

EYLÜL 2021

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

GÜLER ATAŞ

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ BAZI CEBİRSEL YAPILAR

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜLER ATAŞ
EYLÜL 2021

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ BAZI CEBİRSEL YAPILAR

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Güler ATAŞ

Eylül 2021

©2021[Güler ATAŞ]

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ BAZI CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

DÜZENLEME

başlıklı bu çalışma, **Güler ATAŞ** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'nde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet İshak YÜCE
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Bölüm Başkanı
Matematik

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Tez Danışmanı, Matematik

.....

Mezuniyet Tarihi: 15 Eylül 2021

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Necati OLGUN
Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Vakkas ULUÇAY
Matematik
Kilis 7 Aralık Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Güler ATAŞ

ABSTRACT

NEUTROSOPHIC TRIPLET SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

Güler ATAŞ

Msc. in Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Sembember 2021

60 pages

This thesis consists of five part chapters. In the first, fuzzy sets and the historical background of neutrosophic sets are mentioned in the introduction. The second guideline fuzzy set, intuitionistic fuzzy set, neutrosophic set which is an extended of the fuzzy set, monovalent neutrosophic set, interval valued neutrosophic set, and neutrosophic triplet set are given basic definitions and theorems. The third section is the study on the neutrosophic triplet ring and the neutrosophic triplet open development, while the fourth neutrosophic binary semi-group and the uncountable neutrosophic triplet groups are examined. In the last part, basic fundamentals, examples and theorems about advanced knowledge and applications of neutrosophic triplet topology are given.

Key Words: Neutrosophic Triplet Group, Neutrosophic Triplet Semi-Group, Neutrosophic Triplet Ring, Neutrosophic Triplet Field and Neutrosophic Triplet Topology.

ÖZET

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ BAZI CEBİRSEL YAPILAR

ATAŞ, Güler

Yüksek Lisans Tezi

Matematik

Danışman: Prof. Dr. Memet ŞAHİN

Eylül 2021

60 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde bulanık kümeler ve neutrosophic kümelerin tarihi sürecinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde bulanık küme, sezgisel bulanık küme, sezgisel küme kavramlarında bir üst genellemesi olan neutrosophic küme, tek değerli neutrosophic küme, aralık değerli neutrosophic kümelerle ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, neutrosophic üçlü halka ve neutrosophic üçlü cisim üzerine çalışma, dördüncü bölümde ise neutrosophic ikili yarı-grup ve sadeleştirilebilir (cancellable) neutrosophic üçlü gruplar incelenmiştir. Son bölümde neutrosophic üçlü topolojinin uygulamaları ile ilgili temel tanımlar, örnekler, teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Neutrosophic Üçlü Grup, Neutrosophic Üçlü Yarı-Grup, Neutrosophic Üçlü Halka, Neutrosophic Üçlü Cisim ve Neutrosophic Üçlü Topoloji.



"can m aileme"

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Memet ŞAHİN'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik anneme ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM I : GİRİŞ	1
BÖLÜM II : BULANIK ve NEUTROSOPHIC KÜMELER.....	3
2.1 Bulanık Küme Kavramı	3
2.2 Sezgisel Bulanık Kümeler.....	5
2. 3 Neutrosophic Kümeler	9
2. 4 Tek Değerli Neutrosophic Kümeler	10
2. 5 Aralık Değerli Neutrosophic Kümeler	13
2.6 Neutrosophic Üçlü kümeler	13
BÖLÜM III : NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ HALKA ve NEUTROSOPHIC.....	20
ÜÇLÜ CİSİM	20
3.1 Neutrosophic Üçlü Halkalar.....	20
3.2 İntegral Neutrosophic Üçlü Cisim ve Neutrosophic Üçlü Halka.....	
Homorfizması.....	27
3.3 Neutrosophic Üçlü Cisim.....	28
BÖLÜM IV : NEUTROSOPHIC İKİLİ YARI-GRUP ve.....	31
SADELEŞTİRİLEBİLİR (CANCELLABLE) NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ.....	31
GRUPLAR.....	31
4.1 Neutrosophic İkili Yarı Grup	31
4.2 Neutrosophic İkili Yarı Grubunun Yeni Özellikleri	31
4.3 Zayıf Neutrosophic İkili Küme ve Yarı Grup	36

4.4 Neutrosophic Üçlü Sadeleştirilebilir (Cancellable) Gruplar	39
4.5 BCI-Cebirlerinde Neutrosophic Üçlüler ve Zayıf Neutrosophic İkililer	42
BÖLÜM V : NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ TOPOLOJİNİN İLERİ TEORİSİ ve...	
UYGULAMALARI.....	44
5.1 Neutrosophic Üçlü Topoloji (NTT)	44
5. 2 Neutrosophic Üçlü Topolojisinin (NTT) Neutrosophic Üçlü Tabanı	47
5.3 Neutrosophic Üçlü Kümelerin Kapanışı	51
5.4 Neutrosophic Üçlü Kümelerin Alt Uzayı.....	53
BÖLÜM VI : SONUÇLAR	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ.....	60

SEMBOLLER LİSTESİ

μ_A	A kümesinin üyelik fonksiyonu
ν_A	A kümesinin üye olmama fonksiyonu
$\mu_A(x)$	A' da bir x elemanının üyelik derecesi
$\nu_A(x)$	A' da bir x elemanının üye olmama derecesi
$\pi_A(x)$	A' da bir x elemanının belirsizlik derecesi
INTF	integral neutrosophic üçlü cisim
UNTR	birim neutrosophic üçlü halka
T_K	K neutrosophic kümesinin doğruluk derecesi
I_K	K neutrosophic kümesinin yanlışlık derecesi
F_K	K neutrosophic kümesinin belirsizlik fonksiyonu
anti(a)	a' nın ters elemanı
neut(a)	a' nın etkisiz elemanı
NTF	neutrosophic üçlü alan
NTR	neutrosophic üçlü halka
NTT	neutrosophic üçlü topoloji

BÖLÜM I

GİRİŞ

Doğadaki ağaçlar ya da bir kütüphanedeki fizik kitapları kümesini klasik küme kavramlarıyla tanımlayabiliriz. Fakat günlük yaşamımızda birçok belirsizlikler vardır. Bir durumu açıklarken veya bir olayın karşısında karar verirken kesinlik içermeyen cümleler kullanabiliriz. Bir insanın yaş durumuna göre; yaşlı, orta yaşlı, genç, çok genç veya çok yaşlı diyebiliriz. Ya da güzel insanların topluluğu, 1' den çok büyük reel sayıların kümesi gibi belirsizlik veya kesin olmayan durumları açıklarken klasik küme kavramının yetersiz kaldığı görülmüştür. Belirsizliklerin üstesinden gelebilmek için, bulanık küme teorisi, 1965 yılında Lotfi A. Zadeh [1] tarafından tanıtılmıştır. Bulanık kümeler birçok uygulamada kullanılmasına rağmen belirsizlik durumlarını tam olarak açıklamamaktadır.

Sezgisel bulanık küme teorisi kavramı, 1986 yılında K. Atanassov [2] tarafından geliştirilmiştir. X evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren üyelik fonksiyonunun yanında yine X evrensel kümesinin elemanlarını $[0,1]$ aralığına götüren bir üye olmama derecesini sezgisel bulanık küme teorisiyle tanıtmıştır. Sezgisel bulanık küme teorisinde, X evrensel kümesindeki her bir elemanın üyelik fonksiyonları ile üye olmama fonksiyonlarının toplamı her zaman $[0,1]$ aralığında olmalıdır. Toplamının $[0,1]$ aralığında olmasından dolayı belirsizlik içeren problemleri modellemelerde sıkıntı yaşanmıştır. Smarandache [3], bu belirsizliğin üstesinden gelebilmek için 1999 yılında bulanık küme teorilerini ve sezgisel bulanık küme teorilerini kapsayan yeni bir küme olan neutrosophic küme kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Wang ve arkadaşları [4] tarafından neutrosophic küme kavramının özel hali olan tek değerli neutrosophic kümeler tanımlanmıştır. Tek değerli neutrosophic küme teorisi, birbirinden bağımsız olarak $[0,1]$ aralığında tanımlı üç fonksiyonla yani üyelik fonksiyonu yerine doğruluk fonksiyonu, üye olmama fonksiyonu yerine yanlışlık fonksiyonu ve son olarak belirsizlik fonksiyonu

kullanılmıştır. Buradaki doğruluk fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu $[0,1]$ aralığında birbirinden bağımsız olması, sezgisel bulanık kümelerde yapılan modellemelerden daha geniş ve daha gerçekçi olmasını sağlamıştır. Belirsizlik içeren birçok durumun modellenmesi için oldukça geniş bir alana sahip olan neutrosophic küme teorisi Kandasamy ve Smarandache [5] tarafından ortaya konulmuştur. Bununla beraber neutrosophic cebirsel yapıları ve neutrosophic üçlü küme teorilerini doğruluk, yanlışlık, belirsizlik durumları birbirinden bağımsız olarak tanımlamışlardır. Neutrosophic küme teorisi birçok bilimsel alana ve ayrıca cebirsel yapılara da uygulanır. Son zamanlarda, Smarandache ve Ali' de [6] ilk defa neutrosophic üçlü kümeler ve neutrosophic üçlü grup kavramlarını tanıttı. Yapısal özellikleri bakımından klasik gruptan tamamıyla farklıdır. 2017'de, Florentin Smarandache [7] neutrosophic üçlü yapıları, neutrosophic ikili yapıları ve neutrosophic çoklu yapıları içeren bir çalışma yaptı.

