

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



NEUTRAL VE PANTOGRAPH TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ
ÇÖZMEK İÇİN İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR HERMİTE KOLLOKASYON
YÖNTEMİ

Özlem KARAAĞAÇLI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2025
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



NEUTRAL VE PANTOGRAPH TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ
ÇÖZMEK İÇİN İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR HERMİTE KOLLOKASYON
YÖNTEMİ

Özlem KARAAĞAÇLI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2025
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTRAL VE PANTOGRAPH TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ
ÇÖZMEK İÇİN İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR HERMİTE KOLLOKASYON
YÖNTEMİ

Özlem KARAAĞAÇLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 14/07/2025 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

Prof. Dr Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

ÖZET

NEUTRAL VE PANTOGRAPH TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR HERMİTE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Özlem KARAAĞAÇLI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Temmuz 2025, 124 sayfa

Bu tezde, lineer neutral ve pantograph tipi diferansiyel denklemlerin çözümü için Hermite polinomları kullanılarak integrale dayanan yeni bir kollokasyon metodu sunulmaktadır. Sunulan yöntemin ilk adımı olarak denklemdeki en yüksek mertebeden türeve sonlu Hermite serisi formunda yaklaşım yapılır ve bu yaklaşım matris formunda yazılır. Gerekli sayıda integraller alınarak denklemdeki diğer türevlerin ve bilinmeyen fonksiyonun yaklaşımının matris formu elde edilir. Bu matris formları ele alınan problemde yerine yazılır ve kollokasyon noktaları ile matris işlemleri kullanılarak diferansiyel denklem problemi lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülür. Bu cebirsel sistem çözülerek, bilinmeyen katsayılar hesaplanır. Bu katsayılar bilinmeyen fonksiyona ait yaklaşımın matris formunda yazılarak problemin çözümü bulunur. Diğer taraftan, yaklaşık çözümlerin hatasını tahmin etmek için rezidüel hata tahmini tekniği kullanılır. Rezidüel fonksiyon kullanılarak, bir hata problemi oluşturulur ve sunulan yeni yöntem ile hata problemi de çözülerek hata fonksiyonu tahmin edilir. Yöntem oluşturulduktan sonra yöntemin hesaplama verimliliğini ve hata tahmin tekniğini göstermek için sayısal örnekler çözülür. Sayısal örneklerde elde edilecek veriler, literatürden bilinen tekniklerin sonuçları ile karşılaştırılır. Elde edilen sonuçlar, yöntemin doğruluğunu ve kullanılabilirliğini gösterir.

ANAHTAR KELİMELER: Hermite polinomları, Kollokasyon yöntemi, Neutral denklemleri, Pantograph denklemleri, Sayısal yaklaşım.

JÜRİ: Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ABSTRACT

A NEW HERMITE COLLOCATION METHOD BASED ON THE INTEGRAL FOR SOLVING NEUTRAL AND PANTOGRAPH TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Özlem KARAAĞAÇLI

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

July 2025, 124 pages

In this thesis, a new collocation method based on integration and using the Hermite polynomials is presented for solving neutral and pantograph type differential equations. As the first step of the presented method, the highest order derivative in the equation is approximated in the form of a finite Hermite series and this approximation is written in matrix form. The matrix forms of the approximation of the other derivatives of the unknown function and the function itself are obtained by taking the necessary number of integrals. These matrix forms are substituted in the considered problem. The differential equation problem is transformed into a system of linear algebraic equations by using collocation points and matrix operations. This algebraic system is solved and the unknown coefficients are calculated. The solution of the problem is found by writing these coefficients in the matrix form of the approximation of the unknown function. On the other hand, the residual error estimation technique is used to estimate the error of approximate solutions. Using the residual function, an error problem is created and the error problem is solved with the presented new method and the error function is estimated. After the method is created, numerical examples are solved to show the computational efficiency of the method and the error estimation technique. Obtained data in the numerical examples are compared with the results of known techniques from the literature. The obtained results show the accuracy and usability of the method.

KEYWORDS: Collocation method, Hermite polynomials, Neutral equations, Numerical approximation, Pantograph equations.

COMMITTEE: Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ÖNSÖZ

Akademik çalışmalarım ve tez sürecim boyunca bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan, her adımda yanımda olan değerli danışmanım Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Hermite Polinomları	3
2.1.1. Hermite polinomlarının Laguerre polinomları ile ilişkisi	5
2.2. Pantograph Diferansiyel Denklemleri	6
2.3. Neutral Diferansiyel Denklemleri	7
3. MATERYAL VE METOT	8
3.1. Ele Alınacak Denklemler	8
3.2. Temel Matris Bağlılıkları	9
3.3. Uygulanacak Yöntem	10
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	11
4.1. Yöntemin Uygulanması	11
4.1.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için yöntemin oluşturu- lması	11
4.1.2. Neutral diferansiyel denklemleri için yöntemin oluşturulması	14
4.1.3. Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemleri için yömte- min oluşturulması	18
4.1.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için yömte- min oluşturulması	21
4.2. Hata Tahmini	28
4.2.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için hata tahmini	28
4.2.2. Neutral diferansiyel denklemleri için hata tahmini	29
4.2.3. Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemleri için hata tah- mini	31

4.2.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için hata tahmini	33
4.3. Sayısal Örnekler	35
4.3.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler . .	35
4.3.2. Neutral diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler	63
4.3.3. Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler	82
4.3.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler	93
5. SONUÇLAR	119
6. KAYNAKLAR	120
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “NEUTRAL VE PANTOGRAPH TİPİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZMEK İÇİN İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR HERMİTE KOLLOKASYON YÖNTEMİ ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

14/07/2025

Özlem KARAAĞAÇLI

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

a_n	: Hermite polinomlarına dayalı çözüm formunda yer alan katsayılar
$\mathbf{A}$	: Katsayılar matrisi
$e_N(t)$	: Gerçek hata fonksiyonu
$e_{N,K}(t)$	: Tahmini hata fonksiyonu
$E_{N,K}(t)$	: İyileştirilmiş hata fonksiyonu
$\mathbf{G}$	: Elde edilen cebirsel sistemin matris formunda sağ tarafta bulunan vektör
$H_n(t)$	: Hermite polinomları
$\mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)}$	: $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu birim matris
K	: Hata tahmini için kesme sınırı
N	: Yaklaşımın kesme sınırı
$P_{00}(t)$	: Multi-pantograph diferansiyel denkleminde $y(t)$ fonksiyonunun katsayısı
$P_{j0}(t)$	: Multi-pantograph diferansiyel denkleminde $y(\lambda_{ji})t$ fonksiyonunun katsayısı
$P_0(t)$	: Neutral diferansiyel denkleminde $y(t)$ fonksiyonunun katsayısı
$P_j(t)$	: Neutral diferansiyel denkleminde $y(\lambda_j t)$ fonksiyonunun katsayısı
$Q_r(t)$	: Neutral diferansiyel denkleminde $y(\mu_r t)$ fonksiyonunun katsayısı
$P_{jl}(t)$	: Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denkleminde $y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})$ fonksiyonunun katsayısı
$R_N(t)$	: Rezidüel hata fonksiyonu
$\mathbf{W}$	: Elde edilen cebirsel sistemin katsayı matrisi
$y(t)$	: Tam çözüm
$y_N(t)$	: Yaklaşık çözüm
$y_{N,K}(t)$	: İyileştirilmiş yaklaşık çözüm

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Charles Hermite	3
Şekil 2.2	Pantograph cihazı (Poetsch vd. 1997)	6
Şekil 4.3	Örnek 4.1'deki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması	39
Şekil 4.4	Örnek 4.1'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak ha- talarının karşılaştırılması	42
Şekil 4.5	Örnek 4.1'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çö- zümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	43
Şekil 4.6	Örnek 4.2'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak ha- talarının karşılaştırılması	50
Şekil 4.7	Örnek 4.2'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çö- zümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	51
Şekil 4.8	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak ha- talarının karşılaştırılması	58
Şekil 4.9	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çö- zümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	59
Şekil 4.10	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	59
Şekil 4.11	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tah- mini mutlak hatalarının karşılaştırılması	60
Şekil 4.12	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyi- leştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	61

Şekil 4.13	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması .	61
Şekil 4.14	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	62
Şekil 4.15	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	63
Şekil 4.16	Örnek 4.5'teki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması	67
Şekil 4.17	Örnek 4.5'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	70
Şekil 4.18	Örnek 4.5'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	71
Şekil 4.19	Örnek 4.6'daki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması	74
Şekil 4.20	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	77
Şekil 4.21	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	78
Şekil 4.22	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması .	78
Şekil 4.23	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	79
Şekil 4.24	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	80

Şekil 4.25	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması .	80
Şekil 4.26	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	81
Şekil 4.27	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	82
Şekil 4.28	Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	90
Şekil 4.29	Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 8$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	90
Şekil 4.30	Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	91
Şekil 4.31	Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 8$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	91
Şekil 4.32	Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	92
Şekil 4.33	Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 8$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	92
Şekil 4.34	Örnek 4.10'daki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması	97
Şekil 4.35	Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	100

Şekil 4.36	Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	101
Şekil 4.37	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	108
Şekil 4.38	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	108
Şekil 4.39	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	109
Şekil 4.40	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	109
Şekil 4.41	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	110
Şekil 4.42	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	111
Şekil 4.43	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	111
Şekil 4.44	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ için elde edilen gerçek hata ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	112
Şekil 4.45	Örnek 4.13'teki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması	116
Şekil 4.46	Örnek 4.13'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	118

Şekil 4.47 Örnek 4.13'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması 118



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	Örnek 4.1'deki problemde $q = 0.2$ için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	40
Çizelge 4.2	Örnek 4.1'deki problemde $q = 0.2$ için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen hataların karşılaştırılması	41
Çizelge 4.3	Örnek 4.2'deki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması	47
Çizelge 4.4	Örnek 4.2'deki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	48
Çizelge 4.5	Örnek 4.2'deki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması	49
Çizelge 4.6	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	56
Çizelge 4.7	Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması	57
Çizelge 4.8	Örnek 4.5'teki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	69
Çizelge 4.9	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	75
Çizelge 4.10	Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması	76
Çizelge 4.11	Örnek 4.8'deki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin, literatürdeki yöntemlerle elde edilen yaklaşık çözümlerle karşılaştırılması	88
Çizelge 4.12	Örnek 4.8'deki problem için $[0, 2]$ ve $[0, 5]$ aralıklarında elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması	89
Çizelge 4.13	Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	98

Çizelge 4.14	Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması	99
Çizelge 4.15	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması	106
Çizelge 4.16	Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması	107
Çizelge 4.17	Örnek 4.13'teki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata, tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması .	117

1. GİRİŞ

Bilim ve mühendislik alanlarındaki birçok fiziksel, biyolojik ve ekonomik sistemin matematiksel modellenmesinde diferansiyel denklemler temel bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması ya da yaklaşık çözümlerinin hesaplanması önemli bir araştırma konusudur. Ancak bazı diferansiyel denklemleri analitik yollarla çözmek oldukça zor olabilir, hatta bazı durumlarda tam çözümler mevcut değildir. Özellikle yapılarında gecikme, belirsizlik ya da parametre bağımlılığı içeren diferansiyel denklemler için çözüm süreci daha da karmaşık hale gelmektedir. Bu nedenle, analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda sayısal çözüm yöntemlerine başvurmak kaçınılmaz olmaktadır.

Gelişen teknolojiler ve bilgisayar donanımları sayesinde, karmaşık yapıdaki diferansiyel denklemler için geliştirilen sayısal yöntemler, hızlı ve güvenilir çözümler sunabilmektedir. Modern matematiksel yazılımlar ve algoritmalar sayesinde bu yöntemler kolaylıkla uygulanabilmekte ve oldukça kısa sürede yaklaşık sonuçlar elde edilebilmektedir (Yokuş 2011). Sayısal yaklaşımlar, özellikle modellemenin uygulamaya yönelik olduğu alanlarda büyük avantaj sağlamaktadır.

Diferansiyel denklemler, gecikme içerip içermediğine bağlı olarak sınıflandırılabilir. Gecikmeli diferansiyel denklemler, çözümün yalnızca mevcut zamandaki değerlerine değil, aynı zamanda geçmişteki değerlere de bağlı olduğu yapılardır. Gecikmeli diferansiyel denklemler

$$y'(t) + ay(t - \tau) = 0$$

genel formunda ifade edilir. Neutral diferansiyel denklemler ise

$$y'(t) + ay(t) + by'(t - \tau) = 0$$

şeklindedir (Erbe vd. 1995). Burada $\tau > 0$, a ve b sabitlerdir. Gecikmeli diferansiyel denklemler, popülasyon dinamiklerinin, bulaşıcı hastalıkların yayılımının, ekonomik alanlardaki dinamiklerin, kimyasal reaksiyonların incelenmesinde, fizik ve mühendislik alanlarında sıklıkla kullanılır. Bu alanlarda kullanımı incelendiğinde bir problemin sadece t anında incelenmesi yeteli olmayabilir. Bu durumda gecikmeli diferansiyel denklemler büyük önem taşır. Çünkü gecikmeli diferansiyel denklemlerde yer alan $y(t - \tau)$ terimleri,

sistemin t zamanındaki durumunun geçmişteki $t - \tau$ zamanındaki haline bağlı olduğunu gösterir. Bu denklemler sayesinde yalnızca sistemin mevcut durumu değil, geçmişe dayalı etkiler de dikkate alınarak daha gerçekçi ve kapsamlı modeller geliştirilebilmektedir.

Bu tezde, gecikmeli yapıya sahip dört farklı diferansiyel denklem tipi olan multi-pantograph diferansiyel denklemler, neutral diferansiyel denklemler, birinci mertebeden pantograph diferansiyel denklemler ve genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümleri ele alınacaktır. Birinci mertebeden pantograph diferansiyel denklemleri, genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerinin mertebesinin bir olduğu özel bir durumu temsil etmektedir. Bu tip denklemlerin çözümünde sunulacak yaklaşım, Hermite polinomları ve integrale dayalı bir kollokasyon yöntemidir.

Klasik kollokasyon yöntemleri, problemdeki $y(t)$ fonksiyonuna yaklaşım yapar. $y(t)$ fonksiyonu matris formunda ifade edilir ve türev içeren terimleri elde etmek için mertebe kadar türev alınır ve türev içeren terimler matris formunda yazılır. Kollokasyon noktaları yerleştirilerek doğrusal cebirsel denklem sistemine indirgenir. Ancak integral tabanlı kollokasyon yöntemi, türevsel işlemler yerine belirli sayıda integral alınarak çözüm yönteminin oluşturulmasını sağlar.

Yapılan sayısal testler göstermektedir ki, bu yeni yöntem klasik kollokasyon yöntemine kıyasla daha yüksek doğrulukta sonuçlar vermektedir. N yaklaşımın kesme sınırının daha küçük seçilmesiyle daha iyi bir yaklaşık çözüm elde edilebilmektedir.

Çözümün doğruluğu yalnızca sonuçlarla değil, oluşturulan rezidüel hata fonksiyonu yardımıyla da değerlendirilmektedir. Yaklaşık çözüm, problemde yerine yazılarak rezidüel fonksiyon elde edilmekte ve bu fonksiyon üzerinden bir hata problemi oluşturularak hata tahmini yapılmaktadır. Problem, bir hata problemine dönüştürülerek ve aynı yöntemle tekrar çözülerek hata tahmini gerçekleştirilebilmekte ve çözümün duyarlılığı hakkında daha fazla bilgi elde edilmektedir.

Sonuç olarak, bu tez çalışmasında yukarıda belirtilen dört tip gecikmeli diferansiyel denklem için Hermite polinomları kullanılarak integrale dayalı bir kollokasyon yöntemi sunulacak ve bu yöntemin doğruluğu ve etkinliği sayısal örneklerle ortaya konulacaktır.

Bu tez çalışmasının hazırlanması aşamasında tezde ele alınan neutral diferansiyel denklemler için yöntemin uygulanması ile ilgili çalışmadan araştırma makalesi üretilerek tez yazarı ve danışmanı tarafından yayımlanmıştır (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024).

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Hermite Polinomları

Ortogonal polinomlardan biri olan Hermite polinomları, ismini Charles Hermite'den almıştır. Charles Hermite, 1822 yılında Dieuze'de, Ferdinand Hermite ve Madeleine née Lallemand'ın çocukları olarak dünyaya gelmiştir.



Şekil 2.1. Charles Hermite

Hermite, ortaöğrenimini Collège de Nancy'de ve ardından Paris'te Collège Henri IV ve Lycée Louis-le-Grand'da tamamlamıştır. École Polytechnique Üniversitesine kabul edilse de doğuştan gelen ayağındaki sakatlık yüzünden öğrenimine ara vermek zorunda kalmıştır. Hermite, sınavlarına çalışmak yerine makaleler okumayı tercih etmiştir. Örgün eğitimde pek başarılı olmasa da yaptığı çalışmalar ile önemli matematikçiler arasına girmiştir. Eğitimine ara verdiği dönemde, Bertrand, Jacobi gibi dünyaca ünlü matematikçilerle arkadaş olmuştur, mektuplaşmaya başlamıştır. Bertrand ile arkadaş olması kişisel olarak da önemlidir çünkü daha sonrasında Bertrand'ın kız kardeşiyle evlenmiştir. Bertrand, Jacobi ve Liouville ile çalıştıktan sonra bakalorya sınavlarına girmiştir ve sınavları

geçmiştir. Ertesi yıl, École Polytechnique'e atanmıştır. Atandıktan sonra, bilim dünyasında büyük etki yaratan çalışmalar gerçekleştirmiştir. Hermite, sayılar teorisine ve cebire, ortogonal polinomlara ve eliptik fonksiyonlara önemli katkılarda bulunmuştur. Hermite polinomları, Hermite enterpolasyonu, Hermite normal formu, Hermite operatörleri ve kübik Hermite eğrileri onun adını almıştır. Hermite, beşinci dereceden denklemlerin eliptik modüler fonksiyonlarla çözülebileceğini göstermiştir. e sayısının aşkın bir sayı olduğunu kanıtlayan ilk kişi olmuştur. 1901 yılında Paris'te vefat etmiştir (Anonim 1).

Charles Hermite tarafından tanımlanan ve bu tezde de kullanılacak olan n 'inci dereceden Hermite polinomları, matematikte sıkça kullanılan önemli diferansiyel denklemlerden biri

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2ny(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak yazılan Hermite diferansiyel denkleminin çözümlerinden biridir. Hermite polinomları, klasik ortogonal polinom ailelerinden biridir ve

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n, \quad |t| < \infty, \quad |x| < \infty \quad (2.1)$$

üreteç fonksiyonundan elde edilir. Bu üreteç fonksiyonunun sol tarafı $(e^{2tx})(e^{-x^2})$ şeklinde yazılabilir. Bu şekilde yazdıktan sonra $t = 0$ noktası civarında Taylor serileri yazılır ve çarpma işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned} (e^{2tx})(e^{-x^2}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^{n-k} x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2t)^{n-2k}}{(n-2k)! k!} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç, (2.1) bağıntısında yerine konulduğunda

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! (2t)^{n-2k}}{(n-2k)! k!}, \quad -\infty < t < \infty, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

şeklinde Hermite polinomlarının tanımlandığı eşitliğe ulaşılır (Szegő 1939).

Hermite polinomlarının ilk birkaç terimi (2.2)'den yararlanılarak

$$H_0(t) = 1,$$

$$H_1(t) = 2t,$$

$$H_2(t) = 4t^2 - 2,$$

$$H_3(t) = 8t^3 - 12t,$$

$$H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12,$$

$$H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t,$$

$$H_6(t) = 64t^6 - 480t^4 + 720t^2 - 120$$

şeklinde yazılır. Böylece tek ve çift dereceli Hermite polinomları açıkça

$$H_{2n}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n)!}{(n-k)! (2k)!} (2t)^{2k}$$

$$H_{2n+1}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n+1)!}{(n-k)! (2k+1)!} (2t)^{2k+1}$$

olarak gösterilebilir. Hermite polinomlarını ifade etmenin diğer yolu olan Rodrigues bağıntısı aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$H_n(t) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Hermite polinomlarının rekürans bağıntısı

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t), \quad n \geq 2$$

dir (Anonymous 2).

2.1.1. Hermite polinomlarının Laguerre polinomları ile ilişkisi

Hermite polinomları, ortogonal polinomlar ailesinin başka bir üyesi olan Laguerre polinomları ile ilişkilendirilebilir. Laguerre polinomları $L_n(t)$ biçiminde gösterilerek

$$H_{2n}(t) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-\frac{1}{2}}(t^2)$$

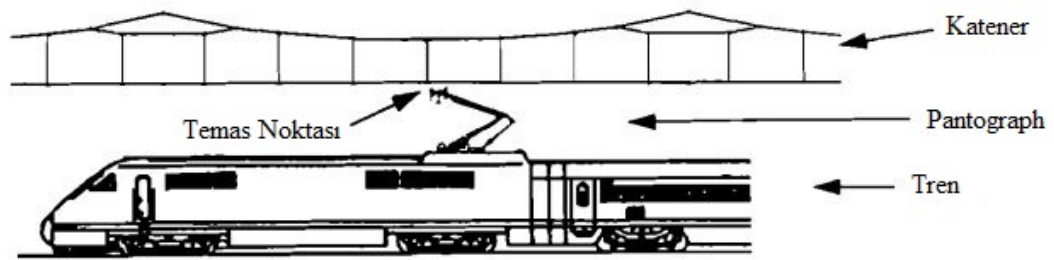
ve

$$H_{2n+1}(t) = (-1)^n 2^{2n+1} n! t L_n^{\frac{1}{2}}(t^2)$$

denklemleri yazılır (Hamdin 2020).

2.2. Pantograph Diferansiyel Denklemleri

Pantograph diferansiyel denklemleri, elektrikli tramvay, tren ve diğer demiryolu ulaşım araçlarında kullanılan "Pantograph" aletinin hareket mekanizmasını ve verimliliğini matematiksel olarak modellemek için kullanılan bir örnektir. Pantograph, elektrik ile çalışan raylı sistem araçlarının çatısına yerleştirilen, elektriği üst katener tele temas ederek ileten bir cihazdır. Bu akım toplayıcı fikri ilk olarak Frank J. Sprague tarafından "Tramvay direği toplayıcı (Trolley pole collector)" adı ile ortaya atılmıştır. Sprague'nin tasarımı hayata geçtikten sonra bu tasarımın çok yüksek hızlı trenlerde kullanılamayacağı fark edilmiştir. Çünkü hız arttıkça hava direnci ve sürtünme artacağından elektrik hattında kırılmaya neden olabilmektedir. Bu da öne sürülen tasarımın çok dayanıklı olmadığını göstermiştir. Bu sorunun çözümü için John Q. Brown, 1903'te "Pantograph" olarak isimlendirilen elmas biçimli bir akım toplayıcı modelini geliştirmiştir. Bu mekanizmada, akım toplayıcı üst koldadır. Cihaz yükselerek elektrik direklerine temas eder ve elektrik akımını toplar. Sonra motora ileterek aracın çalışmasını sağlar. Daha sonra, Louis Faiveley bu elmas biçimli pantograph cihazını geliştirerek tek kollu pantograph cihazını icat etmiştir. 1955 yılında, Faiveley'in yenilikçi tasarımıyla donatılan bir tren, saatte 331 kilometre hıza ulaşarak elektrikli trenler için dünya hız rekorunu kırmıştır ve bu tasarım, günümüze kadar endüstri standardı olarak kabul edilmiştir (Anonymous 1).



Şekil 2.2. Pantograph cihazı (Poetsch vd. 1997)

J. R. Ockendon ve A. B. Tayler, elektrikli demiryolu araçlarının çatısına yerleştirilen pantografin hareketini incelemiş ve matematiksel modelini ifade etmiştir (Ockendon ve Tayler 1971). Pantograph denklemler, ismini bu modellemeden almıştır. Multi-pantograph ve genelleştirilmiş pantograph denklemleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Legendre

kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015), Bernstein polinomsal yaklaşım (Javadi vd. 2016), Hermite kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2015) ve (Yalçınbaş vd. 2011), Taylor polinomlarına dayalı sayısal yöntem (Sezer ve Daşcıoğlu 2007), Galerkin yöntemine benzer bir yaklaşım yöntemi (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018), Taylor polinomları ve kesilmiş Taylor serisi kullanılarak sunulan yaklaşım yöntemi (Sezer vd. 2012), Muroya yöntemi (Muroya vd. 2003), üstel polinomların kullanıldığı kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2013), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2012), Taylor matris yöntemi (Sezer vd. 2008) ve (Yüzbaşı ve Ismailov 2018), Boubaker kollokasyon yöntemi (Akkaya vd. 2013), varyasyonel yineleme yöntemi (Yu 2008), Bernstein kollokasyon yöntemi (Işık vd. 2012), Euler kollokasyon yöntemi (Ibis ve Bayram 2016), Legendre polinomları kullanılarak en küçük kareler yöntemi (Khorshidi ve Firoozjaee 2024), Bernoulli kollokasyon yöntemi (Tohidi vd. 2013) şu ana kadar pantograph denklemlerinin çözümlerine yaklaşım yapmak için sunulmuş yöntemlerden bazılarıdır.

2.3. Neutral Diferansiyel Denklemleri

Neutral diferansiyel denklemi, fizik, biyoloji, mühendislik alanlarında kullanılan, gecikmeli bir diferansiyel denklemdir. İnsan popülasyonu, kimyasal reaksiyon davranışları, biyolojik sistemler ve elektrik devrelerinin hareket ve davranışlarını inceler. Bu modelleme sistemi, dünyevi problemlerin çözülmesinde ve zaman gecikmelerinin etkilerini anlamak konusunda önemli bir rol oynar. Varyasyonel iterasyon yöntemi (Chen ve Wang 2010), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011), Runge-Kutta yöntemi (Wang vd. 2009), Lucas ve Taylor polinomlarına dayalı kollokasyon yöntemi (Gümgüm vd. 2020), one-leg θ yöntemi (Wang ve Li 2007) yöntemleri şu ana kadar neutral diferansiyel denklemlerinin çözümleri için sunulmuş birkaç yöntemdir. Tez sürecinde yürütülen ve Hermite polinomları temelli integrale dayalı kollokasyon yöntemiyle yapılan bir çalışma daha önce tarafımızdan literatüre kazandırılmıştır (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tezde incelenecek diferansiyel denklemler tanıtılarak temel problem yapısı ortaya konulacaktır. Ardından, çözüm sürecine temel oluşturan matris bağıntıları verilecek ve bu yapı doğrultusunda yaklaşık çözüme ulaşmak için izlenen sayısal yöntemden bahsedilecektir.

3.1. Ele Alınacak Denklemler

Bu tezde gecikmeli diferansiyel denklemlerden multi-pantograph diferansiyel denklemi, neutral diferansiyel denklemi, birinci mertebeden pantograph diferansiyeli, genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemi incelenecektir. Birinci mertebeden pantograph diferansiyel denklemi, genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denkleminin mertebesinin bir olduğu özel bir durumudur. İlk olarak

$$y'(t) = P_{00}(t) + \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)y(\lambda_j t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanan birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin özel bir sınıfı olan multi-pantograph denklemlerinin

$$y(0) = \alpha \quad (3.4)$$

başlangıç koşulu altında çözümünü araştırılacaktır (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018). Burada $0 < \lambda_j < 1$ ve α reel veya karmaşık sabitlerdir. $P_{00}(t)$, $P_{j0}(t)$ ve $f(t)$, $[0, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

Ele alınacak diğer bir diferansiyel denklem; birinci mertebeden oransal gecikmeli bir diferansiyel denklem olan neutral diferansiyel denklemleridir ve

$$y'(t) = P_0(t)y(t) + \sum_{j=1}^J P_j(t)y(\lambda_j t) + \sum_{r=1}^Z Q_r(t)y'(\mu_r t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanmakta olup,

$$y(a) = \alpha \quad (3.6)$$

başlangıç koşulu ile ele alınacaktır (Yüzbaşı vd. 2011). Burada $P_0(t)$, $P_j(t)$, $Q_r(t)$ ve $f(t)$, $[0, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. λ_j , μ_r , ve α reel veya karmaşık sabitlerdir.

