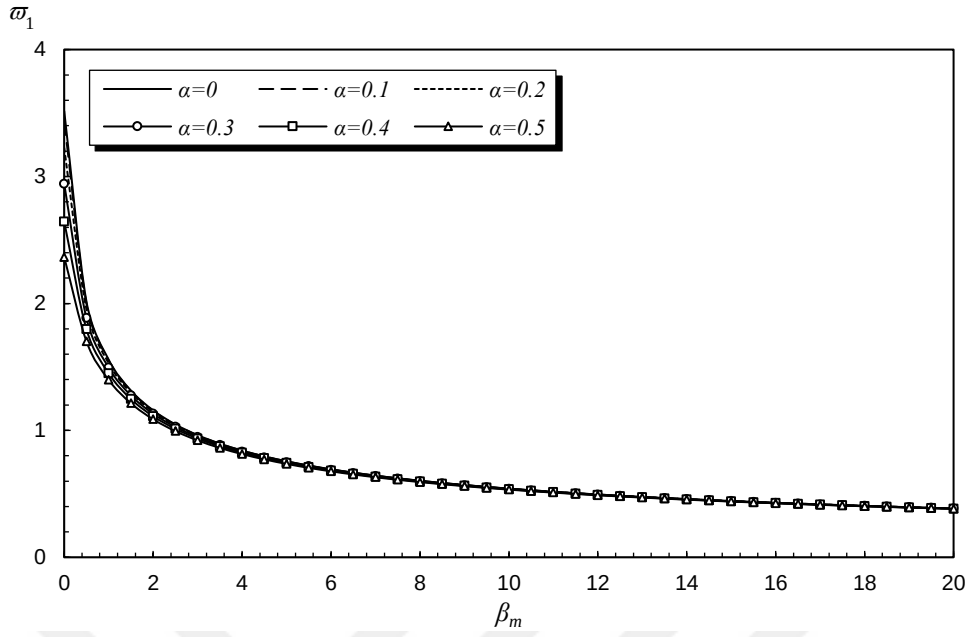


(a)

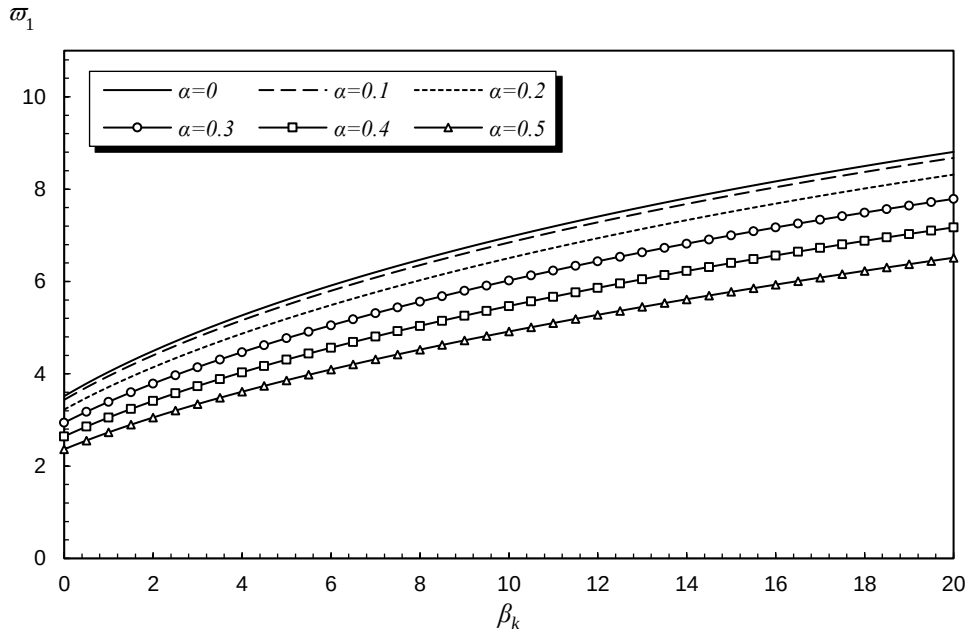


(b)

Şekil 4.27. Uç eklentili nano kirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranına göre değişimi **a)** $\alpha = 0$ **b)** $\alpha = 0.4$

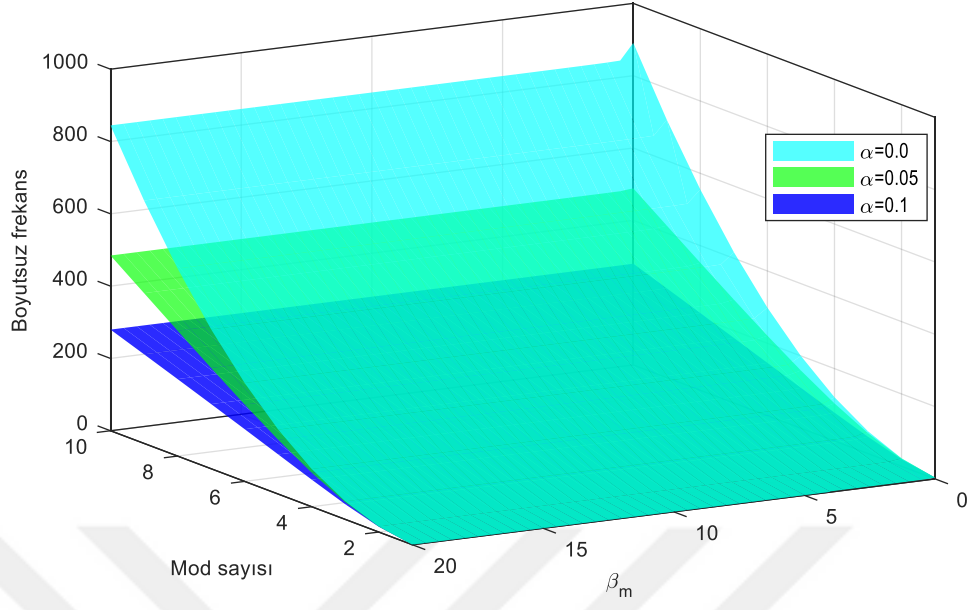


(a)

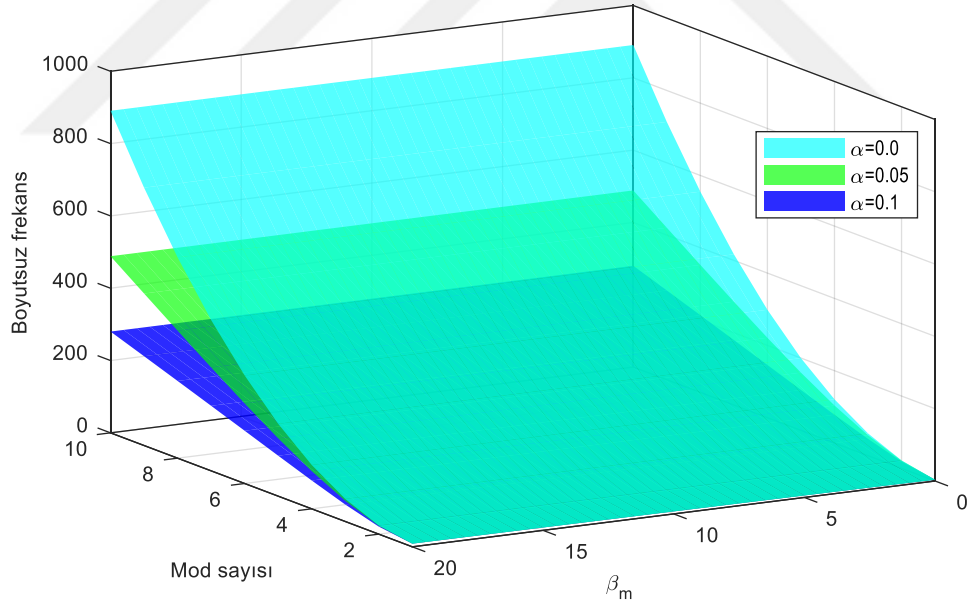


(b)

Şekil 4.28. Uç eklentili nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranına göre değişimi **a)** C-MA **b)** C-SA

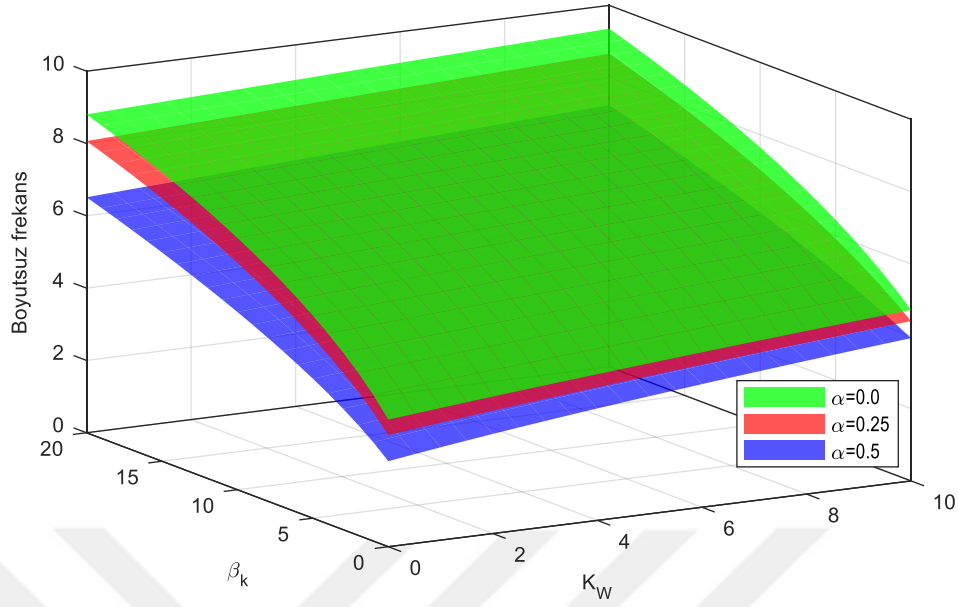


(a)



(b)

Şekil 4.29. Uç eklentili nano kirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısı ve eklenti oranına göre değişimi **a)** C–MA **b)** C–SA



Şekil 4.30. Bir ucu ankastre ve diğer ucu kesme yayı eklentili nano kirişlerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranı ve boyutsuz Winkler zemin parametresi değerlerine göre değişimi

Şekil 4.28’de eklentili sınır şartlara sahip eklenti oranının artışına göre farklı atomik parametre değerleri altında temel mod boyutsuz frekansların değişimi görülmektedir. Atomik parametre C–MA elemanının temel mod frekanslarını çok fazla etkileyemez ancak C–SA elemanının frekansları üzerinde daha etkilidir. Öte yandan eklenti oranının artması ile C–MA elemanının frekansları C–SA elemanına göre daha çok etkilenmektedir.

Ekli nano kirişlerin mod sayısı ve eklenti oranına göre boyutsuz frekanslarının değişimini farklı boyutsuz atomik parametre değerleri altında gösteren yüzeyler Şekil 4.29’da verilmektedir. Genellikle eklenti oranı ilk arttığında ve mod numarası yükseldiğinde, frekanslardaki ani düşüş aralığı (ani olmasına sebebiyet veren eklenti oranı aralığı) daralır. Ancak ani düşüş miktarının yüksekliği (ani düşüş kısmında yaşanan frekans indirgenme miktarı) artar. Ancak atomik parametre arttığında ani düşüşün hem aralığı hem de yüksekliği azalır. C–SA elemanında ise eklenti oranının artışı için ani değişimler görülmemiştir. Frekanslar hemen hemen sabit bir şekilde gitmektedir.

Winkler zeminine oturan bir ucu ankastre ve diğer ucu kesme elastik yayı eklentili elemanın temel mod boyutsuz frekanslarının eklenti oranı ve Winkler zemin parametresine göre değişimini gösteren yüzeyler farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için Şekil 4.30’da sunulmuştur. Winkler zemininin rijitliği artınca atomik parametrenin etkinliğinin azaldığını önceki tartışmalarda belirtmiştik. Eklenti oranı arttığında ise atomik parametrenin frekans azaltıcı etkisinin arttığı gözlemlenmiştir.

Buradan itibaren nano ölçekli ayırık sistemlerin yerel olmayan titreşim analizi üzerinde durulacaktır. İlk olarak nano ölçekli kafes sistemlerin tartışmaları gerçekleştirilecektir.

Çizelge 4.40. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları ($\theta = 45^\circ$)

Kafes Örneği	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
a	1	0.54431	0.54299	0.53909	0.53272	0.52409
	2	1.24442	1.23928	1.22414	1.19985	1.16798
	3	1.37199	1.36704	1.35286	1.33111	1.30378
b	1	0.95735	0.95424	0.94505	0.93020	0.91033
	2	1.73205	1.71920	1.68232	1.62578	1.55543
	3	2.46300	2.43430	2.35443	2.23868	2.10449
c	1	0.13572	0.13567	0.13553	0.13530	0.13497
	2	0.27022	0.27016	0.26998	0.26967	0.26924
	3	0.42181	0.42100	0.41858	0.41464	0.40931
d	1	0.09183	0.09179	0.09167	0.09148	0.09121
	2	0.33408	0.33400	0.33379	0.33343	0.33293
	3	0.37194	0.37110	0.36860	0.36456	0.35912

Çizelge 4.41. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-a)

θ	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
15°	1	1.39100	1.38368	1.35202	1.25973	1.13246
	2	1.58353	1.54585	1.45992	1.39770	1.36279
	3	2.96429	2.92495	2.81579	2.65837	2.47684
30°	1	0.96226	0.95818	0.94591	0.92543	0.89699
	2	1.41603	1.40302	1.36694	1.31528	1.25678
	3	1.88840	1.87733	1.84547	1.79634	1.73447
45°	1	0.54431	0.54299	0.53909	0.53272	0.52409
	2	1.24442	1.23928	1.22414	1.19985	1.16798
	3	1.37199	1.36704	1.35286	1.33111	1.30378
60°	1	0.23973	0.23948	0.23872	0.23748	0.23578
	2	0.89488	0.89394	0.89114	0.88654	0.88021
	3	1.09590	1.09276	1.08352	1.06871	1.04910
75°	1	0.05951	0.05950	0.05945	0.05937	0.05927
	2	0.45206	0.45194	0.45159	0.45101	0.45020
	3	0.83837	0.83732	0.83419	0.82905	0.82202

Çizelge 4.40’da nano ölçekli farklı geometrilerdeki kafes sistem örneklerinin farklı boyutsuz atomik parametre değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları elde edilmiştir. En yüksek boyutsuz frekansların hesaplandığı Kafes-b üye uzunlukları bakımından en küçük, Kafes-d ise en büyük kafes sistemdir. Tabi yine Kafes-b’de atomik parametre en çok frekans indirgemesini gerçekleştirmiştir. Mod numarasının yüksek değerlerinde de Kafes-b’nin frekanslarının daha çok indirgendığını bu tablodan anlıyoruz. Netice olarak yerel olmayan elastisite teorisinin küçük yapılarda daha çok önem kazandığı bir kez daha anlaşılmıştır.