Tezin ilk bölümü olan giriş bölümünde, neutrosophic kümelerin tarihsel gelişimi ile ilgili genel bilgiler ve bu konuda yapılmış çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümünde, bulanık küme ve neutrosophic küme ile ilgili ve daha sonraki bölümler için gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, neutrosophic üçlü halka ve neutrosophic üçlü cisim ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde, neutrosophic üçlü yarı-grup ve sadeleştirilebilir (cancellable) üçlü yapılar verilmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise, neutrosophic üçlü topolojinin ileri teorisi ve uygulamaları verilmiştir. Altıncı bölüm olan sonuç bölümü ile tamamlanmıştır.

BÖLÜM II

BULANIK KÜMELER ve NEUTROSOPHIC KÜMELER

2.1 Bulanık Küme Kavramı

Bu bölüm [1], [2], [9], [13], [14], [15], [16] 'dan derlenmiştir.

Tanım 2.1.1:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x: x \in X\}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için, $\mu_A(x) \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$$

kümesine, X in **A bulanık kümesi** denir. Bir X kümesini, $\emptyset$ kümeyi ve A kümesi,

$$X = \{(x, 1): x \in X\}, \emptyset = \{(x, 0): x \in X\}, A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

şeklinde ifade edilir.

Uyarı 2.1.2:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrensel kümesi sonlu olduğunda X üzerinde A bulanık kümesinin gösterimi: $j = \{1, 2, \dots, n\}$ için $x_j \in X$ ise;

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n\}$$

$$A = \{\sum_{j=1}^n \mu_A(x_j) / x_j\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.3:

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için, $\mu_A(x) = 0$ ise A bulanık kümesi, **boş küme** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B \subseteq X$ bulanık iki küme olsun. $\forall x \in X$ için;

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \Leftrightarrow A = B$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.5:

$X = \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq X$ bulanık kümesinin tümleyeni $\bar{A}$ ile gösterilir ve

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.6:

$X = \emptyset$ bir küme ve $A, B \subseteq X$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için;

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

dir.

Tanım 2.1.7:

$\forall x \in X$ için A ile B iki bulanık küme olsun. İki bulanık kümenin birleşimi $C = A \cup B$ bulanık kümesi ile verilsin ve C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_C(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \},$$

kısaltılmış olarak

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.8:

$\forall x \in X$ için A ile B iki bulanık küme olsun. İki bulanık kümenin kesişimi $C = A \cap B$ bulanık kümesi ile verilsin ve C bulanık kümesinin üyelik fonksiyonları

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_C(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \},$$

kısaltılmış olarak

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

şeklindedir.

X' in bulanık kümedeki birleşim ve arakesit işlemlerindeki özellikler, klasik kümelerin birleşim ve arakesit işlemlerindeki özelliklerle, aşağıdaki iki özellik dışında aynıdır.

$$A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X$$

olmasına karşılık bulanık kümelerde,

$$A \cap A^c \neq \emptyset, A \cup A^c \neq X$$

olabilir.

Örnek 2.1.9:

$\forall x \in X$ için;

$$\mu_A(x) = \frac{1}{5}, \mu_{A^c}(x) = \frac{4}{5}$$

$$\mu_{A \cap A^c} = \min \{ \mu_A(x), \mu_{A^c}(x) \} = \min \left\{ \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right\} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow A \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\mu_{A \cup A^c} = \max \{ \mu_A(x), \mu_{A^c}(x) \} = \max \left\{ \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right\} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow A \cup A^c \neq X.$$

2.2 Sezgisel Bulanık Kümeler

Bu bölümde sezgisel bulanık küme kavramı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Bu bölüm [2], [10], [11]'den derlenmiştir.

Tanım 2.2.1:

$X \neq \emptyset$ evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X$ için, $0 \leq \mu_A(x) + \vartheta_A(x) \leq 1$ olmak üzere,

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1] \text{ ve } \vartheta_A: X \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonları ile **sezgisel küme**

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \vartheta_A(x) \rangle : x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan μ_A ve ϑ_A sırasıyla $\forall x \in X$ 'in üyelik derecesi ve üye olmama derecesidir.

Uyarı 2.2.2:

X evrensel kümesi üzerinde A sezgisel bulanık kümesi: $\forall x \in X$ için;

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \vartheta_A(x) \rangle \} \text{ veya } A = \langle \mu_A(x), \vartheta_A(x) \rangle / x$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.2.3:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrensel kümesi sonlu olduğunda, X üzerindeki sezgisel bulanık bir A kümesinin gösterimi: $x_i \in X$ için;

$$A = \sum_{j=1}^n \langle x_j, \mu_A(x_j), \vartheta_A(x_j) \rangle$$

şeklinde ifade edilebilir.

Uyarı 2.2.4:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrensel kümesi sonlu olduğunda, X üzerindeki sezgisel bulanık bir A kümesinin gösterimi $x_i \in X$ için;

$$A = \langle \mu_A(x_1), \vartheta_A(x_1) \rangle / x_1 + \langle \mu_A(x_2), \vartheta_A(x_2) \rangle / x_2 + \dots + \langle \mu_A(x_n), \vartheta_A(x_n) \rangle / x_n$$

$$A = \sum_{j=1}^n \langle \mu_A(x_j), \vartheta_A(x_j) \rangle / x_j$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.2.5:

X boş kümeden farklı evrensel küme üzerinde

$A = \{ \langle \mu_A(x_j), \vartheta_A(x_j) \rangle : x \in X \}$ sezgisel bulanık küme verildiğinde A ' da bir x elemanının **üyelik belirsizlik fonksiyonu** aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\pi_{A(x)} = 1 - \mu_A(x) - \vartheta_A(x)$$

dir.

Tanım 2.2.6:

A sezgisel bulanık kümesinin tümleyeni A^c ile gösterilir ve

$$A^c = \{ \langle x, \vartheta_A(x), \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7:

B sezgisel bulanık kümesinin, A sezgisel bulanık kümesini kapsaması:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X$ için;

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } \vartheta_A(x) \geq \vartheta_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8:

A ile B sezgisel bulanık kümelerinin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve

$$A \cup B = \{ \langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \vartheta_A(x) \wedge \vartheta_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9:

A ile B sezgisel bulanık kümelerinin kesişimi $A \cap B$ ile gösterilir ve

$$A \cap B = \{ \langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \vartheta_A(x) \vee \vartheta_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.10:

A ile B sezgisel bulanık kümelerinin eşitliği $A = B$ ile gösterilsin ve

$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X$ için;

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ ve } \vartheta_A(x) = \vartheta_B(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.11

A ve B sezgisel bulanık kümelerinin toplamı $A + B$ ile gösterilir ve

$$A + B = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \vartheta_A(x) \cdot \vartheta_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

Tanım 2.2.12:

A ve B sezgisel bulanık kümelerinin çarpımı $A \cdot B$ ile gösterilir ve

$$A \cdot B = \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \vartheta_A(x) + \vartheta_B(x) - \vartheta_A(x) \cdot \vartheta_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.13:

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde

$$A = \langle x_1, 0.4, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.2, 0.3 \rangle + \langle x_3, 0.2, 0.2 \rangle,$$

$$B = \langle x_1, 0.1, 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.2, 0.6 \rangle + \langle x_3, 0.1, 0.5 \rangle$$

sezgisel bulanık iki küme olsun. A^c , $A \cup B$, $A \cap B$, $A+B$, $A.B$ değerlerini hesaplayalım.

$$A^c = \{ \langle x, \mu_A(x), \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$A^c = \langle x_1, 0.5, 0.4 \rangle + \langle x_2, 0.3, 0.2 \rangle + \langle x_3, 0.2, 0.2 \rangle \text{ dir.}$$

$$A \cup B = \{ \langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \langle x_1, 0.4 \vee 0.1, 0.5 \wedge 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.2 \vee 0.2, 0.3 \wedge 0.6 \rangle + \langle x_3, 0.2 \vee 0.1, 0.2 \wedge 0.5 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.4, 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.2, 0.3 \rangle + \langle x_3, 0.2, 0.2 \rangle \end{aligned}$$

dir.

$$A \cap B = \{ \langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$\begin{aligned} &= \langle x_1, 0.4 \wedge 0.1, 0.5 \vee 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.2 \wedge 0.2, 0.3 \vee 0.6 \rangle + \langle x_3, 0.2 \wedge 0.1, 0.2 \vee 0.5 \rangle \\ &= \langle x_1, 0.1, 0.5 \rangle + \langle x_2, 0.2, 0.6 \rangle + \langle x_3, 0.1, 0.5 \rangle \end{aligned}$$

dir.

$$A + B = \{ \langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \vartheta_A(x) \cdot \vartheta_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$= \langle x_1, 0.4 + 0.1 - 0.5 \times 0.2, 0.5 \times 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.2 + 0.2 - 0.3 \times 0.6, 0.3 \times 0.6 \rangle +$$

$$\langle x_3, 0.2 + 0.1 - 0.2 \times 0.5, 0.2 \times 0.5 \rangle$$

$$= \langle x_1, 0.4, 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.22, 0.18 \rangle + \langle x_3, 0.2, 0.1 \rangle$$

dir.

$$A.B = \{ \langle x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \vartheta_A(x) + \vartheta_B(x) - \vartheta_A(x) \cdot \vartheta_B(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$= \langle x_1, 0.4 \times 0.1, 0.5 + 0.2 - 0.5 \times 0.2 \rangle + \langle x_2, 0.2 \times 0.2, 0.3 + 0.6 - 0.3 \times 0.6 \rangle +$$

$$\langle x_3, 0.2 \times 0.1, 0.2 + 0.5 - 0.2 \times 0.5 \rangle$$

$$= \langle x_1, 0.04, 0.6 \rangle + \langle x_2, 0.04, 0.72 \rangle + \langle x_3, 0.02, 0.6 \rangle$$

dir.