Çözümleri araştırılacak diğer bir denklem ise

$$y'(t) = \sum_{j=0}^J P_{j0}(t)y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b$$

şeklinde tanımlanan birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemdir ve

$$y(0) = \alpha_0$$

başlangıç koşulu altında çözümü araştırılacaktır. İncelenecek olan son denklem

$$y^{(c)}(t) = \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t)y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (3.7)$$

biçiminde tanımlanan c . mertebeden genelleştirilmiş pantograph denklemi olup,

$$y^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, c-1 \quad (3.8)$$

başlangıç koşulları ile ele alınacaktır (Javadi vd. 2016). α_i , λ_{jl}, β_{jl} reel veya kompleks katsayılardır. $P_{jl}(t)$ ve $f(t)$, $[0, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

3.2. Temel Matris Bağlıları

Yöntem uygulanırken, ilk olarak Hermite polinomları aşağıdaki gibi matris formunda yazılacaktır:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T. \quad (3.9)$$

Burada $\mathbf{T}(t)$ ve $\mathbf{H}(t)$,

$$\mathbf{T}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^N], \quad \mathbf{H}(t) = [H_0(t) \quad H_1(t) \quad \dots \quad H_N(t)]$$

matris bağıntıları şeklinde yazılabilir. Seçilecek olan N sayısı tek ise,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{(\frac{N-5}{2})} \frac{2^0}{0!} \frac{(N-1)!}{(\frac{N-1}{2})!} & 0 & \dots & 2^{N-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{(\frac{N-1}{2})} \frac{2^1}{1!} \frac{N!}{(\frac{N-1}{2})!} & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix}$$

ya da N çift ise,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{(\frac{N-2}{2})} \frac{2^1}{1!} \frac{(N-1)!}{(\frac{N-2}{2})!} & \dots & 2^{N-1} & 0 \\ (-1)^{(\frac{N-4}{2})} \frac{2^0}{0!} \frac{N!}{(\frac{N}{2})!} & 0 & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix}$$

dir (Akgönüllü vd. 2011).

3.3. Uygulanacak Yöntem

Bulgular ve tartışma bölümünde daha detaylı ele alınacak yöntem; problemlerdeki en yüksek mertebeye sahip terime sonlu Hermite serisi formunda yaklaşım yapmayı temel alır. Örneğin birinci mertebe denklem için denklemdeki en yüksek mertebeden türev olan $y'(t)$ fonksiyonuna

$$y'(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

şeklinde yaklaşım yapılır (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024). En yüksek mertebeden türevi c . mertebe türev olan denkleme ise

$$y^{(c)}(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

şeklinde sonlu Hermite serisi formunda yaklaşım yapılır. Buradaki a_n , Hermite katsayılarıdır. Problemde diğer türevli terimleri bulmak için mertebe sayısı kadar integral alınarak koşullar kullanılır ve türevli terimler ile bağımlı değişken için bulunan yaklaşım formları denklemde yerine yazılır. Daha sonra kollokasyon noktaları kullanılarak denklem, doğrusal cebirsel denklem sistemine dönüştürülür. Bu sistem çözülerek katsayılar matrisi bulunur ve bağımlı değişkenin Hermite serisi formunda yerine konularak yaklaşık çözüm elde edilir.

Yöntemin doğruluğunu değerlendirmek amacıyla, yaklaşık çözüm problemde yerine yazılır ve rezidüel hata fonksiyonu elde edilir. Ele alınan denklem ve rezidüel fonksiyon kullanılarak bir hata problemi elde edilir. Elde edilen hata problemi, aynı sayısal yöntem uygulanarak çözülür. Böylece yaklaşık çözümün doğruluğuna ilişkin bir hata tahmini yapılmış olur. Bulgular ve tartışma bölümünde her bir problem için yöntem detaylı bir şekilde matrislere dayalı olarak açıklanacak ve ayrıca hata tahmini yöntemi detaylı olarak ele alınacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, çözüm yöntemi ayrıntılı olarak açıklanacak ve yöntemin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla çeşitli sayısal örneklere yer verilecektir. Örnekler, yöntemin pratikteki kullanımını destekleyecek şekilde seçilmiş olup her biri adım adım çözümlenecektir.

4.1. Yöntemin Uygulanması

Bu bölümde, yöntemin uygulanma süreci adım adım açıklanacaktır. Böylece yöntemin yapısal çerçevesi ve mantığı ortaya konulacaktır.

4.1.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için yöntemin oluşturulması

(3.3) multi-pantograph diferansiyel denkleminde, en yüksek mertebeye sahip olan terime, yani $y'(t)$ 'ye

$$y'(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t) \quad (4.10)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yaklaşım yapılır. Burada, a_n hesaplanacak olan Hermite katsayılarıdır. (4.10) bağıntısının sağ tarafı

$$y'(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{A} \quad (4.11)$$

şeklinde (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024). Burada $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

formundadır. (4.11) denkleminde (3.9) yerine yazılırsa, $y'(t)$ 'nin matris formu standart bazda

$$y'(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.12)$$

biçiminde elde edilir. (4.12) denkleminde her iki taraftan 0'dan t 'ye integral alınırsa

$$\int_0^t y'(x) dx = \int_0^t \mathbf{T}(x)\mathbf{D}^T \mathbf{A} dx,$$

$$y(t) - y(0) = \left[\int_0^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A},$$

$$y(t) = y(0) + \left[\int_0^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

elde edilir. (3.4)'den $y(0) = \alpha$, elde edilen denklemde yerine yazılırsa

$$y(t) = \alpha + \left[t \ \frac{t^2}{2} \ \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.13)$$

elde edilir.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, denklem (4.13)'deki $\left[t \ \frac{t^2}{2} \ \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right]$ matrisi

$$\left[t \ \frac{t^2}{2} \ \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right] = t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu matris formu, (4.13) denklemde yerine yazılırsa

$$y(t) = \alpha + t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.14)$$

yazılabilir (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024). Gecikme içeren $y(\lambda_j t)$ teriminin yaklaşım tü-ründen ifadesini elde etmek amacı ile denklem (4.14)'de t yerine $\lambda_j t$ yazılarak,

$$y(\lambda_j t) = \alpha + \lambda_j t \mathbf{T}(\lambda_j t) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.15)$$

elde edilir.

$$\mathbf{R}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j^N \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\mathbf{T}(\lambda_j t)$ ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{T}(\lambda_j t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_j) \quad (4.16)$$

şeklindedir (Yüzbaşı vd. 2012). $\mathbf{T}(\lambda_j t)$ ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki eşitliği kullanarak (4.15) denk-lemi düzenlenir ve

$$y(\lambda_j t) = \alpha + \lambda_j t \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\lambda_j) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.17)$$

denklemini elde edilir. (4.12), (4.14) ve (4.17) denklemleri, (3.3) denkleminde yerine konulursa,

$$\mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T\mathbf{A} = P_{00}(t)(\alpha + t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\mathbf{A}) + \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)(\alpha + \lambda_j t\mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_j)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\mathbf{A}) + f(t)$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T - P_{00}(t)t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)\lambda_j t\mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_j)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} \\ & = f(t) + \alpha P_{00}(t) + \alpha \sum_{j=1}^J P_{j0}(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. $[0, b]$ aralığında eşit aralıklı,

$$t_s = \frac{b}{N}s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.19)$$

ile tanımlı kollokasyon noktaları kullanılır. Burada, $0 \leq t \leq b$ ve $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ 'dir. Kollokasyon noktaları (4.18) denkleminde yerine yazılır ve

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{T}(t_s)\mathbf{D}^T - P_{00}(t_s)t_s\mathbf{T}(t_s)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t_s)\lambda_j t_s\mathbf{T}(t_s)\mathbf{R}(\lambda_j)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} \\ & = f(t_s) + \alpha P_{00}(t_s) + \alpha \sum_{j=1}^J P_{j0}(t_s) \end{aligned}$$

elde edilir. Son elde edilen sistem, matris bağıntısı şeklinde yazılabilir:

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00}\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J \lambda_j \mathbf{P}_{j0}\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{R}(\lambda_j)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{F} + \alpha \dot{\mathbf{P}}_{00} + \alpha \sum_{j=1}^J \dot{\mathbf{P}}_{j0} \quad (4.20)$$

Buradaki matrisler

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) \\ \mathbf{T}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} P_{00}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{00}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{00}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{00} = \begin{bmatrix} P_{00}(t_0) \\ P_{00}(t_1) \\ \vdots \\ P_{00}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{j0} = \begin{bmatrix} P_{j0}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{j0}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{j0}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{j0} = \begin{bmatrix} P_{j0}(t_0) \\ P_{j0}(t_1) \\ \vdots \\ P_{j0}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix}$$

dir. (4.20) denkleminin sağ tarafı kısaca

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \alpha \dot{\mathbf{P}}_{00} + \alpha \sum_{j=1}^J \dot{\mathbf{P}}_{j0}$$

ile ifade edilebilir. Böylece, (3.3) multi-pantograph denklemi ile (3.4) koşullarından oluşan probleme yöntem uygulandığında

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}; \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.21)$$

lineer cebirsel sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{T}\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J \lambda_j \mathbf{P}_{j0}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{T}\mathbf{R}(\lambda_j)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \quad (4.22)$$

dir. (4.21)'de, eğer $\text{rank}\mathbf{W} = \text{rank}[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = N + 1$ ise, katsayılar matrisi $\mathbf{A}$ belirlenebilir ve

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}. \quad (4.23)$$

işlemi yapılarak elde edilir ve denklem (4.14)'de yerine yazılarak yaklaşım çözüm $y(t)$ elde edilir.

4.1.2. Neutral diferansiyel denklemleri için yöntemin oluşturulması

Yönteme başlarken, en yüksek mertebeye sahip olan terime, yani (3.5) denkleminde $y'(t)$ 'ye

$$y'(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t). \quad (4.24)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yaklaşım yapılır. Burada, a_n hesaplanacak olan Hermite katsayılarıdır. (4.24) bağıntısının sağ tarafı

$$y'(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{A} \quad (4.25)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Burada $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

formundadır. (4.25) denkleminde (3.9) yerine yazılırsa, $y'(t)$ 'nin matris formu standart bazda

$$y'(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.26)$$

şeklinde elde edilir. (4.26) denkleminde her iki taraftan a 'dan t 'ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^t y'(x) dx &= \int_a^t \mathbf{T}(x)\mathbf{D}^T \mathbf{A} dx, \\ y(t) - y(a) &= \left[\int_a^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A}, \\ y(t) &= y(a) + \left[\int_a^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.6) denklemindeki $y(a) = \alpha$ koşulu, elde edilen denklemde yerine yazılırsa

$$y(t) = \alpha + \left[t - a \quad \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \dots \quad \frac{t^{N+1}}{N+1} - \frac{a^{N+1}}{N+1} \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.27)$$

elde edilir.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, denklem (4.27)'deki $\left[(t - a) \quad \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \dots \quad \frac{t^{N+1}}{N+1} - \frac{a^{N+1}}{N+1} \right]$ matrisi

$$\left[t - a \quad \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \dots \quad \frac{t^{N+1}}{N+1} - \frac{a^{N+1}}{N+1} \right] = t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1 - a\mathbf{T}(a)\mathbf{B}_1$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu matris formu, (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(t) = \alpha + [t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1 - a\mathbf{T}(a)\mathbf{B}_1] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.28)$$

yazılabilir (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024). Gecikme içeren $y(\lambda_j t)$ ifadesine ulaşmak için (4.28) denkleminde t yerine $\lambda_j t$ yazılarak

$$y(\lambda_j t) = \alpha + [\lambda_j t\mathbf{T}(\lambda_j t)\mathbf{B}_1 - a\mathbf{T}(a)\mathbf{B}_1] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.29)$$

denklemini elde edilir.

$$\mathbf{R}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j^N \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\mathbf{T}(\lambda_j t)$ ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{T}(\lambda_j t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_j) \quad (4.30)$$

dir (Yüzbaşı vd. 2012). $\mathbf{T}(\lambda_j t)$ ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki eşitliği kullanarak (4.29) denklemini düzenlenir ve

$$y(\lambda_j t) = \alpha + [\lambda_j t \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\lambda_j) \mathbf{B}_1 - a \mathbf{T}(a) \mathbf{B}_1] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.31)$$

denklemini elde edilir. Denklem (4.26)'de t yerine μ_r yazılırsa,

$$y'(\mu_r t) = \mathbf{T}(\mu_r t) \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

(4.30) bağıntısı burada kullanılarak $y'(\mu_r)$ türev fonksiyonunun denklemini

$$y'(\mu_r t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\mu_r) \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.32)$$

olarak bulunur. Buradaki $\mathbf{R}(\mu_r)$,

$$\mathbf{R}(\mu_r) = \begin{bmatrix} \mu_r^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_r^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_r^N \end{bmatrix}$$

dir (Yüzbaşı vd. 2012). Eğer (4.26), (4.28), (4.31) ve (4.32) denklemleri, (3.5) denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) \mathbf{D}^T \mathbf{A} &= P_0(t) (\alpha + [t \mathbf{T}(t) \mathbf{B}_1 - a \mathbf{T}(a) \mathbf{B}_1] \mathbf{D}^T \mathbf{A}) + \sum_{j=1}^J P_j(t) (\alpha + [\lambda_j t \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\lambda_j) \\ &\mathbf{B}_1 - a \mathbf{T}(a) \mathbf{B}_1] \mathbf{D}^T \mathbf{A}) + \sum_{r=1}^Z Q_r(t) \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\mu_r) \mathbf{D}^T \mathbf{A} + f(t) \end{aligned}$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{T}(t) \mathbf{D}^T - P_0(t) [t \mathbf{T}(t) - a \mathbf{T}(a)] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J P_j(t) [\lambda_j t \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\lambda_j) - a \mathbf{T}(a)] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \\ & - \sum_{r=1}^Z Q_r(t) \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\mu_r) \mathbf{D}^T \} \mathbf{A} = f(t) + \alpha P_0(t) + \alpha \sum_{j=1}^J P_j(t) \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. Bu denklemde, (4.19) denklemi ile daha önce tanımlanmış eşit aralıklı kollokasyon noktaları yazılır. O zaman

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{T}(t_s) \mathbf{D}^T - P_0(t_s) [t \mathbf{T}(t) - a \mathbf{T}(a)] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J P_j(t_s) [\lambda_j t_s \mathbf{T}(t_s) \mathbf{R}(\lambda_j) - a \mathbf{T}(a)] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \\ & - \sum_{r=1}^Z Q_r(t_s) \mathbf{T}(t_s) \mathbf{R}(\mu_r) \mathbf{D}^T \} \mathbf{A} = f(t_s) + \alpha P_0(t_s) + \alpha \sum_{j=1}^J P_j(t_s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu elde edilen sistemin matris bağıntısı

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - [\mathbf{P}_0 \mathbf{T}_1 \mathbf{T} - a \dot{\mathbf{P}}_0 \mathbf{T}(a)] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J [\lambda_j \mathbf{P}_j \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{R}(\lambda_j) - a \dot{\mathbf{P}}_j \mathbf{T}(a)] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \\ & - \sum_{r=1}^Z \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \mathbf{R}(\mu_r) \mathbf{D}^T \} \mathbf{A} = \mathbf{F} + \alpha \dot{\mathbf{P}}_0 + \alpha \sum_{j=1}^J \dot{\mathbf{P}}_j \end{aligned} \quad (4.34)$$

formunda yazılabilir. Burada kullanılan matrisler,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) \\ \mathbf{T}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_0(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_0(t_N) \end{bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{P}}_0 &= \begin{bmatrix} P_0(t_0) \\ P_0(t_1) \\ \vdots \\ P_0(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} P_j(t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_j(t_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_j(t_N) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_j = \begin{bmatrix} P_j(t_0) \\ P_j(t_1) \\ \vdots \\ P_j(t_N) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_r &= \begin{bmatrix} Q_r(t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_r(t_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_r(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. (4.34) denkleminin sağ tarafı kısaca

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \alpha \dot{\mathbf{P}}_0 + \alpha \sum_{j=1}^J \dot{\mathbf{P}}_j$$

olarak ifade edilebilir. (4.34) denklemi kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G}; \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.35)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{D}^T - \left[\mathbf{P}_0 \mathbf{T}_1 \mathbf{T} - a \dot{\mathbf{P}}_0 \mathbf{T}(a) \right] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J \left[\lambda_j \mathbf{P}_j \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{R}(\lambda_j) - a \dot{\mathbf{P}}_j \mathbf{T}(a) \right] \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \sum_{r=1}^Z \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \mathbf{R}(\mu_r) \mathbf{D}^T$$

dir. Katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G} \quad (4.36)$$

matris işlemi yapılarak bulunur ve denklem (4.28)'de yazılarak yaklaşık çözüm olan $y(t)$ elde edilir.

Bu tez çalışmasının bu bölümünden, tez aşamasında, tez yazarı ve danışmanı tarafından araştırma makalesi üretilerek yayımlanmıştır (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024).

4.1.3. Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemleri için yöntemin oluşturulması

Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerin (3.7) formundan, birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemi

$$y'(t) = \sum_{j=0}^J P_{j0}(t) y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (4.37)$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç koşulu ise

$$y(0) = \alpha_0 \quad (4.38)$$

olur. Yönteme başlarken, en yüksek mertebeye sahip olan terime, yani (4.37) denkleminde $y'(t)$ 'ye

$$y'(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t). \quad (4.39)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yazılarak, yaklaşım yapılır. Burada, a_n hesaplanacak olan Hermite katsayılarıdır. (4.39) bağıntısının sağ tarafı

$$y'(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{A} \quad (4.40)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Burada $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

formundadır. (4.40) denkleminde (3.9) yerine yazılırsa, $y'(t)$ 'nin matris formu standart bazda

$$y'(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.41)$$

şeklinde elde edilir. (4.41) denkleminde her iki taraftan 0'dan t 'ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^t y'(x) dx &= \int_0^t \mathbf{T}(x)\mathbf{D}^T \mathbf{A} dx, \\ y(t) - y(0) &= \left[\int_0^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A}, \\ y(t) &= y(0) + \left[\int_0^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.38)'deki $y(0) = \alpha_0$ elde edilen denklemde yerine yazılarak

$$y(t) = \alpha_0 + \left[t \frac{t^2}{2} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.42)$$

elde edilir.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, denklem (4.42)'daki $\left[t \frac{t^2}{2} \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right]$ matrisi

$$\left[t \frac{t^2}{2} \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right] = t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu matris formu, (4.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(t) = \alpha_0 + t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.43)$$

elde edilir (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024). Gecikme içeren $y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})$ teriminin denklemini elde etmek amacı ile denklem (4.43)'te t yerine $\lambda_{j0}t + \beta_{j0}$ yazılarak,

$$y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) = \alpha_0 + (\lambda_{j0}t + \beta_{j0})\mathbf{T}(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.44)$$

denklemini elde edilir.

$$\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(\lambda_{j0})^0(\beta_{j0})^0 & \binom{1}{0}(\lambda_{j0})^0(\beta_{j0})^1 & \dots & \binom{N}{0}(\lambda_{j0})^0(\beta_{j0})^N \\ 0 & \binom{1}{1}(\lambda_{j0})^1(\beta_{j0})^0 & \dots & \binom{N}{1}(\lambda_{j0})^1(\beta_{j0})^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}(\lambda_{j0})^N(\beta_{j0})^0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\mathbf{T}(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})$ ile $\mathbf{T}(t)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{T}(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) = \mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0}) \quad (4.45)$$

şeklindedir (Yüzbaşı vd. 2012). $\mathbf{T}(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})$ ve $\mathbf{T}(t)$ arasındaki eşitliği kullanarak (4.44) denklemini düzenlenir ve

$$y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) = \alpha_0 + (\lambda_{j0}t + \beta_{j0})\mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\mathbf{A} \quad (4.46)$$

denklemini elde edilir. Denklem (4.41) ve (4.46) denklemleri, (4.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T\mathbf{A} = \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)(\alpha_0 + (\lambda_{j0}t + \beta_{j0})\mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\mathbf{A}) + f(t)$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})\mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} \\ &= f(t) + \alpha_0 \sum_{j=1}^J P_{j0}(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. (4.19) denklemini ile daha önce tanımlanmış eşit aralıklı kollokasyon noktalarını (4.47) denkleminde yerine yazarak

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{T}(t_s)\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t_s)(\lambda_{j0}t_s + \beta_{j0})\mathbf{T}(t_s)\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} \\ &= f(t_s) + \alpha_0 \sum_{j=1}^J P_{j0}(t_s) \end{aligned}$$

elde edilir. Son elde edilen sistem, matris bağıntısı şeklinde yazılabilir:

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J \mathbf{P}_{j0}(\lambda_{j0}\mathbf{T}_1 + \beta_{j0})\mathbf{T}\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{F} + \alpha_0 \sum_{j=1}^J \dot{\mathbf{P}}_{j0}. \quad (4.48)$$

Buradaki matrisler

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) \\ \mathbf{T}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{j0} = \begin{bmatrix} P_{j0}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{j0}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{j0}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{j0} = \begin{bmatrix} P_{j0}(t_0) \\ P_{j0}(t_1) \\ \vdots \\ P_{j0}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix}$$

dir. (4.48) denkleminin sağ tarafı kısaca

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \alpha_0 \sum_{j=1}^J \dot{\mathbf{P}}_{j0}.$$

ile ifade edilebilir. (4.48) denklemi kısaca

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}; \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.49)$$

olarak yazılır. Burada $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{D}^T - \sum_{j=1}^J \mathbf{P}_{j0}(\lambda_{j0}\dot{\mathbf{T}} + \beta_{j0})\mathbf{T}\mathbf{R}(\lambda_{j0}, \beta_{j0})\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \quad (4.50)$$

dir. Katsayılar matrisi $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}. \quad (4.51)$$

işlemi yapılarak elde edilir ve denklem (4.43)'de yerine yazılarak yaklaşım çözüm $y(t)$ elde edilir.

4.1.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için yöntemin oluşturulması

Birinci mertebe diferansiyel denklem problemlerinde en yüksek türev birinci mertebe türev olduğu için birinci türeve yaklaşım yapılmıştı. Şimdi ise (3.7) genelleştirilmiş pantograph denkleminde en yüksek türev olan c . mertebe türeve yaklaşımı aşağıdaki gibi yaparak yönteme başlanır:

$$y^{(c)}(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t). \quad (4.52)$$

Burada a_n , hesaplanacak olan Hermite katsayılarıdır ve matris formunda

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

biçiminde yazılır. (4.52) bağıntısının sağ tarafı

$$y^{(c)}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{A} \quad (4.53)$$

şeklindedir. (4.53) denkleminde (3.9) yerine yazılırsa, $y^{(c)}(t)$ 'nin matris formu standart bazda

$$y^{(c)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.54)$$

şeklinde elde edilir. (4.54) denkleminde her iki taraftan 0'dan t 'ye integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^t y^{(c)}(x) dx &= \int_0^t \mathbf{T}(x)\mathbf{D}^T \mathbf{A} dx, \\ y^{(c-1)}(t) - y^{(c-1)}(0) &= \left[\int_0^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A}, \\ y^{(c-1)}(t) &= y^{(c-1)}(0) + \left[\int_0^t [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.8) denklemindeki $y^{(c-1)}(0) = \alpha_{c-1}$ başlangıç koşulu, elde edilen denklemde yerine yazılırsa

$$y^{(c-1)}(t) = \alpha_{c-1} + \left[t \ \frac{t^2}{2} \ \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.55)$$

olur.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}.$$

olmak üzere, (4.55) denklemindeki $\left[t \ \frac{t^2}{2} \ \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right]$ matrisi

$$\left[t \ \frac{t^2}{2} \ \frac{t^3}{3} \ \dots \ \frac{t^{N+1}}{N+1} \right] = t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1$$

şeklinde ifade edilir. Bu matris formu,, (4.55) denkleminde yerine yazılırsa

$$y^{(c-1)}(t) = \alpha_{c-1} + t\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.56)$$

elde edilir. Bundan sonraki adımda, dekle (4.56)'da her iki taraftan 0'dan t 'ye integral alınarak

$$\begin{aligned} \int_0^t y^{(c-1)}(x) dx &= \int_0^t [\alpha_{c-1} + x\mathbf{T}(x)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T \mathbf{A}] dx, \\ y^{(c-2)}(t) - y^{(c-2)}(0) &= \int_0^t \alpha_{c-1} dx + \left[\int_0^t \left[x \ \frac{x^2}{2} \ \frac{x^3}{3} \ \dots \ \frac{x^{N+1}}{N+1} \right] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A}, \\ y^{(c-2)}(t) &= y^{(c-2)}(0) + \int_0^t \alpha_{c-1} dx + \left[\int_0^t \left[x \ \frac{x^2}{2} \ \frac{x^3}{3} \ \dots \ \frac{x^{N+1}}{N+1} \right] dx \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.8) denklemindeki $y^{(c-2)}(0) = \alpha_{c-2}$ başlangıç koşulu, elde edilen denklemde yerine yazılırsa

$$y^{(c-2)}(t) = \alpha_{c-2} + \alpha_{c-1}t + \left[\frac{t^2}{2} \frac{t^3}{6} \frac{t^4}{12} \cdots \frac{t^{N+2}}{(N+1)(N+2)} \right] \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.57)$$

sonucuna varılır.

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/(N+1)(N+2) \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\left[\frac{t^2}{2} \frac{t^3}{6} \frac{t^4}{12} \cdots \frac{t^{N+2}}{(N+1)(N+2)} \right]$ matrisi

$$\left[\frac{t^2}{2} \frac{t^3}{6} \frac{t^4}{12} \cdots \frac{t^{N+2}}{(N+1)(N+2)} \right] = t^2 \mathbf{T}(t) \mathbf{B}_2.$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}_2$ matrisi, denklem (4.57)'de yazılırsa

$$y^{(c-2)}(t) = \alpha_{c-2} + \alpha_{c-1}t + t^2 \mathbf{T}(t) \mathbf{B}_2 \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.58)$$

elde edilir. Buradaki $\mathbf{B}_2$ matrisi, $\mathbf{B}_1$ matrisi cinsinden, aşağıdaki matris çarpımı yapılarak elde edilebilir:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}.$$

Bu matris çarpımındaki sol taraftaki matrisi $\mathbf{L}_1$ olarak isimlendirilirse,

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_1$$

yazılır. Yaklaşık çözümü aranan $y(t)$ fonksiyonu elde edilene kadar integral alınmaya ve gerekli matris formları elde edilmeye devam edilir. $y^{(c)}$ ifadesinin karşılığı olan matris formundan toplam c defa integral alınarak $y(t)$ elde edilir. İntegral alınırken, yukarıda

yapılan integrasyon işlemi sonucu oluşan $\mathbf{B}_1$ ve $\mathbf{B}_2$ matrislerine benzer, t 'lerin katsayıları için yazılmış matrisler oluşur. İntegrasyon sonucu oluşan $\mathbf{B}_3$ matrisinin $\mathbf{B}_2$ matrisi cinsinden ifadesi şöyle olur:

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N+1)(N+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/24 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/60 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} \end{bmatrix}.$$

Matris çarpımındaki soldaki matris $\mathbf{L}_2$ olarak isimlendirilirse

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_2$$

denklemini elde edilir. Problemdeki mertebeye bağlı olarak integrasyon işlemine devam edilirse, $\mathbf{B}_3$ matrisine benzer bir $\mathbf{B}_4$ matrisi oluşacaktır. Bu $\mathbf{B}_4$ matrisi de $\mathbf{B}_3$ matrisi kullanılarak yazılabilir:

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/24 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/60 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/24 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/120 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/360 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)} \end{bmatrix}.$$

Matris çarpımındaki soldaki matris L_3 olarak isimlendirilerek

$$B_4 = L_3 B_3$$

denkleme ulaşılır. L_1, L_2, L_3 matrisleri genel formda yazılabilir:

$$L_c = \begin{bmatrix} 1/(c+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/(c+2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/(c+3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/(c+1+N) \end{bmatrix}, \quad c = 1, 2, \dots$$

Bu L_c matrisini kullanarak, B_1, B_2, B_3, B_4 matrisleri genel formda yazılır:

$$B_{c+1} = \begin{bmatrix} 1/(c+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/(c+2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/(c+3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/(c+1+N) \end{bmatrix} \cdot B_c, \quad c = 1, 2, \dots$$

Toplamda c defa integral alınarak yaklaşık çözüm aşağıdaki şekilde bulunur:

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{c-2} \frac{t^{c-2}}{(c-2)!} + \alpha_{c-1} \frac{t^{c-1}}{(c-1)!} + t^c \mathbf{T}(t) \mathbf{B}_c \mathbf{D}^T \mathbf{A}. \quad (4.59)$$

Fonksiyonel bir denklem ele alındığından (4.59) denkleminde t yerine $\lambda_{jl}t + \beta_{jl}$ ko-yarak gecikmeli $y(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})$ denklemi elde edilir:

$$y(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) = \alpha_0 + \alpha_1(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) + \dots + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-2}}{(c-2)!} + \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-1}}{(c-1)!} + (\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^c \mathbf{T}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) \mathbf{B}_c \mathbf{D}^T \mathbf{A}. \quad (4.60)$$

Elde edilen denklemler ışığında, (3.7) genelleştirilmiş pantograph denklemindeki $y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})$ ifadesinin eşiti elde edilebilir. Öncelikle $y^{(l)}(t)$ denkleminin eşiti yazılır:

$$y^{(l)}(t) = \alpha_l + \alpha_{l+1}t + \dots + \alpha_{c-2} \frac{t^{c-2-l}}{(c-2-l)!} + \alpha_{c-1} \frac{t^{c-1-l}}{(c-1-l)!} + t^{c-l} \mathbf{T}(t) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \mathbf{A}. \quad (4.61)$$

Denklem (4.61)'de t yerine $\lambda_{jl}t + \beta_{jl}$ yazılarak

$$y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) = \alpha_l + \alpha_{l+1}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) + \dots + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} + \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} + (\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-l} \mathbf{T}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.62)$$

elde edilir.

$$\mathbf{R}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(\lambda_{jl})^0(\beta_{jl})^0 & \binom{1}{0}(\lambda_{jl})^0(\beta_{jl})^1 & \dots & \binom{N}{0}(\lambda_{jl})^0(\beta_{jl})^N \\ 0 & \binom{1}{1}(\lambda_{jl})^1(\beta_{jl})^0 & \dots & \binom{N}{1}(\lambda_{jl})^1(\beta_{jl})^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}(\lambda_{jl})^N(\beta_{jl})^0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\mathbf{T}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})$ ile $\mathbf{T}(t)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{T}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) = \mathbf{T}(t)\mathbf{R}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \quad (4.63)$$

şeklinde (Yüzbaşı vd. 2012). (4.63) denklemi kullanılarak (4.62) denklemi düzenlenir:

$$\begin{aligned} y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) &= \alpha_l + \alpha_{l+1}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) + \dots + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} \\ &+ \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} + (\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-l} \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

(4.54) ve (4.64) denklemleri (3.7)'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) \mathbf{D}^T \mathbf{A} &= \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t) \left\{ \alpha_l + \alpha_{l+1}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) + \dots + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} \right. \\ &+ \left. \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} + (\lambda_{jl}t + \beta_{jl})^{c-l} \mathbf{T}(t) \mathbf{R}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \mathbf{A} \right\} + f(t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

elde edilir. (4.19) denklemi ile daha önce tanımlanmış eşit aralıklı kollokasyon noktalarını (4.65)'da t yerine yazarak

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t_s) \mathbf{D}^T \mathbf{A} &= \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t_s) \left\{ \alpha_l + \alpha_{l+1}(\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl}) + \dots + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} \right. \\ &+ \left. \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} + (\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl})^{c-l} \mathbf{T}(t_s) \mathbf{R}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \mathbf{A} \right\} + f(t_s) \end{aligned} \quad (4.66)$$

elde edilir. Denklem (4.66) düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &\left\{ \mathbf{T}(t_s) \mathbf{D}^T - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t_s) (\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl})^{c-l} \mathbf{T}(t_s) \mathbf{R}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} \\ &= \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t_s) \left[(\alpha_l + \alpha_{l+1}(\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl}) + \dots + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} \right. \\ &+ \left. \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl}t_s + \beta_{jl})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} \right] + f(t_s) \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemde bulunan t_s^m ($m = 1, 2, \dots, c-l$) ifadelerine karşılık gelen matris

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} t_0^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_N^m \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilmek üzere bu elde edilen sistemin matris bağıntısı

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} \mathbf{P}_{jl} (\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)})^{c-l} \mathbf{TR}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} \\
 &= \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} \dot{\mathbf{P}}_{jl} \left[(\alpha_l + \alpha_{l+1} (\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)}) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} \right] + \mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

formunda yazılabilir. Denklemdaki diğer matrisler

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(t_0) \\ \mathbf{T}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{jl} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{jl}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{jl}(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_{jl}(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{jl} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{jl}(t_0) \\ \mathbf{P}_{jl}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{jl}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix}$$

dir. Denklem (4.67)'in sağ tarafı kısaca

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &= \sum_{l=0}^{c-1} \dot{\mathbf{P}}_{jl} \left[(\alpha_l + \alpha_{l+1} (\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)}) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_{c-2} \frac{(\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)})^{c-2-l}}{(c-2-l)!} + \alpha_{c-1} \frac{(\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)})^{c-1-l}}{(c-1-l)!} \right] + \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

ile ifade edilir. (4.67) denklemi kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \tag{4.68}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} \mathbf{P}_{jl} (\lambda_{jl} \mathbf{T}_m + \beta_{jl} \mathbf{I}_{(N+1) \times (N+1)})^{c-l} \mathbf{TR}(\lambda_{jl}, \beta_{jl}) \mathbf{B}_{c-l} \mathbf{D}^T$$

dir. $\mathbf{A}$ bilinmeyen Hermite katsayıları matrisi

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G} \tag{4.69}$$

işlemleriyle bulunur ve denklem (4.59)'de yerine yazılarak $y(t)$ yaklaşık çözümüne ulaşılmış olur.