Çizelge 4.42. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-b)

θ	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
15°	1	0.58665	0.57945	0.55934	0.52998	0.49564
	2	1.71224	1.70405	1.68069	1.64517	1.60089
	3	4.00409	3.92131	3.70074	3.40363	3.08690
30°	1	0.91069	0.90438	0.88611	0.85768	0.82166
	2	1.81532	1.80221	1.76536	1.71098	1.64620
	3	3.32802	3.27074	3.11527	2.89939	2.66130
45°	1	0.95735	0.95424	0.94505	0.93020	0.91033
	2	1.73205	1.71920	1.68232	1.62578	1.55543
	3	2.46300	2.43430	2.35443	2.23868	2.10449
60°	1	0.72134	0.71990	0.71562	0.70861	0.69905
	2	1.31517	1.30813	1.28759	1.25523	1.21353
	3	1.73205	1.72288	1.69653	1.65610	1.60554
75°	1	0.22744	0.22723	0.22660	0.22556	0.22413
	2	0.84774	0.84680	0.84399	0.83936	0.83297
	3	1.10062	1.09785	1.08967	1.07652	1.05906

Çizelge 4.43. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-c)

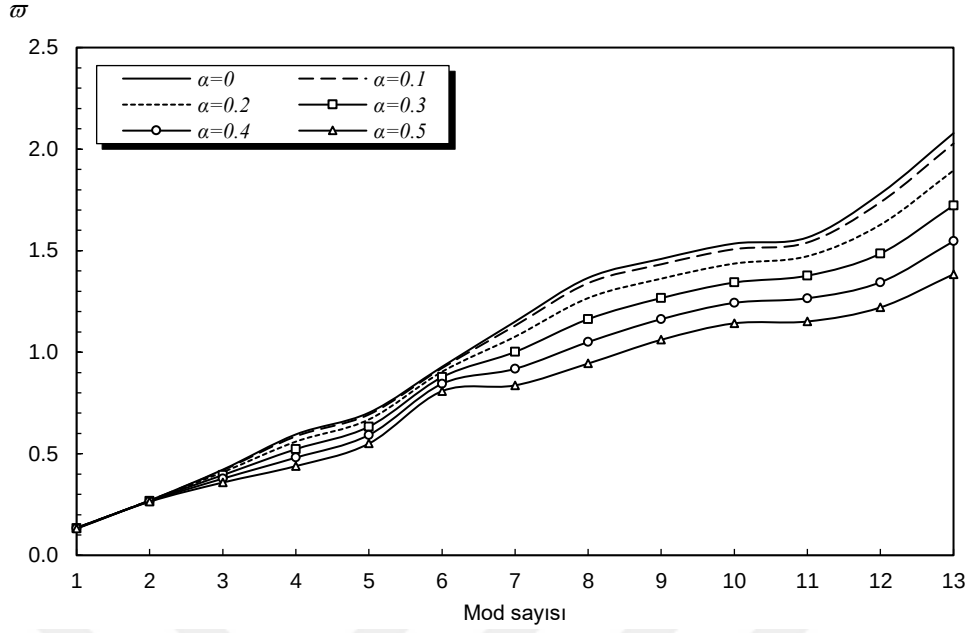
θ	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
15°	1	0.05645	0.05642	0.05632	0.05616	0.05595
	2	0.18394	0.18337	0.18170	0.17901	0.17543
	3	0.30978	0.30758	0.30115	0.29102	0.27815
30°	1	0.10388	0.10383	0.10369	0.10344	0.10311
	2	0.29607	0.29572	0.29467	0.29289	0.29032
	3	0.36295	0.36235	0.36060	0.35784	0.35429
45°	1	0.13572	0.13567	0.13553	0.13530	0.13497
	2	0.27022	0.27016	0.26998	0.26967	0.26924
	3	0.42181	0.42100	0.41858	0.41464	0.40931
60°	1	0.13840	0.13837	0.13828	0.13813	0.13792
	2	0.19062	0.19057	0.19041	0.19015	0.18979
	3	0.39326	0.39270	0.39101	0.38824	0.38446
75°	1	0.06246	0.06245	0.06242	0.06237	0.06229
	2	0.10159	0.10157	0.10152	0.10144	0.10132
	3	0.24259	0.24247	0.24211	0.24153	0.24071

Çizelge 4.44. Nano ölçekli kafes yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Kafes-d)

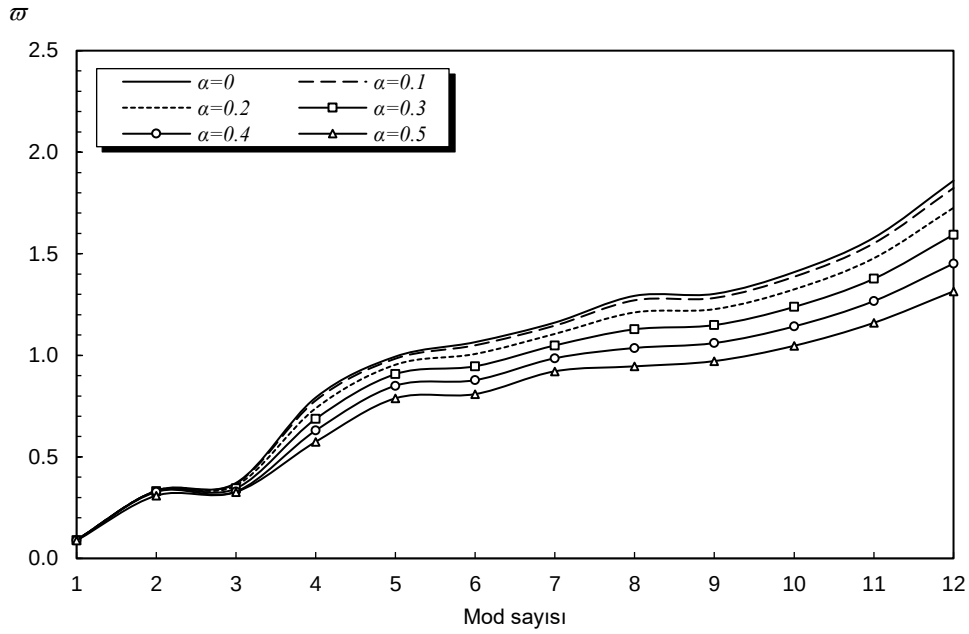
θ	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
15°	1	0.33273	0.33242	0.33147	0.32991	0.32776
	2	0.72532	0.72471	0.72290	0.71992	0.71579
	3	0.94333	0.93531	0.91237	0.87758	0.83487
30°	1	0.19243	0.19229	0.19185	0.19113	0.19012
	2	0.46155	0.46136	0.46081	0.45989	0.45862
	3	0.60636	0.60370	0.59591	0.58361	0.56767
45°	1	0.09183	0.09179	0.09167	0.09148	0.09121
	2	0.33408	0.33400	0.33379	0.33343	0.33293
	3	0.37194	0.37110	0.36860	0.36456	0.35912
60°	1	0.03662	0.03661	0.03659	0.03656	0.03652
	2	0.17764	0.17746	0.17692	0.17604	0.17482
	3	0.23838	0.23836	0.23829	0.23818	0.23803
75°	1	0.00879	0.00879	0.00879	0.00879	0.00879
	2	0.04746	0.04745	0.04741	0.04735	0.04726
	3	0.11381	0.11373	0.11350	0.11313	0.11261

Kafes yapıların yerel olmayan dinamik analizi ile ilgili diğer sonuçları içeren Çizelge 4.41–44’te bütün kafes tiplerinin farklı yönelim açılarına göre ilk üç mod boyutsuz titreşim frekansları farklı boyutsuz atomik parametre değerleri altında listelenmektedir. Kafes-a’da (Bkz. Çizelge 4.41) açı artışı için frekanslar düşmektedir çünkü yapının genel olarak boyutu artmaktadır. Açı artış hızının meydana getirdiği frekans azalma hızı burada değil grafik sonuçlarda ele alınacaktır ancak şu belirtilebilir: Açı artışı durumunda mod numarası yükselirse boyutsuz frekansların daha az arttığı görülmektedir. Kafes-b’de ise açı artışı ile frekanslar önce yükselir sonra düşer. Eğer açı artışı ile frekanslar yükselirse atomik parametre tarafından yapılan indirgenme giderek artar. Tersine açı azalışının olduğu durumda atomik parametre boyutsuz frekansları daha az indirger. Bu söylediklerimiz Kafes-c için de geçerlidir. Tabi Kafes-c’de frekans değişimleri Kafes-b’ye göre daha düşük gerçekleşmektedir. Öte yandan Kafes-d’de frekansların açı değişimine bağlı olarak sürekli azaldığı tespit edilmiştir. Düşük yönelim açılarında atomik parametre daha etkindir. Bu tablolarla ilgili daha detaylı tartışma grafik sonuçlarda ele alınacaktır.

Şekil 4.31’de iki farklı kafes örneklerinin belli bir yönelim açısı değeri altında farklı atomik parametre değerleri için tüm boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimleri çizilmiştir. Genel olarak boyutsuz frekansların düzensiz olarak arttığı görülmektedir. Belli bir mod değerinden (Kafes-c için 6, Kafes-d için 3) sonra atomik parametrenin etkisi belirginleşmektedir.

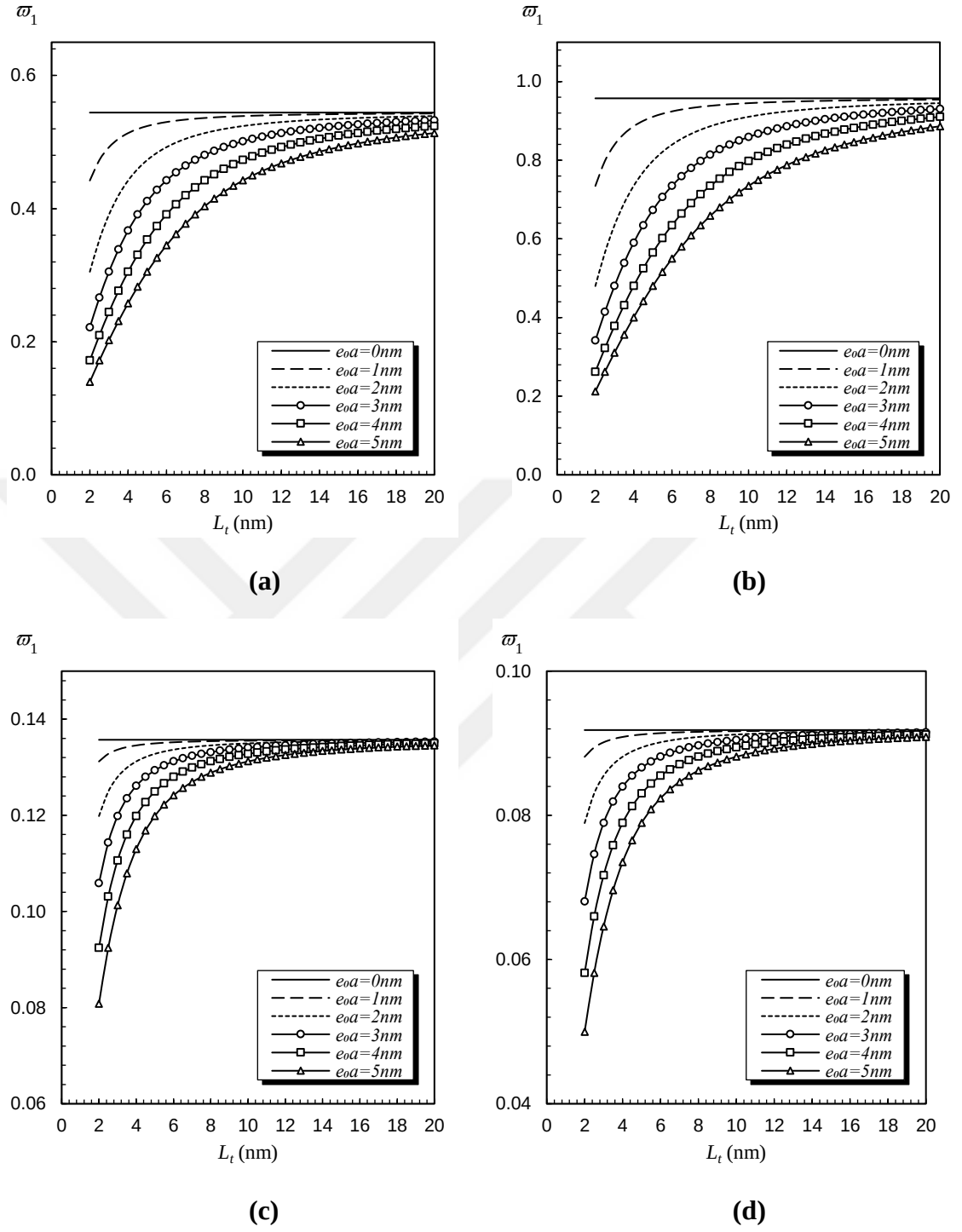


(a)

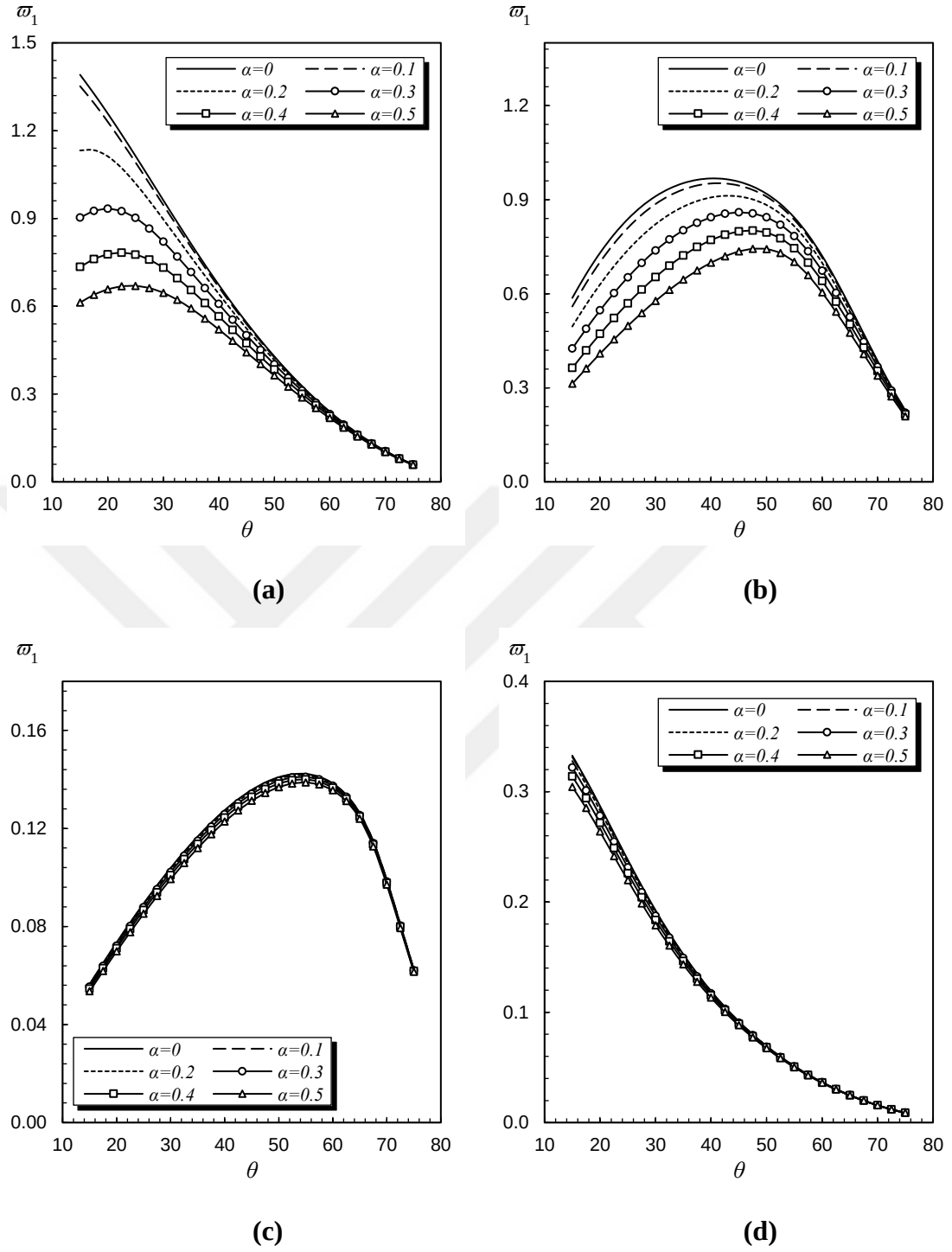


(b)