2.3 Neutrosophic Kümeler

Bu bölüm [3], [4], [6], [12], [13], [14], [15], [16] ‘dan derlenmiştir.

Tanım 2.3.1:

X evrensel bir küme ve $x \in X$ olsun. X üzerinde K neutrosophic kümesi, bir T_K doğruluk fonksiyonundan, bir I_K belirsizlik fonksiyonundan ve bir F_K yanlışlık fonksiyonundan karakterize edilir. $T_K(x)$, $I_K(x)$ ve $F_K(x)$ $]0,1[$ aralığının alt kümesidir. Öyle ki $T_K: X \rightarrow]0,1[$ ve $F_K: X \rightarrow]0,1[$, dir. Böylece $T_K(x)$, $I_K(x)$ ve $F_K(x)$ ’ in toplamı

$$0 \leq \sup T_K(x) + \sup I_K(x) + \sup F_K(x) \leq 3$$

dir.

Tanım 2.3.2

Her $x \in X$ için K neutrosophic kümesinin tümleyeni $c(K)$ ile gösterilir ve $c(K)$ neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, belirsizlik fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_{c(K)}(x) = \{1\} - T_K(x)$$

$$I_{c(K)}(x) = \{1\} - I_K(x)$$

$$F_{c(K)}(x) = \{1\} - F_K(x)$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.3

Her $x \in X$ için L neutrosophic kümesinin, K neutrosophic kümesini kapsaması:

$$K \subseteq L \Leftrightarrow \inf T_K(x) \leq \inf T_L(x), \sup T_K(x) \leq \sup T_L(x)$$

$$\inf I_K(x) \geq \inf I_L(x), \sup I_K(x) \geq \sup I_L(x)$$

$$\inf F_K(x) \leq \inf F_L(x), \sup F_K(x) \leq \sup F_L(x)$$

dir.

Tanım 2.3.4

Her $x \in X$ için K ile L neutrosophic kümelerinin birleşimi M neutrosophic kümesi $M = K \cup L$ ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_M(x) = T_K(x) + T_L(x) - T_K(x) \cdot T_L(x)$$

$$I_M(x) = I_K(x) + I_L(x) - I_K(x) \cdot I_L(x)$$

$$F_M(x) = F_K(x) + F_L(x) - F_K(x) \cdot F_L(x)$$

dir.

Tanım 2.3.5

Her $x \in X$ için K ile L neutrosophic kümelerinin kesişimi M neutrosophic kümesi $M = K \cap L$ ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, belirsizlik fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_M(x) = T_K(x) \cdot T_L(x)$$

$$I_M(x) = I_K(x) \cdot I_L(x)$$

$$F_M(x) = F_K(x) \cdot F_L(x)$$

dir.

2. 4 Tek Değerli Neutrosophic Kümeler

Tanım 2.4.1

X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X, 0 \leq \sup T_K(x) + \sup I_K(x) + \sup F_K(x) \leq 3$ olmak üzere, $T_K : X \rightarrow [0, 1]$, $I_K : X \rightarrow [0, 1]$ ve $F_K : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonları ile X üzerinde bir K **tek değerli neutrosophic küme**

$K = \{ \langle x, T_K(x), I_K(x), F_K(x) \rangle \mid x \in X \}$ ile tanımlanır. Burada $T_K(x)$, $I_K(x)$, $F_K(x)$ sırasıyla $x \in X$ ' in doğruluk, belirsizlik ve yanlışlık üyelik fonksiyonudur.

Tanım 2.4.2

X evrensel kümesi sonlu olduğunda, bu küme üzerinde K tek değerli neutrosophic küme: $x_j \in X$ için;

$$K = \sum_{j=1}^n \langle T_K(x_j), I_K(x_j), F_K(x_j) \rangle / x_j$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanım 2.4.3

K tek değerli neutrosophic kümesinin $x \in X$ üzerinde sürekli olması durumunda kümenin gösterimi:

$$A = \int_{j=1}^n \langle T_K(x_j), I_K(x_j), F_K(x_j) \rangle / x$$

şeklinde olacaktır.

Tanım 2.4.4

Her $x \in X$ için K tek değerli neutrosophic kümesinin tümleyeni $c(K)$ ile gösterilir ve $c(K)$ tek değerli neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, belirsizlik fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_{c(K)}(x) = F_K(x)$$

$$I_{c(K)}(x) = 1 - I_K(x)$$

$$F_{c(K)}(x) = T_K(x)$$

dir.

Örnek 2.4.5

X üzerinde bir K tek değerli neutrosophic kümesi

$$K = \langle 0.3, 0.4, 0.5 \rangle / x_1 + \langle 0.5, 0.2, 0.3 \rangle / x_2 + \langle 0.7, 0.2, 0.2 \rangle / x_3$$

ve X üzerinde bir L tek değerli neutrosophic kümesi

$$L = \langle 0.6, 0.1, 0.2 \rangle / x_1 + \langle 0.3, 0.2, 0.6 \rangle / x_2 + \langle 0.4, 0.1, 0.5 \rangle / x_3 \text{ verilmiş olsun.}$$

K tek değerli neutrosophic kümesinin tümleyeni;

$$x_1 \text{ elemanı için; } T_{c(K)}(x) = F_K(x) = 0.5,$$

$$I_{c(K)}(x) = 1 - I_K(x) = 1 - 0.6 = 0.4 \text{ ve } F_{c(K)}(x) = T_K(x) = 0.3$$

$$x_2 \text{ elemanı için; } T_{c(K)}(x) = F_K(x) = 0.3,$$

$$I_{c(K)}(x) = 1 - I_K(x) = 1 - 0.2 = 0.8 \text{ ve } F_{c(K)}(x) = T_K(x) = 0.5$$

$$x_3 \text{ elemanı için; } T_{c(K)}(x) = F_K(x) = 0.2,$$

$$I_{c(K)}(x) = 1 - I_K(x) = 1 - 0.2 = 0.8 \text{ ve } F_{c(K)}(x) = T_K(x) = 0.7.$$

Dolayısıyla

$$c(K) = \langle 0.5, 0.6, 0.3 \rangle / x_1 + \langle 0.3, 0.8, 0.5 \rangle / x_2 + \langle 0.2, 0.8, 0.7 \rangle / x_3$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.6

Her $x \in X$ için L tek değerli neutrosophic kümesinin, K tek değerli neutrosophic kümesini kapsaması:

$$K \subseteq L \Leftrightarrow T_K(x) \leq T_L(x)$$

$$I_K(x) \leq I_L(x)$$

$$F_K(x) \geq F_L(x)$$

dir.

Tanım 2.4.7

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümesinin eşitliği $K = L$ ile gösterilir ve

$$K \subseteq L \text{ ve } L \subseteq K \Leftrightarrow K = L \text{ ve } T_K = T_L, I_K = I_L, F_K = F_L$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4.8

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin birleşimi M tek değerli neutrosophic kümesi $M = K \cup L$ ile gösterilir ve M tek değerli neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, belirsizlik fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_M(x) = \max\{T_K(x), T_L(x)\}$$

$$I_M(x) = \max\{I_K(x), I_L(x)\}$$

$$F_M(x) = \min\{F_K(x), F_L(x)\}$$

dir.

Örnek 2.4.9

2.4.5' deki örnekte K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin birleşimi

$$K \cup L = \langle 0.6, 0.4, 0.2 \rangle_{x_1} + \langle 0.5, 0.8, 0.3 \rangle_{x_2} + \langle 0.7, 0.2, 0.2 \rangle_{x_3}$$

dir.

Tanım 2.4.10

Her $x \in X$ için K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin kesişimi M tek değerli neutrosophic kümesi $M = K \cap L$ ile gösterilir ve M neutrosophic kümesinin doğruluk fonksiyonu, kararsızlık fonksiyonu ve yanlışlık fonksiyonu

$$T_M(x) = \min\{T_K(x), T_L(x)\}$$

$$I_M(x) = \min\{I_K(x), I_L(x)\}$$

$$F_M(x) = \max\{F_K(x), F_L(x)\}$$

dir.