4.2. Hata Tahmini

4.2.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için hata tahmini

Multi-pantograph diferansiyel denklemlerinin integrale dayalı kollokasyon yöntemiyle çözümüne ait rezidüel fonksiyon kullanarak bir hata problemi geliştirilecek ve hata tahmini yöntemi sunulacaktır. Bu hata tahmini yöntemi, literatürde yer alan ve multi-pantograph diferansiyel denklemlerinin çözümünü inceleyen Galerkin benzeri yöntem (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018), multi-pantograph ve genelleştirilmiş pantograph denklemlerinin çözümlerini araştıran Legendre kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015) ile üstel yaklaşım yöntemine (Yüzbaşı ve Sezer 2013) dayanan çalışmalarda kullanılmıştır.

$$y'(t) = P_{00}(t)y(t) + \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)y(\lambda_j t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (4.70)$$

multi-pantograph denkleminin

$$y(0) = \alpha \quad (4.71)$$

başlangıç koşulu altında sunulan yöntem ile elde edilen (4.14) yaklaşık çözümü $y_N(t)$ ve tam çözümü $y(t)$ olmak üzere, gerçek hata fonksiyonu

$$e_N(t) = y(t) - y_N(t)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $y_N(t)$ yaklaşık çözümü (4.70)'de yazılarak rezidüel hata fonksiyonu

$$R_N(t) = y'_N(t) - P_{00}(t)y_N(t) - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)y_N(\lambda_j t) - f(t) \quad (4.72)$$

olarak tanımlanır. Eğer $y_N(t)$ fonksiyonu tam çözüme eşit ise $R_N(t) = 0$ olur. (4.72) denklemi

$$y'_N(t) - P_{00}(t)y_N(t) - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)y_N(\lambda_j t) = R_N(t) + f(t) \quad (4.73)$$

biçiminde de yazılabilir. (4.70)'den (4.73) çıkarılırsa

$$y'(t) - y'_N(t) - P_{00}(t)[y(t) - y_N(t)] - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)[y(\lambda_j t) - y_N(\lambda_j t)] = -R_N(t)$$

elde edilir ve

$$e'_N(t) - P_{00}(t)[e_N(t)] - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t)[e_N(\lambda_j t)] = -R_N(t) \quad (4.74)$$

hata diferansiyel denklemini yazılır. Yaklaşık çözüm, başlangıç koşulunu sağlayacağı için başlangıç koşulu yaklaşık çözüm kullanılarak yeniden yazılmak istenirse

$$y_N(0) = \alpha \quad (4.75)$$

olarak yazılır. (4.71)'ten (4.75) çıkarılarak

$$\begin{aligned} y(0) - y_N(0) &= 0 \\ e_N(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

elde edilir. $K > N$ olmak üzere (4.76) başlangıç koşulu altında (4.74) hata diferansiyel denklem problemi için

$$e'_{N,K}(t) = \sum_{n=0}^K \tilde{a}_n H_n(t)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yaklaşım yapılarak $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözümü aranır. Böylece $e_N(t)$ hata fonksiyonu için $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözüm olur. $y_N(t)$ yaklaşık çözüm ve en son elde edilen hata probleminin yaklaşık çözümü $e_{N,K}(t)$ toplanarak iyileştirilmiş yaklaşık çözüm

$$y_{N,K}(t) = y_N(t) + e_{N,K}(t)$$

olarak elde edilir. Son olarak, tam çözümden iyileştirilmiş yaklaşık çözüm çıkarılarak iyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu

$$E_{N,K}(t) = y(t) - y_{N,K}(t)$$

biçiminde oluşturulur.

4.2.2. Neutral diferansiyel denklemleri için hata tahmini

Neutral diferansiyel denklemlerinin integrale dayalı kollokasyon yöntemiyle çözümüne ait rezidüel fonksiyon kullanarak bir hata problemi geliştirilecek ve hata tahmini yöntemi sunulacaktır. Bu hata tahmini yöntemi, neutral diferansiyel denklemlerinin çözümünü araştırmak için geliştirilen Lucas polinomsal yaklaşımı (Gümgüm vd. 2020), Clique polinomlarını baz alan kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Tamar 2023) ve tekil pertürbe edilmiş diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan Hermite kollokasyon yöntemi

(Yüzbaşı ve Savaşaneril 2020) çalışmalarında kullanılmıştır.

$$y'(t) = P_0(t)y(t) + \sum_{j=1}^J P_j(t)y(\lambda_j t) + \sum_{r=1}^Z Q_r(t)y'(\mu_r t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (4.77)$$

neutral diferansiyel denkleminin

$$y(a) = \alpha \quad (4.78)$$

başlangıç koşulu altında sunulan yöntem ile elde edilen (4.28) yaklaşık çözümü $y_N(t)$ ve tam çözümü $y(t)$ olmak üzere, gerçek hata fonksiyonu

$$e_N(t) = y(t) - y_N(t)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $y_N(t)$ yaklaşık çözümü (4.77)'de yazılarak rezidüel hata fonksiyonu

$$R_N(t) = y'_N(t) - P_0(t)y_N(t) - \sum_{j=1}^J P_j(t)y_N(\lambda_j t) - \sum_{r=1}^Z Q_r(t)y'_N(\mu_r t) - f(t) \quad (4.79)$$

olarak tanımlanır. $y_N(t)$ fonksiyonunun tam çözüme eşit olması durumunda $R_N(t) = 0$ olur. (4.79) denklemi

$$y'_N(t) - P_0(t)y_N(t) - \sum_{j=1}^J P_j(t)y_N(\lambda_j t) - \sum_{r=1}^Z Q_r(t)y'_N(\mu_r t) = R_N(t) + f(t) \quad (4.80)$$

biçiminde de yazılabilir. (4.77)'den (4.80) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} y'(t) - y'_N(t) - P_0(t)[y(t) - y_N(t)] - \sum_{j=1}^J P_j(t)[y(\lambda_j t) - y_N(\lambda_j t)] \\ - \sum_{r=1}^Z Q_r(t)[y'(\mu_r t) - y'_N(\mu_r t)] = -R_N(t) \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$e'_N(t) - P_0(t)[e_N(t)] - \sum_{j=1}^J P_j(t)[e_N(\lambda_j t)] - \sum_{r=1}^Z Q_r(t)[e'_N(\mu_r t)] = -R_N(t) \quad (4.81)$$

hata diferansiyel denklemi yazılır. Yaklaşık çözüm, başlangıç koşulunu sağlayacağı için başlangıç koşulu yaklaşık çözüm kullanılarak yeniden yazmak istenirse

$$y_N(a) = \alpha \quad (4.82)$$

olarak yazılır. (4.78)'ten (4.82) çıkarılırsa

$$y(a) - y_N(a) = 0$$

$$e_N(a) = 0 \quad (4.83)$$

elde edilir. $K > N$ olmak üzere (4.83) başlangıç koşulu altında (4.81) hata diferansiyel denklem problemi için

$$e'_{N,K}(t) = \sum_{n=0}^K \tilde{a}_n H_n(t)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yaklaşım yapılarak $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözümü aranır. Böylece $e_N(t)$ hata fonksiyonu için $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözüm olur. $y_N(t)$ yaklaşık çözüm ve en son elde edilen hata probleminin yaklaşık çözümü $e_{N,K}(t)$ toplanarak iyileştirilmiş yaklaşık çözüm

$$y_{N,K}(t) = y_N(t) + e_{N,K}(t)$$

olarak elde edilir. Son olarak, tam çözümden iyileştirilmiş yaklaşık çözüm çıkarılarak iyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu

$$E_{N,K}(t) = y(t) - y_{N,K}(t)$$

biçiminde oluşturulur.

Bu tez çalışması sürecinde tezde ele alınan neutral diferansiyel denklemler için yöntemin uygulanması kısmından tez yazarı ve danışmanı tarafından üretilerek yayımlanan araştırma makalesi bu hata tahminini de içermektedir (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024).

4.2.3. Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemleri için hata tahmini

Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemlerinin integrale dayalı kollokasyon yöntemiyle çözümüne ait rezidüel fonksiyon kullanılarak bir hata problemi geliştirilecek ve hata tahmini yöntemi sunulacaktır. Bu hata tahmini tekniği, daha önce pantograph türü Volterra integral-diferansiyel denklemlerinin çözümü için geliştirilen Laguerre yaklaşımı (Yüzbaşı 2014), tekil pertürbe edilmiş diferansiyel denklemlerinin çözümünü araştıran Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2014), ikinci dereceden multi-pantograph diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü incelemek için geliştirilen Vieta–Lucas polinomlarını baz alan kollokasyon yöntemi (Izadi vd. 2021) çalışmalarında kullanılmıştır.

$$y'(t) = \sum_{j=0}^J P_{j0}(t)y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (4.84)$$

birinci mertebe pantograph diferansiyel denkleminin

$$y(0) = \alpha_0 \quad (4.85)$$

başlangıç koşulu altında sunulan yöntem ile elde edilen (4.43) yaklaşık çözümü $y_N(t)$ ve tam çözümü $y(t)$ olmak üzere, gerçek hata fonksiyonu

$$e_N(t) = y(t) - y_N(t)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $y_N(t)$ yaklaşık çözümü (4.84)'de yazılarak rezidüel hata fonksiyonu

$$R_N(t) = y'_N(t) - \sum_{j=0}^J P_{j0}(t) y_N(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) - f(t) \quad (4.86)$$

olarak tanımlanır. Eğer $y_N(t)$ fonksiyonu tam çözüme eşit ise $R_N(t) = 0$ olur. (4.86) denklemi

$$y'_N(t) - \sum_{j=0}^J P_{j0}(t) y_N(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) = R_N(t) + f(t) \quad (4.87)$$

biçiminde de yazılabilir. (4.84)'dan (4.87) çıkarılırsa

$$y'(t) - y'_N(t) - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t) [y(\lambda_{j0}t + \beta_{j0}) - y_N(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})] = -R_N(t)$$

elde edilir ve

$$e'_N(t) - \sum_{j=1}^J P_{j0}(t) [e_N(\lambda_{j0}t + \beta_{j0})] = -R_N(t) \quad (4.88)$$

hata diferansiyel denklemi yazılır. Yaklaşık çözüm, başlangıç koşulunu sağlayacağı için başlangıç koşulu, yaklaşık çözüm kullanılarak yeniden yazmak istenirse

$$y_N(0) = \alpha_0 \quad (4.89)$$

olarak yazılır. (4.85)'den (4.89) çıkarılırsa

$$y(0) - y_N(0) = 0$$

$$e_N(0) = 0 \quad (4.90)$$

elde edilir. $K > N$ olmak üzere (4.90) başlangıç koşulu altında (4.74) hata diferansiyel denklem problemi için

$$e'_{N,K}(t) = \sum_{n=0}^K \tilde{a}_n H_n(t)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yaklaşım yapılarak $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözümü aranır. Böylece $e_N(t)$ hata fonksiyonu için $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözüm olur. $y_N(t)$ yaklaşık çözüm ve en son elde edilen hata probleminin yaklaşık çözümü $e_{N,K}(t)$ toplanarak iyileştirilmiş yaklaşık çözüm

$$y_{N,K}(t) = y_N(t) + e_{N,K}(t)$$

olarak elde edilir. Son olarak, tam çözümden iyileştirilmiş yaklaşık çözüm çıkarılarak iyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu

$$E_{N,K}(t) = y(t) - y_{N,K}(t)$$

biçiminde oluşturulur.

4.2.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için hata tahmini

Bu bölümde, yöntemin geçerliliğini ve etkililiğini tespit etmek amacıyla genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerinin integrale dayalı kollokasyon yöntemiyle çözümüne ait rezidüel fonksiyon kullanarak bir hata problemi geliştirilecek ve hata tahmini yöntemi sunulacaktır. Bu hata tahmini tekniği, pantograph diferansiyel denklemlerinin çözümü için geliştirilen Hermite kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2015), üstel yaklaşım yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2013) ve Taylor matris yöntemi (Yüzbaşı ve Ismailov 2018) temel alınarak yapılan çalışmalarda kullanılmıştır.

$$y^{(c)}(t) = \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t) y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) + f(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (4.91)$$

genelleştirilmiş pantograph denkleminin

$$y^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, c-1 \quad (4.92)$$

başlangıç koşulu altında sunulan yöntem ile elde edilen (4.59) yaklaşık çözümü $y_N(t)$ ve tam çözümü $y(t)$ olmak üzere, gerçek hata fonksiyonu

$$e_N(t) = y(t) - y_N(t)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $y_N(t)$ yaklaşık çözümü (4.91)'de yazılarak rezidüel hata fonksiyonu

$$R_N(t) = y_N^{(c)}(t) - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t) y_N^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) - f(t) \quad (4.93)$$

olarak tanımlanır. $y_N(t)$ fonksiyonunun tam çözüme eşit olması durumunda $R_N(t) = 0$ olur. (4.93) denklemini

$$y_N^{(c)}(t) - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t) y_N^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) = R_N(t) + f(t) \quad (4.94)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.91)'den (4.94) çıkarılırsa

$$y^{(c)}(t) - y_N^{(c)}(t) - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t) [y^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl}) - y_N^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})] = -R_N(t)$$

elde edilir ve

$$e_N^{(c)}(t) - \sum_{j=0}^J \sum_{l=0}^{c-1} P_{jl}(t) [e_N^{(l)}(\lambda_{jl}t + \beta_{jl})] = -R_N(t) \quad (4.95)$$

hata diferansiyel denklemi yazılır. Yaklaşık çözüm kullanılarak başlangıç koşulunu yeniden yazmak istenirse

$$y_N^{(i)}(0) = \alpha_i \quad (4.96)$$

olarak yazılır. Çünkü, yaklaşık çözüm de başlangıç koşulunu sağlamaktadır. (4.92)'den (4.96) çıkarılırsa

$$y^{(i)}(0) - y_N^{(i)}(0) = 0$$

olduğundan

$$e_N^{(i)}(0) = 0 \quad (4.97)$$

elde edilir. $K > N$ olmak üzere (4.97) başlangıç koşulları altında (4.95) hata diferansiyel denklem problemi için

$$e_{N,K}^{(c)}(t) = \sum_{n=0}^K \tilde{a}_n H_n(t)$$

kesilmiş Hermite serisi formunda yaklaşım yapılarak $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözümü aranır. Böylece $e_N(t)$ hata fonksiyonu için $e_{N,K}(t)$ yaklaşık çözüm olur. $y_N(t)$ yaklaşık çözüm ve en son elde edilen hata probleminin yaklaşık çözümü $e_{N,K}(t)$ toplanarak iyileştirilmiş yaklaşık çözüm

$$y_{N,K}(t) = y_N(t) + e_{N,K}(t)$$

olarak elde edilir. Son olarak, tam çözümden iyileştirilmiş yaklaşık çözüm çıkarılarak iyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu

$$E_{N,K}(t) = y(t) - y_{N,K}(t)$$

biçiminde oluşturulur.

4.3. Sayısal Örnekler

Her bir örnek için yaklaşık çözümler elde edildikten sonra, hata tahmini yöntemi uygulanarak bu çözümlerin gerçek hata değerleri, tahmini hata değerleri ve iyileştirilmiş çözümlerin gerçek hata değerleri belirlenecektir. Elde edilen sonuçlar çizelge ve grafikler aracılığıyla sunulacak, elde edilen bulgular ayrıntılı olarak değerlendirilecektir. Ayrıca, önerilen yöntemin başarımı, literatürde yer alan mevcut yöntemlerle karşılaştırmalı olarak analiz edilecektir.

4.3.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler

Örnek 4.1.

$$y'(t) = -y(t) + (q/2)y(qx) - (q/2)e^{-qt}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.98)$$

multi-pantograph diferansiyel denklemi $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında ele alınacaktır (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018). Bu denklemde, $P_{00}(t) = -1$, $P_{10}(t) = q/2$, $\lambda_1 = q$, $f(t) = -(q/2)e^{-qt}$ 'dir. Problemin tam çözümü e^{-t} 'dir. N değeri 5 ve q değeri 0.2 seçilerek çözüme başlanır. Öncelikle, $y'(t)$ ifadesi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^5 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında, $b = 1$ ve $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 'dir ve $N = 5$ için kollokasyon noktaları t_s 'ler tespit edilir:

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{5}, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{3}{5}, \quad t_4 = \frac{4}{5}, \quad t_5 = 1. \right\}$$

Denklem (4.20) kullanılarak problemin çözümü için için matris denklemi

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00}\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - 0.2\mathbf{P}_{10}\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{R}(0.2)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{F} + \dot{\mathbf{P}}_{00} + \dot{\mathbf{P}}_{10}$$

şeklinde oluşturulur. Burada kullanılan matrisler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -48 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -160 & 0 & 32 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_1) = \mathbf{R}(0.2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 541/1651 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{00} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{10} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1/10 \\ -e^{-\frac{1}{25}}/10 \\ -e^{-\frac{2}{25}}/10 \\ -e^{-\frac{3}{25}}/10 \\ -e^{-\frac{4}{25}}/10 \\ -e^{-\frac{1}{5}}/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 \\ -e^{-\frac{1}{25}}/10 - 9/10 \\ -e^{-\frac{2}{25}}/10 - 9/10 \\ -e^{-\frac{3}{25}}/10 - 9/10 \\ -e^{-\frac{4}{25}}/10 - 9/10 \\ -e^{-\frac{1}{5}}/10 - 9/10 \end{bmatrix}.$$

(4.22)'den yararlanarak $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 \\ 299/250 & 329/748 & -562/253 & -895/348 & 4735/384 & 4836/193 \\ 174/125 & 779/812 & -1367/664 & -6351/1223 & 743/88 & 12035/258 \\ 397/250 & 173/111 & -1105/763 & -1193/162 & 751/1164 & 7459/132 \\ 223/125 & 3251/1453 & -1195/3667 & -3557/418 & -2741/277 & 5309/111 \\ 99/50 & 749/250 & 2573/1875 & -4379/549 & -6161/293 & 5660/331 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanmıştır. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & ; & -1 \\ 299/250 & 329/748 & -562/253 & -895/348 & 4735/384 & 4836/193 & ; & -e^{-\frac{1}{25}}/10 - 9/10 \\ 174/125 & 779/812 & -1367/664 & -6351/1223 & 743/88 & 12035/258 & ; & -e^{-\frac{2}{25}}/10 - 9/10 \\ 397/250 & 173/111 & -1105/763 & -1193/162 & 751/1164 & 7459/132 & ; & -e^{-\frac{3}{25}}/10 - 9/10 \\ 223/125 & 3251/1453 & -1195/3667 & -3557/418 & -2741/277 & 5309/111 & ; & -e^{-\frac{4}{25}}/10 - 9/10 \\ 99/50 & 749/250 & 2573/1875 & -4379/549 & -6161/293 & 5660/331 & ; & -e^{-\frac{1}{5}}/10 - 9/10 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. (4.23) bağıntısı kullanarak katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5471/4279 \\ 2235/3529 \\ -1123/7308 \\ 143/6003 \\ -45/18773 \\ 41/256564 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Hesaplanan $\mathbf{A}$ matrisi, (4.14) denkleminde yerine konularak çözümü aranan $y_N(t)$ yaklaşık çözümü elde edilmiş olur. $N = 5$ değeri için ulaşılan yaklaşık çözüm ve bu çözüme bağlı olarak hesaplanan e_5 hata fonksiyonu, $K = 7$ için $e_{5,7}$ tahmini hata fonksiyonu ve $E_{5,7}$ iyileştirilmiş hata fonksiyonu aşağıda sırasıyla yazılmıştır.

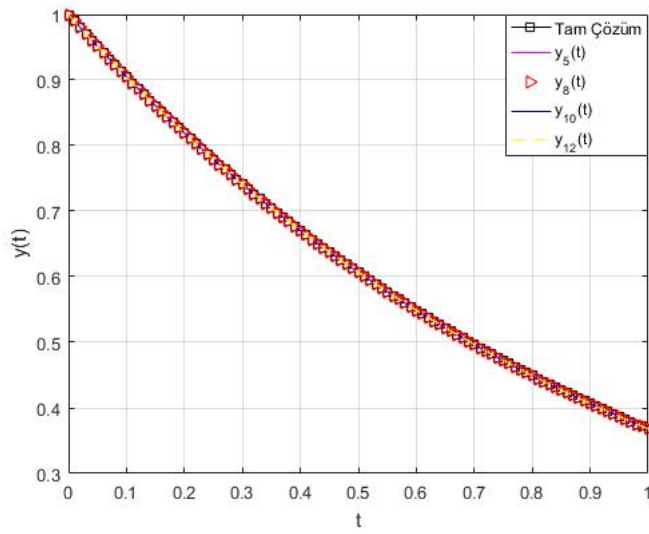
$$\begin{aligned} y_5(t) = & 8.522889346912846e - 04t^6 - 7.670588136677736e - 03t^5 \\ & + 4.125066613100847e - 02t^4 - 1.665366855972520e - 01t^3 \\ & + 4.999836360004811e - 01t^2 - 1.0000000000000041t + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_5(t) = & e^{-t} + 1.0000000000000041t - 4.999836360004811e - 01t^2 \\ & + 1.665366855972520e - 01t^3 - 4.125066613100847e - 02t^4 \\ & + 7.670588136677736e - 03t^5 - 8.522889346912846e - 04t^6 - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{5,7}(t) = & 1.515847211345454e - 05t^8 - 1.819016528190671e - 04t^7 \\ & + 5.206353630491988e - 04t^6 - 6.535772084372669e - 04t^5 \\ & + 4.128955042794485e - 04t^4 - 1.294044214475304e - 04t^3 \\ & + 1.631761535018965e - 05t^2 + 1.350924300190983e - 29t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{5,7}(t) = & e^{-t} + t - 4.999999536158313e - 01t^2 + 1.666660900186995e - 01t^3 \\ & - 4.166356163528792e - 02t^4 + 8.324165345115004e - 03t^5 \\ & - 1.372924297740484e - 03t^6 + 1.819016528190671e - 04t^7 \\ & - 1.515847211345454e - 05t^8 - 1. \end{aligned}$$

Şekil 4.3'te, problemin tam çözümü olan e^{-t} ile $N = 5, 8, 10, 12$ ve $q = 0.2$ alınarak elde edilen yaklaşık çözüm değerlerinin karşılaştırılması sunulmaktadır. Şekil 4.3'e göre, tam çözüm ve yaklaşık çözümler arasında benzerlik olduğu gözlemlenmektedir.



Şekil 4.3. Örnek 4.1’deki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması

Çizelge 4.1, $q = 0.2$ alınarak elde edilen çözümlere bağlı olarak hesaplanan $|e_N(t)|$ mutlak hataların literatürde bulunan Muroya yöntemi (Muroya vd. 2003), Taylor yöntemi (Sezer vd. 2012), Galerkin benzeri yöntem (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018) kullanılarak hesaplanan mutlak hata değerleriyle karşılaştırmasını sunmaktadır. Sunulan yöntem ile literatürde bulunan yöntemlerin sonuçları karşılaştırıldığında, sunulan yöntem ile çözümdeki mutlak hata değerlerinin daha az olduğu görülmektedir. Buradan hareketle integrale dayalı kollokasyon yöntemi kullanılarak yapılan çözümlerin literatürde yer alan diğer yöntemlere kıyasla daha az hata verdiği, dolayısıyla tam çözüme daha yakın sonuçların ortaya konulduğu anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.1. Örnek 4.1’deki problemde $q = 0.2$ için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

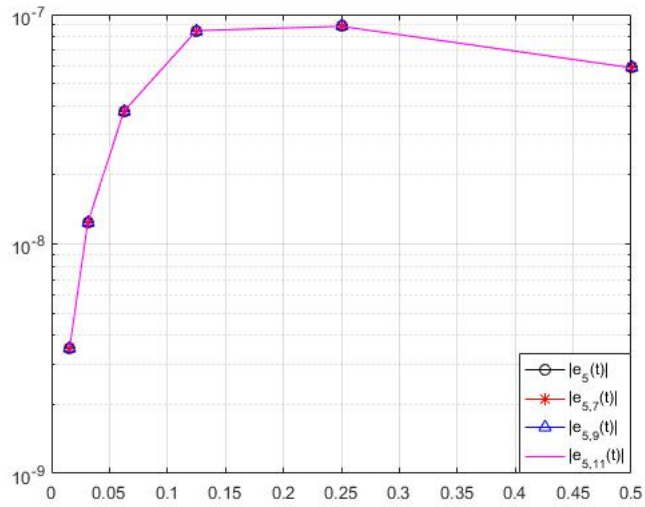
	Sunulan Yöntem				Muroya Yöntemi
t_i	$N = 5$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	(Muroya vd. 2003)
2^{-1}	5.8644e-08	2.4253e-12	2.2204e-15	2.3002e-19	2.19e-5
2^{-2}	8.8850e-08	2.9222e-12	2.5535e-15	1.9886e-19	1.08e-6
2^{-3}	8.5109e-08	4.1697e-12	3.2196e-15	2.0703e-19	3.81e-8
2^{-4}	3.7935e-08	2.9788e-12	3.2196e-15	2.6115e-19	1.26e-9
2^{-5}	1.2391e-08	1.2272e-12	1.3323e-15	1.1711e-19	4.09e-11
2^{-6}	3.5235e-09	3.9024e-13	5.5511e-16	3.5570e-20	1.20e-12
	Taylor Yöntemi (Sezer vd. 2012)		Galerkin Yöntemi (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018)		
t_i	$N = 10$	$N = 12$	$N = 5$	$N = 8$	$N = 10$
2^{-1}	2.00e-10	1.24e-10	6.40e-7	3.77e-11	1.96e-11
2^{-2}	1.00e-10	9.74e-11	5.34e-7	6.95e-11	3.03e-11
2^{-3}	1.00e-10	7.00e-11	9.09e-8	4.68e-11	2.08e-11
2^{-4}	1.00e-10	9.14e-11	3.67e-8	9.04e-11	3.83e-11
2^{-5}	1.00e-11	5.28e-11	3.71e-7	9.28e-11	4.11e-11
2^{-6}	0	1.95e-11	2.46e-7	6.51e-11	2.96e-11

Çizelge 4.2, $q = 0.2$ alınarak elde edilen çözümlere bağlı olarak hesaplanan $|e_{N,K}(t)|$ tahmini hata hataların ve $|E_{N,K}(t)|$ iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının, farklı N ve K değerleri için karşılaştırılmalarını gösterir.