Şekil 4.31. Farklı tipteki nano kafeslerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimi **a)** Kafes-c **b)** Kafes-d ($\theta = 45^\circ$)



Şekil 4.32. Farklı tipteki nano kafeslerin farklı atomik uzunluk değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının kafes uzunluk parametresine göre değişimi **a)** Kafes-a **b)** Kafes-b **c)** Kafes-c **d)** Kafes-d ($\theta = 45^\circ$)



Şekil 4.33. Farklı tipteki nano kafeslerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının kafes yönelim açısına göre değişimi
a) Kafes-a b) Kafes-b c) Kafes-c d) Kafes-d

Şekil 4.31’de farklı geometrilere sahip kafes sistemlerin kafes uzunluk parametresinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi sunulmuştur. Atomik uzunluk 0 nm iken boyutsuz frekansların uzunluk parametresinden etkilenmediği görülmektedir. Genel olarak, yerel olmayan uzunluk en çok Kafes–b’yi en az Kafes–d’yi etkilemiştir. Yerel olmayan uzunluğun etkisi küçük uzunluk parametrelerinde daha belirgindir. O halde yerel olmayan etkinin, ayrıık üyelerin karakteristik uzunluklarının atomik uzunluklara yaklaştığı durumlarda önemli hale geldiği ve dolayısıyla mekanik analizde vazgeçilemez bir faktör olduğu tekrardan anlaşılmıştır.

Farklı tip kafes yapıların temel mod boyutsuz frekanslarının kafes yönelim açısına göre değişimleri Şekil 4.33’de çizilmiştir. Öncelikle, Kafes–a ve d yapılarında yönelim açısı arttıkça frekanslar azalmaktadır. Ancak, Kafes–a’da atomik parametre arttıkça frekanslar açı değişimi ile önce artıp sonra azalma eğilimindedir. Atomik parametrenin etkisi Kafes–a’da daha belirgindir. Ayrıca, açı arttıkça sistemdeki toplam uzunluk arttığından (başka bir tabirle yapı büyüdüğünden) atomik parametrenin frekansları düşürücü etkisinin azaldığını görmekteyiz. Bu çıkarımı Kafes–b ve c için de belirtebiliriz. Ayrıca Kafes–b ve c için elde edilen iki ortak sonuca göre, birincisi, atomik parametre ne olursa olsun frekanslar yönelim açısının belli bir değerine kadar artarken daha sonra azalmaktadır. İkincisi, frekansların artış bölgesinde atomik parametre frekansları indirgeme hususunda daha etkindir. Tabi atomik parametrenin genel olarak Kafes–b’nin boyutsuz frekansları üzerinde daha etkili olduğunu da söyleyebiliriz.

Çizelge 4.45. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları

Kafes Örneği	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
a	1	3.20916	3.20348	3.18661	3.15907	3.12168
	2	15.05959	14.85271	14.27915	13.45380	12.50524
	3	32.64639	31.65014	29.13175	26.00724	22.95093
b ($\theta = 45^\circ$)	1	20.38944	20.04976	19.12280	17.82478	16.38066
	2	95.38400	95.01398	93.92921	92.20101	89.93430
	3	124.59964	122.71118	117.87194	111.69259	105.35548
c2 ($\theta = 45^\circ$)	1	20.47594	20.12815	19.18204	17.86354	16.40354
	2	52.05867	51.84214	51.20842	50.20196	48.88766
	3	136.48728	135.64669	133.30391	129.86245	125.72413
d3 ($\theta = 45^\circ$)	1	10.95076	10.81656	10.44175	9.89521	9.25661
	2	19.61265	19.32415	18.52370	17.37303	16.05721
	3	50.08586	47.66746	42.08096	35.97458	30.65535

Sayısal sonuçların son kısmında ise, nano ölçekli çerçeve yapıların yerel olmayan boyutsuz frekans sonuçları ele alınacaktır. Buna göre, Çizelge 4.45 farklı geometrilere sahip çerçeve yapıların farklı boyutsuz atomik parametreler altında ilk üç mod boyutsuz frekanslarını göstermektedir. Çerçeve–c ve d’nin 7 farklı tipte çözüleceği bir önceki bölümde belirtilmiştir ancak bu analizlerdeki kıyaslamaların mümkün olduğunca anlamlı olması için Çerçeve–c2 (İki bağlantısı da ankastre mesnetli) ve Çerçeve–d3 (İki bağlantısı da sabit mesnetli) nano sistemlerinin verilmesi tercih edilmiştir. Sonuçlar ele alındığında, En yüksek frekansların Çerçeve–c2’de ve en düşük frekansların Çerçeve–a’da hesaplandığı tespit edilmiştir. Ancak Çerçeve–b ve c2’nin frekansları birbirine çok

yakındır. Tabi mod numarası yükseldikçe bu iki çerçeve tipi arasındaki makas açılır. Öte yandan, atomik parametrenin Çerçeve–b ve c2’nin frekansları üzerindeki etkisi, düşük modlarda birbirine çok yakındır. Yalnız, atomik parametrenin yüksek modlarda indirgeyici etkisinin Çerçeve–c2’de daha çok olması beklenirken bu etki Çerçeve–b’de daha yüksektir.

Çizelge 4.46. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve–c, $\theta = 45^\circ$)

Çerçeve	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
c1	1	0.97967	0.97792	0.97272	0.96421	0.95263
	2	4.60924	4.57664	4.48286	4.33884	4.15941
	3	19.83577	19.17800	17.52156	15.50505	13.60046
c2	1	20.47594	20.12815	19.18204	17.86354	16.40354
	2	52.05867	51.84214	51.20842	50.20196	48.88766
	3	136.48728	135.64669	133.30391	129.86245	125.72413
c3	1	13.23369	13.06204	12.58431	11.89214	11.08985
	2	32.90514	32.14250	30.08524	27.30273	24.38076
	3	60.62423	59.53846	56.96886	54.03298	51.27125
c4	1	3.18553	3.17849	3.15765	3.12377	3.07808
	2	13.67610	13.49696	12.99938	12.28095	11.45163
	3	37.18186	35.95304	32.88088	29.13605	25.54017
c5	1	2.64681	2.63274	2.59177	2.52737	2.44446
	2	19.83219	19.17794	17.50848	15.44440	13.47649
	3	44.08863	42.12194	36.82080	30.92029	26.17811
c6	1	4.32720	4.31103	4.26359	4.18786	4.08826
	2	24.11168	23.57668	22.15930	20.27003	18.28233
	3	54.32903	53.92609	52.82646	51.26407	49.45736
c7	1	4.12674	4.11781	4.09137	4.04842	3.99048
	2	20.54108	20.18908	19.23236	17.90101	16.42932
	3	83.31922	83.01262	82.13620	80.79469	79.10804

Çizelge 4.46–47’de sırayla Çerçeve–c ve d’nin farklı mesnetlenme durumları için ilk üç mod boyutsuz frekansları farklı atomik parametre değerlerine göre listelenmektedir. Hatırlanacak olursa Çerçeve–c’de bir üye değişmeksizin ankastre mesnetli bağlantıya sahip iken diğer üyenin uç bağlantısı değişti. Çerçeve–d’de ise değişmeyen mesnet sabit mesnetti. Çizelge 4.46 için, en yüksek frekanslar üye uç bağlantılarının ankastre mesnetli bağlantılara sahip olduğu Çerçeve–c2’de, en düşük frekanslar değişken bağlantının serbest olduğu (yani hiç olmadığı) Çerçeve–c1’de hesaplanmaktadır. Bunlara ek olarak, Çerçeve–c4 ve c5’in, Çerçeve–c6 ve c7’nin frekansları kendi içinde birbirine yakındır. Çerçeve c4’ün değişken bağlantısı yatayda kayıcı iken Çerçeve–c5’inki düşeyde kayıcıdır. Enine titreşim esnasında Çerçeve–c4 enine deplasmanları tamamen tutulu hale getirdiği için boyutsuz frekanslarının Çerçeve–c5’ten yüksek hesaplanması mantıklıdır. Öte yandan, Çerçeve–c6 düşeyde dönmeyen kayıcı, c7 ise yatayda dönmeyen kayıcıdır. O halde bu iki tip çerçeveye ait frekansların Çerçeve–c4 ve c5’e göre yüksek çıkması gerekmektedir ve sonuçlar bunu doğrulamaktadır. Atomik parametrenin etkisine gelince, en çok etkilenen eleman en rijit koşullarda titreşen Çerçeve–c2, en az etkilenen c1’dir. Sürekli sistemlerde en rijit kiriş,

yüksek modlarda diğer elemanlara kıyasla atomik parametreden daha fazla etkilenmekteydi. Çerçevelerde buna paralel bir çıkarım yapılamamaktadır çünkü atomik parametre en çok Çerçeve-c5'i etkilemektedir. Bu tartışmalar doğrultusunda Çerçeve-d'nin de benzer yorumlamaları yapılabileceğinden Çizelge 4.47'nin incelenmesine gerek görülmemiştir.

Çizelge 4.47. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve-d, $\theta = 45^\circ$)

Çerçeve Örneği	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
d1	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	3.35589	3.33360	3.26925	3.16973	3.04450
	3	14.49028	14.16116	13.28314	12.10703	10.87549
d2	1	13.23365	13.06200	12.58428	11.89212	11.08984
	2	32.90844	32.14525	30.08689	27.30350	24.38108
	3	60.58861	59.50897	56.95101	54.02390	51.26679
d3	1	10.95076	10.81656	10.44175	9.89521	9.25661
	2	19.61265	19.32415	18.52370	17.37303	16.05721
	3	50.08586	47.66746	42.08096	35.97458	30.65535
d4	1	1.90354	1.90000	1.88950	1.87239	1.84919
	2	10.98766	10.85208	10.47356	9.92207	9.27831
	3	23.66887	23.17204	21.84756	20.06393	18.16591
d5	1	2.42960	2.41694	2.38008	2.32210	2.24740
	2	13.47676	13.24079	12.58869	11.66139	10.62313
	3	28.53282	27.22952	24.16146	20.81798	17.98242
d6	1	4.04629	4.03058	3.98452	3.91110	3.81473
	2	14.53357	14.33329	13.77788	12.97852	12.06014
	3	38.14354	36.86105	33.62561	29.66870	25.89135
d7	1	2.72831	2.72286	2.70670	2.68040	2.64481
	2	14.36823	14.16259	13.59511	12.78474	11.86145
	3	35.66674	34.60631	31.89604	28.49145	25.13507

Çizelge 4.48. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve–b)

Çerçeve	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
$\theta = 15^\circ$	1	20.48638	20.13760	19.18917	17.86819	16.40628
	2	36.19002	36.03126	35.56722	34.83214	33.87560
	3	137.38973	136.73774	134.87469	132.02335	128.43571
$\theta = 30^\circ$	1	20.45901	20.11282	19.17048	17.85599	16.39909
	2	68.50487	68.21944	67.38410	66.05756	64.32547
	3	133.36548	132.27863	129.32764	125.17875	120.43207
$\theta = 45^\circ$	1	20.38944	20.04976	19.12280	17.82478	16.38066
	2	95.38400	95.01398	93.92921	92.20101	89.93430
	3	124.59964	122.71118	117.87194	111.69259	105.35548
$\theta = 60^\circ$	1	20.18236	19.86153	18.97952	17.73030	16.32453
	2	106.43624	103.44793	96.33918	88.24458	80.88268
	3	115.20177	114.78623	113.56609	111.61623	109.04777
$\theta = 75^\circ$	1	19.10095	18.86561	18.19621	17.19378	15.99559
	2	70.45229	66.98473	59.44737	51.87745	45.77383
	3	127.23963	126.80492	125.52704	123.48049	120.77649

Çizelge 4.49. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve–c2)

Yönelim açısı	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
$\theta = 15^\circ$	1	18.96813	18.88421	18.63899	17.87072	16.40778
	2	20.49209	20.14276	19.19306	18.25069	17.74570
	3	138.41857	137.86672	136.25957	133.72452	130.43153
$\theta = 30^\circ$	1	20.48638	20.13760	19.18917	17.86819	16.40628
	2	35.85293	35.69855	35.24711	34.53132	33.59872
	3	137.84193	137.18325	135.30142	132.42237	128.80162
$\theta = 45^\circ$	1	20.47594	20.12815	19.18204	17.86354	16.40354
	2	52.05867	51.84214	51.20842	50.20196	48.88766
	3	136.48728	135.64669	133.30391	129.86245	125.72413
$\theta = 60^\circ$	1	20.45902	20.11283	19.17048	17.85599	16.39909
	2	67.34361	67.07241	66.27805	65.01461	63.36132
	3	133.97156	132.87002	129.88031	125.67973	120.87782
$\theta = 75^\circ$	1	20.43233	20.08864	19.15222	17.84405	16.39205
	2	81.78624	81.46456	80.52183	79.02083	77.05379
	3	130.03478	128.58802	124.76803	119.64386	114.08915

Çizelge 4.50. Nano ölçekli çerçeve yapıların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve yönelim açısı değerleri altında ilk üç mod boyutsuz frekansları (Çerçeve–d3)