Örnek 2.4.11

Örnek 2.4.5 'deki K ile L tek değerli neutrosophic kümelerinin kesişimi

$$K \cap L = \langle 0.3, 0.4, 0.5 \rangle / x_1 + \langle 0.3, 0.2, 0.6 \rangle / x_2 + \langle 0.4, 0.1, 0.5 \rangle / x_3$$

dir.

2. 5 Aralık Değerli Neutrosophic Kümeler

Tanım 2.5.1

X evrensel bir küme olsun. $\forall x \in X, 0 \leq \sup T_K(x) + \sup I_K(x) + \sup F_K(x) \leq 3$

Olmak üzere,

$$T_K(x) = [\inf T_K(x), \sup T_K(x)],$$

$$I_K(x) = [\inf I_K(x), \sup I_K(x)],$$

$$F_K(x) = \min\{F_K(x), T_L(x)\}$$

Fonksiyonları ile X üzerinde bir K aralık değerli neutrosophic küme

$$K = \{ \langle x, T_K(x), I_K(x), F_K(x) \rangle \mid x \in X \}$$

dir.

Sonuç:

Sadece [0, 1] 'in alt birim aralığı değerlendirilir ve bu alt birim aralık neutrosophic kümenin bir alt aralığıdır. Dolayısıyla tüm aralık değerli neutrosophic kümeler, neutrosophic kümelerdir.

2.6 Neutrosophic Üçlü kümeler

Tanım 2.6.1

N herhangi bir küme ve * bir ikili işlem olsun. Eğer, N kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa (N, *) kümesine, **neutrosophic üçlü küme** denir.

$$\forall a \in N \text{ için;}$$

- i) $a * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a) * a = a$ olacak şekilde bir $\text{etkisiz}(a)$ elemanı vardır.
- ii) $a * \text{ters}(a) = \text{ters}(a) * a = \text{etkisiz}(a)$ olacak şekilde bir $\text{ters}(a)$ elemanı vardır.

Burada $\text{ters}(a)$ ve $\text{etkisiz}(a)$ elemanları, N kümesine aittir.

Ayrıca bir $a \in N$ için neutrosophic üçlü $(a, \text{etkisiz}(a), \text{ters}(a))$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6.2

$(N, *)$ neutrosophic üçlü bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(N, *)$ **neutrosophic üçlü grup** olarak adlandırılır.

$(N, *)$ iyi tanımlanmışsa yani,

- i) $\forall a, b \in N$ için $a * b \in N$ 'dir.
- ii) $\forall a, b, c \in N$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ olur.

Tanım 2.6.3

$(N, *)$ neutrosophic üçlü grup olsun.

N , **değişmeli neutrosophic üçlü gruptur** $\Leftrightarrow \forall a, b \in N$ için $a * b = b * a$ 'dır.

Önerme 2.6.4

$(N, *)$ neutrosophic üçlü bir grup olsun. O zaman

$\forall a, b \in N$ için;

- (1) $a * b = a * c \Leftrightarrow \text{etkisiz}(a) * b = \text{etkisiz}(a) * c$
- (2) $b * a = c * a \Leftrightarrow b * \text{etkisiz}(a) = c * \text{etkisiz}(a)$
- (3) $Eğerters(a) * b = \text{ters}(a) * c \Rightarrow \text{etkisiz}(a) * b = \text{etkisiz}(a) * c$
- (4) $Eğer b * \text{ters}(a) = c * \text{ters}(a) \Rightarrow b * \text{etkisiz}(a) = c * \text{etkisiz}(a)$

sağlanır.

İspat:

1) $a * b = a * c$ olduğunu varsayalım. $*$ işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise $\text{ters}(a) \in N$ vardır.

$$\text{ters}(a) * a * b = \text{ters}(a) * a * c = [\text{ters}(a) * a] * b =$$

$$[\text{ters}(a) * a] * c = \text{etkisiz}(a) * b = \text{etkisiz}(a) * c$$

Diğer taraftan, $\text{etkisiz}(a)*b = \text{etkisiz}(a)*c$ olsun.

$$a*\text{etkisiz}(a)*b = a*\text{etkisiz}(a)*c = [a*\text{etkisiz}(a)] * b =$$

$$[a*\text{etkisiz}(a)] * c = a*b = a*c \text{ 'dir.}$$

2) $b*a = c*a$ olduğunu varsayalım. $*$ işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise $\text{ters}(a) \in N$ vardır.

$$b*a*\text{ters}(a) = c*a*\text{ters}(a) = b*[a*\text{ters}(a)] =$$

$$c*[a*\text{ters}(a)] = b*\text{etkisiz}(a) = c*\text{etkisiz}(a) \text{ 'dir.}$$

3) $\text{ters}(a)*b = \text{ters}(a)*c$ olduğunu varsayalım. $*$ işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise $a \in N$ vardır.

$$a*\text{ters}(a)*b = a*\text{ters}(a)*c = [a*\text{ters}(a)] * b =$$

$$[a*\text{ters}(a)] * c = \text{etkisiz}(a)*b = \text{etkisiz}(a)*c \text{ 'dir.}$$

4) $b*\text{ters}(a) = c*\text{ters}(a)$ olduğunu varsayalım. $*$ işlemine göre N neutrosophic üçlü bir grup ise $a \in N$ vardır.

$$b*\text{ters}(a)*a = c*\text{ters}(a)*a = b*[\text{ters}(a)*a] =$$

$$c*[\text{ters}(a)*a] = b*\text{etkisiz}(a) = c*\text{etkisiz}(a)$$

elde edilir.

Teorem 2.6.5

$(N, *)$ neutrosophic üçlü bir grup ve $*$ bir ikili işlem olsun.

$\forall a, b \in N$ için;

i) $\text{etkisiz}(a)*\text{etkisiz}(b) = \text{etkisiz}(a*b)$

ii) $\text{ters}(a)*\text{ters}(b) = \text{ters}(a*b)$

sağlanır.

İspat:

(i) İlk önce eşitliğin sol tarafını düşünelim.

$$a * \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) * b = [a * \text{etkisiz}(a)] * [\text{etkisiz}(b) * b] = a * b \text{ dir.}$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafını düşünelim.

$$a * \text{etkisiz}(a * b) * b = [a * b] * [\text{etkisiz}(a * b)] = a * b \text{ 'dir.}$$

(ii) İlk önce eşitliğin sol tarafını düşünelim. (i) teoremi ve * birleşme Özelliğini kullanarak,

$$a * \text{ters}(a) * \text{ters}(b) * b = [a * \text{ters}(a)] * [\text{ters}(b) * b] = \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) = \text{etkisiz}(a * b).$$

Şimdi de eşitliğin sağ tarafını düşünelim.

$$a * \text{ters}(a * b) * b = [a * b] * [\text{ters}(a * b)] = \text{etkisiz}(a * b)$$

elde edilir.

Teorem 2.6.6

$(N, *)$ neutrosophic üçlü bir grup ve * bir ikili işlem olsun.

O halde $\forall a \in N$ için;

$$\text{i) } \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$$

$$\text{ii) } \text{ters}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a) * \text{ters}(a) = \text{ters}(a)$$

dir.

İspat:

$$\text{(i) } a * \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = a * \text{etkisiz}(a) = [a * \text{etkisiz}(a)] * \text{etkisiz}(a) =$$

$$[a * \text{etkisiz}(a)] = a * \text{etkisiz}(a) = a$$

$$a = a \text{ olur.}$$

Genel olarak sıfırdan farklı pozitif bir n tamsayısı için;

$$(\text{etkisiz}(a))^n = \text{etkisiz}(a).$$

$$\text{(ii) } a * \text{etkisiz}(a) * \text{ters}(a) = a * \text{ters}(a) =$$

$$[a * \text{etkisiz}(a)] * \text{ters}(a) = a * \text{ters}(a) =$$

$$a * \text{ters}(a) = \text{etkisiz}(a) \text{ 'dir. Buradan,}$$

$$\text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$$

olur. Benzerşekilde,

$$a * \text{ters}(a) * \text{etkisiz}(a) = a * \text{ters}(a) = [a * \text{ters}(a)] * \text{etkisiz}(a) = a * \text{ters}(a) =$$

$$\text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a) \text{ olur.}$$

Teorem 2.6.7

$(N, *)$ neutrosophic üçlü küme ve S kümesi N 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $(S, *)$ bir neutrosophic üçlü bir küme o zaman **S neutrosophic üçlü kümenin bir alt kümesidir.**

Teorem 2.6.8

$(N, *)$ neutrosophic üçlü grup olsun. $a \in N$ için;

$$(i) \text{ etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = \text{etkisiz}(a)$$

$$(ii) \text{ ters}(\text{etkisiz}(a)) = \text{etkisiz}(a)$$

$$(iii) \text{ ters}(\text{ters}(a)) = a$$

$$(iv) \text{ etkisiz}(\text{ters}(a)) = \text{etkisiz}(a)$$

İspat:

(i) Neutrosophic üçlü küme tanımı tarafından dolayı, $\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = \text{etkisiz}(a)$ yazılır. Buradan,

$$a * \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = a * \text{etkisiz}(a)$$

$$[a * \text{etkisiz}(a)] * \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = [a * \text{etkisiz}(a)]$$

$$a * \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = a$$

olur. Böylece neutrosophic üçlü küme tanımı tarafından

$$\text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = \text{etkisiz}(a) \text{ yazılır.}$$

(ii) i kullanılırsa, $\text{etkisiz}(a) = b$ olacak şekilde $b \in N$ vardır. O zaman $\text{etkisiz}(a) = b$ ise i' den $\text{etkisiz}(b) = b$ yazılır. $\text{etkisiz}(b) = b$ ise

$\text{etkisiz}(b) = \text{ters}(b)$ 'dir. Buradan,

$$\text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = \text{etkisiz}(\text{ters}(a)) = \text{etkisiz}(a) \text{ 'dır.}$$

(iii) Neutrosophic üçlü küme tanımındaki $a * \text{ters}(a) = \text{ters}(a) * a = \text{etkisiz}(a)$ ifadesinden dolayı $\text{ters}(\text{ters}(a) * \text{ters}(a)) = \text{ters}(a) * \text{ters}(\text{ters}(a)) = \text{etkisiz}(a)$ yazılır.