Çizelge 4.2. Örnek 4.1'deki problemde $q = 0.2$ için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen hataların karşılaştırılması

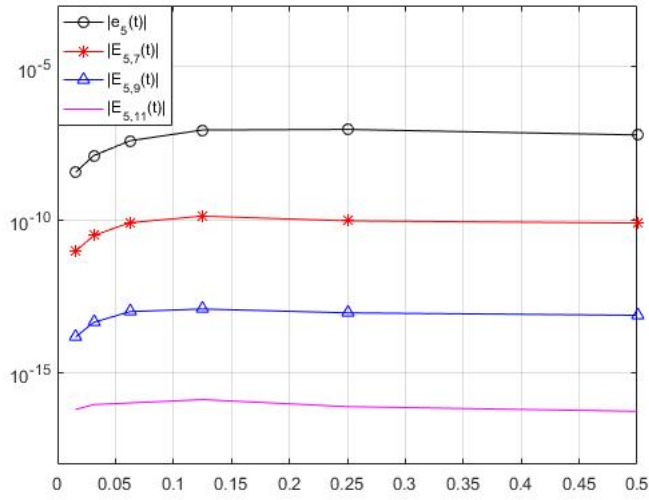
t_i	$ e_{5,7}(t_i) $	$ e_{8,10}(t_i) $	$ e_{10,12}(t_i) $	$ e_{12,14}(t_i) $
2^{-1}	5.8566e-08	2.4229e-12	2.1014e-15	2.3062e-19
2^{-2}	8.8758e-08	2.9197e-12	2.5640e-15	1.9953e-19
2^{-3}	8.4979e-08	4.1665e-12	3.1962e-15	2.0779e-19
2^{-4}	3.7855e-08	2.9760e-12	2.9567e-15	2.6203e-19
2^{-5}	1.2361e-08	1.2256e-12	1.4317e-15	1.1768e-19
2^{-6}	3.5142e-09	3.8979e-13	4.9372e-16	3.5804e-20
t_i	$ E_{5,7}(t_i) $	$ E_{8,10}(t_i) $	$ E_{10,12}(t_i) $	$ E_{12,14}(t_i) $
2^{-1}	7.7574e-11	2.1025e-15	0	6.5992e-19
2^{-2}	9.1540e-11	2.5743e-15	1.3878e-17	1.0233e-17
2^{-3}	1.3035e-10	3.2422e-15	5.3776e-17	5.2246e-17
2^{-4}	7.9933e-11	2.9807e-15	2.5153e-17	2.1525e-17
2^{-5}	3.0401e-11	1.4799e-15	4.8139e-17	4.8012e-17
2^{-6}	9.3013e-12	5.4161e-16	4.8572e-17	4.7493e-17

Şekil 4.4, $N = 5$ için elde edilen gerçek hata ve $K = 7, 9, 11$ alınarak hesaplanan tahmini mutlak hata değerlerinin karşılaştırmasını vermektedir. Şekil incelendiğinde, gerçek hata fonksiyonu ile tahmini hata fonksiyonunun değerlerinin benzer sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 4.4. Örnek 4.1'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.5'te $N = 5$ alınarak elde edilen gerçek hata değerleri ve $K = 7, 9, 11$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil incelendiğinde, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin, gerçek hata değerlerine kıyasla daha küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca, N kesme sınırını değiştirmeden K değerini arttırmanın iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatasını azalttığı net bir şekilde görülmektedir.



Şekil 4.5. Örnek 4.1’deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.2.

$$y'(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}y\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.99)$$

multi-pantograph diferansiyel denklemini $y(0) = 1$ başlangıç koşulu ve $y(t) = e^t$ tam çözümünü ile birlikte inceleyelim (Yüzbaşı ve Sezer 2015). Denklem (4.99)’de, $P_{00}(t) = \frac{1}{2}$, $P_{10}(t) = \frac{e^{t/2}}{2}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ve $f(t) = 0$ ’dır. Problemin çözümünde yöntemi uygularken $N = 6$ olarak seçelim. $y'(t)$ ifadesini kesilmiş Hermite serisi formunda yazalım:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^6 a_n H_n(t).$$

İlk olarak $N = 6$ için kollokasyon noktalarını tespit edelim. $0 \leq t \leq 1$ olduğundan $b = 1$ ve $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olur ve

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{6}, \quad t_2 = \frac{2}{6}, \quad t_3 = \frac{3}{6}, \quad t_4 = \frac{4}{6}, \quad t_5 = \frac{5}{6}, \quad t_6 = 1 \right\}$$

elde edilir. Denklem (4.20)’den yararlanarak bu problem için matris denklemi

$$\left\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \frac{1}{2} \mathbf{P}_{10} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{R} \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{F} + \dot{\mathbf{P}}_{00} + \dot{\mathbf{P}}_{10}$$

şeklinde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler $N = 6$ için aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -48 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -160 & 0 & 32 & 0 \\ -120 & 0 & 720 & 0 & -480 & 0 & 64 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_1) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/64 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 1/36 & 1/216 & 1/1296 & 1/7776 & 1/46656 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 1/81 & 1/243 & 1/729 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 & 16/81 & 32/243 & 64/729 \\ 1 & 5/6 & 25/36 & 125/216 & 625/1296 & 428/1065 & 214/639 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{00} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1/12}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{1/6}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{1/4}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{1/3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{5/12}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{1/2}/2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{10} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ e^{1/12}/2 \\ e^{1/6}/2 \\ e^{1/4}/2 \\ e^{1/3}/2 \\ e^{5/12}/2 \\ e^{1/2}/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1729/1657 \\ 433/397 \\ 193/169 \\ 3276/2735 \\ 633/503 \\ 984/743 \end{bmatrix}.$$

(4.22) aracılığıyla $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 \\ 752/863 & 977/3095 & -1228/751 & -797/429 & 569/62 & 14740/809 & -7957/93 \\ 1167/1588 & 1033/1737 & -589/559 & -2638/803 & 3751/934 & 7266/241 & -2933/155 \\ 797/1352 & 632/757 & -1011/3667 & -1912/469 & -803/285 & 24527/757 & 12296/191 \\ 1761/4057 & 708/685 & 1007/1486 & -1853/458 & -30597/2942 & 1304/57 & 11606/81 \\ 193/722 & 1379/1161 & 587/329 & -1939/641 & -2443/139 & 1687/1431 & 27573/142 \\ 261/2972 & 1466/1133 & 4017/1330 & -357/412 & -3424/149 & -9343/301 & 13231/68 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi yazılır:

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 & ; & 1 \\ 752/863 & 977/3095 & -1228/751 & -797/429 & 569/62 & 14740/809 & -7957/93 & ; & 1729/1657 \\ 1167/1588 & 1033/1737 & -589/559 & -2638/803 & 3751/934 & 7266/241 & -2933/155 & ; & 433/397 \\ 797/1352 & 632/757 & -1011/3667 & -1912/469 & -803/285 & 24527/757 & 12296/191 & ; & 193/169 \\ 1761/4057 & 708/685 & 1007/1486 & -1853/458 & -30597/2942 & 1304/57 & 11606/81 & ; & 3276/2735 \\ 193/722 & 1379/1161 & 587/329 & -1939/641 & -2443/139 & 1687/1431 & 27573/142 & ; & 633/503 \\ 261/2972 & 1466/1133 & 4017/1330 & -357/412 & -3424/149 & -9343/301 & 13231/68 & ; & 984/743 \end{bmatrix}.$$

(4.23) denklemi ile katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$ hesaplanır

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 557/433 \\ 595/933 \\ 693/4238 \\ 146/5811 \\ 173/46139 \\ 78/359501 \\ 15/415921 \end{bmatrix}$$

ve (4.14)'te yerine konularak yaklaşık çözüm elde edilmiş olur. Şimdi $N = 6$ ve $K = 9$ için yaklaşık çözüm, hata fonksiyonu, tahmini hata fonksiyonu ve iyileştirilmiş çözümlerin hatalar fonksiyonları sırasıyla yazabiliriz:

$$y_6(t) = 3.2973e - 04t^7 + 1.1572e - 03t^6 + 8.5363e - 03t^5 + 4.1571e - 02t^4 \\ + 1.6669e - 01t^3 + 5.0000e - 01t^2 + t + 1,$$

$$e_6(t) = e^t - 3.2973e - 04t^7 - 1.1572e - 03t^6 - 8.5363e - 03t^5 - 4.1571e - 02t^4 \\ - 1.6669e - 01t^3 - 5.0000e - 01t^2 - t - 1,$$

$$e_{6,9}(t) = 4.5668e - 07t^{10} + 2.2858e - 06t^9 + 2.5466e - 05t^8 - 1.3190e - 04t^7 \\ + 2.3205e - 04t^6 - 2.0311e - 04t^5 + 9.5867e - 05t^4 - 2.3570e - 05t^3 \\ + 2.4671e - 06t^2 - 3.9981e - 33t,$$

$$E_{6,9}(t) = e^t - t - 5.0000e - 01t^2 - 1.6667e - 01t^3 - 4.1667e - 02t^4 \\ - 8.3332e - 03t^5 - 1.3892e - 03t^6 - 1.9783e - 04t^7 \\ - 2.5466e - 05t^8 - 2.2858e - 06t^9 - 4.5668e - 07t^{10} - 1.$$

Çizelge 4.3, e^t tam çözümünün, $N = 6$ için elde ettiğimiz yaklaşık çözümünün ve $N = 6$ için literatürde bulunan Legendre kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015) ile hesaplanan yaklaşık çözümünün, bazı t değerlerine karşılık gelen sonuçlarını verir.

Çizelge 4.3. Örnek 4.2'deki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması

	Tam Çözüm	Sunulan Yöntem	Legendre Kollokasyon Yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015)
t_i	$y(t_i) = e^t$	$y_6(t_i)$	$y_6(t_i)$
0	1	1	1
0.2	1.221402758160170	1.221402746416773	1.2214028391211036
0.4	1.491824697641270	1.491824685357110	1.4918247797784250
0.6	1.822118800390509	1.822118785260102	1.8221188985347463
0.8	2.225540928492468	2.225540908148778	2.2255411046274718
1.0	2.718281828459046	2.718281815264657	2.7182802227737932

Çizelge 4.4'te, sunulan yöntem ile hesaplanmış mutlak hata değerlerinin literatürde bulunan üstel yaklaşım yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2013), Legendre kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015), Taylor yöntemi (Sezer ve Daşcıoğlu 2007) ve Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2012) kullanılarak elde edilmiş olan mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması sunulmuştur. N değerinin artmasıyla birlikte hatanın azaldığı görülmektedir. Sonuçların analiz edilmesi ile sunulan yöntem kullanılarak yapılan çözümlerin, literatürdeki diğer yöntemlere göre daha az hata verdiği görülmektedir. Bu da sunulan yöntemin daha etkili olduğu sonucunu verir.

Çizelge 4.4. Örnek 4.2’deki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

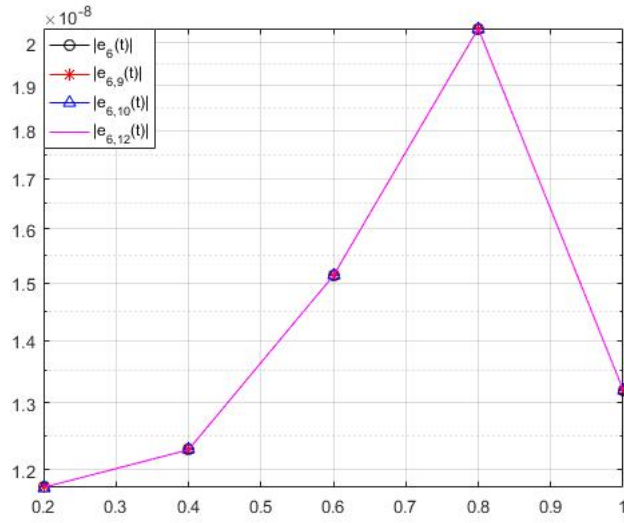
	Sunulan Yöntem		
t_i	$N = 3$	$N = 5$	$N = 6$
0.2	1.3758e-04	3.2181e-07	1.1743e-08
0.4	2.0378e-04	2.9011e-07	1.2284e-08
0.6	1.5908e-04	4.3395e-07	1.5130e-08
0.8	2.4479e-04	4.2103e-07	2.0344e-08
1.0	4.5101e-04	4.5101e-04	1.3194e-08
	Sunulan Yöntem	Üstel Yaklaşım (Yüzbaşı ve Sezer 2013)	
t_i	$N = 12$	$N = 3$	$N = 5$
0.2	5.2448e-18	1.8434e-02	3.2778e-03
0.4	6.4467e-18	2.7110e-02	3.2081e-03
0.6	7.8085e-18	2.1008e-02	4.4444e-03
0.8	9.4561e-18	3.5321e-02	4.6898e-03
1.0	4.8499e-18	1.1580e-01	1.2864e-02
	Legendre Kollokasyon Yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015)	Taylor Yöntemi (Sezer ve Daşcıoğlu 2007)	Bessel Kollokasyon Yöntemi (Yüzbaşı vd. 2012)
t_i	$N = 6$	$N = 12$	$N = 12$
0.2	8.0961e-08	2.220e-16	0
0.4	8.2137e-08	1.332e-15	2.2204e-16
0.6	9.8144e-08	2.189e-13	4.4409e-16
0.8	1.7614e-07	9.361e-12	8.8818e-16
1.0	1.6057e-06	1.729e-10	6.2172e-15

Çizelge 4.5’te, tahmini hata değerleri ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri $N = 3, 5, 6, 12$ ve farklı K değerleri için karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.5. Örnek 4.2’deki problem için sunulan yöntem ile N ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması

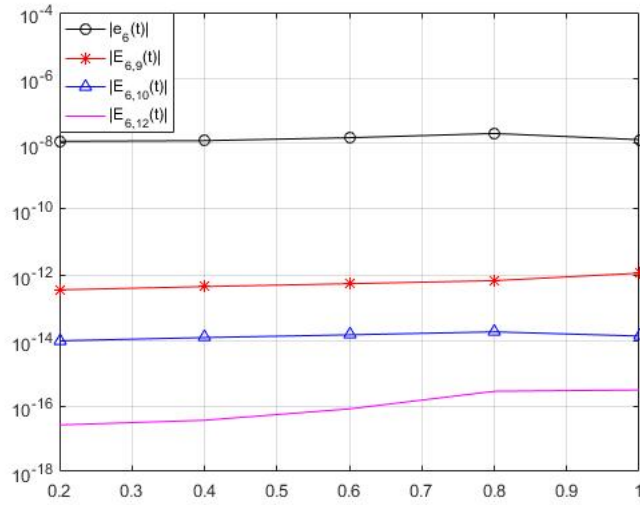
t_i	$ e_{3,5}(t_i) $	$ e_{5,6}(t_i) $	$ e_{6,9}(t_i) $	$ e_{6,12}(t_i) $	$ e_{12,15}(t_i) $
0	0	0	0	0	0
0.2	1.3726e-04	3.3355e-07	1.1744e-08	1.1743e-08	5.2527e-18
0.4	2.0349e-04	3.0239e-07	1.2285e-08	1.2284e-08	6.4563e-18
0.6	1.5864e-04	4.4909e-07	1.5131e-08	1.5130e-08	7.8203e-18
0.8	2.4436e-04	4.4137e-07	2.0344e-08	2.0344e-08	9.4710e-18
1.0	4.5017e-04	8.5827e-07	1.3196e-08	1.3194e-08	4.8578e-18
t_i	$ E_{3,5}(t_i) $	$ E_{5,6}(t_i) $	$ E_{6,9}(t_i) $	$ E_{6,12}(t_i) $	$ E_{12,15}(t_i) $
0	0	0	0	0	0
0.2	3.2181e-07	1.1743e-08	3.4617e-13	2.6202e-17	2.0733e-17
0.4	2.9011e-07	1.2284e-08	4.3578e-13	3.6401e-17	2.9669e-17
0.6	4.3395e-07	1.5130e-08	5.3335e-13	8.0811e-17	8.8976e-17
0.8	4.2103e-07	2.0344e-08	6.6052e-13	2.7896e-16	2.6907e-16
1.0	8.4507e-07	1.3194e-08	1.1186e-12	3.0535e-16	2.9952e-16

Şekil 4.6’da $N = 6$ kesme sınırı kullanılarak hesaplanan gerçek hata değerleri ve K değerleri 9, 10 ve 12 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekilden anlaşıldığı üzere, K değeri değişse de benzer sonuçlar ortaya çıkmıştır.



Şekil 4.6. Örnek 4.2'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.7'de $N = 6$ alınarak elde edilen gerçek hata değerleri ve $K = 9, 10, 12$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil incelendiğinde, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının, gerçek hata değerine kıyasla daha az olduğu gözlemlenir. Ayrıca, N kesme sınırını değiştirmeden K değerini arttırmanın iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatasını azalttığı görülmektedir.



Şekil 4.7. Örnek 4.2'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.3.

$$y'(t) = -y(t) - e^{-0.5t} \sin(0.5t) y(0.5t) - 2e^{-0.75t} \cos(0.5t) \sin(0.25t) y(0.25t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.100)$$

multi-pantograph denkleminin yaklaşık çözümü $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında araştırılacaktır (Khorshidi ve Firoozjaee 2024). Tam çözüm $y(t) = e^{-t} \cos(t)$ 'dir. Bu denklemde, $P_{00}(t) = -1$, $P_{10}(t) = -e^{-0.5t} \sin(0.5t)$, $P_{20}(t) = -2e^{-0.75t} \cos(0.5t) \sin(0.25t)$, $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.25$, $f(t) = 0$ 'dır. N değeri 5 seçerek $y'(t)$ ifadesini kesilmiş Hermite serisi

$$y'(t) = \sum_{n=0}^5 a_n H_n(t)$$

formunda yazılarak çözümleri hesaplanır. $0 \leq t \leq 1$ aralığında, $b = 1$ ve $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 'dir ve $N = 5$ için kollokasyon noktaları kümesi

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{5}, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{3}{5}, \quad t_4 = \frac{4}{5}, \quad t_5 = 1 \right\}$$

dir. Denklem (4.20) kullanılarak problemin çözümü için temel matris denklemi

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \frac{1}{2} \mathbf{P}_{10} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{R} \left(\frac{1}{2} \right) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \frac{1}{4} \mathbf{P}_{20} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{R} \left(\frac{1}{4} \right) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} \\ & = \mathbf{F} + \dot{\mathbf{P}}_{00} + \dot{\mathbf{P}}_{10} + \dot{\mathbf{P}}_{20} \end{aligned}$$

şeklinde oluşturulur. Burada kullanılan matrisler aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -48 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -160 & 0 & 32 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_1) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/32 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_2) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/1024 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 541/1651 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{00} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{-1}{10}} \sin(\frac{1}{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\frac{-1}{5}} \sin(\frac{1}{5}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\frac{-3}{10}} \sin(\frac{3}{10}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\frac{-2}{5}} \sin(\frac{2}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\frac{-1}{2}} \sin(\frac{1}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^{\frac{-3}{20}} \cos(\frac{1}{10}) \sin(\frac{1}{20}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{\frac{-3}{10}} \cos(\frac{1}{5}) \sin(\frac{1}{10}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2e^{\frac{-9}{20}} \cos(\frac{3}{10}) \sin(\frac{3}{20}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2e^{\frac{-3}{5}} \cos(\frac{2}{5}) \sin(\frac{1}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2e^{\frac{-3}{4}} \cos(\frac{1}{2}) \sin(\frac{1}{4}) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{\frac{-1}{10}} \sin(\frac{1}{10}) \\ -e^{\frac{-1}{5}} \sin(\frac{1}{5}) \\ -e^{\frac{-3}{10}} \sin(\frac{3}{10}) \\ -e^{\frac{-2}{5}} \sin(\frac{2}{5}) \\ -e^{\frac{-1}{2}} \sin(\frac{1}{2}) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{\frac{-3}{20}} \cos(\frac{1}{10}) \sin(\frac{1}{20}) \\ -2e^{\frac{-3}{10}} \cos(\frac{1}{5}) \sin(\frac{1}{10}) \\ -2e^{\frac{-9}{20}} \cos(\frac{3}{10}) \sin(\frac{3}{20}) \\ -2e^{\frac{-3}{5}} \cos(\frac{2}{5}) \sin(\frac{1}{5}) \\ -2e^{\frac{-3}{4}} \cos(\frac{1}{2}) \sin(\frac{1}{4}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 \\ -e^{\frac{-1}{10}} \sin(\frac{1}{10}) - 2e^{\frac{-3}{20}} \cos(\frac{1}{10}) \sin(\frac{1}{20}) - 1 \\ -e^{\frac{-1}{5}} \sin(\frac{1}{5}) - 2e^{\frac{-3}{10}} \cos(\frac{1}{5}) \sin(\frac{1}{10}) - 1 \\ -e^{\frac{-3}{10}} \sin(\frac{3}{10}) - 2e^{\frac{-9}{20}} \cos(\frac{3}{10}) \sin(\frac{3}{20}) - 1 \\ -e^{\frac{-2}{5}} \sin(\frac{2}{5}) - 2e^{\frac{-3}{5}} \cos(\frac{2}{5}) \sin(\frac{1}{5}) - 1 \\ -e^{\frac{-1}{2}} \sin(\frac{1}{2}) - 2e^{\frac{-3}{4}} \cos(\frac{1}{2}) \sin(\frac{1}{4}) - 1 \end{bmatrix}.$$

(4.22)'den yararlanarak $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 \\ 802/661 & 221/501 & -4453/1974 & -503/195 & 1705/136 & 17920/713 \\ 560/387 & 876/905 & -2819/1301 & -1526/291 & 2733/301 & 13344/283 \\ 3259/1925 & 567/358 & -2497/1514 & -2216/295 & 934/519 & 1101/19 \\ 772/397 & 2402/1049 & -400/643 & -6431/730 & -1594/193 & 10088/199 \\ 2245/1022 & 2237/725 & 2320/2337 & -4263/503 & -3980/209 & 7801/359 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanmıştır. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & ; & -1 \\ 802/661 & 221/501 & -4453/1974 & -503/195 & 1705/136 & 17920/713 & ; & -e^{\frac{-1}{10}} \sin(\frac{1}{10}) - 2e^{\frac{-3}{20}} \cos(\frac{1}{10}) \sin(\frac{1}{20}) - 1 \\ 560/387 & 876/905 & -2819/1301 & -1526/291 & 2733/301 & 13344/283 & ; & -e^{\frac{-1}{5}} \sin(\frac{1}{5}) - 2e^{\frac{-3}{10}} \cos(\frac{1}{5}) \sin(\frac{1}{10}) - 1 \\ 3259/1925 & 567/358 & -2497/1514 & -2216/295 & 934/519 & 1101/19 & ; & -e^{\frac{-3}{10}} \sin(\frac{3}{10}) - 2e^{\frac{-9}{20}} \cos(\frac{3}{10}) \sin(\frac{3}{20}) - 1 \\ 772/397 & 2402/1049 & -400/643 & -6431/730 & -1594/193 & 10088/199 & ; & -e^{\frac{-2}{5}} \sin(\frac{2}{5}) - 2e^{\frac{-3}{5}} \cos(\frac{2}{5}) \sin(\frac{1}{5}) - 1 \\ 2245/1022 & 2237/725 & 2320/2337 & -4263/503 & -3980/209 & 7801/359 & ; & -e^{\frac{-1}{2}} \sin(\frac{1}{2}) - 2e^{\frac{-3}{4}} \cos(\frac{1}{2}) \sin(\frac{1}{4}) - 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. (4.23) bağıntısı kullanarak katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$ hesaplanır:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -300/829 \\ -722/1335 \\ 599/1545 \\ -332/3459 \\ 71/6206 \\ -23/39280 \end{bmatrix}.$$

Hesaplanan $\mathbf{A}$ matrisi, (4.14) denkleminde yerine konularak y_N yaklaşık çözümüne ulaşılmış olur. $N = 5$ değeri için elde edilen yaklaşık çözüm ve e_5 hata fonksiyonu, $K = 8$ için $e_{5,8}$ tahmini hata fonksiyonu ve $E_{5,8}$ iyileştirilmiş çözümlerin hata fonksiyonu

$$y_5(t) = -3.1229e - 03t^6 + 3.6610e - 02t^5 - 1.6854e - 01t^4 + 3.3389e - 01t^3 - 6.7506e - 05t^2 - t + 1,$$

$$e_5(t) = e^{-t}\cos(t) + t + 6.7506e - 05t^2 - 3.3389e - 01t^3 + 1.6854e - 01t^4 - 3.6610e - 02t^5 + 3.1229e - 03t^6 - 1,$$

$$e_{5,8}(t) = -3.6211e - 05t^9 + 3.7566e - 04t^8 - 1.5601e - 03t^7 + 3.1025e - 03t^6 - 3.2671e - 03t^5 + 1.8721e - 03t^4 - 5.5407e - 04t^3 + 6.7479e - 05t^2 + 1.8596e - 34t,$$

$$E_{5,8}(t) = e^{-t}\cos(t) + t + 2.7327e - 08t^2 - 3.3333e - 01t^3 + 1.6667e - 01t^4 - 3.3343e - 02t^5 + 2.0419e - 05t^6 + 1.5601e - 03t^7 - 3.7566e - 04t^8 + 3.6211e - 05t^9 - 1$$

dir.

Çizelge 4.6'da, sunulan yöntem ile elde edilen mutlak hata değerleri, Taylor matris yöntemi (Sezer vd. 2008), Boubaker matris yöntemi (Akkaya vd. 2013), varyasyonel yineleme yöntemi (Yu 2008), Bernstein kollokasyon yöntemi (Işık vd. 2012), Euler kollokasyon yöntemi (Ibis vd. Bayram 2016), Legendre-Ritz en küçük kareler yöntemi (Khorshidi ve Firoozjaee 2024) ile elde edilmiş mutlak hata değerleri ile karşılaştırılmıştır. Çizelge incelendiğinde, N değerinin büyümesiyle hata değerlerinin azaldığı gözlemlenir. Çizelgedeki sonuçlar karşılaştırılırsa sunulan yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği tespit edilebilir.

Çizelge 4.6. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

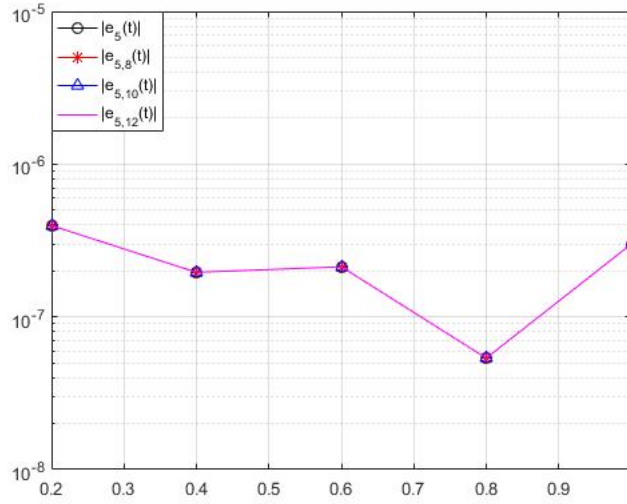
	<i>Sunulan Yöntem</i>			
t_i	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 12$
0	0	0	0	0
0.2	3.9609e-07	2.3030e-09	1.3823e-12	1.1102e-16
0.4	1.9572e-07	1.7275e-09	1.0962e-12	0
0.6	2.1266e-07	1.1054e-09	8.0680e-13	0
0.8	5.3704e-08	6.1496e-10	5.9358e-13	1.6653e-16
1	2.9938e-07	3.0183e-09	1.6117e-12	1.6653e-16
	<i>Taylor Matris Yöntemi</i> (Sezer vd. 2008)			<i>Euler Kollokasyon Yöntemi</i> (Ibis vd. Bayram 2016)
t_i	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 9$
0.2	6.9082e-07	4.06e-08	1.3e-09	8.80e-11
0.4	4.2924e-05	5.1907e-06	1.434e-07	7.89e-11
0.6	4.7443e-04	8.8481e-05	2.058e-06	5.41e-11
0.8	2.5855e-03	6.6079e-04	1.212e-05	8.55e-11
1.0	9.5631e-03	3.1389e-03	4.003e-05	2.23e-09
	<i>Legendre-Ritz En Küçük Kareler Yöntemi</i> (Khorshidi ve Firoozjaee 2024)			<i>Varyasyonel Yineleme Yöntemi</i> (Yu 2008)
t_i	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	
0.2	5.4112e-04	2.5170e-05	1.9105e-06	5.65e-09
0.4	9.6024e-04	6.4516e-05	9.8244e-07	2.95e-07
0.6	8.5125e-04	6.3590e-05	1.1707e-06	2.72e-06
0.8	5.4761e-04	2.2527e-05	1.9121e-06	1.24e-05
1.0	9.2863e-06	5.6598e-06	7.3055e-08	3.80e-05
	<i>Bernstein Kollokasyon Yöntemi</i> (Işık vd. 2012)		<i>Boubaker Matris Yöntemi</i> (Akkaya vd. 2013)	
t_i	$N = 6$	$N = 10$	$N = 9$	$N = 12$
0.2	1.8900e-06	5.0370e-13	1.21e-11	0
0.4	6.2390e-07	3.9850e-13	9.68e-12	3.10e-15
0.6	1.3540e-06	2.8580e-13	7.19e-12	1.10e-15
0.8	1.5090e-06	1.2980e-13	6.82e-12	2.00e-15
1.0	4.7730e-05	2.2510e-11	7.58e-10	5.62e-13

Çizelge 4.7’de farklı N ve K değerleri için hesaplanan tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri sunulmuştur.