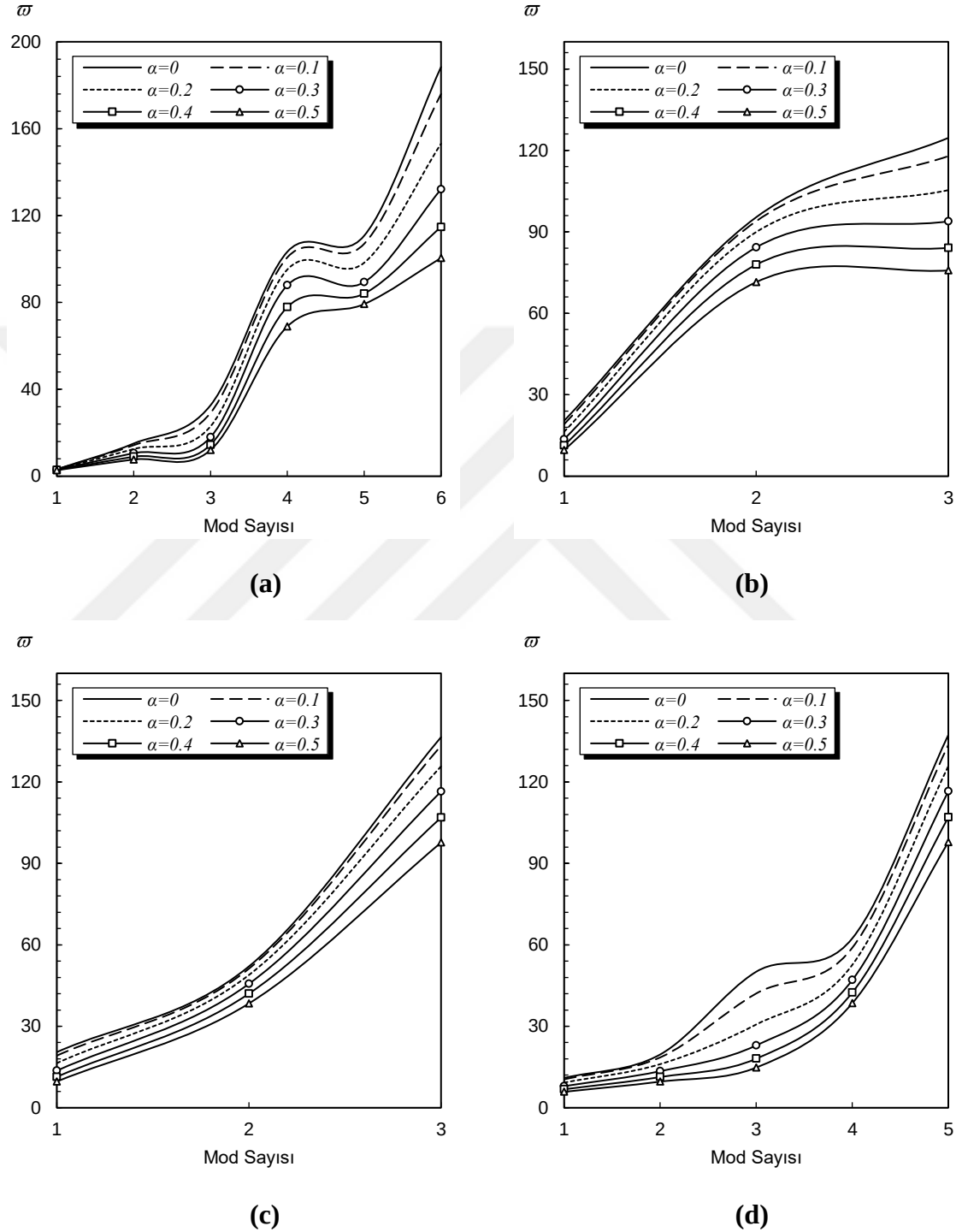
Yönelim açısı	Mod	α				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
$\theta = 15^\circ$	1	10.95408	10.81968	10.44437	9.89721	9.25804
	2	13.53279	13.46386	13.26034	12.93188	12.49416
	3	32.92145	31.99852	29.66751	26.78529	23.98816
$\theta = 30^\circ$	1	10.95291	10.81858	10.44344	9.89650	9.25754
	2	18.38716	18.17071	17.55455	16.63006	15.52115
	3	46.45672	45.51742	42.10749	35.98639	30.66056
$\theta = 45^\circ$	1	10.95076	10.81656	10.44175	9.89521	9.25661
	2	19.61265	19.32415	18.52370	17.37303	16.05721
	3	50.08586	47.66746	42.08096	35.97458	30.65535
$\theta = 60^\circ$	1	10.94728	10.81329	10.43901	9.89311	9.25511
	2	20.04370	19.72622	18.85405	17.61989	16.23168
	3	49.97860	47.58468	42.03767	35.95530	30.64685
$\theta = 75^\circ$	1	10.94178	10.80812	10.43467	9.88980	9.25274
	2	20.24043	19.90916	19.00327	17.73053	16.30945
	3	49.80885	47.45329	41.96867	35.92450	30.63327

Çizelge 4.48–4.50’de, sırayla Çerçeve–b, c2 ve d3’ün ilk üç mod boyutsuz frekansları farklı yönelim açıları ve atomik parametre değerlerine göre sunulmaktadır. Çerçeve–b ve d3’ün nin frekansları yönelim açısı ile sürekli olarak azalmakta, Çerçeve–c2’nin frekansları önce artıp sonra azalmaktadır. Genel olarak, oldukça düşük ve oldukça yüksek açı değerleri dışında Çerçeve–b ve c2’nin boyutsuz frekansları birbirine çok yakındır. Düşük yönelim açılarında Çerçeve–b’nin, yüksek yönelim açılarında Çerçeve–c2’nin frekansları daha yüksektir. Tabi bu iki çerçeve arasındaki boyutsuz frekans değerlerinin farklılığı yüksek modlarda daha fazladır. Ek olarak, açı değişimi bu iki çerçeveye göre Çerçeve–d3’ün frekanslarını daha az etkilemektedir. Öte yandan atomik parametrenin, özellikle yüksek modlarda, en çok Çerçeve–d3’ün boyutsuz frekansları üzerinde etkili olduğunu söyleyebiliriz.

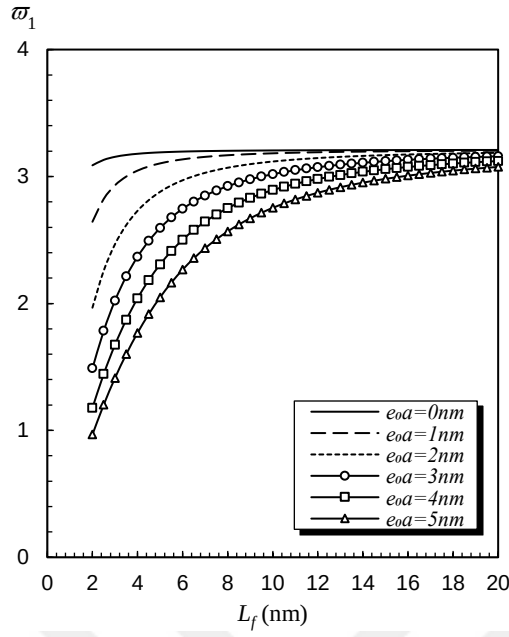
Şekil 4.34’te farklı tipteki nano ölçekli çerçevelerin boyutsuz titreşim frekanslarının mod sayısına göre değişimi incelenmiştir. Özellikle Çerçeve–a ve d’nin frekanslarının frekans değişimi düzensizdir. Kafeslerde de söz ettiğimiz bu “düzensiz değişim” kavramı, yerel olmayan parametrenin yüksek modlarda beklenmeyen frekans indirgemeleri yaptığının ifadesidir. Örneğin Çerçeve–d’de atomik parametre üçüncü modda yüksek bir indirgeme yapmışken dördüncü ve beşinci modlarda daha az indirgeme yapmaktadır.

Farklı yerel olmayan uzunluk değerleri altında farklı tipteki nano çerçevelerin temel mod boyutsuz frekanslarının çerçeve uzunluk parametresinin artışına göre değişimleri Şekil 4.35’te sunulmuştur. Çerçeve uzunluk parametresi arttıkça boyutsuz frekansların artma eğiliminde olduğu görülmüştür. Mesela kafes yapılarda temel mod boyutsuz frekansları uzunluk parametresinden etkilenmiyordu. Çerçevelerde ise uzunluk parametresi arttıkça boyutsuz frekansların sabitleşmeye başladığı, hatta bazı çerçevelerde bu duruma geçişin keskin bir şekilde olduğu görülmektedir. Atomik parametre, toplamda en büyük uzunluklara sahip nano çerçeve olan Çerçeve–a’nın frekanslarını en az düzeyde

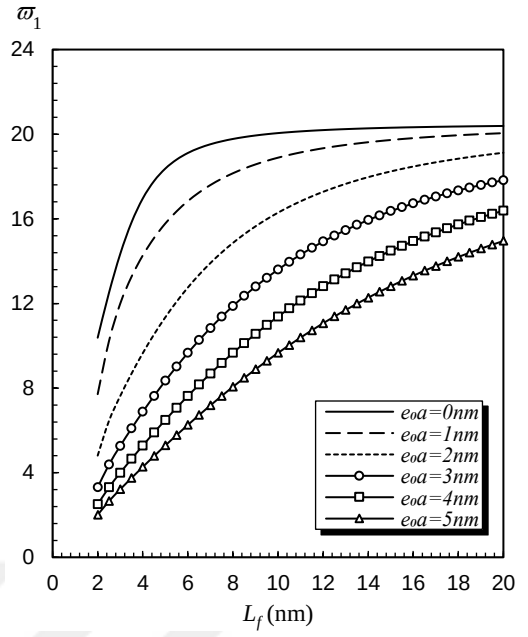
azaltmaktadır. Toplamda daha düşük uzunluklara sahip diğer çerçevelerde ise atomik parametrenin etkisi daha çok belirgindir. Ek olarak, yapılabilecek ortak bir çıkarıma göre, çerçeve uzunluk parametresinin artışı durumunda davranışın yerel olmayan elastisiteden çıkıp klasik elastisiteye yaklaşmakta olduğu görülmektedir.



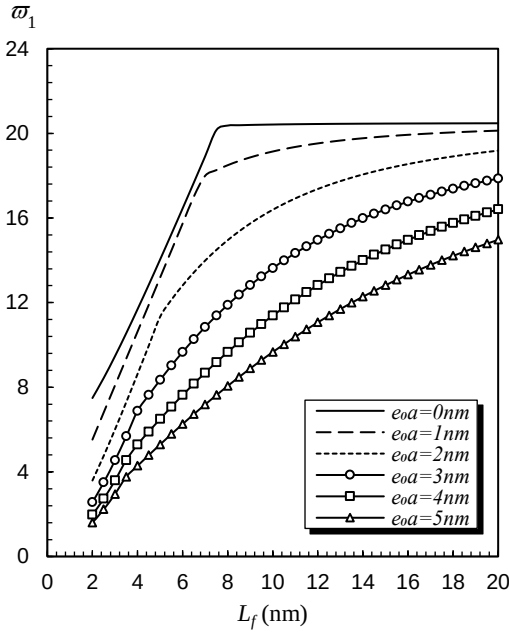
Şekil 4.34. Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri için boyutsuz frekanslarının mod sayısına göre değişimi **a)** Çerçeve-a **b)** Çerçeve-b **c)** Çerçeve-c2 **d)** Çerçeve-d3 ($\theta = 45^\circ$)



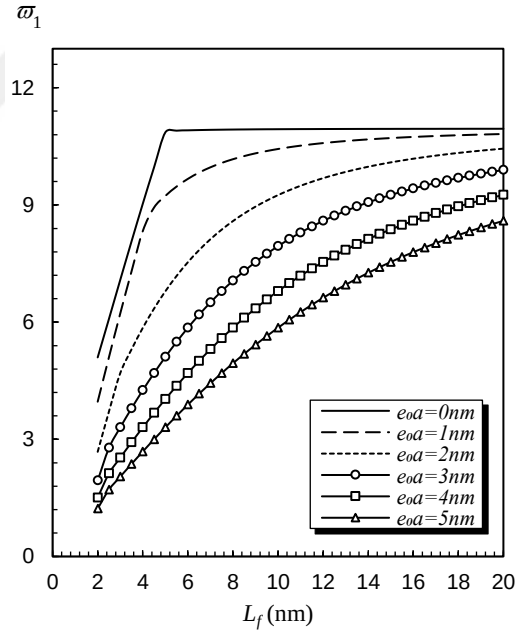
(a)



(b)



(c)



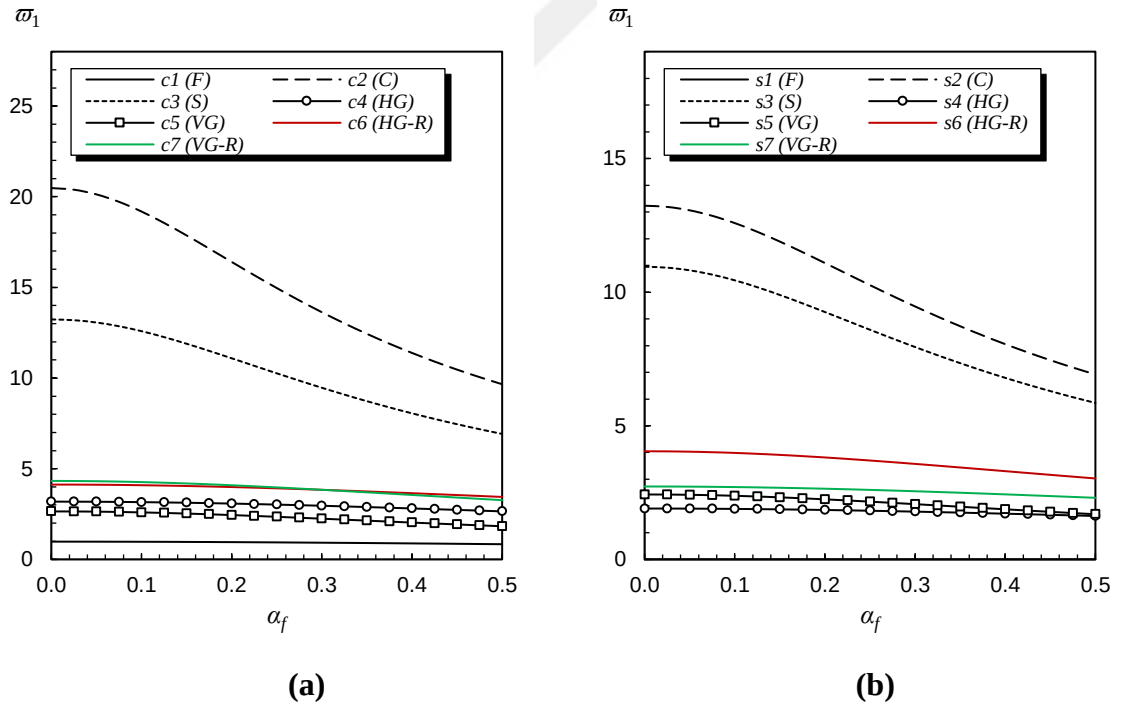
(d)

Şekil 4.35. Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı atomik uzunluk değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının çerçeve uzunluk parametresine göre değişimi **a)** Çerçeve-a **b)** Çerçeve-b **c)** Çerçeve-c2 **d)** Çerçeve-d3 ($\theta = 45^\circ$)