Buradan eşitliğin sağlanabilmesi için neutrosophic üçlü küme tanımından $\text{ters}(\text{ters}(a)) = a$ 'dır.

(iv) Neutrosophic üçlü küme tanımındaki $a * etkisiz(a) = etkisiz(a) * a = a$ ifadesinden dolayı

$ters(a) * etkisiz(ters(a)) = etkisiz(ters(a)) * ters(a) = ters(a)$ yazılır. Buradan

$$a * ters(a) * etkisiz(ters(a)) = a * ters(a)$$

$$[a * ters(a)] * etkisiz(ters(a)) = [a * ters(a)]$$

$$etkisiz(a) * etkisiz(ters(a)) = etkisiz(a).$$

Buradan Önerme 2.6.4 kullanılarak,

$$a * etkisiz(a) * etkisiz(ters(a)) = a * etkisiz(a)$$

$$[a * etkisiz(a)] * etkisiz(ters(a)) = [a * etkisiz(a)]$$

$$a * etkisiz(ters(a)) = a$$

olur. Burada eşitliğin sağlanabilmesi için, neutrosophic üçlü küme tanımından dolayı $etkisiz(ters(a)) = etkisiz(a)$ 'dır.

2.7 BCI-Cebirleri

Tanım 2.7.1

BCI-cebiri, aşağıdaki aksiyomların bulunduğu $(2, 0)$ tipinde bir cebirdir $(X \rightarrow 1)$ tatmin edici:

$$(i) (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1,$$

$$(ii) x \rightarrow x = 1,$$

$$(iii) 1 \rightarrow x = x,$$

$$(iv) x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1 \text{ ise } x = y.$$

Herhangi bir BCI cebirinde $(X \rightarrow 1)$, $x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1$ ise bir $\leq$ bağıntısı tanımlanabilir. $\leq$, X üzerindeki kısmi bir kuraldır.

Tanım 2.7.2

$(X \rightarrow 1)$ bir BCI-cebiri olsun. $\{x \mid x \leq 1\}$ kümesi, X ' in p -radikali olarak adlandırılır. Bir BCI-cebiri X , p -radikali $\{1\}$ 'e eşitse, **p -yarı-basit cebir** olarak adlandırılır.

Tanım 2.7.3

Bir BCI-cebiri $(X; \rightarrow, 1)$ ilişkisel olarak adlandırılırsa, $\forall x, y, z \in X$ için,

$$(x \rightarrow y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z) \text{ olur.}$$

Önerme 2.7.4

$(X \rightarrow 1)$ bir BCI cebiri olsun. O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir:

- (i) X birleştirme özelliğini sağlar.
- (ii) $\forall x \in X$ için $x \rightarrow 1 = x$.
- (iii) $\forall x, y \in X$ için $x \rightarrow y = y \rightarrow x$.

Önerme 2.7.5

$(X; +, -, 1)$ bir Abel grubu olsun. $(X; \leq, \rightarrow, 1)$ tanımından dolayı

$\forall x, y \in X$ için $x \rightarrow y = -x + y$, $x \leq y \Leftrightarrow -x + y = 1$ olur.

O halde, $(X; \leq, \rightarrow, 1)$ bir BCI cebiridir.

BÖLÜM III

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ HALKA ve NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ CİSİM

Bu bölüm [3], [5], [6], [8], [17], [19]' dan düzenlenmiştir.

3.1 Neutrosophic Üçlü Halkalar

Tanım 3.1.1

$*$ ve $\#$ ikili işlem ile birlikte $(NTR, *, \#)$ bir küme olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanırsa NTR 'ye **neutrosophic üçlü halka** denir:

1. $*$ işlemine göre $(NTR, *)$ değişmeli neutrosophic üçlü gruptur.
2. $(NTR, \#)$ iyi tanımlı ve birleşmelidir.
3. $\forall a, b, c \in NTR$ için $a\#(b * c) = (a\# b)* (a\# c)$ ve $(b* c)\# a = (b\# a)* (c\# a)$

dır.

Tanım 3.1.2

Neutrosophic üçlü halka ve neutrosophic üçlü cisim, herhangi bir karışıklığı önlemek için $*$ ve $\#$ ile verilmiş cebirsel yapılar olduğundan, aşağıdaki gösterimi kullanıyoruz:

$*$ ve $\#$ elemanlarının nötrleri ve tersleri için sırasıyla etkisiz $^*(x)$, ters $^*(x)^*$ ve etkisiz $^\#(x)$, ters $^\#(x)$ olur.

Not 3.1.3

Genel olarak neutrosophic üçlü halka, klasik bir halka değildir.

Tanım 3.1.4

$(NTR, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halka olsun. $\forall a \in NTR$ elemanı için etkisiz $^\#(a)$ varsa **birimli neutrosophic üçlü halka (UNTR)** diye adlandırılır.

Tanım 3.1.5

(NTR, *, #) bir neutrosophic üçlü halka olsun. # değişmeli ise NTR' ye **değişmeli neutrosophic üçlü halka** olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.6

Z_6 çarpma modülü altında 6' ya göre, $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi olsun.

Daha sonra 2 elemanını ele alalım. Neutrosophic üçlü oluşturur mu inceleyelim. etkisiz(2) = 4 $\neq$ 1, $2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \equiv 2 \pmod{6}$ olur. Ayrıca ters(2) = 2 olur. Çünkü $2 \times 2 = 4$ 'tür. Böylece (2, 4, 2) neutrosophic bir üçlüdür.

Benzer şekilde 4, neutrosophic bir üçlü oluşturur. Çünkü etkisiz(4) = ters(4) = 4. Yani (4, 4, 4) neutrosophic bir üçlüdür.

3 elemanı incelersek, neutrosophic üçlü olan (3, 3, 3) 'lü kümeyi oluşturur. 3' ün iki nötr elemanı vardır: etkisiz(3) = {3, 5}. Ancak 3, etkisiz(3) = 5 için bir neutrosophic üçlü oluşturmaz. Çünkü ters(3), Z_6 kümesi içinde bulunmaz.

Son olarak 0 için, etkisiz(0) = ters(0) = 0 olarak sıfır neutrosophic üçlü oluşturur. Sıfır neutrosophic üçlü (0, 0, 0) ile gösterilir.

Çarpma modülü 6 altındaki Z_6 'ya göre klasik birim elemanı 1'dir. Z_6 'daki neutrosophic üçlüler:

(0, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 0, 3), (0, 0, 4), (2, 4, 2), (3, 3, 3) ve (4, 4, 4).

Z_6 'daki elemanlar 1 ve 5 ile ilişkili neutrosophic üçlü olmadığından bir neutrosophic üçlü küme değildir. Çünkü etkisiz(1) $\neq$ 1 ve etkisiz(5) $\neq$ 1 yoktur.

Ancak $M_6 = \{0, 2, 3, 4\} \subset Z_6$, değişmeli bir neutrosophic gruptur.

Örnek 3.1.7

'nin $a \# b = 3ab \pmod{10}$ olarak tanımlandığı ($Z_{10}, \#$) seçeneğini düşünün. $M_{10} = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\} \subset Z_{10}$ olsun. O halde ($M_{10}, \#$), örnek 3.1.6'dan gösterildiği gibi ikili işlem # altındaki neutrosophic üçlü gruptur.

Aynı zamanda birleşme özelliği vardır yani

$(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$ dir.

$$(a \# b) \# c = (3ab) \# c$$

$$= 3(3ab)c$$

$$= 9abc$$

$$= 3a(3bc)$$

$$= 3a(b \# c)$$

$$= a \# (b \# c)$$

olur. “#” özelliğine göre $\mathbb{Z}_{10}$ üzerindeki klasik birim eleman $e = 7$ 'dir. Çünkü:

$\forall a \in \mathbb{Z}_{10}$ için,

$$a \# e = e \# a = 3ae = 3a(7) = 21a = a \pmod{10}.$$

Bu nedenle, etkisiz elemanları 7' den farklı olan tüm üçlüleri seçeriz ve aşağıdaki neutrosophic üçlüleri elde ederiz:

$(0, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 0, 4), (0, 0, 5), (0, 0, 6), (0, 0, 8), (2, 2, 2), (4, 2, 6), (5, 5, 5), (6, 2, 4)$ ve $(8, 2, 8)$.