Çizelge 4.7. Örnek 4.3’teki problem için sunulan yöntem ile N ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması

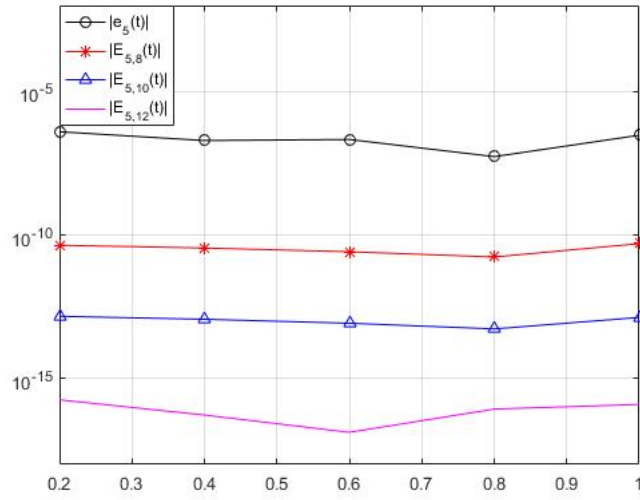
t_i	$ e_{5,8}(t_i) $	$ e_{7,10}(t_i) $	$ e_{9,12}(t_i) $	$ e_{12,15}(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	3.9604e-07	2.3032e-09	1.3820e-12	9.8919e-17
0.4	1.9568e-07	1.7277e-09	1.0963e-12	7.7152e-17
0.6	2.1264e-07	1.1055e-09	8.0691e-13	5.7334e-17
0.8	5.3687e-08	6.1502e-10	5.9356e-13	3.9008e-17
1	2.9943e-07	3.0181e-09	1.6118e-12	9.1141e-17
t_i	$ E_{5,8}(t_i) $	$ E_{7,10}(t_i) $	$ E_{9,12}(t_i) $	$ E_{12,15}(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	4.3852e-11	1.4591e-13	1.6653e-16	5.8981e-17
0.4	3.5028e-11	1.1519e-13	4.1633e-17	6.9389e-18
0.6	2.5960e-11	8.3641e-14	1.3878e-17	8.3267e-17
0.8	1.7080e-11	5.3152e-14	1.1102e-16	5.5511e-17
1	4.9815e-11	1.3320e-13	8.3267e-17	1.1102e-16

Şekil 4.8’de, $N = 5$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 8, 10$ ve 12 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekilden de anlaşılacağı üzere, hata değerleri birbirine oldukça yakın sonuçlar ortaya koymuştur.



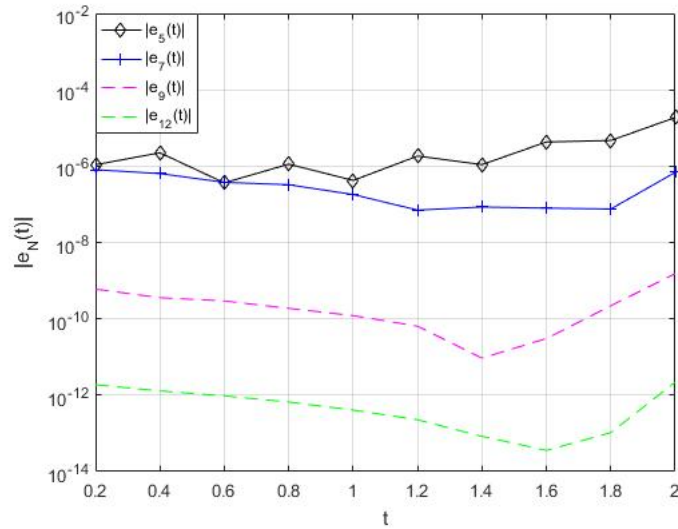
Şekil 4.8. Örnek 4.3’teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.9’da $N = 5$ için elde edilen gerçek hata değerleri ve $K = 8, 10, 12$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil incelendiğinde, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının, gerçek hata değerine kıyasla daha az olduğu gözlemlenir. Ayrıca, N kesme sınırını değiştirmeden K değerini arttırmanın iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatasını azalttığı görülmektedir.



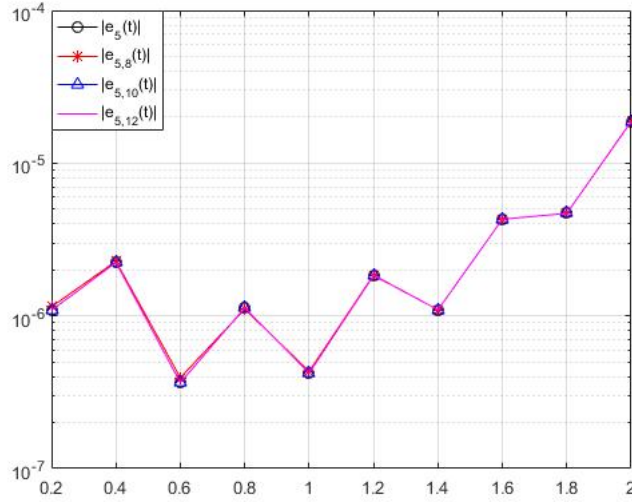
Şekil 4.9. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.10'da farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hata değerleri grafikte gösterilmiştir.



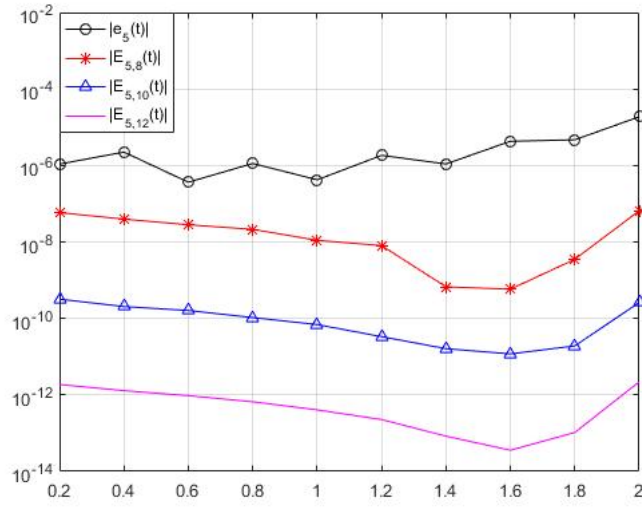
Şekil 4.10. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Şekil 4.11’de $[0, 2]$ aralığında $N = 5$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ve $K = 8, 10$ ve 12 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Grafik incelendiğinde, gerçek hata fonksiyonu ile tahmini hata fonksiyonlarının değerlerinin birbirine benzediği görülmektedir.



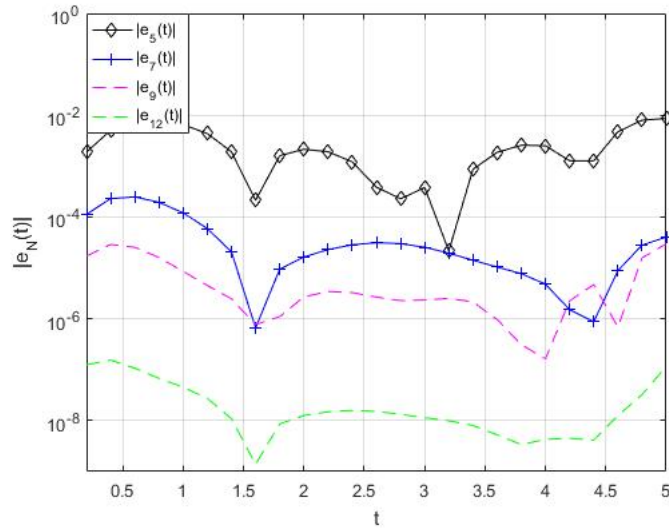
Şekil 4.11. Örnek 4.3’teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.12’de $[0, 2]$ aralığında $N = 5$ için elde edilen gerçek hata değerleri ve $K = 8, 10, 12$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil incelendiğinde, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının, gerçek hata değerine kıyasla daha az olduğu gözlemlenir. N sabitken, K değerinin artırılmasıyla iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinde azalma gözlemlenmektedir.



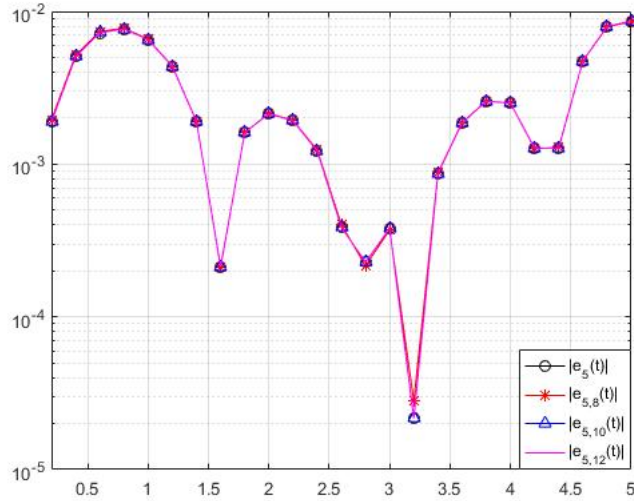
Şekil 4.12. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.13'te farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hata değerleri grafikte gösterilmiştir.



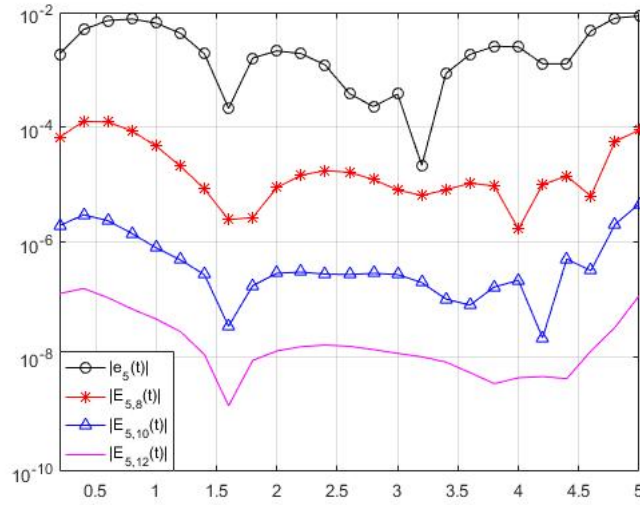
Şekil 4.13. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Şekil 4.14'te $[0, 5]$ aralığında $N = 5$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ve $K = 8, 10$ ve 12 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Gerçek ve tahmini hata değerleri birbirine oldukça yakın sonuçlar vermektedir.



Şekil 4.14. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.15'te, $[0, 5]$ aralığında $N = 5$ için elde edilen gerçek hata değerleri ve $K = 8, 10, 12$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Gerçek hata ile karşılaştırıldığında, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata düzeylerinin daha düşük olduğu dikkati çekmektedir. Bu bağlamda, N sabit tutulduğunda, K parametresinin artırılması hatayı azaltıcı yönde etkili olmaktadır.



Şekil 4.15. Örnek 4.3'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

4.3.2. Neutral diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler

Bu bölümde yer alan bazı örnekler, tez çalışması sürecinde geliştirilen yöntemin uygulanmasına ilişkin olarak tez yazarı ve danışmanı tarafından yayımlanan bir çalışmada da ele alınmış olup ilgili örneklerin sonuçlarında bu araştırma makalesine atıf yapılarak aşağıda yer verilmiştir (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024).

Örnek 4.4.

$$y'(t) = y + ty\left(\frac{t}{2}\right) - y'\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{t^5}{16} - t^4 + \frac{112}{27}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.101)$$

neutral diferansiyel denkleminin $y(0) = 0$ başlangıç koşulları altında yaklaşık çözümü araştırılacaktır. Bu problem, $y(t) = t^4$ şeklinde polinomsal bir tam çözüme sahiptir. Problemede, $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $Q_1(t) = -1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{3}$, $f(t) = -\frac{t^5}{16} - t^4 + \frac{112}{27}t^3$ olarak verilmiştir. $N = 3$ seçerek $y'(t)$ kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^3 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında, $b = 1$ ve $N = 3$ için $s = 0, 1, 2, 3$ 'dür. Kollokasyon noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1 \right\}$$

olarak hesaplanır. (4.34) denkleminde, bu problem için temel matris denklemi

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_0\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \frac{1}{2}\mathbf{P}_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{R}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_1\mathbf{T}\mathbf{R}\left(\frac{1}{3}\right)\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak yazılır. Burada kullanılan matrisler,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1645/11664 \\ 746/729 \\ 1333/432 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_1) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mu_1) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/27 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Gerekli matris işlemleri yapılarak $\mathbf{W}$ bulunur:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 29/18 & 83/108 & -1351/486 & -25247/5832 \\ 10/9 & 34/27 & -164/243 & -4016/729 \\ 1/2 & 17/12 & 35/18 & -503/216 \end{bmatrix}.$$

$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 & ; & 0 \\ 29/18 & 83/108 & -1351/486 & -25247/5832 & ; & 1645/11664 \\ 10/9 & 34/27 & -164/243 & -4016/729 & ; & 746/729 \\ 1/2 & 17/12 & 35/18 & -503/216 & ; & 1333/432 \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşturulur. Denklem (4.36)'den, katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$ hesaplanır

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

ve (4.28)'de yerine konularak $N = 3$ için problemin tam çözümü olan $y(t) = t^4 e$ ulaşılır.

Örnek 4.5.

$$y'(t) = -y(t) + 0.1y(0.8t) + 0.5y'(0.8t) + (0.32t - 0.5)e^{-0.8t} + e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.102)$$

Ele alınan bu denklemin tam çözümü $y(t) = te^{-t}$ 'dir (Gümgüm vd. 2020). Problemde, $P_0(t) = -1$, $P_1(t) = 0.1$, $Q_1(t) = 0.5$, $\lambda_1 = 0.8$, $\mu_1 = 0.8$, $f(t) = (0.32t - 0.5)e^{-0.8t} + e^{-t}$ 'dir. $N = 3$ seçilerek $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile yöntem uygulanır. Öncelikle, $y'(t)$ terimi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^3 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında, $b = 1$ ve $N = 3$ için $s = 0, 1, 2, 3$ 'dür. Kollokasyon noktaları kümesi

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1 \right\}$$

dir. Bu problemin temel matris denklemini, (4.34) bağıntısından yararlanarak

$$\left\{ \mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_0\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \frac{4}{5}\mathbf{P}_1\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{R}\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{B}_1\mathbf{D}^T - \frac{4}{5}\mathbf{Q}_1\mathbf{T}\mathbf{R}\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluştururuz. Bu denklemde yazılan matrisler;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ e^{-1/3} - (59e^{-4/15})/150 \\ e^{-2/3} - (43e^{-8/15})/150 \\ e^{-1} - (9e^{-4/5})/50 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_1) = \mathbf{R}(\mu_1) = \mathbf{R}\left(\frac{4}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64/125 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Gerekli matris işlemleri yapılarak $\mathbf{W}$ bulunur:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & 0 \\ 121/150 & 63/125 & -909/719 & -442/159 \\ 167/150 & 152/125 & -533/829 & -2819/547 \\ 71/50 & 267/125 & 592/517 & -5213/1054 \end{bmatrix}.$$

$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 & 0 & ; & 1/2 \\ 21/150 & 63/125 & -909/719 & -442/159 & ; & e^{-1/3} - (59e^{-4/15})/150 \\ 167/150 & 152/125 & -533/829 & -2819/547 & ; & e^{-2/3} - (43e^{-8/15})/150 \\ 71/50 & 267/125 & 592/517 & -5213/1054 & ; & e^{-1} - (9e^{-4/5})/50 \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşturulur. Gerekli matris işlemi yapılarak $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 707/426 \\ -902/723 \\ 281/852 \\ -211/4798 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve (4.28)'de yerine konularak $N = 3$ için problemin yaklaşık çözümü bulunmuş olur. $N = 3$ için sırasıyla yaklaşık çözüm, e_3 hata fonksiyonu, $e_{3,5}$ tahmini hata

fonksiyonu, $E_{3,5}$ iyileştirilmiş çözümlerin hata fonksiyonu

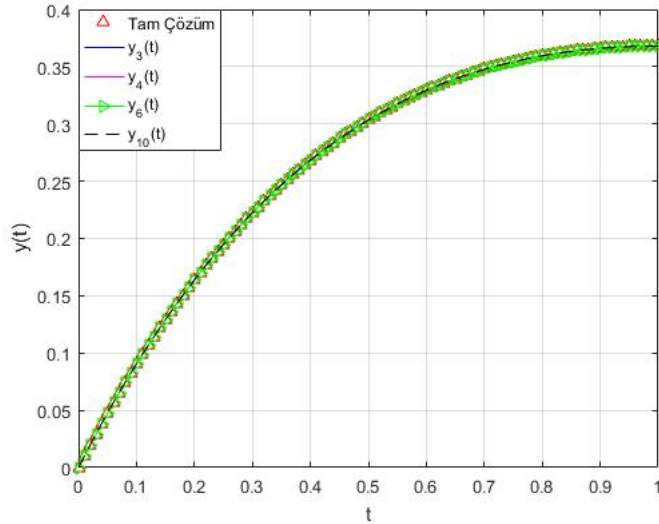
$$y_3(t) = -8.795334030418801e - 02t^4 + 4.397498805292605e - 01t^3 \\ - 9.837192430079210e - 01t^2 + t,$$

$$e_3(t) = te^{-t} - t + 9.837192430079210e - 01t^2 - 4.397498805292605e - 01t^3 \\ + 8.795334030418801e - 02t^4,$$

$$e_{3,5} = -4.593780841260127e - 03t^6 + 3.689302631960371e - 02t^5 \\ - 7.554307773684038e - 02t^4 + 5.917797486573393e - 02t^3 \\ - 1.613142068300236e - 02t^2 - 1.207651382584743e - 25t,$$

$$E_{3,5} = te^{-t} - t + 9.998506636909234e - 01t^2 - 4.989278553949945e - 01t^3 \\ + 1.634964180410284e - 01t^4 - 3.689302631960371e - 02t^5 \\ + 4.593780841260127e - 03t^6,$$

olarak bulunmuş olur. Şekil 4.16'da, problemin tam çözümü ile $N = 3, 4, 6$ ve 10 seçilerek elde edilen yaklaşık çözümler $y_3(t)$, $y_4(t)$, $y_6(t)$ ve $y_{10}(t)$ değerlerinin karşılaştırılmaları sunulmuştur. Şekil 4.16 incelendiğinde, tam çözüm ile yaklaşık çözümler arasındaki benzerlik açıkça görülebilir.



Şekil 4.16. Örnek 4.5'teki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması

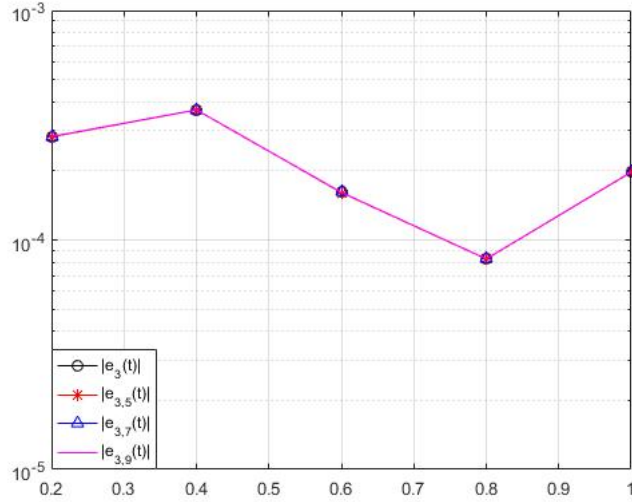
Çizelge 4.8, $N = 3, 4, 6$ ve 10 için sunulan yöntem ile elde edilen mutlak hata değerlerinin literatürde bulunan varyasyonel yineleme yöntemi (Chen ve Wang 2010), Bessel matris yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011), Runge-Kutta yöntemi (Wang vd. 2009), Lucas polinomsal yaklaşımı (Gümgüm vd.2020) ve one-leg θ yöntemi (Wang ve Li 2007) ile elde edilen mutlak hata değerleri ile karşılaştırılmasını göstermektedir. Çizelgeye bakıldığında, N değeri arttıkça mutlak hatanın azaldığı, tam çözüme daha çok yaklaşıldığı not edilebilir.



Çizelge 4.8. Örnek 4.5'teki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

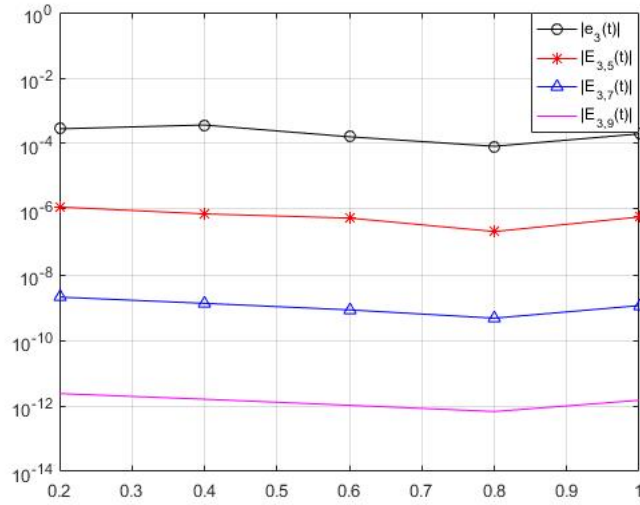
	Sunulan Yöntem (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024)			
t_i	$N = 3$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 10$
0.2	2.8235e-04	2.0798e-05	5.3020e-08	7.1360e-14
0.4	3.6929e-04	1.6677e-05	3.2324e-08	4.8461e-14
0.6	1.6131e-04	8.8444e-06	2.1387e-08	3.1475e-14
0.8	8.2764e-05	8.0680e-06	1.6529e-08	1.8652e-14
1.0	1.9786e-04	4.2855e-06	1.1657e-08	2.3037e-14
	Varyasyonel Yineleme Yöntemi (Chen ve Wang 2010)	Bessel Matris Yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011)		
t_i	$n = 6$	$N = 3$	$N = 6$	$N = 10$
0.2	2.14e-03	1.1407e-03	3.6674e-07	7.5440e-13
0.4	2.84e-03	1.5606e-03	2.1242e-07	4.7201e-13
0.6	2.67e-03	3.2994e-04	1.3651e-07	2.4736e-13
0.8	2.04e-03	4.2029e-04	1.9023e-07	4.8128e-14
1.0	1.22e-03	7.8205e-03	3.7445e-06	1.6933e-11
	Runge-Kutta Yöntemi (Wang vd. 2009)	Lucas Polinomsal Yaklaşımı (Gümgüm vd. 2020)	One-leg θ Yöntemi (Wang ve Li 2007)	
t_i		$N = 4$	$\theta = 0.8$	
0.2	1.49e-03	1.04e-04	1.45e-03	
0.4	2.16e-03	7.86e-05	3.60e-02	
0.6	2.31e-03	3.78e-05	5.03e-02	
0.8	2.17e-03	5.67e-05	5.47e-02	
1.0	1.86e-03	7.12e-04	5.03e-02	

Şekil 4.17’de, $N = 3$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7$ ve 9 seçilerek hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Gerçek ve tahmini hata fonksiyonlarının değerleri karşılaştırıldığında, aralarında yüksek derecede benzerlik olduğu ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.17. Örnek 4.5’teki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.18’de, $N = 3$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7$ ve 9 değerlerine karşılık gelen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil incelendiğinde, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin, gerçek hata değerlerine göre daha düşük olduğu görülmektedir. Ayrıca, N sabit tutulduğunda, K değerinin artırılmasının iyileştirilmiş çözümlerin doğruluğunu artırdığı gözlemlenmektedir.



Şekil 4.18. Örnek 4.5'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.6.

$$y'(t) = y(t) + \cos(0.25t)y(0.2t) - \sin(0.2t)y'(0.25t) + \cos(t) - \sin(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.103)$$

neutral diferansiyel denkleminin $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında yaklaşık çözümünü incelenecektir (Yüzbaşı vd. 2011). Problemden $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = \cos(0.25t)$, $Q_1(t) = -\sin(0.2t)$, $\lambda_1 = 0.2$, $\mu_1 = 0.25$, $f(t) = \cos(t) - \sin(t)$ 'dir. Problemin tam çözümü $y(t) = \sin(t)$ 'dir. $N = 3$ alınarak $y'(t)$ terimi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^3 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında, $b = 1$ ve $N = 3$ için $s = 0, 1, 2, 3$ 'dür. $N = 3$ için kollokasyon noktaları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1. \right\}$$

(4.34) bağıntısından yararlanarak bu problem için temel matris denklemini

$$\left\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_0 \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \frac{1}{5} \mathbf{P}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{R} \left(\frac{1}{5} \right) \mathbf{B}_1 \mathbf{D}^T - \frac{1}{4} \mathbf{Q}_1 \mathbf{T} \mathbf{R} \left(\frac{1}{4} \right) \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluştururuz. Bu denklemde yazılan matrisler;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1/6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(1/4) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(1/15) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(2/15) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(1/5) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(1/3) - \sin(1/3) \\ \cos(2/3) - \sin(2/3) \\ \cos(1) - \sin(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\lambda_1) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\mu_1) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/64 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Gerekli matris işlemleri yapılarak $\mathbf{W}$ bulunur:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1221/1831 & 1039/1848 & -731/780 & -825/266 \\ 384/1147 & 1455/1589 & 985/1359 & -1585/451 \\ 84/17189 & 1138/1073 & 1429/530 & -1193/3491 \end{bmatrix}.$$

$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & ; & 1 \\ 1221/1831 & 1039/1848 & -731/780 & -825/266 & ; & \cos(1/3) - \sin(1/3) \\ 384/1147 & 1455/1589 & 985/1359 & -1585/451 & ; & \cos(2/3) - \sin(2/3) \\ 84/17189 & 1138/1073 & 1429/530 & -1193/3491 & ; & \cos(1) - \sin(1) \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşturulur. $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1028/1417 \\ 379/5842 \\ -396/2885 \\ 47/4682 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve (4.28)'de yerine konularak $N = 3$ için problemin yaklaşık çözümü bulunmuş olur. $N = 3$ için elde edilen yaklaşık çözüm ve hata fonksiyonları aşağıda sıralanmıştır:

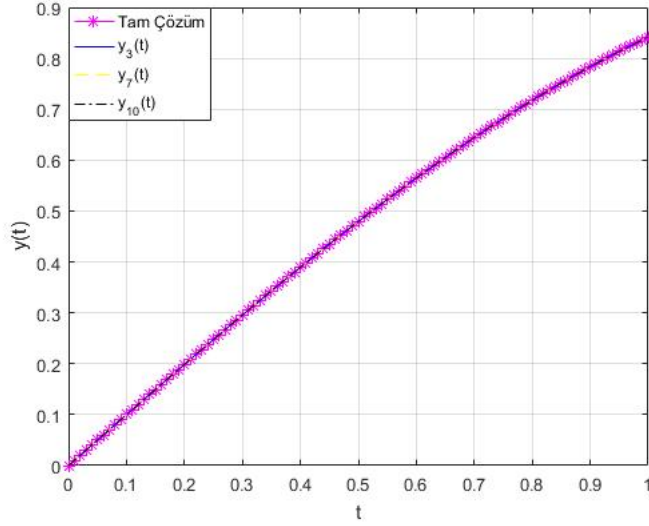
$$y_3(t) = 2.007687238163384e - 02t^4 - 1.830156368846228e - 01t^3 \\ + 4.644428365169942e - 03t^2 + t,$$

$$e_3(t) = \sin(t) - t - 4.644428365169942e - 03t^2 + 1.830156368846228e - 01t^3 \\ - 2.007687238163384e - 02t^4,$$

$$e_{3,5}(t) = -6.645516009469233e - 04t^6 + 9.222220592147600e - 03t^5 \\ - 2.066327897090635e - 02t^4 + 1.654064138990135e - 02t^3 \\ - 4.670244873811097e - 03t^2 - 2.584939414228212e - 26t,$$

$$E_{3,5}(t) = \sin(t) - t + 2.581650864115492e - 05t^2 + 1.664749954947214e - 01t^3 \\ + 5.864065892725139e - 04t^4 - 9.222220592147600e - 03t^5 \\ + 6.645516009469233e - 04t^6.$$

Şekil 4.19’da, tam çözüm olan $\sin(t)$ ile $N = 3, 7$ ve 10 için elde ettiğimiz yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması grafik üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 4.19. Örnek 4.6’daki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması

Çizelge 4.9’da, sunulan yöntem ile elde edilen mutlak hata değerleri ile literatürde yer alan Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011) kullanılarak hesaplanan mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması gösterilmektedir.