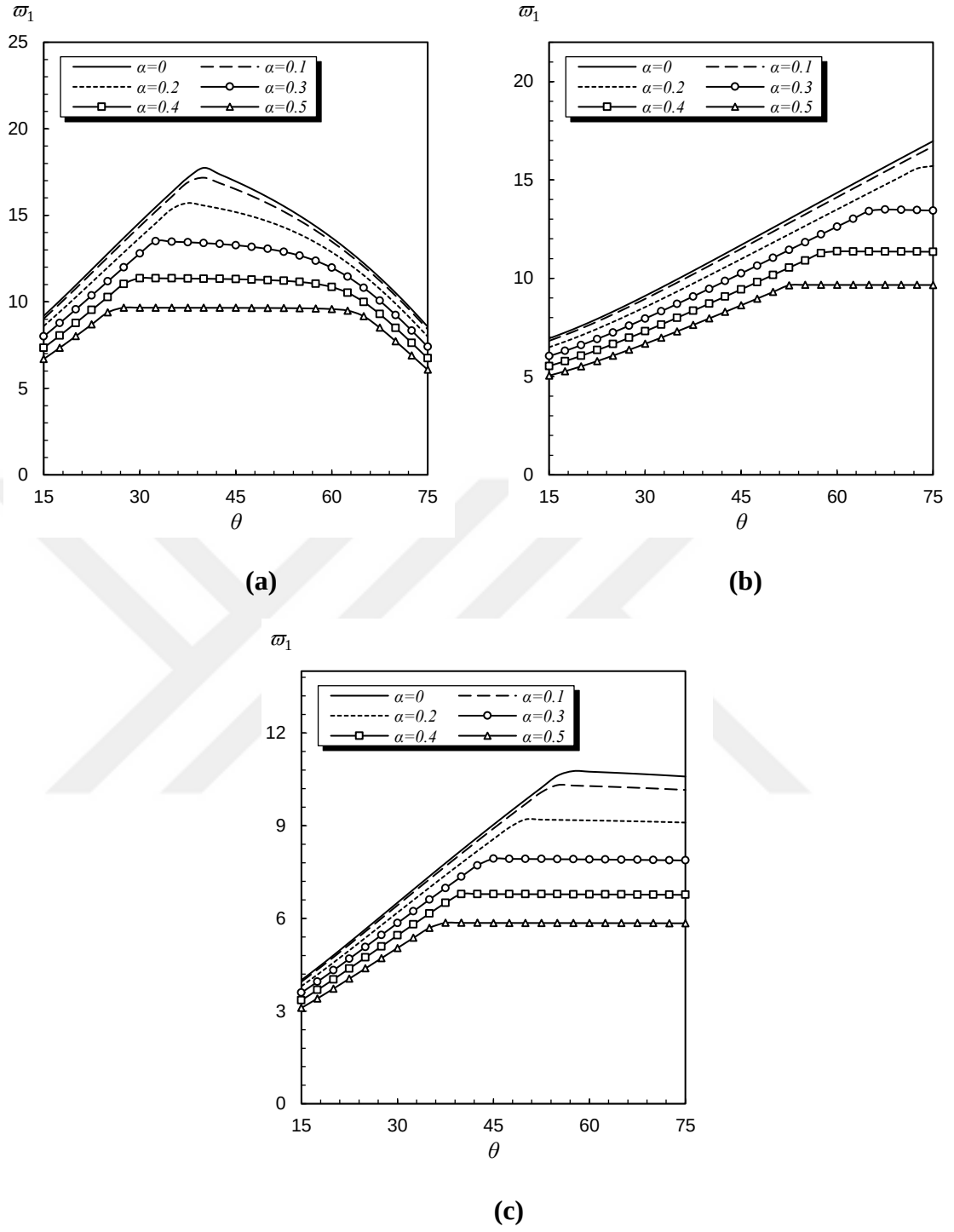
Değişken mesnetli koşullara sahip nano ölçekli çerçevelerin boyutsuz atomik parametrenin değişimine göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi Şekil 4.36'da gösterilmektedir. Mesnetlenme koşullarının yanında yazan ifadeler mesnet durumunu hatırlatma amaçlıdır. Bunlar,

- F: Serbest,
- C: Ankastre,
- S: Sabit mesnet,
- HG: Yatayda kayıcı basit mesnet,
- VG: Düşeyde kayıcı basit mesnet,
- HG-R: Yatayda kayıcı ama dönmeyici mesnet,
- VG-R: Düşeyde kayıcı ama dönmeyici mesnet

şeklindedir. Genel olarak en yüksek frekanslar değişken mesnetin ankastre olduğu durumdadır. Atomik parametre bu tip elemanların frekanslarını daha çok etkilemektedir. Bu arada değişken olmayan ucu basit mesnetli ve diğer ucu serbest eleman temel modda titreşmeyeceğinden boyutsuz frekansı sıfıra eşittir, dolayısı ile Şekil 4.36b’de görülmektedir. Öte yandan, değişmeyen ucun ankastre olduğu durumlarda diğer elemanın HG-R veya VG-R şeklinde mesnetlenmesi durumunda oluşacak frekanslar birbirine çok yakındır. Tabi atomik parametrenin küçük değerlerinde VG-R ile elde edilen frekanslar HG-R’den küçükken atomik parametrenin yüksek değerlerinde, gözle fazla seçilemese bile, HG-R’nin boyutsuz frekansları VG-R durumunun boyutsuz frekanslarını geçmiştir. Değişmeyen uç sabit mesnet olduğunda, HG-R ve VG-R durumlarının boyutsuz frekansları arasında belirgin farklılıklar görülmektedir. Değişmeyen uç ankastre iken VG ve HG ile hesaplanan boyutsuz frekanslar arasındaki fark atomik parametrenin artışıyla artarken değişmeyen ucun sabit mesnet olması durumunda tam tersi bir sonuç ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.36. Farklı tipteki nano çerçevelerin temel mod boyutsuz frekanslarının boyutsuz yerel olmayan parametreye göre değişimi **a)** Çerçeve-c **b)** Çerçeve-d ($\theta = 45^\circ$)



Şekil 4.37. Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için temel mod boyutsuz frekanslarının yönelim açısına göre değişimi
a) Çerçeve-b c) Çerçeve-c d) Çerçeve-d

Farklı tipteki nano çerçevelerin farklı boyutsuz atomik parametre değerleri altındaki temel mod boyutsuz frekanslarının çerçeve yönelim açısına göre değişimleri Şekil 4.37’de çizilmiştir. Üyelerin çapı önceki analizlerden farklı olarak 5 nm alınmıştır. Sonuçların irdelenmesine gelince, ilk olarak Çerçeve-b’de klasik durum için frekansların

yönelim açısına göre önce artıp sonra azalma eğiliminde olduğunu görmekteyiz. Ancak yerel olmayan elastisitede durum değişmektedir. Buna göre frekanslar açısı vasıtasıyla belli bir noktaya dek artar ve o noktadan sonra hala açısı artışı için frekanslar yaklaşık sabitleşir. Sabit boyutsuz frekanslar açısı artışının belli bir değerine dek devam eder ve ilgili açısı değerinden sonra boyutsuz frekanslar artık düşüş gösterir. Tabii boyutsuz atomik parametre arttıkça frekansların sabit kalma bölgesi genişlemektedir. Çerçeve-c2 ve d3'te ise frekanslar belli bir açısı değerine dek artmaktadır. Bu belli değerden sonra frekanslar sabitleşmektedir. Çerçeve-b'de görülene paralel olarak, atomik parametre arttıkça frekansların sabit kalma bölgesi genişlemektedir. Atomik parametrenin genel indirgeme etkisine gelince, bu etki genelde frekansların sabit gittiği bölgede daha belirgin olmaktadır.



5. SONUÇLAR

Bu yüksek lisans tezi çalışmasında nano ölçekli eksenel çubuk ve kiriş gibi sürekli sistemlerin ve kafes ve çerçeve gibi ayırık sistemlerin titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Bilindiği üzere nano ve mikro ölçekteki yapıların mekanik analiz sonuçları deneysel verilerle uyuşmamaktadır. Bunun nedeninin küçük ölçekli yapının iç karakteristik boyutlarının yapının maruz kaldığı dış etkilerle etkileşimi olduğu anlaşılmıştır. Bu nedenle bu tip yapıların mekanik davranışları hakkında karakteristik iç boyut etkisini gözeten sürekli ortam formülasyonlarına dayalı araştırmalar, son 15 yıllık süreçte gerçekleştirilmektedir. Özellikle son 3–4 yıllık süreçte konu hakkındaki çalışmaların takibi çok zorlaşmıştır. Bu bağlamda tez çalışması, nano ölçekli sistemlerin mekanik analizinde boyut etkisini gözetebilmek adına, açıkçası konu hakkındaki literatürün en popüler araştırma alanı olan yerel olmayan elastisite teorisini konu almıştır. Yerel olmayan titreşim denklemlerinin analitik metotlarca çözümünden verim alınamayan durumlar için geliştirilmiş olan sonlu elemanlar çözümü sayesinde bir çok etkiyi bir arada gözeten boyut etkili titreşim problemi için detaylı sayısal analizler ve tartışmalar bir önceki bölümde sunulmuştur. Bu tartışmalardan elde edilen ve aşağıda sıralanan genel sonuçlarla beraber öneriler sunulacak ve tez çalışması tamama erdirilecektir:

- Genel bilinen sınır koşullara sahip eksenel çubuklarda C–C elemanının boyutsuz frekansları C–F elemanından daha yüksektir.
- Ekli koşullara sahip eksenel çubuklarda, yay parametresi diğer uç tutulu ise frekansları artırır, serbestse düşürür. Ancak yay eklenti oranı arttıkça frekanslar sürekli artar. Eklenti oranı arttığında ekli ucun rijitliği tam tutulu uca yakınsamaktadır. C–SA’nın frekansları F–SA’dan yüksektir.
- Eksenel çubuklarda kütle eki yer alırsa frekanslar daima düşer. F–MA’nın frekansları C–MA’dan yüksektir.
- Eksenel çubuklarda hem kütle hem yay eki bulunursa frekans parametrelerini değiştirme gücü açısından kütle daha etkindir.
- Yerel olmayan parametrenin eksenel çubuklardaki ilk bariz sonucuna göre, frekanslar atomik parametrenin varlığı ile azalmaktadır. Atomik parametre azaldıkça frekanslar daha da azalmaktadır. Aslında bu sonuç aşırı uç durumlar hariç tez boyunca incelediğimiz tüm yapı çeşitlerinde ortaktır.
- Yerel olmayan teorinin ikinci bariz sonucu, en rijit koşullarda titreşen yapıların frekansları, atomik parametre tarafından diğer elemanlara göre daha çok indirgenmiştir. Tabi bu sonuç da uç durumlar hariç ele aldığımız tüm elemanlarda ortaktır.
- Yerel olmayan teorinin bir diğer ortak sonucu, mod sayısı arttıkça frekanslar daha çok indirgenmektedir.

- Love–Bishop çubuk kuramı ile elde ettiğimiz sonuçlar, kayma ve kütle ataletleri nedeniyle basit çubuk kuramı ile elde edilen sonuçlardan daha düşük çıkmaktadır. İki kuram ile elde edilen sonuçlar mod numarasının artışı ile belirginleşmektedir.
- Yine bu iki formülasyon ile elde edilen frekanslar arasındaki farklılık, uç koşullar rijitleştikçe yükselmektedir.
- Eleman boyutları SRT çubuğunda boyutsuz frekansları etkilemezken boyut artışı LBRT çubuğunda frekansları düşürmektedir.
- Eksenel rijit ortam frekansları yükseltmektedir. Hatta bu parametrenin değeri artarsa atomik parametrenin frekansları düşürme kabiliyeti azalmaktadır.
- Aynı boyutsuz parametreler altında burulma çubuklarının boyutsuz frekansları, eksenel çubuklarıinkiyle aynıdır.
- Eksenel çubuklarda sonlu elemanlar formülasyonunun kullanımından bahsedecek olursak, mod numarası arttıkça hatanın arttığı görülmektedir. Ek olarak, uç koşulların daha rijit olduğu elemanlarda elde edilen sonuçlarda hata biraz daha yüksektir. Hatayı düşürmek için sonlu eleman sayısını artırmak gerekecektir. Tezde, özellikle yüksek sonlu eleman sayısı için elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla birebir aynıdır. Dahası, üç düğümlü sonlu elemanın iki düğümlü elemandan daha doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.
- Belki de bu tez çalışmasının en önemli sonucu, atomik parametre arttıkça sonlu elemanlar yönteminin analitik sonuçlardan sapması azalmaktadır. Bu durum, boyut etkili sonlu elemanlar formülasyonunun nano ölçekli yapıların mekanik analizinde oldukça güçlü bir araç olduğunu göstermektedir.
- Özellikle atomik parametrenin yanı sıra eklenti durumu için analitik yöntemler el çözümüne müsait değildir ancak program kodları ile çözüm alınmıştır. Bunlara ilaveten elastik zemin durumunda kodlar artık pes etmiştir. Dahası Love–Bishop teorisi ile frekans hesabında kodlar hiç çalışmamıştır. Ancak sonlu elemanlar formülasyonu ile bu sayılan sorunların hepsinin başarıyla üstesinden gelinmiştir.
- Kiriş elemanlarla ilgili elde edilen sonuçlara gelince, en yüksek titreşim frekanslarını genel bilinen koşullardan C–C kirişi, en düşük titreşim frekanslarını S–G kirişi vermiştir. Mod numarası arttıkça C–C’nin diğer elemanlarla arasındaki fark açılmıştır.
- Ekli kirişlerde S–MA elemanı temel modda titreşmemiştir. Yay ekinin frekansları artırdığı, kütle ekinin azalttığı tespit edilmiştir.
- Timoshenko kirişi ile elde edilen frekanslar Euler–Bernoulli kiriş teorisi ile elde edilen frekanslardan kayma dönmesi etkisi nedeniyle daha yüksektir.
- Mod numarası arttıkça EBBT ve TBT ile hesaplanan frekanslar arasındaki farklılık artmaktadır.

- Kiriş uç koşulları rijitleştikçe EBBT ve TBT ile elde edilen frekanslar arasındaki fark artmaktadır.
- Yerel olmayan elastisite teorisi için, en rijit koşullara sahip elemanın daha çok frekans indirgenmesine uğradığı görülmektedir.
- Elastik zemin parametreleri kiriş boyutsuz frekanslarını yükseltmektedir. Tabi Pasternak zemini Winkler zeminine göre bu konuda daha etkindir. Eksenel çubuklara benzer şekilde boyutsuz elastik zemin parametreleri arttıkça atomik etkinin frekansları indirgeyici etkisi düşmektedir.
- Kiriş uç koşulları rijitleştikçe elastik zemin parametrelerinin boyutsuz frekansları yükseltme kabiliyeti azalmaktadır.
- Ortam sıcaklığı parametresi boyutsuz frekansları indirgemektedir. Ortam sıcaklığı arttıkça yerel olmayan parametrenin frekansları azaltma gücü daha da şiddetlenmektedir. Ek olarak, sıcaklık artışının oldukça yüksek değerleri için boyutsuz frekanslar artık reel değer olmaktan çıkmaktadır.
- Boyutsuz frekansları etkileme hususunda, kirişlerde de kütle ekinin yay ekinden daha güçlü olduğu tespit edilmiştir.
- Eleman boyutlarının boyutsuz frekanslar üzerindeki etkisinin kiriş ve çubuk kuramları arasındaki analojiyi doğruladığı görülmüştür. Buna göre SRT gibi EBBT ile elde edilen frekanslar eleman boyutlarından etkilenmezken eleman boyutlarının artışı durumunda nasıl LBRT için frekanslar azalıyorsa TBT’de de frekanslar azalış göstermektedir. Tabi boyutlar arttıkça atomik parametrenin frekans düşürme etkinliği azalmaktadır. Boyutların TBT’de frekans düşürme etkinliği mod numarasının artışı ile daha da yükselmektedir.
- Sonlu elemanlar formülasyonunun kullanımının kirişlerde de ciddi bir şekilde avantaj sağladığı tespit edilmiştir. Atomik etki, çift parametrelili elastik zemin, sıcaklık ve eklenti durumunda kesinlikle hesaplanamayan frekanslar, sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir. Dahası, aynı sayıdaki sonlu elemanlar ile hesaplanan kiriş frekanslarındaki yakınsama, eksenel çubuk frekanslarındaki yakınsamadan daha yüksektir.
- Yerel olmayan elastisitedeki bir paradoks olan konsol kirişin temel modda atomik parametreyle frekans yükselmesi mevzusunun sonlu elemanlarca üstesinden gelinmiştir.
- Ayırık sistemler hakkında birkaç noktaya değinmek istersek, yapı küçüldüğünde yerel olmayan frekansların klasik frekanslardan daha fazla uzaklaştığı tespit edilmiştir. Bu uzaklaşma durumu, mod numarası arttıkça kendini iyice belli etmiştir. O halde yerel olmayan parametre, yapı boyutları makrodan mikroya, hatta nanoya gittiği durumlarda kesinlikle gözardı edilemez bir etkidir.