Yukarıdaki tüm etkisiz $(.) = 0, 2$ ve 5 , klasik birim eleman 7'den farklıdır.

$\mathbb{Z}_{10}$, bir neutrosophic üçlü grup değildir.

Ancak, $M_{10} = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ alt kümesi, değişmeli bir neutrosophic üçlü gruptur. Çünkü # yasası iyi tanımlanmış, değişmeli, birleşmeli ve M 'ye ait her bir elemanın karşılık gelen bir neutrosophic üçlüsü vardır.

Tanım 3.1.8

$(NTR, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halka olsun. NTR' deki her a için $a * b = b * a = a$ olacak şekilde bir b elemanına sahipse, b' ye NTR' nin **sıfır neutrosophic elemanı** denir ve 0 ile gösterilir.

Dolayısıyla NTR' nin 0 elemanı varsa, NTR' deki her a için $0 * a = a * 0 = 0$ 'dır. Ayrıca nötr* $(0) = 0$ ve ters* $(0) = 0$ olur.

Tanım 3.1.9

(NTR, *, #) bir neutrosophic üçlü halka ve $0 \neq a \in \text{NTR}$ olsun. $0 \neq b \in \text{NTR}$ 'de neutrosophic sıfır olmayan bir eleman varsa öyle ki $b \# a = 0$ 'dır. a 'ya b 'nin **neutrosophic sol sıfır böleni** denir. Benzer şekilde $0 \neq b \in \text{NTR}$ elemanı ve $0 \neq a \in \text{NTR}$ ise $a \# b = 0$ ise a 'ya b 'nin **neutrosophic sağ sıfır bölen** denir.

Bir elemanın hem neutrosophic sağ böleni hem de neutrosophic sol sıfır böleni varsa bu elemana **neutrosophic sıfır bölen eleman** denir.

Teorem 3.1.10

NTR bir değişmeli neutrosophic üçlü halka ve $a, b \in \text{NTR}$ olsun. a , b , etkisiz(a), etkisiz # (b), etkisiz($a \# b$) ve ters#($a \# b$) sadeleştirilebilirdir.

etkisiz# (a), etkisiz# (b) ve ters# (a), ters# (b) NTR' nin elemanıdır.

1. etkisiz* (a) *etkisiz* (b) = etkisiz* ($a * b$)
2. ters* (a) *ters* (b) = ters* ($a * b$)
3. etkisiz#(a)# etkisiz#(b) = etkisiz#($a\#b$)
4. ters#(a)# ters#(b) = ters#($a\#b$).

İspat:

(1) ve (2) 'nin ispatı (3) ve (4) 'ün ispatı gibidir.

(3) etkisiz# (a) # etkisiz# (b) ile sol tarafı düşünün. Soldan a ile sağdan b ile çarpalım. # işlemi birleşmeli olduğundan,

$$a\#etkisiz\#(a)\#etkisiz\#(b)\#b = (a\#etkisiz\#(a))\#(etkisiz\#(b)\#b) = a\#b$$

elde ederiz. Şimdi sağ tarafı ele alalım:

etkisiz# ($a \# b$) soldan a ve sağdan b ile çarpalım.

$$a\#etkisiz\#(a\#b)\#b = (a\#b)\#etkisiz\#(a\#b) = a\#b$$

elde edilir. # birleşmeli ve değişmeli olduğundan,

$$(a\#b) = (a\#b)\#etkisiz\#(a\#b) \text{ olur.}$$

(4) Sol tarafa baktığımızda, $\text{ters}(a)\# \text{ters}(b)$ vardır. Soldan a ile sağdan b ile çarparak elde ederiz.

$$a\# \text{ters}(a)\# \text{ters}(b)\# b = (a\# \text{ters}(a))\# (\text{ters}(b)\# b) =$$

$$(\text{etkisiz}(a)\# \text{etkisiz}(b)) = \text{etkisiz}(a\# b) \text{ olur.}$$

Şimdi $\text{ters}(a \# b)$ 'ye sahip olduğumuz sağ tarafı soldan a ve sağdan b ile çarparak elde ederiz.

$a \# \text{ters}(a \# b) \# b = (a \# b) \# \text{ters}(a \# b) = \text{etkisiz}(a \# b)$ elde edilir. $\#$ birleşmeli ve değişmelidir.

Örnek 3.1.11

Teoremin aşağıdaki gibi tanımlandığı $(\{a, b, c\}, *, \#)$ kümesini ele alalım. Teorem 3.1.1' den $*$ iyi tanımlı, değişmeli ve birleşmelidir. Birleşmeli olduğunu ispatlayalım:

$\forall x, y, z \in \{a, b, c\}$ için, $x * (y * z) = (x * y) * z$ dir.

(1) x, y, z arasında en az bir "a" varsa,

$x * (y * z) = a$ ve $(x * y) * z = a$ dir. Teorem 3.1.1 'e göre herşeyi "a" 'ya dönüştürür, yani

$$a * a = a * b = b * a = a * c = c * a = a.$$

(2) Yalnızca b'lervarsa, o zaman $b * (b * b) = b$ ve $(b * b) * b = b$.

(3) Yalnızca c'lervarsa, o zaman $c * (c * c) = c$ ve $(c * c) * c = c$.

(4) İki b ve bir c veya iki c ve bir b varsa, $x * (y * z) = a$ ve $(x * y) * z = a$,

b'nin $(*)$ c ile çarpılması a (veya $b * c = c * b = a$) alacağından ve ayrıca bir "a" her şeyi a' ya dönüştürür. Teoreme göre neutrosophic üçlüler $*$ şunlardır:

$(a, a, a) *, (a, a, b) *, (a, a, c) *, (b, b, b) *, (c, c, c)$ 'dir.

$*$ işlemine göre klasik birim elemanı yoktur. Bu nedenle, $(\{a, b, c\}, *)$ değişmeli bir neutrosophic üçlü gruptur. Teorem 3.1.1 $\#$ iyi tanımlanmıştır. Değişmeli olduğu ispatlanmıştır. Çünkü $\forall x, y, z \in \{a, b, c\}$, $x \# (y \# z) = a$ ve $(x \# y) \# z = a$ için hepsi çarpımlar $(\#)$ sonuç olarak "a" verir. $\#$ 'in $*$ ile ilgili dağılımını ispatlayalım:

Herhangi bir $x, y, z \in \{a, b, c\}$, $x \# (y * z) = a$ için, herhangi bir şeyin çarpımı ($\#$) "a" 'yı verir ve $(x \# y) * (x \# z) = a * a = a$ olur.

Küme $(\{a, b, c\}, \#)$ bir neutrosophic üçlü küme değildir. Çünkü (a, a, a) yalnızca bir neutrosophic üçlü vardır. Ne b ne de c için karşılık gelen neutrosophic üçlüsü yoktur. Sonuç olarak $(\{a, b, c\}, \#)$ üçlü grup bir neutrosophic değildir. Özelliğın $\#$ klasik birim elemanı yoktur. Dolayısıyla $NTR = (\{a, b, c\}, *, \#)$ değişmeli bir neutrosophic üçlü halkadır ama neutrosophic üçlü cisim değildir.

Tanım 3.1.12

$(NTR, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halka olsun ve S , NTR 'nin bir alt kümesi olsun.

$(S, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halkaysa S , NTR 'nin de neutrosophic üçlü alt halkasıdır.

Tanım 3.1.13

$(NTR, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halka ve I , NTR 'nin bir alt kümesi olsun. I , aşağıdaki şartları sağlarsa, NTR 'nin **neutrosophic üçlü ideali** denir.

1. $(I, *)$, $(NTR, *)$ 'nin neutrosophic üçlü bir alt grubudur.

2. $\forall x \in I$ ve $r \in NTR$ için $x \# r \in I$ ve $r \# x \in I$

dır.

Açıklama 3.1.14

$(NTR, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halka ve $a \in NTR$ olsun. O halde aşağıdakiler doğrudur.

1. $\text{ters}^*(a) \in NTR$ 'dir.

2. $\text{anti}\#(a)$ (eğer bazı a elemanları için) $\in NTR$ 'dir.

Tanım 3.1.15

$(NTR, *, \#)$ bir neutrosophic üçlü halka ve $0 \neq a \in NTR$ olsun. Bazı $n > 1$ pozitif tam sayısı için $(a\#)^n = 0$ ise a 'ya bir **neutrosophic nilpotent eleman** denir.

$(a\#)^n = a \# a \# \dots \# a$ (n kez a oluşur) olur.