Çizelge 4.9. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

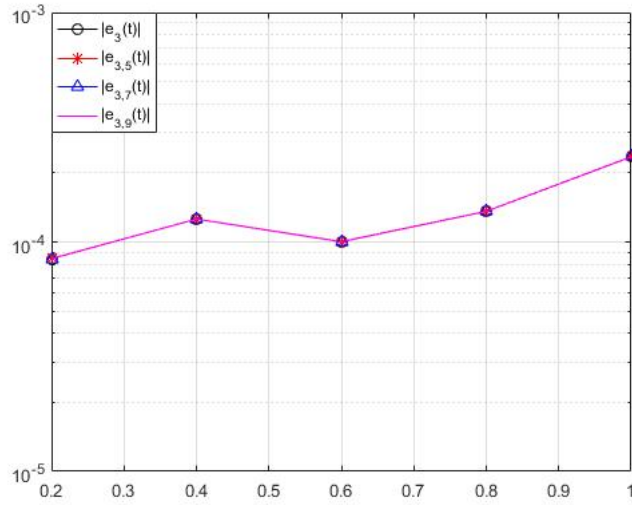
	Sunulan Yöntem (Yüzbaşı ve Karaağaçlı 2024)		
t_i	$N = 3$	$N = 7$	$N = 10$
0	0	0	0
0.2	8.4444e-05	2.2602e-10	2.7200e-15
0.4	1.2573e-04	2.6458e-10	3.7192e-15
0.6	1.0011e-04	3.4016e-10	5.2180e-15
0.8	1.3582e-04	4.6869e-10	6.8834e-15
1.0	2.3468e-04	8.0832e-10	6.3283e-15
	Bessel Kollokasyon Yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011)		
t_i	$N = 3$	$N = 7$	$N = 10$
0.0	1.2530e-17	0	3.1472e-18
0.2	1.1506e-04	7.8343e-10	5.9230e-14
0.4	1.7847e-04	9.2046e-10	5.4012e-14
0.6	5.1456e-05	1.0483e-09	1.5543e-14
0.8	2.1418e-04	9.7238e-09	9.2593e-14
1.0	2.0442e-03	5.4000e-07	2.6099e-12

Çizelge 4.10, farklı N ve K değerleri için hesaplanan tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerini sunmaktadır.

Çizelge 4.10. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması

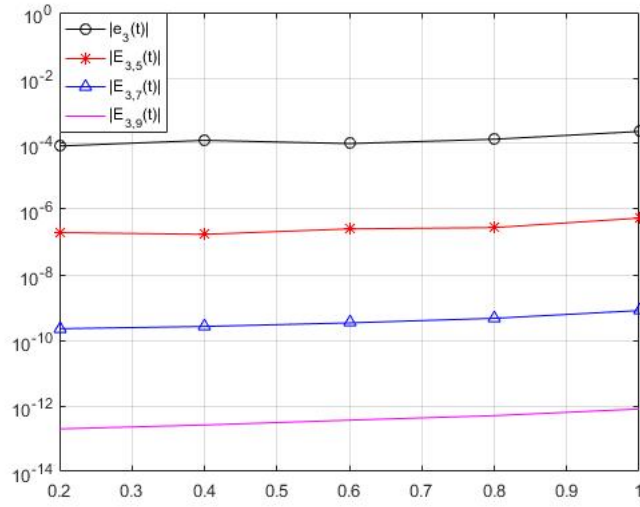
t_i	$ e_{3,5}(t_i) $	$ e_{7,9}(t_i) $	$ e_{10,12}(t_i) $
0	0	0	0
0.2	8.4637e-05	2.2621e-10	2.7409e-15
0.4	1.2590e-04	2.6484e-10	3.6895e-15
0.6	1.0036e-04	3.4053e-10	5.1912e-15
0.8	1.3610e-04	4.6920e-10	6.8884e-15
1.0	2.3521e-04	8.0913e-10	6.2621e-15
t_i	$ E_{3,5}(t_i) $	$ E_{7,9}(t_i) $	$ E_{10,12}(t_i) $
0	0	0	0
0.2	1.9309e-07	1.9894e-13	7.4913e-18
0.4	1.7113e-07	2.6112e-13	2.0167e-17
0.6	2.5011e-07	3.6647e-13	8.0782e-18
0.8	2.7427e-07	5.0354e-13	3.4976e-17
1.0	5.3441e-07	8.0289e-13	2.0518e-17

Şekil 4.20'de, $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7$ ve 9 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Sonuçlar göz önüne alındığında, gerçek ve tahmini hata fonksiyonları birbirine oldukça yakındır.



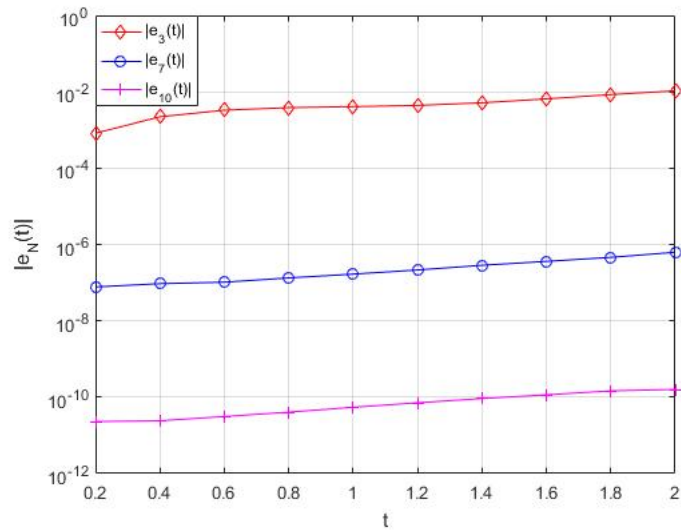
Şekil 4.20. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.21'de, $N = 3$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7$ ve 9 durumlarında elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil incelendiğinde, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının, gerçek hata değerlerine göre daha düşük olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca, N sabit tutulduğunda, K değerinin artırılması iyileştirilmiş çözümlerin doğruluğunu artırmakta, dolayısıyla mutlak hata değerlerini azaltmaktadır.



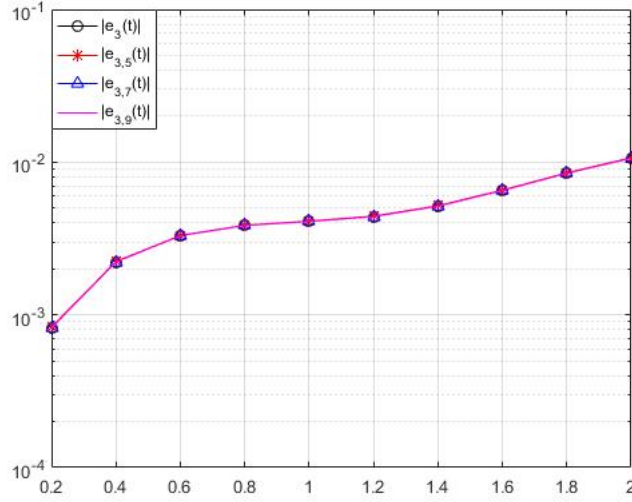
Şekil 4.21. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.22'de farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hata değerleri grafikte gösterilmiştir.



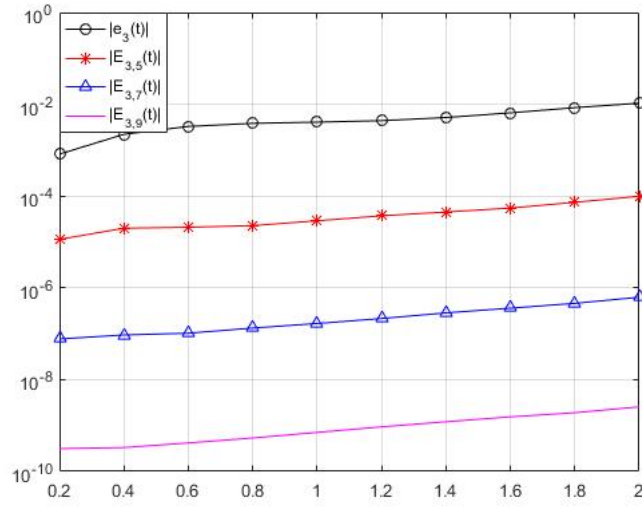
Şekil 4.22. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Şekil 4.23'te, $[0, 2]$ aralığında $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7$ ve 9 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Gerçek ve tahmini hata değerleri birbirine çok yakın sonuçlar göstermektedir.



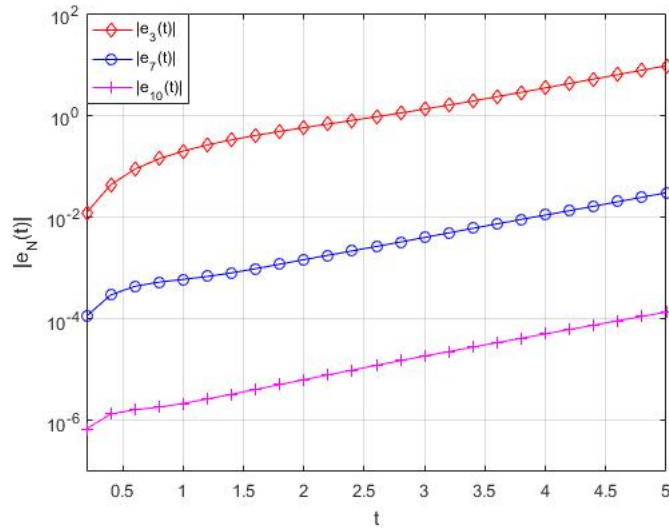
Şekil 4.23. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.24'te, $[0, 2]$ aralığında $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7, 9$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekilden, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının, gerçek hata değerlerine göre daha düşük olduğu görülmektedir. Ayrıca, N sabit tutulduğunda, K değerinin artışı ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinde belirgin bir azalma gözlemlenmektedir.



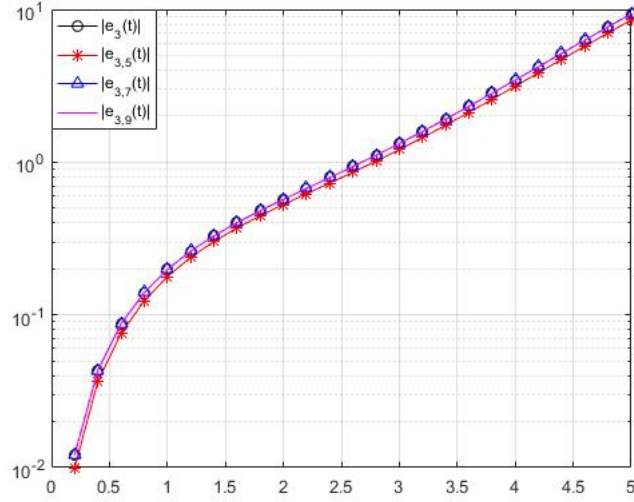
Şekil 4.24. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.25'te farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hata değerleri grafikte gösterilmiştir.



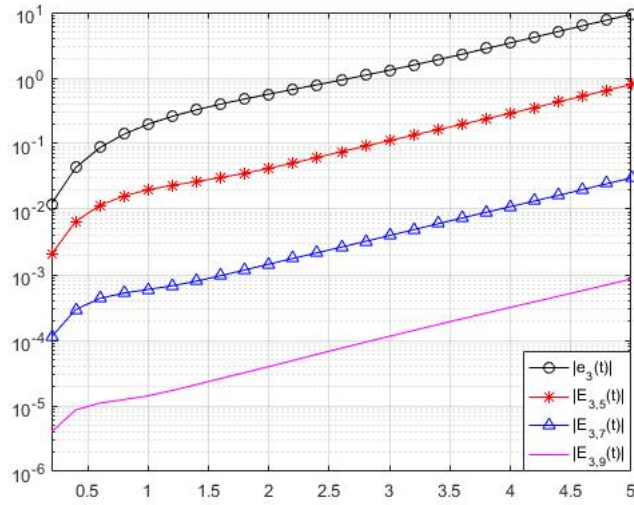
Şekil 4.25. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Şekil 4.26'da, $[0, 5]$ aralığında $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7$ ve 9 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Gerçek ve tahmini hata değerleri birbirine benzer sonuçlar göstermektedir.



Şekil 4.26. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.27'de, $[0, 5]$ aralığında $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7, 9$ için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Görülen o ki, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hataları, gerçek hata değerlerine kıyasla daha küçüktür. Ayrıca, N sabitken, K değerinin artırılmasıyla iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarında azalma yaşanmıştır.



Şekil 4.27. Örnek 4.6'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

4.3.3. Birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler

Örnek 4.7.

$$y'(t) = -y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{7t^3}{8} + 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.104)$$

birinci mertebe pantograph diferansiyel denklemini $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında incelenir. Problemin tam çözümü $y(t) = t^3$ 'dür. Denklem (4.104)'de, $P_{00}(t) = -1$, $P_{10}(t) = 1$, $\lambda_{00} = 1$, $\beta_{00} = 0$, $\lambda_{10} = \frac{1}{2}$, $\beta_{10} = 0$, $f(t) = \frac{7t^3}{8} + 3t^2$ 'dir. Problemin çözümünde yöntem uygulanırken $N = 2$ olarak seçilir. $y'(t)$ ifadesi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^2 a_n H_n(t).$$

İlk olarak $N = 2$ için kollokasyon noktaları tespit edilir. $0 \leq t \leq 1$ olduğundan $b = 1$ ve $s = 0, 1, 2$ olur ve

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1 \right\}$$

kollokasyon noktaları elde edilir. (4.48) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemini

$$\left\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{R}(1, 0) \mathbf{D}^T - \frac{1}{2} \mathbf{P}_{10} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{R} \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) = \mathbf{R}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{10}, \beta_{10}) = \mathbf{R}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 55/64 \\ 31/8 \end{bmatrix}$$

dir. Gerekli matris işlemleri yapılarak $\mathbb{W}$ bulunur:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5/4 & 19/16 & -65/48 \\ 3/2 & 11/4 & 13/6 \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & ; & 0 \\ 5/4 & 19/16 & -65/48 & ; & 55/64 \\ 3/2 & 11/4 & 13/6 & ; & 31/8 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur ve gerekli işlemler yapılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayılar matrisi elde edilir. $\mathbf{A}$ matrisi (4.43)'de yerine yazılarak problemin tam çözümü olan $y = t^3$ çözümüne ulaşılmış olur.

Örnek 4.8.

$$y'(t) = -y(0.8t) - y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.105)$$

birinci merteye pantograph diferansiyel denklemi $y(0) = 1$ başlangıç koşulu altında incelenir. Problemin tam çözümü yoktur. Denklem (4.105)'de, $P_{00}(t) = -1$, $P_{10}(t) = -1$, $\lambda_{00} = 1$, $\beta_{00} = 0$, $\lambda_{10} = 0.8$, $\beta_{10} = 0$, $f(t) = 0$ 'dır. Problemin çözümünde yöntemi uygulanırken $N = 6$ olarak seçilir. $y'(t)$ ifadesi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^6 a_n H_n(t).$$

İlk olarak $N = 6$ için kollokasyon noktaları tespit edilir. $0 \leq t \leq 1$ olduğundan $b = 1$ ve $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olur ve

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{6}, \quad t_2 = \frac{2}{6}, \quad t_3 = \frac{3}{6}, \quad t_4 = \frac{4}{6}, \quad t_5 = \frac{5}{6}, \quad t_6 = 1 \right\}$$

elde edilir. (4.48) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemi

$$\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{R}(1, 0) \mathbf{D}^T - \frac{1}{2} \mathbf{P}_{10} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{R} \left(\frac{4}{5}, 0 \right) \mathbf{D}^T \} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler $N = 6$ için aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -48 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -160 & 0 & 32 & 0 \\ -120 & 0 & 720 & 0 & -480 & 0 & 64 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) = \mathbf{R}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{10}, \beta_{10}) = \mathbf{R}(0.8, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64/125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 256/625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 541/1651 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 313/1194 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 1/36 & 1/216 & 1/1296 & 1/7776 & 1/46656 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 1/81 & 1/243 & 1/729 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 & 16/81 & 32/243 & 64/729 \\ 1 & 5/6 & 25/36 & 125/216 & 625/1296 & 428/1065 & 214/639 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{00} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{00} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{P}_{10} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{10} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(4.22) aracılığıyla $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 \\ 13/10 & 341/900 & -667/269 & -1231/551 & 2621/185 & 3293/150 & -15087/112 \\ 8/5 & 191/225 & -1445/539 & -5548/1165 & 5894/447 & 6979/157 & -8918/85 \\ 19/10 & 141/100 & -637/250 & -5980/821 & 2539/285 & 8581/138 & -19403/546 \\ 11/5 & 464/225 & -1383/683 & -1927/204 & 191/118 & 10429/149 & 4364/75 \\ 5/2 & 101/36 & -19/18 & -7027/648 & -1843/233 & 7385/116 & 16548/109 \\ 14/5 & 91/25 & 52/125 & -6888/625 & -1816/99 & 4034/99 & 31529/147 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi yazılır:

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 & -2 \\ 13/10 & 341/900 & -667/269 & -1231/551 & 2621/185 & 3293/150 & -15087/112 & -2 \\ 8/5 & 191/225 & -1445/539 & -5548/1165 & 5894/447 & 6979/157 & -8918/85 & -2 \\ 19/10 & 141/100 & -637/250 & -5980/821 & 2539/285 & 8581/138 & -19403/546 & -2 \\ 11/5 & 464/225 & -1383/683 & -1927/204 & 191/118 & 10429/149 & 4364/75 & -2 \\ 5/2 & 101/36 & -19/18 & -7027/648 & -1843/233 & 7385/116 & 16548/109 & -2 \\ 14/5 & 91/25 & 52/125 & -6888/625 & -1816/99 & 4034/99 & 31529/147 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gerekli işlemler yapılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2284/587 \\ 1097/349 \\ -1993/1706 \\ 139/530 \\ -22/555 \\ 182/47417 \\ -19/75531 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayılar matrisi elde edilir. $\mathbf{A}$ matrisi (4.43)'de yerine yazılarak $N = 6$ için elde edilen yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} y_6(t) = & -2.299908003679853e - 03t^7 + 2.047085686144434e - 02t^6 \\ & -1.026978531822544e - 01t^5 + 3.709964437374551e - 01t^4 \\ & -9.837778793276949e - 01t^3 + 1.799978532151517e + 00t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Çizelge 4.11'de, sunulan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümler, Walsh serisi yöntemi (Rao ve Palanisamy 1982), Laguerre serisi yöntemi (Hwang ve Shih 1982), Taylor serisi yöntemi (Sezer ve Daşcıoğlu 2007), Hermite kollokasyon yöntemi (Yalçınbaş vd. 2011), Bernoulli matris yöntemi (Tohidi vd. 2013), Bernstein matris yöntemi (Javadi vd. 2016) ile elde edilmiş yaklaşık çözüm değerleri ile karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.12'de ise, sunulan yöntem ile problemin $[0, 2]$ aralığında ve $[0, 5]$ aralığında $N = 6$ ve 8 alınarak hesaplanan yaklaşık çözüm değerleri sunulmuştur.

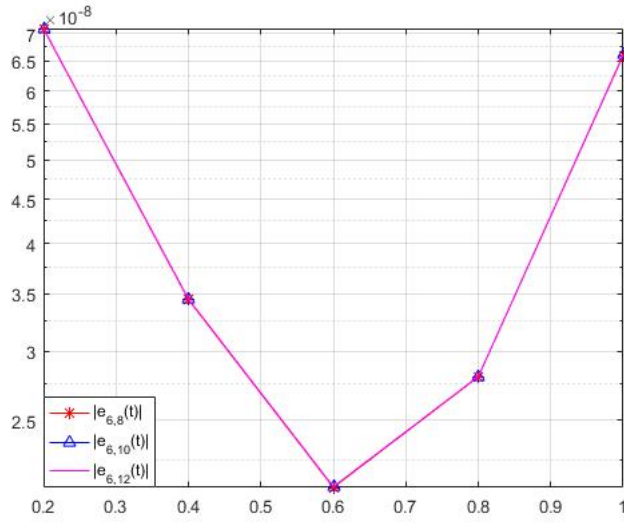
Çizelge 4.11. Örnek 4.8’deki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin, literatürdeki yöntemlerle elde edilen yaklaşık çözümlerle karşılaştırılması

	<i>Sunulan Yöntem</i>	
t_i	$N = 6$	$N = 8$
0	1	1
0.2	0.664690929944423	0.664691000742306
0.4	0.433560744271481	0.433560778716703
0.6	0.276482309289460	0.276482330183367
0.8	0.171484083907340	0.171484111953265
1.0	0.102670192656096	0.102670126678090
	<i>Walsh Serisi Yöntemi</i> (Rao ve Palanisamy 1982)	<i>Laguerre Serisi Yöntemi</i> (Hwang ve Shih 1982)
t_i		$N = 20$
0	1.000000	0.999971
0.2	0.665621	0.664703
0.4	0.432426	0.433555
0.6	0.275140	0.276471
0.8	0.170320	0.171482
1.0	0.100856	0.102679
	<i>Taylor Serisi Yöntemi</i> (Sezer ve Daşcıoğlu 2007)	<i>Hermite Kollokasyon Yöntemi</i> (Yalçınbaş vd. 2011)
t_i	$N = 8$	$N = 8$
0	1.000000	1.000000
0.2	0.6664691	0.664691
0.4	0.433561	0.433561
0.6	0.276482	0.276482
0.8	0.171484	0.171484
1.0	0.102744	0.102670
	<i>Bernoulli Matris Yöntemi</i> (Tohidi vd. 2013)	<i>Bernstein Matris Yöntemi</i> (Javadi vd. 2016)
t_i	$N = 6$	$N = 6$
0	1.00000000	1.00000000
0.2	0.66469052	0.66469078
0.4	0.43356055	0.43356098
0.6	0.27648223	0.27648212
0.8	0.17148362	0.17148433
1.0	0.10268323	0.10267077

Çizelge 4.12. Örnek 4.8’deki problem için $[0, 2]$ ve $[0, 5]$ aralıklarında elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

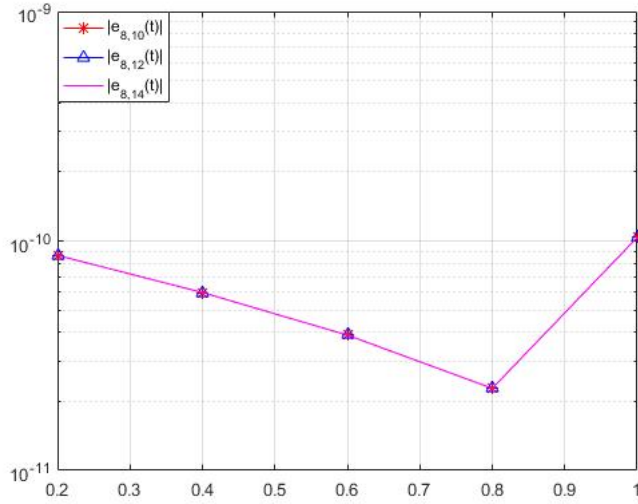
	$[0, 2]$ aralığı	
t_i	$N = 6$	$N = 8$
0	1	1
0.2	0.664681873840806	0.664690934810419
0.4	0.433553021327393	0.433560743754357
0.6	0.276479830256049	0.276482309000448
0.8	0.171482198077629	0.171484096043794
1.0	0.102667837675729	0.102670119838272
1.2	0.058642749107677	0.058643110726009
1.4	0.031315100754201	0.031314675668160
1.6	0.015009763323664	0.015011861482665
1.8	0.005810740156753	0.005810153321408
2.0	0.001048737277482	0.001038583471393
	$[0, 5]$ aralığı	
t_i	$N = 6$	$N = 8$
0	1	1
0.2	0.663830929004903	0.664635842245821
0.4	0.431647471064340	0.433463959864913
0.6	0.274282735723591	0.276399066164672
0.8	0.169733410838096	0.171439007026905
1.0	0.101720220518523	0.102657038319942
1.5	0.022468366420486	0.022063227502889
2.0	0.001041185911182	0.001033792241092
2.5	-0.002074926673847	-0.001719665418131
3.0	-4.971161181602538e-04	-6.754119048495100e-04
3.5	4.762452558429827e-04	1.949956891117741e-04
4.0	-1.838272586720535e-04	3.690922893495596e-04
4.5	4.168544856330139e-04	1.827176821445428e-04
5.0	0.002627473323150	9.021868351417044e-05

Şekil 4.28, $[0, 1]$ aralığında $N = 6$ ve $K = 8, 10$ ve 12 değerleri için elde edilen tahmini mutlak hata değerlerinin karşılaştırmasını göstermektedir.



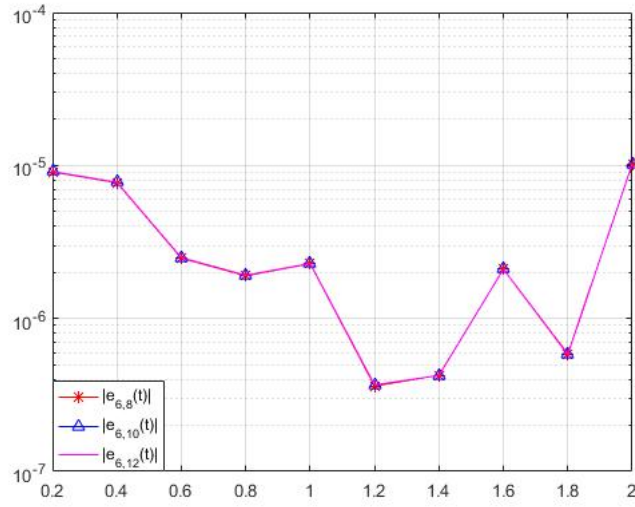
Şekil 4.28. Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.29, $[0, 1]$ aralığında $N = 8$ ve $K = 10, 12$ ve 14 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri arasındaki karşılaştırmayı sunmaktadır.



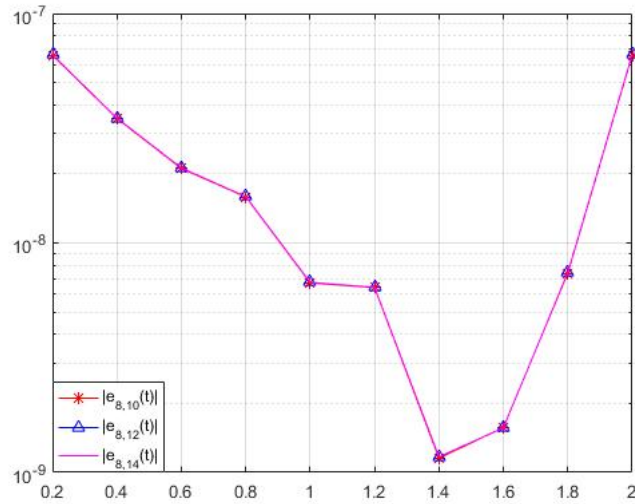
Şekil 4.29. Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 8$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.30, $[0, 2]$ aralığında $N = 6$ sabit tutulurken, $K = 8, 10$ ve 12 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerlerinin karşılaştırmalı analizini sunmaktadır.



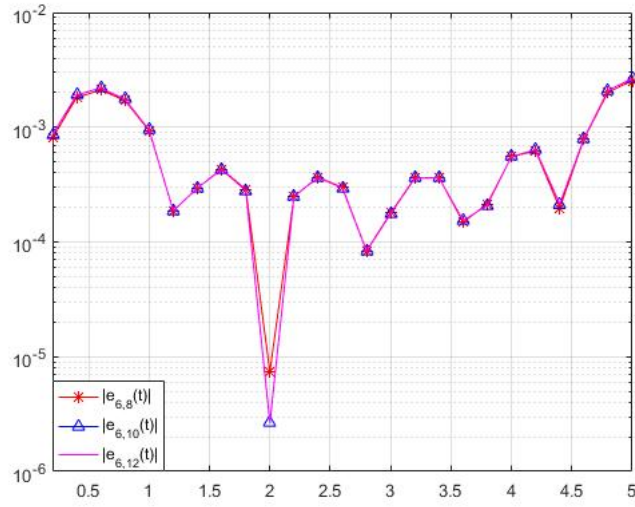
Şekil 4.30. Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

$[0, 2]$ aralığında, $N = 8$ sabit tutulup $K = 10, 12$ ve 14 seçildiğinde elde edilen tahmini mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması Şekil 4.31'de sunulmuştur.