Günümüzde teknolojinin hızlanmasına bağlı olarak nano/mikro elektro mekanik sistem teknolojisindeki gelişmeler, bu sistemlerin ve onları oluşturan üyelerin mekanik davranışının anlaşılmasını zorunlu kılmıştır. Bu tip sistemlerin mekanik modelini matematiksel modele dönüştürdükten sonra matematiksel modelin çıktılarını elde edebiliyor olmak, mühendisliğin tasarım işlevinin gerçekleştirilebilmesi için büyük önem arz etmektedir. Ancak matematiksel modellerin yetersiz kaldığı durumlarda alternatif çözümler geliştirilmelidir ki, bu tez çalışmasının en önemli sonucu olarak, tez boyunca ele alınmış olan formülasyonun bahsedilen alternatif yol olabilirlik noktasında öne çıkan çok güçlü bir işlem aracı olduğunu vurgulamalıyız.

Son olarak belirtebiliriz ki, doğru ifade edilebilecek ve programlanabilecek sonlu elemanlar yöntemi ile bu çalışmada yapılanlardan hareketle sürekli ve ayrık sistemlerin boyut etkili mekanik analizi hakkında birçok özgün çalışma planlanabilir. İçinden sıvı geçen cisimler, elektrik/manyetik/piezo etkiler altındaki olma, fonksiyonel derecelenmiş veya poroz malzemeden imal edilme, lineer/nonlineer daralan kesite sahip olma, malzeme nonlinearitesine sahip olma veya viskoelastik ortamda bulunma durumu gibi bir çok farklı etmen için farklı çalışmalar gerçekleştirilebilir. Boyut etkili teoriler sadece yerel olmayan elastisite değildir. Diğer boyut etkili teoriler de mekanik analizlerde kullanılabilir. Tezde ele alınan yapıların titreşiminin yanı sıra, burkulması veya eğilmesi de düşünülebilir. Bütün tezde ele alınanlar ve ek olarak belirtilenler “nano ölçekli sistemlerin mekanik modellere dayalı tasarımı ve optimizasyonu” gibi oldukça inovatif bir çalışma alanı oluşturabilir.

6. KAYNAKLAR

- Adali, S. 2009. Variational principles for transversely vibrating multi-walled carbon nanotubes based on nonlocal Euler-Bernoulli beam models, *Nano Letters*, 9: 1737–1741.
- Adhikari, S., Murmu, T. and McCarthy, M.A. 2013. Dynamic finite element analysis of axially vibrating nonlocal rods. *Finite Elements in Analysis and Design*, 630: 42-50.
- Adhikari, S., Murmu, T. and McCarthy, M.A. 2014. Frequency domain analysis of Nonlocal rods embedded in an elastic medium. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 59: 33-40.
- Akgöz, B. and Civalek, Ö. 2011. Application of strain gradient elasticity theory for buckling analysis of protein microtubules. *Current Applied Physics*, 11(5): 1133-1138.
- Akgöz, B. and Civalek, Ö. 2012. Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory. *Journal of Vibration and Control*, 20(4): 606-616.
- Akgöz, B. and Civalek, Ö. 2016. Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory. *Acta Astronautica*, 19: 1-12.
- Akinwande, D. 2011. Carbon Nanotube and Graphene Device Physics. Cambridge University Press, New York, 250 p.
- Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A. and Mahmoud, F.F. 2013. Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(7): 2035-2041.
- Anonymous 1: C_n Fullerenes. <http://www.nanotube.msu.edu/fullerene/fullerene-isomers.html> [Son erişim tarihi: 16.01.2019].
- Anonymous 2: IBM spelled with 35 Xenon Atoms. <https://www-03.ibm.com/press/us/en/photo/28500.wss> [Son erişim tarihi: 19.01.2019].
- Anonymous 3: Nanocars. https://www.jmtour.com/about/photos_graphics/nanocars/ [Son erişim tarihi: 02.02.2019].
- Anonymous 4: Applications of Carbon Nanotubes. <https://www.azonano.com/article.aspx?ArticleID=4842> [Son erişim tarihi: 19.03.2019].
- Anonim 1: Dünya da ve Türkiye de Nano Teknoloji Yatırımları. <http://www.nanoteknolojinedir.com/?Page=news&id=33&first=60&end=20> [Son erişim tarihi: 08.01.2019].
- Anonim 2: Nanoteknoloji Nerelerde Kullanılır? <https://ahmetakgonul.weebly.com/kullan305m-alanlar305.html> [Son erişim tarihi: 12.02.2019].
- Anonim 3: İnşaat Sektörünün Geleceğinde Inovasyon Ve Nanoteknoloji. <http://www.insaatdunyasi.com.tr/uncategorized/78-insaat-sektorunun-geleceğinde-inovasyon-ve-nanoteknoloji/> [Son erişim tarihi: 13.02.2019].

- Anonim 4: Nano Teknoloji Ve Tekstil Sektöründe ki Uygulama Alanları.
<http://www.tekstildershanesi.com.tr/makaleler/nano-teknoloji-ve-tekstil-sektorunde-ki-uygulama-alanlari-3762.html> [Son erişim tarihi: 13.02.2019].
- Ansari, R. and Ramezannezhad, H. 2011. Nonlocal Timoshenko beam model for the large-amplitude vibrations of embedded multiwalled carbon nanotubes including thermal effects. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(6): 1171-1178.
- Ansari, R., Gholami, R. and Sahmani, S. 2012. Prediction of compressive post-buckling behavior of single-walled carbon nanotubes in thermal environments. *Applied Physics A*, 113(1):145-153.
- Ansari, R., Shojaei, M.F., Mohammadi, V., Gholami, R. and Rouhi, H. 2015. Buckling and postbuckling of single-walled carbon nanotubes based on a nonlocal Timoshenko beam model. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 95(9): 939-951.
- Apuzzo, A., Barretta, R., Faghidian, S.A., Luciano, R. and de Sciarra, F.M. 2018. Free vibrations of elastic beams by modified nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Engineering Science*, 133: 99-108.
- Arda, M. and Aydogdu, M. 2014. Torsional statics and dynamics of nanotubes embedded in an elastic medium. *Composite Structures*, 114: 80-91.
- Argyris, J.H. 1954. Energy Theorems and Structural Analysis.
- Aria, A.I. and Friswell, M.I. 2019. A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams. *Composites Part B: Engineering*, 166: 233-246.
- Aydogdu, M. 2009a. Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(5): 861-864.
- Aydogdu, M. 2009b. A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(9): 1651-1655.
- Aydogdu, M. 2012. Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity. *Mechanics Research Communications*, 43: 34-40.
- Bao, S., Cao, J., and Wang, S. 2019. Vibration analysis of nanorods by the Rayleigh-Ritz method and truncated Fourier series. *Results in Physics*, 12: 327-334.
- Barretta, R., Feo, L., Luciano, R. and de Sciarra, F.M. 2016 Application of an enhanced version of the Eringen differential model to nanotechnology. *Composites Part B: Engineering*, 96: 274-280.
- Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N and Boumia, L. 2008. The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 41(22): 225404.
- Bethune, D.S., Kiang, C.H., de Vries, M.S., Gorman, G., Savoy, R., Vazquez, J. and Beyers, R. 1993. Cobalt-catalysed growth of carbon nanotubes with single-

- atomic-layer walls. *Nature*, 363: 605-607.
- Bishop, R.E.D. 1952. Longitudinal waves in beams. *Aeronautical Quarterly*, 3(2): 280-293.
- Bozkaya, Y. 2006. İleri teknolojiler araştırma birimi.
<http://www.itab.anadolu.edu.tr/itab/pdf/nylp.pdf> [Son erişim tarihi: 12.02.2019].
- Bruus, H. 2004. Introduction to Nanotechnology. Department of Micro and Nanotechnology, Technical University of Denmark, Lyngby, 97 p.
- Cammarata, R.C. 1994. Surface and interface stress effects in thin films. *Progress in Surface Science*, 46(1): 1-38.
- Challamel, N., Zhang, Z., Wang, C.M., Reddy, J.N., Wang, Q., Michelitsch, T. and Collet, B. 2014. On nonconservativeness of Eringen's nonlocal elasticity in beam mechanics: correction from a discrete-based approach. *Archive of Applied Mechanics*, 84: 1275-1292.
- Chakraverty, S. and Behera, L. 2016. Static and Dynamic Problems of Nanobeams and Nanoplates. World Scientific.
- Challamel, N. and Wang, C.M. 2008. The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved. *Nanotechnology*, 19(34): 345703.
- Chandrupatla, T.R. ve Belegundu, A.D. 2017. Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş (Türkçe Çeviri). Literatür Yayıncılık, İstanbul, 501 s.
- Chen, K.I., Li, B.R. and Chen, Y.T. 2011. Silicon nanowire field-effect transistor-based biosensors for biomedical diagnosis and cellular recording investigation. *Nano Today*, 6: 131-154.
- Chopra, N.G. and Zettl, A. 1997. Measurement of the elastic modulus of a multi-wall boron nitride nanotube. *Solid State Communications*, 105(5): 297-300.
- Civalek, Ö. and Demir, Ç. 2011. Bending analysis of microtubules using Nonlocal Euler-Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5): 2053-2067.
- Civalek, Ö. and Demir, C. 2016. A simple mathematical model of microtubules surrounded by an elastic matrix by nonlocal finite element method. *Applied Mathematics and Computation*, 289: 335-352.
- Cosserat, E. and Cosserat, F. 1909. Théorie Des Corps Déformables. Hermann and Sons, Paris, 390 p.
- Courant, R. 1943. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(1): 1-23.
- Çıracı, S. 2005. Nanoteknolojide yeni ufuklar, *Bilim ve Teknik Dergisi*.
- Çıracı, S. 2006. Nanoteknolojide yeni ufuklar, *Bilim ve Teknik Dergisi*.
- Demir, Ç. and Civalek, Ö. 2013. Torsional and longitudinal frequency and wave response of microtubules based on the nonlocal continuum and nonlocal discrete models. *Applied Mathematical Modelling*, 37(22): 9355-9367.
- Demir, Ç. and Civalek, Ö. 2017. On the analysis of microbeams. *International Journal of Engineering Science*, 121: 14-33.

- Demir, Ç. and Civalek, Ö. 2017. A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix. *Composite Structures*, 168: 872-884.
- de Sciarra, F.M. and Barretta, R. 2014. A new nonlocal bending model for Euler–Bernoulli nanobeams. *Mechanics Research Communications*, 62: 25-30.
- Dresselhaus, M.S., Dresselhaus, G. and Saito, R. 1995. Physics of carbon nanotubes. *Carbon*, 33(7): 883-891.
- Ebrahimi, F. and Barati, M.R. 2016. A nonlocal higher-order shear deformation beam theory for vibration analysis of size-dependent functionally graded nanobeams. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 41(5): 1679-1690.
- Ebrahimi, F. and Salari, E. 2015a. Nonlocal thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environment. *Acta Astronautica*, 113: 29-50.
- Ebrahimi, F. and Salari, E. 2015b. Thermo-mechanical vibration analysis of nonlocal temperature-dependent FG nanobeams with various boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 78: 272-290.
- Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E. and Mahmoud, F.F. 2013. Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37(7): 4787-4797.
- Eltaher, M.A., Emam, S.A. and Mahmoud, F.F. 2012. Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 218(14): 7406-7420.
- Eltaher, M.A., Khairy, A., Sadoun, A.M. and Omar, F.A. 2014. Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 229: 283-295.
- Eltaher, M.A., Samir, A.E. and Mahmoud, F.F. 2013. Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams. *Composite Structures*, 96: 82-88.
- Eptaimeros, K.G., Koutsoumaris, C.C. and Tsamasphyros, G.J. 2016. Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115-116: 68-80.
- Eringen, A.C. 1976. *Continuum Physics*. Academic Press, London, 274 p.
- Eringen, A.C. 2002. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer-Verlag, New York, 376 p.
- Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B. 1972. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3): 233-248.
- Eringen, A.C. 1972a. Nonlocal polar elastic continua. *International Journal of Engineering Science*, 10(1): 1-16.
- Eringen, A.C. 1972b. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10(5): 425-435.
- Eringen, A.C. 1972c. On nonlocal fluid mechanics. *International Journal of Engineering Science*, 10(6): 561-575.

- Eringen, A.C. 1977a. Screw dislocation in non-local elasticity. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 10(3): 671.
- Eringen, A.C. 1977b. Edge dislocation in nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 15(3): 177-183.
- Eringen, A.C. and Kim, B.S. 1977. Relation between nonlocal elasticity and lattice-dynamics. *Crystal Lattice Defects*, 7(2): 51-57.
- Eringen, A.C. 1983. On differential equations of non local elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54: 4703.
- Erkoç, Ş. 2007. Nanobilim ve Nanoteknoloji. ODTÜ Yayıncılık, Ankara, 107 p.
- Fernández-Sáez J., Zaera, R., Loya, J.A. and Reddy, J.N. 2016. Bending of Euler–Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: A paradox resolved. *International Journal of Engineering Science*, 99: 107-116.
- Ferrari, M., Granik, V.T., Imam, A. and Nadeau, J.C. 1997. Advances in Doublet Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 214 p.
- Fish, J. ve Belytschko, T. 2016. Sonlu Elemanlar Yöntemine Giriş (Türkçe Çeviri). Nobel Yayıncılık, Ankara, 327 s.
- Fleck, N.A. and Hutchinson, J.W. 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 41(12): 1825-1857.
- Fleck, N.A. and Hutchinson, J.W. 2001. A reformulation of strain gradient plasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 49(10): 2245-2271.
- Ghadiri, M. and Jafari, A. 2018. A nonlocal first order shear deformation theory for vibration analysis of size dependent functionally graded nano beam with attached tip mass: An exact solution. *Journal of Solid Mechanics*, 10(1): 23-37.
- Gheshlaghi, B., Hasheminejad, S.M. and abbasian, S. 2010. Size dependent torsional vibration of nanotubes. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(1): 45-48.
- Gopalakrishnan, S. and Narendar, S. 2013. Wave Propagation in Nanostructures. Springer.
- Granik, V.T. and Ferrari, J.W. 1993. Microstructural mechanics of granular media. *Mechanics of Materials*, 15(4): 301-322.
- Gul, U., Aydogdu, M. 2017. Wave propagation in double walled carbon nanotubes by using doublet mechanics theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 93: 345-357.
- Gul, U., Aydogdu, M. and Gaygusuzoglu, G. 2017. Axial dynamics of a nanorod embedded in an elastic medium using doublet mechanics. *Composite Structures*, 160: 1268-1278.
- Gul, U., Aydogdu, M. 2018. Structural modelling of nanorods and nanobeams using doublet mechanics theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 14(2): 195-212.
- Guo, S.-Q. and Yang, S.-P. 2012. Axial vibration analysis of nanocones based on nonlocal