3.1.6 örneğinden $a = 0, b = 2, c = 4$ olur. $(2_{\#})^n = 2\#2=0$ ile $2 \neq 0$ ve $(4_{\#})^2 = 4 \# 4 = 0$ ile $4 \neq 0$ dir. $NTR_2 (\{0, 2, 4\}, *, \#)$ değişmeli neutrosophic üçlü halkadır. Ayrıca, $2 \# 4 = 4 \# 2 = 0$ olduğundan 2 ve 4' ün NTR_2 de neutrosophic nilpotent eleman olduğu söylenebilir.

Teorem 3.1.16

NTR bir değişmeli neutrosophic üçlü halka ve $a \in NTR$ olsun. Öyle ki $n \geq 1$ tamsayısı için etkisiz $\# (a^n)$, ters $\# (a^n) \in NTR$ olsun. $a \in NTR$ ise etkisiz $\# (a)$ NTR' de sadeleştirilebilir olsun. O halde

1. $(\text{etkisiz}\# (a))^n = \text{etkisiz}\# (a^n)$,
2. $(\text{ters}\# (a))^n = \text{ters}\# (a^n)$

sağlanır.

İspat:

Matematiksel tümevarımla ispatlayacağız. Tanım 3.1.10 'dan $a = b$ alırsak,

$$\text{etkisiz}\# (a^2) = \text{etkisiz}\#(a\#a) = \text{etkisiz}\#(a)\# \text{etkisiz}\#(a) = (\text{etkisiz}\# (a))^2 \text{ yazılır.}$$

Eşitliğimizin $n - 1$ 'e kadar olan herhangi bir pozitif tamsayı için doğrudur. O halde $\text{etkisiz}\#(a^{n-1}) = (\text{etkisiz}\#(a))^{n-1}$ olduğunu varsayalım. Bunu n için ispatlamamız gerekiyor. Tanım 3.1.10 tarafından

$$\text{etkisiz}\#(a^n) = \text{etkisiz}\#(a\#a^{n-1}) = \text{etkisiz}\#(a)\# \text{etkisiz}\#(a^{n-1}) =$$

$$\text{etkisiz}\#(a)\#(\text{etkisiz}\#(a))^{n-1} = (\text{etkisiz}\#(a))^n \text{ olur.}$$

(2)'nin ispatı (1) 'in ispatına benzer.

Teorem 3.1.17

NTR bir değişmeli neutrosophic üçlü halka olsun. $0, a \in NTR$ öyle ki etkisiz $\#(a^k)$ olsun. $k \geq 1$ tam sayısı için ters $\# (a^k)$, NTR' nin bir elemanıdır. a neutrosophic nilpotent ise $n > 1$ bir tam sayı için $a^n = 0$ dır. O halde aşağıdakiler sağlanır:

1. $(\text{etkisiz}\#(a))^n = \text{etkisiz}\#(0)$,

$$2. (\text{ters}\#(a))^n = \text{ters}\#(0)$$

dır.

İspat:

(1) $0 \neq a \in \text{NTR}'$ de bir neutrosophic nilpotent olduğunu varsayalım. Bazı $n > 1$ tam sayıları için $a^n = 0$ olsun. Tanım 3.1.16' dan (1) ve (2)' yi kullanarak,

$$(\text{etkisiz}\#(a))^n = \text{etkisiz}\#(a^n) = \text{etkisiz}\#(0) \text{ ve } (\text{ters}\#(a))^n = \text{ters}\#(a^n) = \text{ters}\#(0) \text{ olur.}$$

3.2 İntegral Neutrosophic Üçlü Tamlık Bölgesi ve Neutrosophic Üçlü Halka Homomorfizması

Tanım 3.2.1

Eğer $\forall a, b \in \text{NTR}$ ve $a \# b = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ olduğunda değişmeli neutrosophic üçlü halka (NTR) **integral neutrosophic üçlü tamlık bölgesi** olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.2

NTR bir integral neutrosophic üçlü tamlık bölgesi olsun. O halde aşağıdakiler $\forall a, b \in \text{NTR}$ için sağlanır:

$$1. \text{etkisiz}\#(a) \text{ ve } \text{etkisiz}\#(b) \text{ varsa, o zaman } \text{etkisiz}\#(a) \# \text{etkisiz}\#(b) = 0,$$

$$\text{etkisiz}\#(a) = 0 \text{ veya } \text{etkisiz}\#(b) = 0$$

dır.

$$2. \text{Eğer } \text{ters}\#(a) \text{ ve } \text{ters}\#(b) \text{ varsa, o zaman } \text{ters}\#(a) \# \text{ters}\#(b) = 0,$$

$$\text{ters}\#(a) = 0 \text{ veya } \text{ters}\#(b) = 0$$

dır.

İspat:

(1) NTR' de a integral neutrosophic üçlü tamlık bölgesi olsun.

$$\text{etkisiz}\#(a), \text{etkisiz}\#(b) \in \text{NTR} \text{ 'dir.}$$

(2) Açıktır. Çünkü NTR bir integral neutrosophic üçlü tamlık bölgesidir.

$\text{ters}\#(a), \text{ters}\#(b) \in \text{NTR}'$ dir.

Tanım 3.2.3

$(\text{NTR}_1, *, \#)$ ve $(\text{NTR}_2, \oplus, \otimes)$ iki neutrosophic üçlü halka olsun. $F: \text{NTR}_1 \rightarrow \text{NTR}_2$ bir eşleme olsun. Aşağıdaki koşullar doğruysa f , **neutrosophic üçlü halka homomorfizması** olarak adlandırılır.

1. $\forall a, b \in \text{NTR}_1$ için $f(a * b) = f(a) \oplus f(b)$.
2. $\forall a, b \in \text{NTR}_1$ için $f(a \# b) = f(a) \otimes f(b)$.
3. $\forall a \in \text{NTR}_1$ için $f(\text{etkisiz}^*(a)) = \text{etkisiz}^\oplus(f(a))$.
4. $\forall a \in \text{NTR}_1$ için $f(\text{ters}^*(a)) = \text{ters}^\oplus(f(a))$.

3.3 Neutrosophic Üçlü Cisim

Tanım 3.3.1

$(N, *, \#)$ neutrosophic üçlü kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(N, *, \#)$ **neutrosophic üçlü cisim** olarak adlandırılır.

1. $*$ işlemine göre $(N, *)$ değişmeli neutrosophic üçlü gruptur.
2. $\#$ işlemine göre $(N, \#)$ neutrosophic bir üçlü gruptur.
3. $\forall a, b, c \in \text{NTR}$ için,

$a \# (b * c) = (a \# b) * (a \# c)$ ve $(b * c) \# a = (b \# a) * (c \# a)$ 'dır.

Önerme 3.3.2

Bir neutrosophic üçlü cisim her zaman $*$ ve $\#$ işlemlerine göre, $\forall a \in \text{NTF}$ için bir $\text{ters}(a)$ 'ya sahiptir.

Teorem 3.3.3

Genel olarak bir neutrosophic üçlü halka (NTR) bir neutrosophic üçlü cisim değildir (NTF). Bu teoremin tersi örnek 3.1.11 'de yapılmıştır.

Teorem 3.3.4

Genel olarak bir neutrosophic üçlü cisim (NFT) bir integral neutrosophic üçlü tamlık bölgesi (INTD) değildir.

Teorem 3.3.5

$f: \text{NTR}_1 \rightarrow \text{NTR}_2$ nin bir neutrosophic üçlü halka homomorfizması olduğunu varsayalım. Daha sonra:

1. S , $NTR_1(*, \#)$ 'ı veren bir neutrosophic üçlüyse, $f(S)$, NTR_2 'nin $(\oplus, \otimes)$ neutrosophic üçlü alt halkasıdır.
2. U , NTR_2 'nin neutrosophic üçlü alt halkası ise $f^{-1}(U)$, NTR_1 in neutrosophic üçlü alt halkasıdır.
3. NTR_2 'nin neutrosophic üçlü idealiyse $f^{-1}(I)$, NTR_1 in neutrosophic üçlü idealidir.
4. Eğer f üstündeyse ve J ideal bir NTR_1 ise $f(J)$ NTR_2 'nin idealidir.

İspat:

(1) $a, b \in S$ olsun. $a * b \in S$ olur. Buradan etkisiz $* (a) \in S$, ters $* (a) \in S$ olsun.

Sonra $f(a), f(b) \in f(S)$ ve $f(a * b) \in f(S)$, $f(a * b) = f(a) \oplus f(b)$ olur. Çünkü f bir homomorfizmadır. Böylece $f(a), f(b) \in f(S)$ ise $f(a) \oplus f(b) \in f(S)$ olduğunu ispatlamış olduk. etkisiz $* (a)$ ve ters $* (a) \in S$ olduğundan $f(\text{ters} * (a)) \in f(S)$ 'dir. Ancak $f(\text{etkisiz} * (a)) = \text{etkisiz} \oplus f(a)$ ve $f(\text{ters} * (a)) = \text{ters} \oplus f(a)$ 'dir. Bu nedenle $f(a) \in f(S)$ ise $\text{etkisiz} \oplus f(a) = f(\text{etkisiz} * (a)) \in f(S)$ olur. Benzer şekilde,

$\text{ters} \oplus f(a) = f(\text{ters} * (a)) \in f(S)$ 'dir. Eğer $a, b \in S$, $a \# b \in S$ ise $f(a \# b) \in f(S)$ olur. Buradan $f(a \# b) = f(a) \oplus f(b)$ 'dir. Bu nedenle

$f(a), f(b) \in S$ ise $f(a) \otimes f(b) = f(a \# b) = f(S)$.