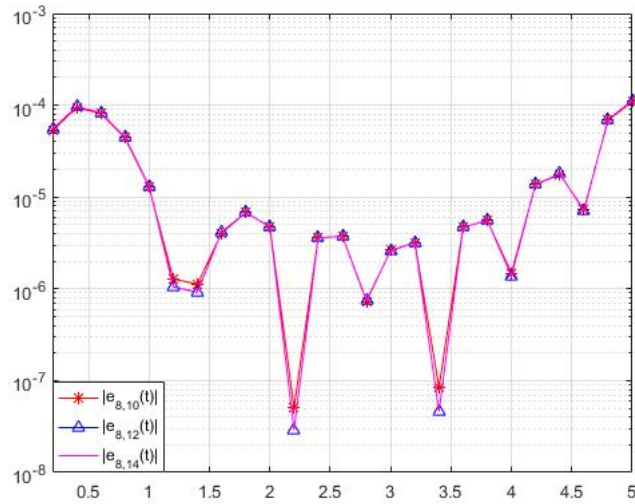
Şekil 4.31. Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 8$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.32, $[0, 5]$ aralığında $N = 6$ ve farklı K değerleri için hesaplanan tahmini mutlak karşılaştırmaktadır.



Şekil 4.32. Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 6$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.33, $[0, 5]$ aralığında $N = 8$ ve farklı K değerleri için hesaplanan tahmini mutlak hataları karşılaştırmaktadır.



Şekil 4.33. Örnek 4.8'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 8$ ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

4.3.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için sayısal örnekler

Örnek 4.9.

$$y''(t) = \frac{3}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.106)$$

ikinci mertebe pantograph diferansiyel denklemi $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında incelenecektir (Yüzbaşı vd. 2012). Problemin tam çözümü $y(t) = t^2$ 'dir. Denklem (4.106)'de, $P_{00}(t) = \frac{3}{4}$, $P_{01}(t) = 1$, $\lambda_{00} = 1$, $\beta_{00} = 0$, $\lambda_{01} = \frac{1}{2}$, $\beta_{01} = 0$, $f(t) = -t^2 + 2$ 'dir. Problemin çözümünde yöntem uygulanırken $N = 1$ olarak seçilir. $y''(t)$ ifadesi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y''(t) = \sum_{n=0}^1 a_n H_n(t).$$

İlk olarak $N = 1$ için kollokasyon noktaları tespit edilir. $0 \leq t \leq 1$ olduğundan $b = 1$ ve $s = 0, 1$ olur ve

$$\{t_0 = 0, \quad t_1 = 1\}$$

kollokasyon noktaları elde edilir. (4.67) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemi

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00}\mathbf{T}_2\mathbf{T}\mathbf{B}_2\mathbf{R}(1,0)\mathbf{D}^T - \frac{1}{2}\mathbf{P}_{01}\mathbf{T}_2\mathbf{T}\mathbf{B}_2\mathbf{R}\left(\frac{1}{2},0\right)\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{01} &= \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) = \mathbf{R}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}(\lambda_{01}, \beta_{01}) &= \mathbf{R}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Sistem çözülerek $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 41/24 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ; & 2 \\ 1/2 & 41/24 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur ve gerekli işlemler yapılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayılar matrisi elde edilir. $\mathbf{A}$ matrisi (4.59)'de yerine yazılarak problemin tam çözümü olan $y = t^2$ çözümüne ulaşılmış olur.

Örnek 4.10.

$$y'''(t) = ty''(2t) - y'(t) - y\left(\frac{t}{2}\right) + t\cos(2t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.107)$$

üçüncü mertebede pantograph denkleminin $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ başlangıç koşulları altında yaklaşık çözümü araştırılacaktır (Yüzbaşı ve Ismailov 2018). Probleme, $P_{00}(t) = -1$, $P_{01}(t) = -1$, $P_{02}(t) = t$, $\lambda_{00} = \frac{1}{2}$, $\beta_{00} = 0$, $\lambda_{01} = 1$, $\beta_{01} = 0$, $\lambda_{02} = 2$, $\beta_{02} = 0$, $f(t) = t\cos(2t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ 'dir. Problemin tam çözümü $y(t) = \cos(t)$ 'dir. $N = 3$ için yaklaşık çözüm aranacaktır. İlk olarak, $y'''(t)$ terimi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'''(t) = \sum_{n=0}^3 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında $b = 1$ ve $N = 3$ için $s = 0, 1, 2, 3$ 'dür. $N = 3$ için kollokasyon noktaları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1. \right\}$$

(4.67) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemi

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - 2\mathbf{P}_{02}\mathbf{T}_1\mathbf{T}\mathbf{B}_1\mathbf{R}(2,0)\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{01}\mathbf{T}_2\mathbf{T}\mathbf{B}_2\mathbf{R}(1,0)\mathbf{D}^T - \frac{1}{2}\mathbf{P}_{00}\mathbf{T}_3\mathbf{T}\mathbf{B}_3\mathbf{R}\left(\frac{1}{2},0\right)\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{P}_{00} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{01} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{P}_{02} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/120 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) &= \mathbf{R}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}(\lambda_{01}, \beta_{01}) &= \mathbf{R}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}(\lambda_{02}, \beta_{02}) &= \mathbf{R}(2, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 659/528 \\ 433/393 \\ 347/752 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 486/1855 \\ 1293/8218 \\ -1122/2713 \end{bmatrix}$$

olarak yazılmaktadır. Matris işlemleri yapılarak, $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1081/1296 & 4180/7873 & -1627/1204 & -1407/466 \\ 55/162 & 241/972 & -651/691 & -1495/456 \\ -23/48 & -319/192 & -2579/480 & -2617/192 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & ; & 0 \\ 1081/1296 & 4180/7873 & -1627/1204 & -1407/466 & ; & 486/1855 \\ 55/162 & 241/972 & -651/691 & -1495/456 & ; & 1293/8218 \\ -23/48 & -319/192 & -2579/480 & -2617/192 & ; & -1122/2713 \end{bmatrix}$$

dir. $\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$ işlemi yapılarak katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 848/4303 \\ 1266/6179 \\ 249/2527 \\ -449/11113 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmış olur. (4.59)'da yerine konularak yaklaşık çözüme ulaşılır. $N = 3$ için sırasıyla, yaklaşık çözüm, hata fonksiyonu, $K = 4$ için tahmini hata fonksiyonu ile iyileştirilmiş çözümlerin hata fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

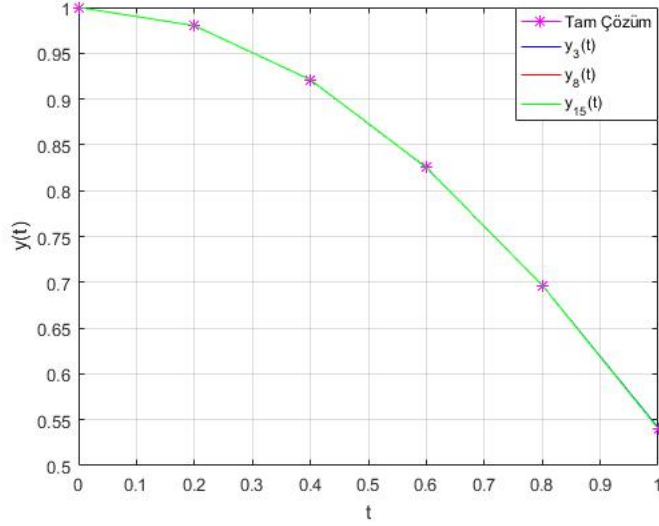
$$y_3(t) = -2.6935e - 03t^6 + 6.5691e - 03t^5 + 3.7276e - 02t^4 - 0.5t^2 + 1,$$

$$e_3(t) = \cos(t) + 0.5t^2 - 3.7276e - 02t^4 - 6.5691e - 03t^5 + 2.6935e - 03t^6 - 1,$$

$$e_{3,4}(t) = 1.3760e - 04t^7 + 1.0258e - 03t^6 - 6.3662e - 03t^5 \\ + 4.3329e - 03t^4 + 2.2959e - 41t^3,$$

$$E_{3,4}(t) = \cos(t) + 0.5t^2 - 2.2959e - 41t^3 - 4.1608e - 02t^4 - 2.0287e - 04t^5 \\ + 1.6677e - 03t^6 - 1.3760e - 04t^7 - 1.$$

Şekil 4.34'te, problemin tam çözümü olan $\cos(t)$ ve $N = 3, 8, 15$ için elde edilen yaklaşık çözüm değerlerinin karşılaştırmaları grafik üzerinde sunulmuştur.



Şekil 4.34. Örnek 4.10'daki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması

Çizelge 4.13, $N = 3, 8$ ve 15 için hesaplanan mutlak hata değerlerinin literatürde yer alan üstel yaklaşım yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2013), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2012), Taylor matris yöntemi (Yüzbaşı ve Ismailov 2018), Hermite kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2015), Legendre kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015) ve Taylor yöntemi (Sezer ve Daşcıoğlu 2007) ile elde edilmiş olan mutlak hata değerleri ile karşılaştırmasını göstermektedir.

Çizelge 4.13. Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

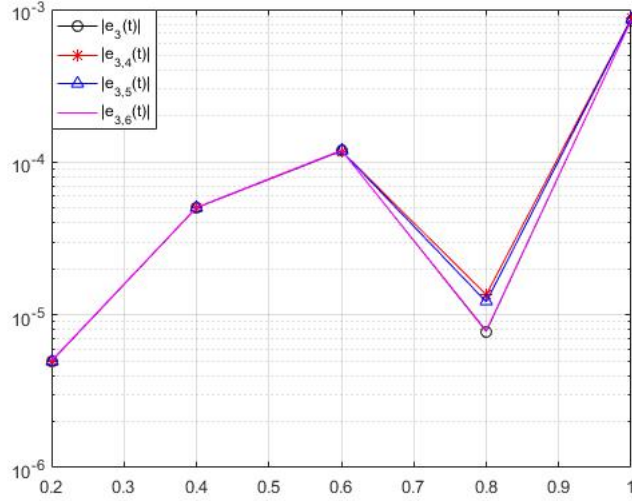
	<i>Sunulan Yöntem</i>		
t_i	$N = 3$	$N = 8$	$N = 15$
0	0	0	0
0.2	5.0073e-06	1.0055e-11	1.1102e-16
0.4	5.0506e-05	2.1383e-11	2.2204e-16
0.6	1.1957e-04	8.6453e-10	2.3537e-14
0.8	7.8000e-06	8.5655e-09	1.5327e-13
1.0	8.4874e-04	3.9621e-08	1.9629e-13
	<i>Üstel Yaklaşım Yöntemi</i> (Yüzbaşı ve Sezer 2013)		<i>Hermite Kollokasyon Yöntemi</i> (Yüzbaşı vd. 2015)
t_i	$N = 3$	$N = 8$	$N = 8$
0.2	5.2603e-04	7.5859e-06	4.9377e-11
0.4	6.6783e-03	3.7294e-05	1.0456e-10
0.6	2.6954e-02	6.7100e-05	1.1634e-08
0.8	6.8182e-02	4.7974e-05	1.0821e-07
1.0	1.3362e-01	7.1575e-04	4.9681e-07
	<i>Bessel Kollokasyon Yöntemi</i> (Yüzbaşı vd. 2012)		<i>Legendre Kollokasyon Yöntemi</i> (Yüzbaşı ve Sezer 2015)
t_i	$N = 8$	$N = 15$	$N = 8$
0.2	4.9377e-11	1.1102e-16	4.9377e-11
0.4	1.0456e-10	1.1102e-16	1.0456e-10
0.6	1.1634e-08	7.7715e-15	1.1634e-08
0.8	1.0821e-07	6.8278e-14	1.0821e-07
1.0	4.9681e-07	3.1086e-13	4.9681e-07
	<i>Taylor Matris Yöntemi</i> (Yüzbaşı ve Ismailov 2018)		<i>Taylor Yöntemi</i> (Sezer ve Daşcıoğlu 2007)
t_i	$N = 8$		$N = 8$
0.2	1.3e-12		8.0000e-08
0.4	5.453e-11		5.1200e-06
0.6	1.607e-09		5.8322e-05
0.8	1.442e-08		3.2771e-04
1.0	6.555e-08		1.2503e-03

Çizelge 4.14, $N = 3, 8, 15$ ve $K = 4, 9, 10, 12, 15, 17$ alınarak elde edilen tahmini hata değerleri ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri verilmektedir.

Çizelge 4.14. Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması

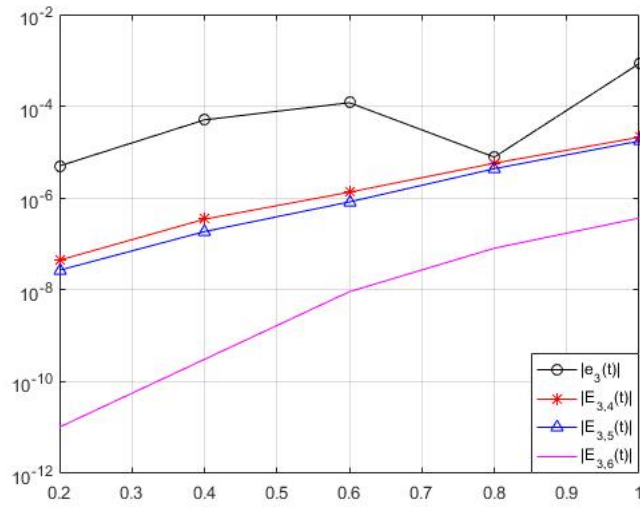
t_i	$ e_{3,4}(t_i) $	$ e_{8,9}(t_i) $	$ e_{8,10}(t_i) $	$ e_{8,12}(t_i) $	$ e_{8,15}(t_i) $	$ e_{15,17}(t_i) $
0	0	0	0	0	0	0
0.2	4.9629e-06	1.0033e-11	1.0054e-11	1.0055e-11	1.0055e-11	2.4558e-21
0.4	5.0160e-05	2.1568e-11	2.1357e-11	2.1383e-11	2.1383e-11	1.1168e-18
0.6	1.1822e-04	8.5481e-10	8.6526e-10	8.6454e-10	8.6453e-10	3.8845e-17
0.8	1.3547e-05	8.4770e-09	8.5720e-09	8.5656e-09	8.5655e-09	3.4706e-16
1.0	8.6987e-04	3.9216e-08	3.9650e-08	3.9621e-08	3.9621e-08	1.5787e-15
t_i	$ E_{3,4}(t_i) $	$ E_{8,9}(t_i) $	$ E_{8,10}(t_i) $	$ E_{8,12}(t_i) $	$ E_{8,15}(t_i) $	$ E_{15,17}(t_i) $
0	0	0	0	0	0	0
0.2	4.4414e-08	2.2188e-14	1.1859e-15	1.3010e-17	1.1102e-16	4.5536e-18
0.4	3.4645e-07	1.8444e-13	2.6621e-14	2.6194e-16	2.2204e-16	2.0470e-16
0.6	1.3450e-06	9.7175e-12	7.3708e-13	1.0936e-14	0	2.1150e-14
0.8	5.7475e-06	8.8512e-11	6.4861e-12	1.0536e-13	2.5535e-15	6.2395e-14
1.0	2.1129e-05	4.0411e-10	2.9436e-11	5.2269e-13	2.2204e-16	3.8369e-13

Şekil 4.35'te $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ve $K = 4, 5$ ve 6 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.35. Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.36'da, $N = 3$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 4, 5$ ve 6 için hesaplanan iyileştirilmiş çözümlere ait mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin gerçek hata değerlerinden daha düşük olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca, N değeri sabit tutulduğunda, K arttıkça iyileştirilmiş çözümlerin doğruluğunun arttığı ve mutlak hataların azaldığı gözlemlenmektedir.



Şekil 4.36. Örnek 4.10'daki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.11.

$$y'''(t) = -y(t) - y(t - 0.3) + e^{(-t+0.3)}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.108)$$

üçüncü mertebe pantograph denkleminin yaklaşık çözümü $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$ başlangıç koşulları ve $y(t) = e^{-t}$ tam çözümü ile birlikte araştırılacaktır (Yüzbaşı ve Ismailov 2018). Problemden, $P_{00}(t) = -1$, $P_{10}(t) = -1$, $\lambda_{00} = 1$, $\beta_{00} = 0$, $\lambda_{10} = 1$, $\beta_{10} = -0.3$, $f(t) = e^{(-t+0.3)}$ 'tür. $N = 5$ için yaklaşık çözüm aranacaktır. İlk olarak, $y'''(t)$ terimi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y'''(t) = \sum_{n=0}^5 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında $b = 1$ ve $N = 5$ için $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 'tir. $N = 5$ için kollokasyon noktaları kümesi

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{5}, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{3}{5}, \quad t_4 = \frac{4}{5}, \quad t_5 = 1 \right\}$$

dir. (4.67) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemi

$$\{\mathbf{T}\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00}\mathbf{T}_3\mathbf{T}\mathbf{B}_3\mathbf{R}(1, 0)\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{10}\mathbf{T}_3(t_s - 0.3)\mathbf{T}(t)\mathbf{B}_3\mathbf{R}(1, -0.3)\mathbf{D}^T\}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluşturulur. Bu denklemde yer alan matrisler

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -48 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -160 & 0 & 32 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/210 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/336 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) = \mathbf{R}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{10}, \beta_{10}) = \mathbf{R}(1, -0.3) = \begin{bmatrix} 1 & -3/10 & 9/100 & -27/1000 & 81/10000 & -44/18107 \\ 0 & 1 & -3/5 & 27/100 & -27/250 & 81/2000 \\ 0 & 0 & 1 & -9/10 & 27/50 & -27/100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6/5 & 9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \\ 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \\ 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \\ 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 541/1651 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27/125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64/125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_3(t_s - 0.3) = \begin{bmatrix} -27/1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27/1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 343/1000 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{00} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{10} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 953/706 \\ 1261/1141 \\ 1141/1261 \\ 706/953 \\ 743/1225 \\ 509/1025 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1024/1029 \\ -769/938 \\ -168/247 \\ -746/1277 \\ -5312/9865 \\ -640/1167 \end{bmatrix}$$

dir. Matris işlemleri sonucunda

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 885/889 & 27/10000 & -540/271 & -181/11886 & 3745/313 & 387/2708 \\ 858/857 & 369/922 & -783/425 & -2966/1269 & 2702/267 & 4685/206 \\ 1213/1200 & 1009/1258 & -29/21 & -3023/703 & 1858/383 & 4623/121 \\ 2081/2000 & 947/783 & -531/836 & -2669/483 & -3421/1227 & 3397/84 \\ 1740/1573 & 1969/1208 & 824/2213 & -3848/679 & -715/64 & 6694/257 \\ 760/621 & 1151/554 & 1423/874 & -5151/1171 & -9562/527 & -3232/705 \end{bmatrix}$$

matrisine ulaşılmış olur. Genişletilmiş matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 885/889 & 27/10000 & -540/271 & -181/11886 & 3745/313 & 387/2708 & -1024/1029 \\ 858/857 & 369/922 & -783/425 & -2966/1269 & 2702/267 & 4685/206 & -769/938 \\ 1213/1200 & 1009/1258 & -29/21 & -3023/703 & 1858/383 & 4623/121 & -168/247 \\ 2081/2000 & 947/783 & -531/836 & -2669/483 & -3421/1227 & 3397/84 & -746/1277 \\ 1740/1573 & 1969/1208 & 824/2213 & -3848/679 & -715/64 & 6694/257 & -5312/9865 \\ 760/621 & 1151/554 & 1423/874 & -5151/1171 & -9562/527 & -3232/705 & -640/1167 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak Hermite katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3166/2415 \\ 2875/4199 \\ -117/674 \\ 367/11563 \\ -41/13130 \\ 32/157569 \end{bmatrix}$$

bulunur ve denklem (4.59)'da yerine yazılarak $N = 5$ için yaklaşık çözüm bulunur.

Aşağıda, $N = 5$ ve $K = 7$ alınarak elde edilen yaklaşık çözüm, hata fonksiyonu, tahmini hata fonksiyonu ve iyileştirilmiş çözümlerin hata fonksiyonları sırasıyla verilmiştir:

$$\begin{aligned} y_5(t) = & 1.516538243003156e - 05t^8 - 1.824134031832191e - 04t^7 \\ & + 0.001374667992782t^6 - 0.008326547008279t^5 + 0.041665186806272t^4 \\ & - 0.166666659462270t^3 + t^2/2 - t + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_5(t) = & e^{-t} - 1.516538243003156e - 05t^8 + 1.824134031832191e - 04t^7 \\ & - 0.001374667992782t^6 + 0.008326547008279t^5 - 0.041665186806272t^4 \\ & + 0.166666659462270t^3 - t^2/2 + t - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{5,7}(t) = & 1.938543809018282e - 07t^{10} - 2.644923078943588e - 06t^9 \\ & + 9.642799775381848e - 06t^8 - 1.627468065939682e - 05t^7 \\ & + 1.474498458562172e - 05t^6 - 7.289575998440749e - 06t^5 \\ & + 1.760833753847121e - 06t^4 - 1.019876593270445e - 07t^3, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E_{5,7}(t) = & 0.999957739989908t + e^{-t} - 0.499562625440094t^2 + 0.164897261311995t^3 \\ & - 0.038247503867799t^4 + 0.005086566283750t^5 - 4.162676099422999e - 05t^6 \\ & + 4.283824893390280e - 05t^7 - 1.516538243003156e - 05t^8 - 0.999999388074158. \end{aligned}$$

Çizelge 4.15’te, sunulan yöntem kullanılarak elde edilmiş olan mutlak hata değerleri, literatürde bulunan Hermite kollokasyon yöntemi (Yalçınbaş vd. 2011), Legendre kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015), Bernoulli kollokasyon yöntemi (Tohidi vd. 2013) ve Bernstein polinomsal yaklaşım yöntemi (Javadi vd. 2016) ile hesaplanan mutlak hata değerleri ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.15. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile literatürdeki yöntemlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

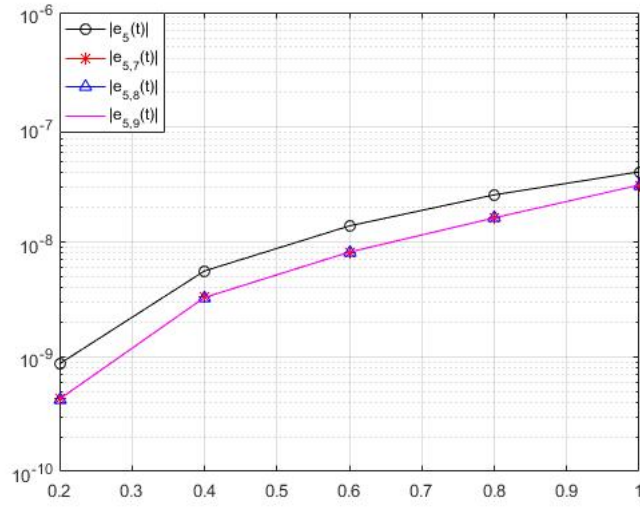
	Sunulan Yöntem			
t_i	$N = 5$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$
0	0	0	0	0
0.2	8.6715e-10	3.7657e-11	4.3299e-14	0
0.4	5.5876e-09	2.1483e-10	2.1816e-13	1.1102e-16
0.6	1.3801e-08	5.2549e-10	5.2236e-13	2.2204e-16
0.8	2.5738e-08	9.6638e-10	9.5257e-13	2.7756e-16
1.0	4.0864e-08	1.5342e-09	1.5010e-12	4.9960e-16
	Hermite Kollokasyon Yöntemi (Yalçınbaş vd. 2011)			Legendre Kollokasyon Yöntemi (Yüzbaşı ve Sezer 2015)
t_i	$N = 5$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 8$
0	0	0	0	2.2204e-16
0.2	4.7521e-06	6.841e-07	6.2e-09	5.1158e-11
0.4	6.14926e-05	7.9299e-06	5.76e-08	2.5057e-10
0.6	2.4842e-04	2.89415e-05	1.796e-07	5.9419e-10
0.8	6.20644e-04	6.64913e-05	3.735e-07	7.1146e-10
1.0	1.192234e-03	1.20371e-4	6.368e-07	2.6861e-08
	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi (Tohidi vd. 2013)		Bernstein Polinomsal Yaklaşımı (Javadi vd. 2016)	
t_i	$N = 5$	$N = 8$	$N = 5$	$N = 8$
0	0	0	9.17e-07	3.45e-11
0.2	3.69e-07	5.11e-11	6.15e-08	6.78e-11
0.4	2.37e-06	2.50e-10	7.16e-07	3.31e-10
0.6	5.96e-06	5.94e-10	7.16e-07	8.43e-10
0.8	3.48e-05	7.11e-10	2.82e-06	1.54e-09
1.0	2.03e-04	2.68e-08	3.84e-06	2.49e-09

Çizelge 4.16, sunulan yöntem ile elde edilen tahmini mutlak hata $|e_{N,K}(t)|$, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata $|E_{N,K}(t)|$ değerleri karşılaştırılmıştır.

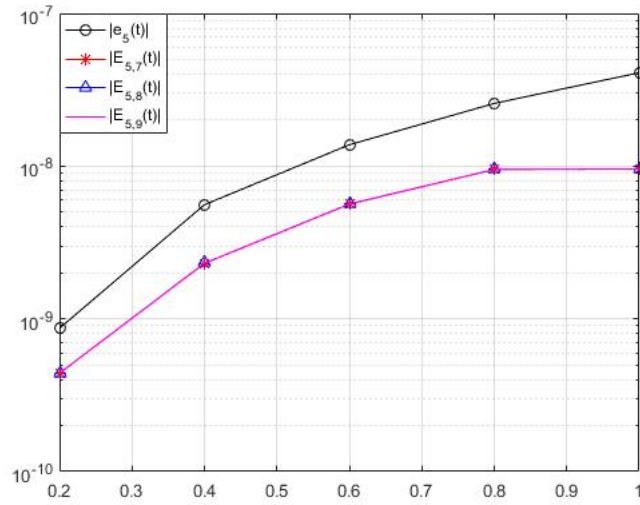
Çizelge 4.16. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile N ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması

t_i	$ e_{5,7}(t_i) $	$ e_{6,8}(t_i) $	$ e_{8,10}(t_i) $	$ e_{10,12}(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	4.2747e-10	9.6263e-12	3.2743e-13	1.9048e-15
0.4	3.2822e-09	3.2188e-11	1.7071e-12	9.8477e-15
0.6	8.1711e-09	7.7473e-11	4.1719e-12	2.3994e-14
0.8	1.6244e-08	6.1001e-11	7.1200e-12	4.1495e-14
1.0	3.1300e-08	3.7345e-10	8.0693e-12	5.0615e-14
t_i	$ E_{5,7}(t_i) $	$ E_{6,8}(t_i) $	$ E_{8,10}(t_i) $	$ E_{10,12}(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	4.3968e-10	4.7283e-11	3.7076e-13	1.8838e-15
0.4	2.3053e-09	2.4701e-10	1.9252e-12	9.9521e-15
0.6	5.6298e-09	6.0296e-10	4.6943e-12	2.4243e-14
0.8	9.4942e-09	1.0274e-09	8.0725e-12	4.1791e-14
1.0	9.5634e-09	1.1608e-09	9.5703e-12	5.1133e-14

Şekil 4.37’de, $N = 5$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 7, 8$ ve 9 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Şekil 4.38’de, $N = 5$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 7, 8$ ve 9 kullanılarak hesaplanan iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır.

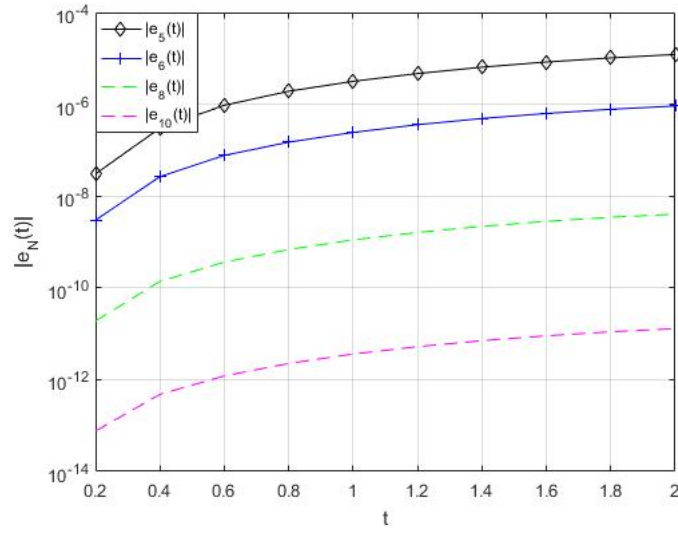


Şekil 4.37. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması



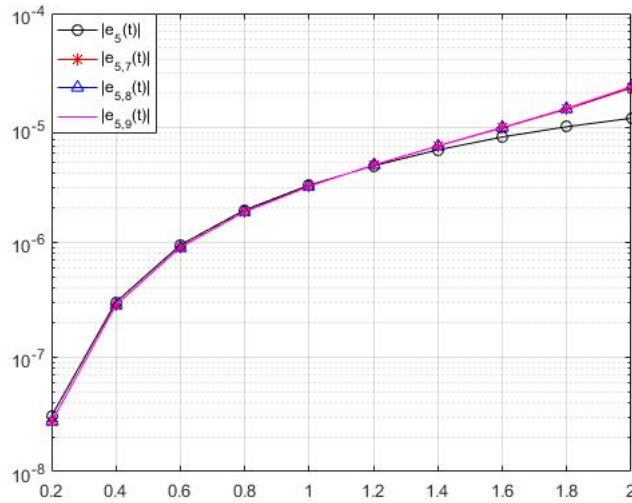
Şekil 4.38. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.39’da farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hata değerleri grafikte gösterilmiştir.