- elasticity theory. *Acta Mechanica Sinica*, 28(3): 801–807.
- Gurtin, M.E. and Murdoch, A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57(4): 291-323.
- Gurtin, M.E. and Murdoch, A.I. 1978. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 14(6): 431-440.
- Gürbuak, O. 2009. Moleküler dinamik (MD) simülasyonla n-heptan+n-eicosan karışımlarının bazı termofiziksel özelliklerinin incelenmesi. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi, İzmir, 68 s.
- Gürses, M. 2015. Nano boyutlu sektör ve boşluklu sektör plakların lokal olmayan elastisite teorisi ile titreşim ve eğilme analizi. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 74 s.
- Güven, U. 2014. Love–Bishop rod solution based on strain gradient elasticity theory. *Comptes Rendus Mecanique*, 342(1): 8-16.
- Haberman, R. 2013. Applied Partial Differential Equations: with Fourier Series and Boundary Value Problems.
- Hadjo, L.E. and Eringen, A.C. 1979. Application of nonlocal theory to electromagnetic dispersion. *International Journal of Engineering Science*, 17(6): 785-791.
- Hanley, L., Whitten, J.L., and Anderson, S.L. 1988. Collision-induced dissociation and ab initio studies of boron cluster ions: determination of structures and stabilities. *The Journal of Physical Chemistry*, 82(25): 5803-5812.
- Heireche, H., Tounsi, A., Benhassaini, H., Benzair, A., Bendahmane, M., Missouri, M. and Mokadem, S. 2010. Nonlocal elasticity effect on vibration characteristics of protein microtubules. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(9): 2375-2379.
- Heyliger, P.R. and Reddy, J.N. 1988. A higher-order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 126(2): 309-326.
- Hosseini, A.H., Rahmani, O., Nikmehr, M. and Golpayegani, I.F. 2015. Axial vibration of cracked nanorods embedded in elastic foundation based on a nonlocal elasticity model. *Sensor Letters*, 14(10): 1019-1025.
- Hsu, J.-C., Lee, H.-L. and Chang, W.-J. 2011. Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory. *Current Applied Physics*, 11(6): 1384-1388.
- Iijima, S. 1991. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 354: 56-58.
- Iijima, S. and Ichihashi, T. 1993. Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *Nature*, 363: 603-605.
- Islam, Z. M., Jia, P. and Lim, C.W. 2014. Torsional wave propagation and vibration of circular nanostructures based on nonlocal elasticity theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 6(2): 1450011.
- Işık, Ç. 2015. Nano ölçekli mekanik sistemlerin modellenmesinde yerel olmayan sonlu eleman formülasyonu. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 143 s.
- Jandaghian, A.A. and Rahmani, O. 2015. On the buckling behavior of piezoelectric

- nanobeams: An exact solution. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(8): 3175-3182.
- Janghorban, M. 2012. Two different types of differential quadrature methods for static analysis of microbeams based on nonlocal thermal elasticity theory in thermal environments. *Archive of Applied Mechanics*, 82(5): 669–675.
- Jhi, S.-H., and Kwon, Y.-K. 2004. Hydrogen adsorption on boron nitride nanotubes: A path to room-temperature hydrogen storage. *Physical Review B*, 69: 245407.
- Karlicic, D., Murmu, T., Adhikari, S. and McCarthy, M. 2013. Non-local Structural Mechanics. Iste–Wiley.
- Karlicic, D.Z., Ayed, S. and Flaieh, E. 2018. Nonlocal axial vibration of the multiple Bishop nanorod system. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24(6): 1668-1691.
- Kahrobaian, M.H., Asghari, M. and Ahmadian, M.T. 2013a. Longitudinal behavior of strain gradient bars. *International Journal of Engineering Sciences*, 66-67: 44-59.
- Kahrobaian, M.H., Asghari, M. and Ahmadian, M.T. 2013b. Strain gradient beam element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 68: 63-75.
- Kahrobaian, M.H., Asghari, M. and Ahmadian, M.T. 2014. A Timoshenko beam element based on the modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 79: 75-83.
- Kahrobaian, M.H., Tajalli, S.A., Movahhedy, M.R., Akbari, J. and Ahmadian, M.T. 2011. Torsion of strain gradient bars. *International Journal of Engineering Science*, 49: 856-866.
- Kahrobaian, M.H., Asghari, M. and Ahmadian, M.T. 2015. A strain gradient Timoshenko beam element: application to MEMS. *Acta Mechanica*, 226(2): 505-525.
- Khodabakhshi, P. and Reddy, J.N. 2015. A unified integro-differential nonlocal model. *International Journal of Engineering Science*, 95: 60-75.
- Kim, J., Lee, S., Seo, D. and Seo, Y.S. 2004. Hydrogen adsorption on boron nitride nanotubes: A path to room-temperature hydrogen storage. *Materials Chemistry and Physics*, 137(1): 182-187.
- Koiter, W.T. 1964. Couple stresses in the theory of elasticity. I & II. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 67: 17-44.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z and Wang, K. 2008. The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*, 46(5): 427-437.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. 2009. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47(4): 487-498.
- Kumanek, B. and Janas, D. 2019. Thermal conductivity of carbon nanotube networks: a review. *Journal of Materials Science*, 54(10): 7397-7427.
- Kwon, Y. W. and Bang, H. 2000. The finite element method using MATLAB. CRC Press.
- Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. 2003. Experiments and

- theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8): 1477-1508.
- Lazopoulos, K.A. and Lazopoulos, A.K. 2010. Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29(5): 837-843.
- Lee, C.H., Xie, M., Kayastha, V., Wang, J., and Yap, Y.K. 2010. Patterned growth of boron nitride nanotubes by catalytic chemical vapor deposition. *Chemistry of Materials*, 22: 1782-1787.
- Levinson, M. 1981. A new rectangular beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 74: 81-87.
- Li, C. 2014. Torsional vibration of carbon nanotubes: Comparison of two nonlocal models and a semi-continuum model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 82: 25-31.
- Li, J., Lu, Y., Ye, Q., Cinke, S., Han, J. and Meyyappan, M. 2003. Carbon nanotube sensors for gas and organic vapor detection. *Nano Letters*, 3(7): 929-933.
- Li, L., Hu, Y. and Ling, L. 2015. Flexural wave propagation in small-scaled functionally graded beams via a nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*, 133: 1079-1092.
- Li, L., Hu, Y. and Xiaobai, L. 2016. Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115-116: 135-144.
- Li, L., Xiaobai, L. and Hu, Y. 2016. Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material. *International Journal of Engineering Science*, 102: 77-92.
- Li, Y.S., Ma, P. and Wang, W. 2015. Bending, buckling, and free vibration of magnetoelectroelastic nanobeam based on nonlocal theory. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 27(9): 1139-1149.
- Li, X., Li, L., Hu, Y., Ding, Z. and Deng, W. 2017. Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*, 165: 250-265.
- Li, X.-F., Shen, Z.B. and Lee, K.Y. 2017. Axial wave propagation and vibration of nonlocal nanorods with radial deformation and inertia. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97(5): 602-616.
- Li, X.-F., Tang, G.-J., Shen, Z.B. and Lee, K.Y. 2016. Size-dependent resonance frequencies of longitudinal vibration of a nonlocal Love nanobar with a tip nanoparticle. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(6): 1529-1542.
- Lim, C.W., Islam, M.Z. and Zhang, G. 2015. A nonlocal finite element method for torsional statics and dynamics of circular nanostructures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 94-95: 232-243.
- Lim, C.W., Li, C. and Yu, L. 2012. Free torsional vibration of nanotubes based on nonlocal stress theory. *Journal of Sound and Vibration*, 331(12): 2798-2808.

- Lim, C.W., Yang, Q. and Zhang, J.-B. 2012. Thermal buckling of nanorod based on non-local elasticity theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(5): 496-505.
- Liu, Y.Y., Wang, X.Y., Cao, Y., Chen, X.D., Xie, S.F., Zheng, X.J. and Zeng, H.D. 2013. A flexible blue light-emitting diode based on ZnO nanowire/polyaniline heterojunctions. *Journal of Nanomaterials*, 870254.
- Love, A.E.H. 1944. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover, New York.
- Loya, J.A., Aranda-Ruiz, J. and Fernández-Sáez, J. 2014. Torsion of cracked nanorods using a nonlocal elasticity model. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 47(11): 115304.
- Lu, L., Guo, X. and Zhao, J. 2017. Size-dependent vibration analysis of nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Engineering Science*, 116: 12-24.
- Lu, P., Lee, H.P., Lu, C. and Zhang, P.Q. 2007. Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures*, 44(16): 5289-5300.
- Ma, H.M., Gao, X.-L. and Reddy, J.N. 2008. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(12): 3379-3391.
- Miller, R.E. and Shenoy, V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 11: 139-147.
- Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1): 415-448.
- Meyyappan, M. 2005. Carbon Nanotubes: Science and Applications. CRC Press, United States of America, 279 p.
- Moaveni, S. 2015. Sonlu Elemanlar Analizi-Teori ve ANSYS ile Uygulamalar (Türkçe Çeviri). Palme Yayıncılık, Ankara, 906 s.
- Mukopadhyay, S., Scheicher, R.H., Pandey, R., and Karna, S.P. 2011. Sensitivity of boron nitride nanotubes toward biomolecules of different polarities. *Nanoparticles and Nanostructures*, 2: 2442-2447.
- Murmu, T. and Pradhan, S.C. 2008. Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science*, 46(4): 854-859.
- Murmu, T. and Adhikari, S. 2011. Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip. *Mechanics Research Communications*, 38(1): 62-67.
- Murmu, T., Adhikari, S. and Wang, C.Y. 2011. Torsional vibration of carbon nanotube-buckyball systems based on nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(6): 1276-1280.
- Murmu, T., Adhikari, S. and McCarthy, M.A. 2014. Axial vibration of embedded nanorods under transverse magnetic field effects via nonlocal elastic continuum theory. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 11(5): 1230-

1236.

- Mustapha, K. and Zhong, Z.W. 2010. Free transverse vibration of an axially loaded non-prismatic single-walled carbon nanotube embedded in a two-parameter elastic medium. *Computational Materials Science*, 50(2): 742-751.
- Nazemnezhad, R. and Kamali, K. 2018. Free axial vibration analysis of axially functionally graded thick nanorods using nonlocal Bishop's theory. *Steel and Composite Structures*, 28(6): 749-758.
- Numanoğlu, H.M. 2017. Nanoyapıların kiriş ve çubuk modellerinin yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak titreşim analizi. Bitirme Tezi, Akdeniz Üniversitesi (yayınlanmamış), Antalya.
- Numanoğlu, H.M., Akgöz, B. and Civalek, Ö. 2018. On dynamic analysis of nanorods. *International Journal of Engineering Science*, 130: 33-50.
- Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2019a. On the dynamics of small-sized structures, *International Journal of Engineering Science*, 145: 103164.
- Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2019b. On the torsional vibration of nanorods surrounded by elastic matrix via nonlocal FEM, *International Journal of Mechanical Sciences*, 161–162: 105076.
- Oden, J.T. 1972. Finite elements of nonlinear continua.
- Omurtag, M.H. 2010. Çubuk sonlu elemanlar. Birsen Yayınevi.
- Özer, M. 2008. Nano bilim ve nanoteknoloji: Ülke güvenliği/etkinliği açısından doğru modelin belirlenmesi. Yüksek lisans tezi, Kara Harp Okulu, Ankara, 197 s.
- Park, S.K. and Gao, X.-L. 2006. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16: 2355-2359.
- Peddie, J., Buchanan, R. and McNitt, R.P. 2003. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41(3-5): 305-312.
- Pham-Huu, C., Keller, N., Ehret, G. and Ledoux, M.J. 2001. The first preparation of silicon carbide nanotubes by shape memory synthesis and their catalytic potential. *Journal of Catalysis*, 200(2): 400-410.
- Philip Wong, H.-S. and Akinwande, D. 2011. Carbon Nanotube and Graphene Device Physics. Cambridge University Press, New York, 250 p.
- Piazza, G., Stephanou, P.J., and Pisano, A.P. 2006. Piezoelectric aluminum nitride vibrating contour-mode MEMS resonators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 15(6): 1406-1418.
- Polizzotto, C. 2001. Nonlocal elasticity and related variational principles. *International Journal of Solids and Structures*, 38(42-43): 7359-7380.
- Pradhan, S.C. 2012. Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50: 8-20.
- Pradhan, S.C. and Mandal, U. 2013 Finite element analysis of CNTs based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory including thermal effect. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 53: 223-232.

- Pradhan, S.C. and Reddy, G.K. 2011. Buckling analysis of single walled carbon nanotube on Winkler foundation using nonlocal elasticity theory and DTM. *Computational Materials Science*, 50(3): 1052-1056.
- Prakash, P., Sundaram, K.M. and Bennet, M.A. 2018. A review on carbon nanotube field effect transistors (CNTFETs) for ultra-low power applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 89: 194-203.
- Radosavljevic, M., Appenzeller, J., Derycke, V., Martel, R. and Avouris, P. 2003. Electrical properties and transport in boron nitride nanotubes. *Applied Physics Letters*, 82(23): 4131.
- Rafii-Tabar, H. 2008. *Computational Physics of Carbon Nanotubes*. Cambridge University Press, Cambridge, 493 p.
- Rahmani, O. and Pedram, O. 2014. Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory. *International Journal of Engineering Science*, 77: 55-70.
- Reddy, J.N. 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51: 745-752.
- Reddy, J.N. 2007. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8): 288-307.
- Reddy, J.N. and Pang, S.D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103: 023511.
- Roco, M.C. 2007. National nanotechnology initiative—past, present, future. In: *Handbook on Nanoscience, Engineering and Technology*. Taylor and Francis, Amsterdam, pp. 1-26.
- Romano G. and Barretta, R. 2017. Nonlocal elasticity in nanobeams: the stress-driven integral model. *International Journal of Engineering Science*, 115: 14-27.
- Roostai, H. and Haghpanahi, M. 2014. Vibration of nanobeams of different boundary conditions with multiple cracks based on nonlocal elasticity theory. *Applied Mathematical Modelling*, 38(3): 1159-1169.
- Rueckes, T., Kim, K., Joselevich, E., Tseng, G.Y., Cheung, C.L. and Lieber, M. 2000. Carbon nanotube-based nonvolatile random access memory for molecular computing. *Science*, 289(5476): 94-97.
- Ruoff, R.S. and Lorents, D.C. 1995. Mechanical and thermal properties of carbon nanotubes. *Carbon*, 33(7): 925-930.
- Schatten, H. 2015. Brief Overview of the Cytoskeleton. In: Schatten, H. (Ed.), *The Cytoskeleton in Health and Disease*. Springer, New York, pp. 3-7.
- Schlapbach, L. and Züttel, A. 2001. Hydrogen-storage materials for mobile applications. *Nature*, 414: 353-358.
- Shen, Z.B., Li, X.-F., Sheng, L.-P. and Tang, G.-J. 2012. Transverse vibration of nanotube-based micro-mass sensor via nonlocal Timoshenko beam theory. *Computational Materials Science*, 53(1): 340-346.
- Sudak, L.J. 2003. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal

- continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 94(11): 7281-7287.
- Sun, X.H., Li, C.P., Wong, W.K., Wong, N.B., Lee, C.S., Lee, S.T. and Teo, B.K. 2002. Formation of silicon carbide nanotubes and nanowires via reaction of silicon (from disproportionation of silicon monoxide) with carbon nanotubes. *Journal of the American Chemical Society*, 124(48): 14464-14471.
- Şimşek, M. and Yurtcu, H.H. 2013. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory. *Composite Structures*, 97: 378-386.
- Tang, Y., Liu, Y. and Zhao, D. 2017. Wave dispersion in viscoelastic single walled carbon nanotubes based on the nonlocal strain gradient Timoshenko beam model. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 87: 301-307.
- Tepe, A. 2007. Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi. Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 100 s.
- Thai, H.T. 2012. A nonlocal beam theory for bending, buckling and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 52: 56-64.
- Thai, H.T. and Vo, T.P. 2012. A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 54: 58-66.
- Thai, S., Thai, H.-T., Vo, T.P and Patel, V.I. 2018. A simple shear deformation theory for nonlocal beams. *Composite Structures*, 183: 262-270.
- Togun, N. and Bağdatlı, S.M. 2016. Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on non-local Euler-Bernoulli beam theory. *Mathematical and Computational Applications*, 21(1): 3.
- Toupin, R.A. 1962. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1): 385-414.
- Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. and Topp, L.J. 1956. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9): 805-823.
- Üreyen, M.E. 2006. Nanoteknoloji ve Tekstil Uygulamaları. *Gemsan Teknik Bülten*, Mayıs-Ağustos: 2-7.
- Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. 2002. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10): 2731-2743.
- Yayli, M.Ö. 2018. On the torsional vibrations of restrained nanotubes embedded in an elastic medium. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40: 419.
- Yayli, M.Ö., Kandemir, S.Y. and Erdem, A. 2019. Torsional vibration of cracked carbon nanotubes with torsional restraints using Eringen's nonlocal differential model. *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*, 38(1): 70-87.
- Xu, X.-J., Zheng, M.-L. and Wang, X.-C. 2017. On vibrations of nonlocal rods: Boundary conditions, exact solutions and their asymptotics. *International Journal of*

- Engineering Science*, 119: 217-231.
- Zhu, X. and Li, L. 2017. On longitudinal dynamics of nanorods. *International Journal of Engineering Science*, 120: 129-145.
- Zhu, L. and Li, L. 2017. Twisting statics of functionally graded nanotubes using Eringen's nonlocal integral model. *Composite Structures*, 178: 87-96.
- Zidour, M., Benrahou, K.H., Semmah, A., Naceri, A., Belhadj, H.A. Bakhti, K. and Tounsi, A. 2012. The thermal effect on vibration of zigzag single walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Computational Materials Science*, 51(1): 252-260.
- Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. 1967. *The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill Publishing, London.
- Xu, X.-J., Wang, X.-C., Zheng, M.L. and Ma, Z. 2017. Bending and buckling of nonlocal strain gradient elastic beams. *Composite Structures*, 160: 366-377.
- Wang, B., Zhao, J. and Zhou, S. 2010. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29(4): 591-599.
- Wang, C.M., Zhang, Y.Y., Ramesh, S.S. and Kitipornchai, S. 2006. Buckling analysis of micro- and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 39(17): 3904.
- Wang, G.-F. and Feng, X.-Q. 2007. Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams. *Applied Physics Letters*, 90: 231904.
- Wang, G.-F. and Feng, X.-Q. 2009. Timoshenko beam model for buckling and vibration of nanowires with surface effects. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 42(15): 155411.
- Wang, J. 2005. Carbon-nanotube based electrochemical biosensors: a review. *Electroanalysis*, 17(1): 7-14.
- Wang, Y.B., Zhu, X.W. and Dai, H.H. 2016. Exact solutions for the static bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen's two-phase local/nonlocal model. *AIP Advances*, 6(8): 085114.
- Wang, Q. and Liew, K.M. 2007. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures. *Physics Letters A*, 363(3): 236-242.
- Wang, Q. and Varadan, V.K. 2006. Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics. *Smart Materials and Structures*, 15(2): 659.
- Que, L., Park, J.S., and Gianchandani, Y.B. 2001. Bent-beam electrothermal actuators—Part I: Single beam and cascaded devices. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 10(2): 247-254.

7. EKLER

Ek-1: Taylor seri açılımı

a, x, n, c_n ve R reel sayı olmak üzere

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (\text{E1.1})$$

şeklinde tanımlanan seriye Taylor Serisi denir. Burada herhangi bir x değeri için $x-a < R$ olursa seri $(a-R, a+R)$ aralığında yakınsaktır. Burada

$$F(a) = c_0, \quad F'(a) = c_1, \quad F''(a) = 2c_2, \quad \dots, \quad F^{(n)}(a) = n!c_n \quad (\text{E1.2})$$

olur. Bu ifadeler seri açılımında yerine yerleştirilirse

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \end{aligned} \quad (\text{E1.3})$$

elde edilmektedir. Seri açılımının üçüncü teriminden itibaren görülmekte olan terimler ilk iki terimin yanında oldukça küçük kalmaktadır. Bu terimler ihmal edilir ve geriye kalan ifade düzenlenirse

$$\frac{dF}{dx}(a) = \frac{F(x) - F(a)}{x-a} \quad (\text{E1.4})$$

yazılabilir. O zaman bir noktadaki adi türev (E1.4)'teki gibi belirlenir. Bu açılımın iki bilinmeyenli şekli

$$\begin{aligned} F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n (t-b)^n &= c_0 + c_1(x-a)(t-b) + c_2(x-a)^2(t-b)^2 + \dots \\ &+ c_n(x-a)^n(t-b)^n + \dots \end{aligned} \quad (\text{E1.5})$$

olarak verilebilir. Burada görülen ifadelerden x ve t bu tez açısından zamanı temsil etmektedir. Tabi tez boyunca zaman parametresi kullanılmamıştır. Dolayısı ile bunu içeren bir işleme gerek yoktur. Konuma dair ifadeler

$$\begin{aligned} F(a, t) = c_0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=a} &= c_1(t-b), \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 2c_2(t-b)^2, \quad \dots, \\ \left. \frac{\partial^{(n)} F}{\partial x^{(n)}} \right|_{x=a} &= n!c_n(t-b)^n \end{aligned} \quad (\text{E1.6})$$

şeklindedir. Bunlar (E1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F(x,t) = & F(a,t) + \frac{1}{(t-b)} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=a} (x-a)(t-b) + \frac{1}{(t-b)^2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=a} (x-a)^2(t-b)^2 + \dots \\
& + \frac{1}{(t-b)^n} \left. \frac{\partial^{(n)} F}{\partial x^{(n)}} \right|_{x=a} (x-a)^n(t-b)^n + \dots
\end{aligned} \tag{E1.7}$$

elde edilir. Eşitliğin sağında görülen terimlerden ilk ikisi dışında diğerleri ihmal edildikten sonra kalan ifade düzenlenirse

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,t) = \frac{F(x,t) - F(a,t)}{x-a} \tag{E1.8}$$

yazılır. Denklemin sağ tarafında zaman bileşeni kullanılmadan $x=a$ noktasında sonsuz limite geçilirse adi türev elde edilir. O halde $x=a$ noktasında gerçekleşebilen bağıntı gereği bahsi edilen F fonksiyonunun adi ve kısmi türevleri arasında

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dx} \tag{E1.9}$$

bağıntısı yazılabilir. Elde edilen bu ifade, titreşim olayının diferansiyel denklemlerinin elde edilmesinde önemli bir yere sahiptir.

Ek-2: Statik ve dinamik diferansiyel denge denklemleri

Boyutları oldukça küçük dx , dy ve dz olan üç boyutlu bir katının (diferansiyel cismin) sırayla x , y ve z eksenlerindeki dinamik diferansiyel denge denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{E2.1})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{E2.2})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{E2.3})$$

olarak elde edilir. Örneğin sadece eksenel titreşim için diferansiyel denge denklemi

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{E2.4})$$

olarak yazılabilmektedir. Burada Hooke bağıntısı gereğince $\sigma_{xx} = N_x / A$ kullanılırsa

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{E2.5})$$

elde edilir. Tabi Denklem (E2.4), yerel olmayan gerilmenin eldesinde kullanışlıdır. Bu arada, eksenel çubuğun üzerindeki yayılı dış zor ve elastik zemin gibi diğer etkileri de göz önünde bulundurursak bu denge ifadesi

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f + k_M u \quad (\text{E2.6})$$

elde edilir. Tersine, tekrar gerilmeyi elde etmek istersek

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{f}{A} + \frac{k_M}{A} u \quad (\text{E2.7})$$

yazılır. Benzer biçimde Love–Bishop çubuğu, burulma çubuğu veya kiriş için dinamik denge ve devamında yerel olmayan gerilme oluşturulabilir. Buradan da varyasyon işlemlerine geçilebilir.

Kirişlerin hareket denkleminin eldesinde statik diferansiyel denge (diğer bir deyişle iç tesir ve dış kuvvetler arasındaki bağıntılar) iş görmektedir. Fazla detayına girmeden, enine ve eğilme dengelerinin sonuçları, sırasıyla

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = V \quad (\text{E2.8})$$

şeklindedir. Konveks şekil değiştirme hareketi yapan cismin tarafsız bölge dışındaki ipçiklerinin eğriliği

$$\frac{1}{\rho_b} = \pm \frac{w''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \quad (\text{E2.9})$$

ile verilir. Burada ρ_b eğrilik yarıçapıdır. w ise enine hareket bileşenidir. Tabi burada bilinmesi gereken iki mevzu vardır. Birincisi, konveks hareket için w'' negatif işaretli olmaktadır. İkincisi, aşırı basık elastik eğrilere w' ihmal edilebilirdir çünkü geniş aralıkta dikkate alınabilir bir değişim yoktur (türevin geometrik tanımına dayanarak bunu söylüyoruz). O halde Eğrilik ifadesi

$$\frac{1}{\rho_b} = -w'' \quad (\text{E2.10})$$

şekline indirgenebilir. Yine detayına girmeden, tek eksenli eğilme yapan bir yapının moment-eğrilik formülasyonunun

$$\frac{1}{\rho_b} = \frac{M}{EI} \quad (\text{E2.11})$$

olduğunu biliyoruz. Böylece, moment deplasman ifadesi

$$M = -EIw'' \quad (\text{E2.12})$$

elde edilir. Diferansiyel cismin iç tesirleriyle dış kuvvetleri arasındaki eğilme dengesi gereğince

$$\int_A \sigma_{xx} y dA = M \quad (\text{E2.13})$$

yazılır. Yerel olmayan elastisitedeki gerilme bağıntısı, enine koordinat y ile çarpıldıktan sonra elde edilen moment bağıntısında önce Denklem (E2.8) sonra da Denklem (E2.13) kullanılırsa yerel olmayan enine titreşim denklemi elde edilebilir.

Ek-3: Yerel olmayan Timoshenko kirişinin iç tesirleri

Timoshenko kirişinin uygulamalarından sınır şart noktasında söz etmiş ancak uygulamaların gerektirdiği kesme kuvveti ve eğilme momenti gibi fonksiyonları elde etmemiştik. Hatırlanacak olursa bu kiriş teorisindeki eğilme ve kesme ifadeleri, sırayla,

$$M = (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} + EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{E3.1})$$

$$V = (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + kGA \frac{\partial w}{\partial x} + kGA \varphi \quad (\text{E3.2})$$

şeklinde. Bu ifadelerin düzenlenmesi için φ 'nin w türünden yazılması gerekmektedir. Bunun için hatırlanacak olursa iç kuvvetlerin denge denklemi olan Denklem (3.291)'de Denklem (E3.1) ve (E3.2) yazılmıştı. Buna göre,

$$EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - kGA \frac{\partial w}{\partial x} - kGA \varphi - \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (\text{E3.3})$$

elde edilmiş olur. Buradan dönmeyi çekelim,

$$\varphi = \frac{EI}{kGA} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\rho I}{kGA} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (\text{E3.4})$$

burada eşitliğin sağında dönmenin sadece zamana göre ikinci dereceden kısmi türevini göstermekte olan terim düşürülsün:

$$\varphi = \frac{EI}{kGA} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(e_0 a)^2 \rho I}{kGA} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (\text{E3.5})$$

Bu ifadenin düzenlenmesi hususunda Denklem (3.302) kullanışlıdır. Ancak şuan elastik zemin ve sıcaklık araştırma dışındadır:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{(e_0 a)^2 \rho}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{E3.6})$$

Denklem (E3.6), (E3.5)'te yerine yazılır. Ardından oluşan ifade (E3.2)'de yerine koyulur:

$$\begin{aligned} V = & - \frac{(e_0 a)^2 \rho EI}{kG} \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{(e_0 a)^2 \rho I}{kG} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^7 w}{\partial x^3 \partial t^4} - (e_0 a)^2 \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \\ & + \frac{(e_0 a)^2 \rho^2 I}{kG} \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial t^4} + (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{E3.7})$$

Benzer şekilde eğilme momenti de yazılabilir. Tabi bu ifadeler, atomik parametrenin küçük değerleri altında program kodları vasıtasıyla frekans eldesini mümkün kılabilir.



ÖZGEÇMİŞ

Hayri Metin NUMANOĞLU

metin_numanoglu@hotmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2017–Devam Ediyor	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2013–2017	Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği, Antalya
Lise 2009–2013	Çağlayan Anadolu Lisesi Manavgat/Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi 2019–Devam Ediyor	Giresun Üniversitesi, Müh. Fak. İnş. Müh. Bölümü Merkez/Giresun
Proje Mühendisi 2018–2019	TMH Mühendislik Ltd. Şti. Muratpaşa/Antalya
Kontrol Elemanı 2017–2018	Kıvanç Yapı Denetim Ltd. Şti. Muratpaşa/Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1. Mercan K., Numanoğlu H.M., Akgöz B., Işık Ç., Civalek Ö. (2017). Higher-order continuum theories for buckling response of silicon carbide nanowires (SiCNWs) on elastic matrix. *Archive of Applied Mechanics*, 87(11), 1797-1814.
2. Işık Ç., Mercan K., Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2017). Bending response of nanobeams resting on elastic foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4(2), 105-114.
3. Numanoğlu H.M., Akgöz B., Civalek Ö. (2018). On dynamic analysis of nanorods. *International Journal of Engineering Science*, 130, 33-50, 2018
4. Uzun B., Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2018). Free vibration analysis of BNNT with different cross-sections via nonlocal FEM. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2), 252-260.
5. Ersoy H., Numanoğlu H.M., Akgöz B., Civalek Ö. (2018). Small size and rotary inertia effects on the natural frequencies of carbon nanotubes. *Curved and Layered Structures*, 5(1), 273-279.
6. Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2019). On the torsional vibration of nanorods surrounded by elastic matrix via nonlocal FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, 161-162, 105076.
7. Numanoğlu H.M., Mercan, K., Civalek Ö. (2019). Finite element model and size dependent stability analysis of boron nitride and silicon carbide nanowires/nanotubes, *Scientia Iranica Transactions A: Civil Engineering*. 26(4), 2079-2099.
8. Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2019). On the dynamics of small-sized structures. *International Journal of Engineering Science*, 145, 103164.