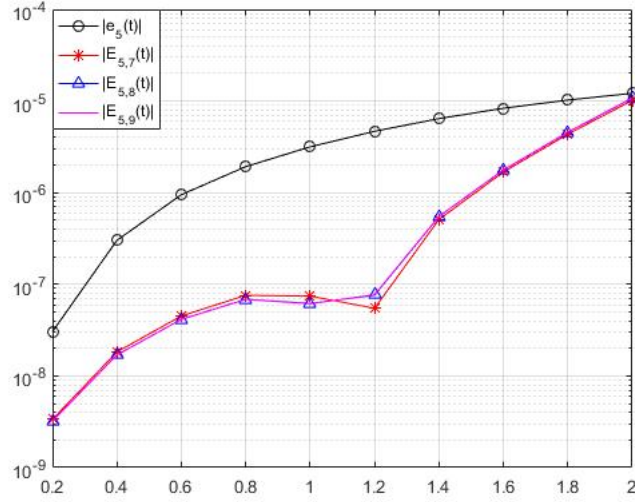
Şekil 4.39. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Şekil 4.40, $[0, 2]$ aralığında, $N = 5$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 7, 8$ ve 9 için hesaplanan tahmini mutlak hata değerleri arasındaki karşılaştırmayı sunmaktadır.



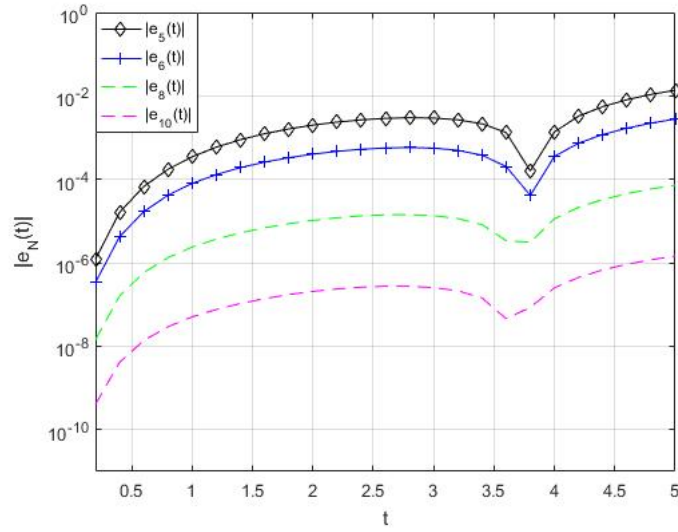
Şekil 4.40. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

$[0, 2]$ aralığında, $N = 5$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 7, 8$ ve 9 kullanılarak hesaplanan iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri Şekil 4.41’de karşılaştırılmıştır.



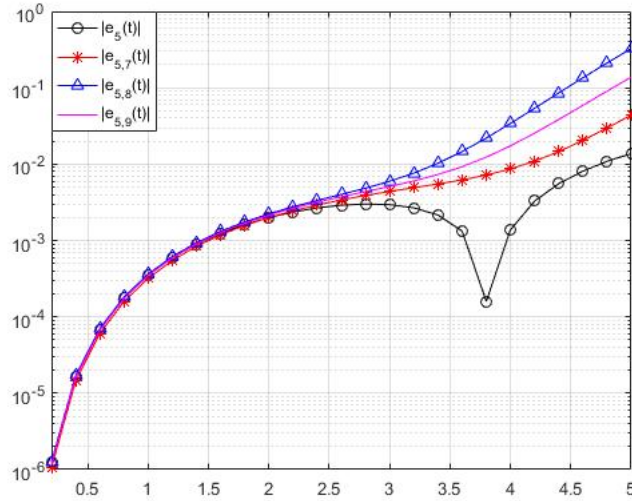
Şekil 4.41. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için $[0, 2]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.42’de farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hata değerleri grafikte gösterilmiştir.



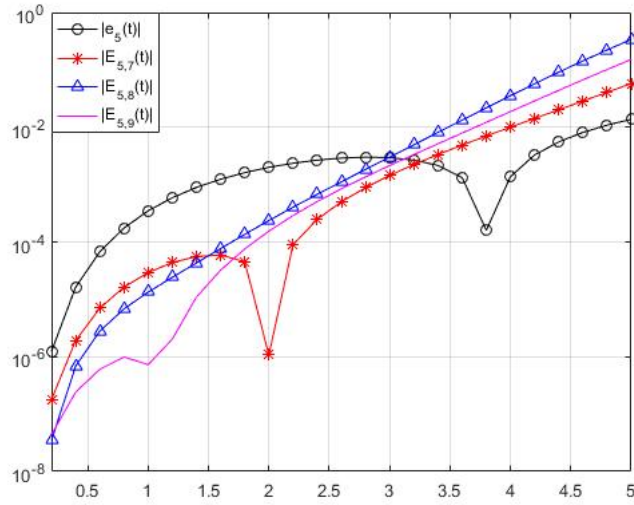
Şekil 4.42. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile farklı N değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

$[0, 5]$ aralığında, $N = 5$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 7, 8$ ve 9 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri Şekil 4.43’te karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.43. Örnek 4.11’deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ ve K ’nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.44, $[0, 5]$ aralığında $N = 5$, $K = 7, 8$ ve 9 değerleri için elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerleri ile gerçek hata değerlerini karşılaştırmaktadır.



Şekil 4.44. Örnek 4.11'deki problem için sunulan yöntem ile $N = 5$ için elde edilen gerçek hata ve K 'nin farklı değerleri için $[0, 5]$ aralığında elde edilen iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.12.

$$y''(t) = -y'(t - 0.1) + 2ty(t - 0.2) + 2t - 2t \left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.109)$$

ikinci mertbe pantograf denkleminin yaklaşık çözümü $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ve $y(t) = t^2$ tam çözümü ile birlikte ele alınacaktır. Problemden, $P_{00}(t) = 2t$, $P_{01}(t) = 1$, $\lambda_{00} = 1$, $\beta_{00} = -0.2$, $\lambda_{01} = 1$, $\beta_{01} = -0.1$, $f(t) = 2t - 2t(t - 1/5)^2 + 9/5$ 'tir. $N = 1$ için $y''(t)$ ifadesi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y''(t) = \sum_{n=0}^1 a_n H_n(t). \quad (4.110)$$

$N = 1$ için kollokasyon noktaları tespit edilir. $0 \leq t \leq 1$ olduğundan $b = 1$ ve $s = 0, 1$ olur ve

$$\{t_0 = 0, \quad t_1 = 1\}$$

kollokasyon noktaları elde edilir. (4.67) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemi

$$\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{01} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{R}(1, -0.1) \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00} \mathbf{T}_2 \mathbf{T} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1, -0.2) \mathbf{D}^T \} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -1/10 & 0 \\ 0 & 9/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 16/25 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) = \mathbf{R}(1, -0.2) = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{01}, \beta_{01}) = \mathbf{R}(1, -0.1) = \begin{bmatrix} 1 & -1/10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 63/25 \end{bmatrix}$$

dir. Sistem çözülerek $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/50 \\ 63/50 & 956/375 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/50 & ; & 9/5 \\ 63/50 & 956/375 & ; & 63/25 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır ve gerekli işlemler yapılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayılar matrisi bulunur. $\mathbf{A}$ matrisi (4.59)'da yerine yazılarak problemin tam çözümü olan $y = t^2$ çözümüne ulaşılmış olur.

Örnek 4.13.

$$y''(t) = -y'(0.4t - 0.1) + y(t - 0.3) + \cos(0.4t - 0.1) - \sin(t - 0.3), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.111)$$

ikinci mertebe pantograf diferansiyel denkleminin $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında yaklaşık çözümü araştırılacaktır. Problemde, $P_{00}(t) = 1$, $P_{01}(t) = -1$, $\lambda_{00} = 1$, $\beta_{00} = -0.3$, $\lambda_{01} = 0.4$, $\beta_{01} = -0.1$, $f(t) = \cos(0.4t - 0.1) - \sin(t - 0.3)$ 'dir.

Problemin tam çözümü $y(t) = \sin(t)$ 'dir. $N = 3$ için yaklaşık çözüm aranacaktır. İlk olarak, $y''(t)$ terimi kesilmiş Hermite serisi formunda yazılır:

$$y''(t) = \sum_{n=0}^3 a_n H_n(t).$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında $b = 1$ ve $N = 3$ için $s = 0, 1, 2, 3$ 'dür. $N = 3$ için kollokasyon noktaları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = \frac{2}{3}, \quad t_3 = 1. \right\}$$

(4.67) bağıntısından yararlanılarak temel matris denklemi

$$\{ \mathbf{T} \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{01} \mathbf{T}_1 \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{R}(0.4, -0.1) \mathbf{D}^T - \mathbf{P}_{00} \mathbf{T}_2 \mathbf{T} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}(1, -0.3) \mathbf{D}^T \} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

biçiminde oluşturulur. Bu denklemde kullanılan matrisler

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 9/100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 121/900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49/100 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{00}, \beta_{00}) = \mathbf{R}(1, -0.3) = \begin{bmatrix} 1 & -3/10 & 9/100 & -27/1000 \\ 0 & 1 & -3/5 & 27/100 \\ 0 & 0 & 1 & -9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\lambda_{01}, \beta_{01}) = \mathbf{R}(0.4, -0.1) = \begin{bmatrix} 1 & -1/10 & 1/100 & -1/1000 \\ 0 & 2/5 & -2/25 & 3/250 \\ 0 & 0 & 4/25 & -6/125 \\ 0 & 0 & 0 & 8/125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1648/1277 \\ 522/817 \\ 101/10898 \\ -2289/4316 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -118/12453 \\ -215/656 \\ -835/1338 \\ -1532/1845 \end{bmatrix}$$

olarak yazılmaktadır. Matris işlemleri yapılarak, $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 171/200 & 47/1000 & -8651/5000 & -6787/25000 \\ 1859/1800 & 53887/81000 & -1969343/1215000 & -22426681/6075000 \\ 1979/1800 & 109747/81000 & -515993/1215000 & -34967861/6075000 \\ 211/200 & 6131/3000 & 27937/15000 & -106887/25000 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 171/200 & 47/1000 & -8651/5000 & -6787/25000 & ; & -118/12453 \\ 1859/1800 & 53887/81000 & -1969343/1215000 & -22426681/6075000 & ; & -215/656 \\ 1979/1800 & 109747/81000 & -515993/1215000 & -34967861/6075000 & ; & -835/1338 \\ 211/200 & 6131/3000 & 27937/15000 & -106887/25000 & ; & -1532/1845 \end{bmatrix}$$

dir. $\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$ işlemi yapılarak katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 208/1919 \\ -931/1978 \\ 61/1390 \\ 160/10601 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmış olur. (4.59)'da yerine konularak yaklaşık çözüme ulaşılır. $N = 3$ için sırasıyla, yaklaşık çözüm, hata fonksiyonu, $K = 5$ için tahmini hata fonksiyonu ile

iyileştirilmiş çözümlerin hata fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

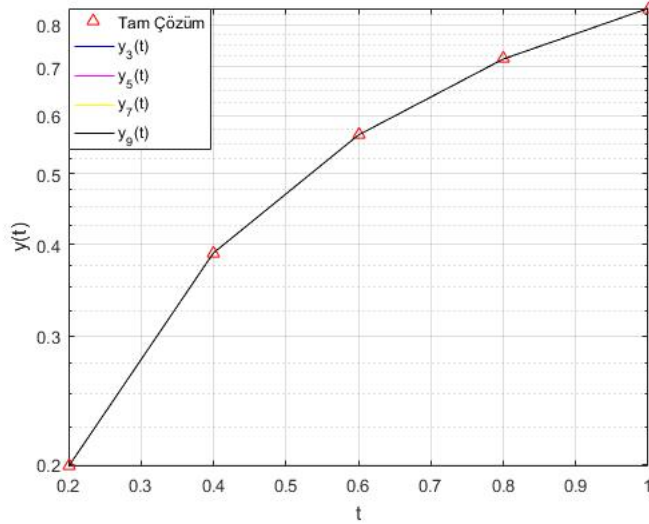
$$y_3(t) = 7.193215745891379e - 03t^5 + 1.549613152965645e - 03t^4 \\ - 1.673297371909519e - 01t^3 + 3.499482822511002e - 05t^2 + t,$$

$$e_3(t) = \sin(t) - t - 3.499482822511002e - 05t^2 + 1.673297371909519e - 01t^3 \\ - 1.549613152965645e - 03t^4 - 7.193215745891379e - 03t^5,$$

$$e_{3,5}(t) = -1.723188099806454e - 04t^7 - 5.534231937785477e - 05t^6 \\ + 1.190460287119906e - 03t^5 - 1.572688857006777e - 03t^4 \\ + 6.682316068551686e - 04t^3 - 3.544535563548970e - 05t^2,$$

$$E_{3,5}(t) = \sin(t) - t + 4.505247103796760e - 07t^2 + 1.666615055840967e - 01t^3 \\ + 2.307570404113182e - 05t^4 - 8.383676033011284e - 03t^5 \\ + 5.534231937785477e - 05t^6 + 1.723188099806454e - 04t^7.$$

Şekil 4.45'te, problemin tam çözümü olan $\sin(t)$ ve $N = 3, 5, 7, 9$ için elde edilen yaklaşık çözüm değerlerinin karşılaştırmaları grafik üzerinde sunulmuştur.



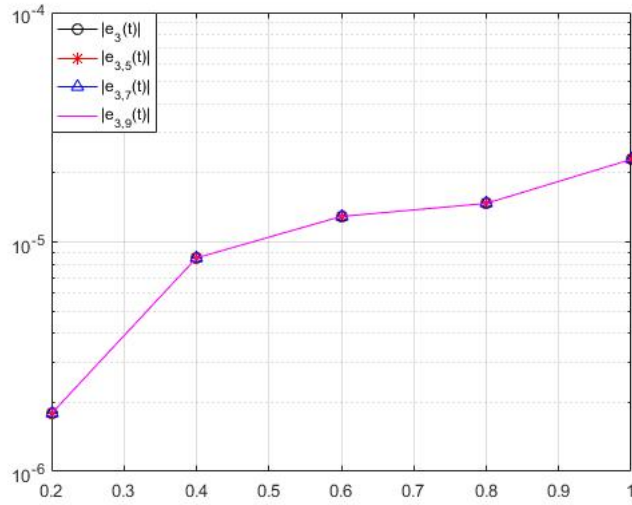
Şekil 4.45. Örnek 4.13'teki problem için elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözüm ile karşılaştırılması

Çizelge 4.17, sunulan yöntem ile elde edilen gerçek hata $|e_N(t)|$, tahmini mutlak hata $|\varepsilon_{N,K}(t)|$, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata $|E_{N,K}(t)|$ değerlerini karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.17. Örnek 4.13'teki problem için sunulan yöntem ile N ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata, tahmini hata ve iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması

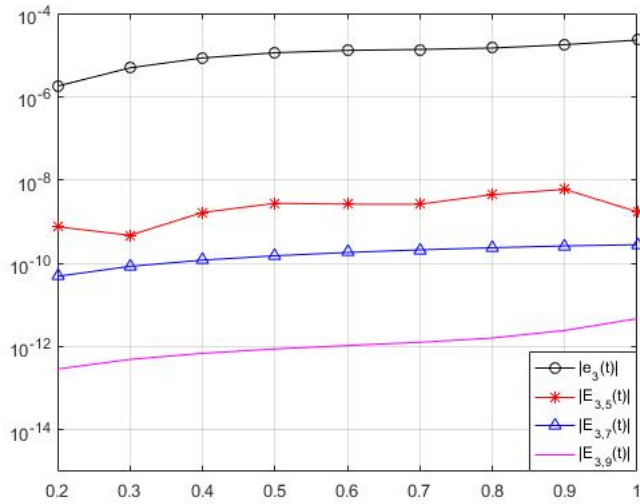
t_i	$ e_3(t_i) $	$ e_5(t_i) $	$ e_7(t_i) $	$ e_9(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	1.7877e-06	7.5322e-10	4.8702e-11	5.8009e-15
0.4	5.8175e-06	1.6551e-09	1.1912e-10	8.0436e-14
0.6	1.2924e-05	2.6291e-09	1.8234e-10	5.3945e-12
0.8	1.4725e-05	4.4727e-09	2.3692e-10	1.2391e-10
1.0	2.2898e-05	1.7198e-09	2.8409e-10	1.4228e-09
t_i	$ e_{3,5}(t_i) $	$ e_{5,7}(t_i) $	$ e_{7,9}(t_i) $	$ e_{9,11}(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	1.7869e-06	8.0192e-10	4.8988e-11	4.5426e-15
0.4	8.5160e-06	1.7743e-09	1.1918e-10	7.7731e-14
0.6	2.2922e-05	2.8114e-09	1.8338e-10	5.3902e-12
0.8	1.4721e-05	4.0790e-09	2.3826e-10	1.2391e-10
1.0	2.2897e-05	1.9991e-09	2.8568e-10	1.4228e-09
t_i	$ E_{3,5}(t_i) $	$ E_{5,7}(t_i) $	$ E_{7,9}(t_i) $	$ E_{9,11}(t_i) $
0	0	0	0	0
0.2	7.5322e-10	4.8703e-11	2.8566e-13	1.2768e-15
0.4	1.6551e-09	1.1912e-10	6.8079e-13	2.7000e-15
0.6	2.6291e-09	1.8230e-10	1.0358e-12	2.2744e-15
0.8	4.4727e-09	2.3633e-10	1.3384e-12	5.1625e-15
1.0	1.7198e-09	2.7937e-10	1.5928e-12	7.7716e-16

Şekil 4.46'da, $N = 3$ için hesaplanan gerçek hata değerleri ile $K = 5, 6$ ve 7 için elde edilen tahmini mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.46. Örnek 4.13'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

Şekil 4.47'de, $N = 3$ için elde edilen gerçek hata değerleri ile $K = 5, 7, 9$ için hesaplanan iyileştirilmiş çözümlere ait mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hata değerlerinin gerçek hata değerlerinden daha düşük olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.47. Örnek 4.13'teki problem için sunulan yöntem ile $N = 3$ ve K 'nin farklı değerleri için elde edilen gerçek hata ile iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

5. SONUÇLAR

Bu tezde, gecikmeli diferansiyel denklemler sınıfından olan multi-pantograph diferansiyel denklemleri, neutral diferansiyel denklemleri, birinci mertebeden pantograph diferansiyel denklemleri ve genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerinin çözümleri için Hermite polinomlarının kullanıldığı integrale dayalı bir kollokasyon yöntemi geliştirilmiştir. Yöntemin nasıl uygulanacağı tanıtılmıştır. Rezidüel fonksiyon kullanılarak hata tahmini tekniği uygulanmış ve çözümlerdeki gerçek ile tahmini hatalar tespit edilmiştir. Bu tahmini hatalar yardımıyla çözümler iyileştirilmiş ve iyileştirilmiş çözümlerin hata değerleri hesaplanmıştır. Yöntemin doğruluğunu ve uygulanabilirliğini göstermek amacıyla nümerik örneklerle yer verilmiş, elde edilen sonuçlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Nümerik örneklerden elde edilen bulgular, N yaklaşımın kesme sınırı artırıldığında yaklaşık çözümlerin tam çözüme daha da yaklaştığını ve hata değerlerinin azaldığını göstermektedir. Ancak, kesme sınırının aşırı artırılması durumunda bilgisayar işlem yükünün artacağı ve hesaplama hatalarının büyüyebileceği de göz önünde bulundurulmalıdır. Problemlerin $y(t)$ tam çözümleri polinom olduğunda, yöntemin kesme sınırı $N \geq \deg(y(t))$ seçildiğinde tam çözüme ulaşılabileceği anlaşılmaktadır. Sunulan yöntemin başarısını değerlendirmek için, elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut yöntemlerle karşılaştırılmış ve karşılaştırmalar çizelgeler aracılığıyla sunulmuştur. Çizelgelerin incelenmesi sonucunda, önerilen yöntemin literatürdeki diğer yöntemlere kıyasla daha etkin sonuçlar ürettiği, tam çözüme daha yakın değerler sağladığı ve hata değerlerinin daha düşük olduğu gözlemlenmektedir. Yöntemdeki yaklaşık çözümler, Matlab bilgisayar programında çalıştırılan kodlar yardımıyla hesaplanmıştır. Bu yöntemin farklı türde diferansiyel denklem sistemlerine de uyarlanabileceği ve bu sayede benzer matematiksel problemlere çözüm sunabileceği öngörülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M. 2015. Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 39(21): 6529-6542.
- Javadi, S., Babolian, E. and Taheri Z. 2016. Solving generalized pantograph equations by shifted orthonormal Bernstein polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 303: 1-14.
- Akgönüllü, N., Şahin, N. and Sezer, M. 2011. A Hermite collocation method for the approximate solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(6): 1707-1721.
- Kashem, B. E. and Shihab S. 2020. Approximate solution of Lane-Emden problem via modified Hermite operation matrix method. *Samarra Journal of Pure and Applied Science*, 2(2): 57-67.
- Secer, A., Özdemir, N. and Bayram, M. 2018. A Hermite polynomial approach for solving the SIR model of epidemics. *Mathematics*, 6(12): 305.
- Yüzbaşı Ş. and Savaşaneril, N. B. 2020. Hermite polynomial approach for solving singular perturbed delay differential equations. *Journal of Science and Arts*, 4(53): 845-854.
- Yüzbaşı, Ş. 2014. A collocation method based on the Bessel functions of the first kind for singular perturbed differential equations and residual correction. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(14).
- Yüzbaşı, Ş., Gök, E. and Sezer, M. 2015. Residual correction of the Hermite polynomial solutions of the generalized pantograph equations. *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(2): 118-125.
- Yalçınbaş, S., Aynigül M. and Sezer, M. 2011. A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *Journal of the Franklin Institute*, 348(6): 1128-1139.

- Sezer, M. and Daşcıoğlu, A.A. 2007. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1): 217 – 225
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-like approach to solve multi-pantograph type delay differential equations. *Filomat*, 32(2): 409–422.
- Sezer, M., Yalçınbaş, S. and Gülsu, M. 2012. A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogenous term. *International Journal of Computer Mathematics*, 85(7): 1055-1063.
- Muroya, Y., Ishiwata, E. and Brunner, H. 2003. On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 152: 347-366.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer M. 2013. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(22): 9160-9173.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Sezer, M. 2012. A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(4): 1105 - 1123.
- Sezer, M., Yalçınbaş, S. and Şahin, N. 2008. Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(2): 406-416.
- Akkaya, T., Yalçınbaş, S. and Sezer, M. 2013. Numeric solutions for the pantograph type delay differential equation using First Boubaker polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17): 9484–9492.
- Yu, Z. H. 2008. Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation. *Physics Letters A*, 372(43): 6475–6479.
- Işık, O. R., Güney, Z. and Sezer, M. 2012. Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation. *Journal of Difference Equations and Applications*, 18(3): 357-374.

- Ibis B. and Bayram, M. 2016. A new collocation method based on Euler polynomials for solution of generalized pantograph equations. *New Trends in Mathematical Science*, 4(4): 285-285.
- Khorshidi, M., N. and Firoozjaee, M. A. 2024. Legendre Ritz-Least squares method for the numerical solution of delay differential equations of the multi-pantograph type. *Mathematics and Computational Sciences*, 5(1): 20-29.
- Yüzbaşı, Ş. and Ismailov N. 2018. A Taylor operation method for solutions of generalized pantograph type delay differential equations. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(2): 395-406.
- Tohidi, E., Bhrawy, A.H. and Erfani, K. 2013. A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation. *Applied Mathematical Modelling*, 37(6): 4283-4294.
- Yüzbaşı, Ş. 2014. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 232: 1183-1199.
- Izadi, M., Yüzbaşı, Ş. and Ansari, K. J. 2021. Application of Vieta-Lucas series to solve a class of multi-pantograph delay differential equations with singularity. *Symmetry*, 13(12).
- Rao, G. P. and Palanisamy, K. R. 1982. Walsh stretch matrices and functional differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(1): 272-276.
- Hwang, C., and Shih, Y. P. 1982. Laguerre series solution of a functional differential equation. *International Journal of Systems Science*, 13(7): 783-788.
- Chen, X. and Wang, L. 2010. The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(8): 2696-2702.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Sezer, M. 2011. A Bessel polynomial approach for solving linear neutral delay differential equations with variable coefficients. *Journal of Advanced Research in Differential Equations*, 3(1): 81-101.

- Wang, W., Zhang, Y. and Li, S. 2009. Stability of continuous Runge–Kutta-type methods for nonlinear neutral delay-differential equations. *Applied Mathematical Modelling* 33(8): 3319–3329.
- Gümgüm, S., Savaşaneril, N. B., Kürkcü, Ö. K. and Sezer, M. 2020. Lucas Polynomial Solution for Neutral Differential Equations with Proportional Delays. *Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10(1): 259-269.
- Wang, W. and Li, S. 2007. On the one-leg θ -methods for solving nonlinear neutral functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 193(1): 285–301.
- Yüzbaşı, Ş., Tamar, M. E. 2023. A new approaching method for linear neutral delay differential equations by using Clique polynomials. *Turkish Journal of Mathematics*, 47(7): 2098-2121.
- Ockendon, J.R. and Tayler, A.B. 1971. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proceeding of the Royal Society of London A: Mathematical and Physical Sciences*, 322(1551): 447-468.
- Poetsch, G., Evans, J., Meisinger, R., Kortüm, W., Baldauf, W., Veitl, A., Wallaschek, J. 1997. Pantograph/catenary dynamics and control. *Vehicle System Dynamics*, 28: 159–195.
- Szegő, G. 1939. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, New York.
- Erbe, L.H., Kong, Q., and Zhang, B.G. 1995. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc. New York.
- Anonymous 1: <https://www.wabteccorp.com/trains-of-thought/still-electrifying-after-all-these-years-a-pantograph-appreciation> [Son erişim tarihi: 13.02.2025].
- Anonim 1: https://tr.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite [Son erişim tarihi: 13.02.2025].
- Anonymous 2: https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials [Son erişim tarihi: 19.04.2025].

Hamdin, H. A. M. B. 2020. On Some Relations between the Hermite Polynomials and Some Well-Known Classical Polynomials and the Hypergeometric Function. *Journal of Pure and Applied Sciences*, 19(5).

Yokuş, A. 2011. Bazı özel lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması. Doktora tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, 80 s.

Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. 2024. An approaching method based on integral for linear neutral delay differential equations by using Hermite polynomials. *International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields*, 37 (4). Doi: 10.1002/jnm.3266.

ÖZGEÇMİŞ

Özlem KARAAĞAÇLI

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2022-2025	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2018-2022	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2024). An approaching method based on integral for linear neutral delay differential equations by using Hermite polynomials. *International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields*, 37 (4). Doi: 10.1002/jnm.3266.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

- 1- Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2023). Dickson collocation method to solve first-order differential equations with variable delays. Proceedings Book of "The 6th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2023)", Paris, France, ISBN: 978-2-491766-01-6.
- 2- Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2023). Dickson collocation method to solve a model regarding pollution of a system of lakes. Proceedings Book of "The 7th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2024)", Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1131-7.

- 3-** Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2024). Collocation method for approximate solutions of mass-spring system with two freedom degrees. Proceedings Book of "7th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications", İstanbul, Türkiye, ISBN: 978-605-69387-5-7 (Özet yayımlandı).
- 4-** Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2024). Dickson collocation method for solving singularly perturbed differential equations. Proceedings Book of "8th International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians", İstanbul, Türkiye, ISBN: 978-605-67964-2-7.
- 5-** Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2024). Dickson collocation approach for solving logistic population model. Proceedings Book of "8th International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians", İstanbul, Türkiye, ISBN: 978-605-67964-2-7.
- 6-** Yüzbaşı, Ş. and Karaağaçlı, Ö. (2024). A collocation method based on integration for a single degree of freedom system. Proceedings Book of "The 35th International Conference of Jangjeon Mathematical Society", Seoul, South Korea, ISBN: 978-89-88615-16-4 (Özet yayımlandı).