(2) $f^{-1}(U) = \{a \in NTR_1; f(a) \in U\}$. $a, b \in f^{-1}(U)$ olsun. $f(a), f(b) \in U$ olur.

$f(a) \oplus f(b) = f(a * b) \in U$ ve $f(a) \otimes f(b) = f(a \# b) \in U$ 'dur. Daha sonra

$a * b$ 'den $a \# b \in f^{-1}(U)$. $a \in f^{-1}(U)$ 'den $f(a) \in U$ ise $f(a) \in U$ olur.

$\text{etkisiz} \oplus f(a) \in U$, $\text{ters} \oplus f(a) \in U$ olur. Çünkü U , NTR_2 'nin neutrosophic bir alt halkasıdır ve f , bir nötro-homomorfizmadır. Buradan,

$\text{etkisiz} \oplus f(a) = f(\text{etkisiz}_*(a)) \in U$, $\text{ters} \oplus f(a) = f(\text{ters}_*(a)) \in U$ olur.

(3) $a \in f^{-1}(I)$ ve $r \in NTR_1$ olsun.

$\text{etkisiz}_*(a) \in f^{-1}(U)$, $\text{ters}_*(a) \in f^{-1}(U)$. $f^{-1}(I) = \{a \in NTR_1; f(a) \in I\}$ 'dir.

$f(a) \in I$ ve $f(r) \in {}^{NTR_2}$ yazılır. f bir nötro-homomorfizm olduğu ve I bir NTR_2 ideali olduğu için:

$f(a) \otimes f(r) = f(a \# r) \in I$ 'dır. Dolayısıyla buradan $a \# r \in f^{-1}(I)$ bulunur.

(4) $j \in f(J)$ ve $r \in {}^{NTR_2}$ olsun. f eşit olduğundan, $\exists h \in J \subset {}^{NTR_1}$ öyle ki

$f(h) = j$ ve $\exists s \in {}^{NTR_1}$ öyle ki $f(s) = r$ 'dır. $h \# s \in J$ olur. Çünkü $J, {}^{NTR_1}$ 'in idealidir.

Sonra:

$f(h \# s) = f(h) \otimes f(s) = j \otimes s \in f(J)$ olur. Çünkü NTR_1 'de ideal olan $h \in J, s \in {}^{NTR_1}$ 'dir.



BÖLÜM IV

NEUTROSOPHIC İKİLİ YARI-GRUP ve SADELEŞTİRİLEBİLİR (CANCELLABLE) NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ GRUPLAR

Bu bölüm [6], [7], [16], [17], [21]'den düzenlenmiştir.

4.1 Neutrosophic İkili Yarı Grup

Tanım 4.1.1

U evrensel küme ve $A \subseteq U$ olsun. U , neutrosophic üçlü küme olmak üzere A , $*$ işlemi ile iyi tanımlı olsun.

a , etkisiz(a) $\in A$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\langle a, etkisiz(a) \rangle$ ' ya A 'da **neutrosophic ikili küme** denir.

(1) $*$ işlemi özelliklerden etkisiz(a), A 'nın birim elemanından farklıdır.

(2) $a * etkisiz(a) = etkisiz(a) * a = a$;

(3) $a * ters(a) = ters(a) * a = etkisiz(a)$ durumunda, $tors(a) \in A$ yoktur.

Tanım 4.1.2

Yukarıdaki tanımda, $A \subseteq U$ olduğunda $A=U$ ' ya eşit olur. Bu da " **A 'da neutrosophic ikili**" olarak adlandırılabilir.

Tanım 4.1.3

$(D, *)$ kümesi $*$ işlemi ile birlikte bir neutrosophic ikili kümedir. Öyle ki $\forall a \in D, \exists a$ neutrosophic ikili için $\{a, neut(a)\}$ öyle ki $neut(a) \in D$ 'dir. $(D, *)$ neutrosophic ikili kümesi birleşme özelliğini sağlarsa **neutrosophic ikili yarı-grup** denir.

4.2 Neutrosophic İkili Yarı Grubunun Yeni Özellikleri

Teorem 4.2.1

$(D, *)$, $*$ ve $a \in D$ ye göre neutrosophic bir ikili yarı grup olsun.

$x, y \in \{ \text{etkisiz}(a) \}, x * y \in \{ \text{etkisiz}(a) \}$. Yani,

$\{ \text{etkisiz}(a) \} * \{ \text{etkisiz}(a) \} \subseteq \{ \text{etkisiz}(a) \}$ olur.

İspat :

Herhangi bir $a \in D$ için,

$a * \text{etkisiz}(a) = a, \text{etkisiz}(a) * a = a$. $x, y \in \{ \text{etkisiz}(a) \}$ varsayalım, o zaman

$a * x = x * a = a, a * y = y * a = a$. Buradan

$a * (x * y) = (x * y) * a = a$

yazılır. $x * y$ 'nin a 'nın nötr olduğu sonucu çıkar. Yani, $x * y \in \{ \text{etkisiz}(a) \}$ olur.

Böylece

$\{ \text{etkisiz}(a) \} * \{ \text{etkisiz}(a) \} \subseteq \{ \text{etkisiz}(a) \}$ yazılır.

Tanım 4.2.2

$\text{etkisiz}(a)$ benzersizse, $\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$ olur. Ancak $\text{etkisiz}(a)$ benzersiz değilse örneğin, $\forall s, t$ için $\text{neut}(a), \{ \text{etkisiz}(a) \} = \{ s, t \} \in D$ herhangi birini belirttiğini varsayalım. Böylece $\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = s * s$ ve $t * t$ 'den birini temsil eder. $\{ \text{etkisiz}(a) \} * \{ \text{etkisiz}(a) \} = \{ s * s, s * t, t * s, t * t \}$ olur.

Önerme 4.2.3

$(D, *)$ neutrosophic bir ikili yarı grup olsun. $a, b, c \in D$ olsun.

(1) $\text{etkisiz}(a) * b = \text{etkisiz}(a) * c \Rightarrow a * b = a * c$.

(2) $b * \text{etkisiz}(a) = c * \text{etkisiz}(a) \Rightarrow b * a = c * a$.

İspat:

(1) $\text{etkisiz}(a) * b = \text{etkisiz}(a) * c$ varsayalım. Sonra

$a * (\text{etkisiz}(a) * b) = a * (\text{etkisiz}(a) * c)$. Buradan

$(a * \text{etkisiz}(a)) * b = (a * \text{etkisiz}(a)) * c$.

Böylece $a * b = a * c$ olur. Bu durumda (1) sağlanır.

(2) 'nin ispatıda benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.4

$(D, *)$ bir değişmeli neutrosophic ikili yarı grubu olsun. $a, b \in D$ için,

$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) \in \{\text{etkisiz}(a * b)\}$ olur.

İspat:

$\forall a, b \in D$ için,

$a * \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) * b = (a * \text{etkisiz}(a)) * (\text{etkisiz}(b) * b) = a * b$ yazılır. Buradan $*$ işleminin değişmeli ve birleşme işlemleri uygulayarak elde ederiz.

$(\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b)) * (a * b) = (a * b) * (\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b)) = a * b.$

Buradan $\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) \in \{\text{etkisiz}(a * b)\}$ olur.

Teorem 4.2.5

$(D, *)$ neutrosophic bir ikili küme olsun. O halde D 'de idempotent öge yoktur.

$\forall a \in D$ için, $a * a \neq a$ 'dır.

İspat:

$a * a = a$ olacak şekilde bir $a \in D$ olduğunu varsayalım. Klasik cebirsel birim eleman idempotent olduğu için $a \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ ve $a \in \{\text{ters}(a)\}$ yazılır.

Teorem 4.2.6

$(D, *)$ neutrosophic ikili bir küme olsun. O zaman $e \in D$ 'de klasik birim elemanı yoktur. $\forall a \in D$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in D$ yoktur.

Teorem 4.2.7

$(D, *)$ neutrosophic bir ikili yarı grup olsun. D sonsuzdur. Yani sonlu neutrosophic ikili yarı grubu değildir.

İspat:

D 'nin $*$ 'ye göre sonlu bir neutrosophic ikili yarı grubu olduğunu varsayalım. Sonra, herhangi bir $a \in D$ için,

$a, a * a = a^2, a * a * a = a^3, \dots, a^n, \dots \in D.$

D sonlu olduğundan, m, k iki doğal sayısı seçelim. Böylece

$$a^m = a^{m+k}.$$

Durum 1:

k = m ise, $a^m = a^{2m}$, yani $a^m = a^m * a^m$ Teorem 4.2.5 'den D'de idempotenttir.

Durum 2:

k > m ise, a'dan $a^m = a^{m+k}$ alabiliriz.

$$a^k = a^m * a^{k-m} = a^{k+m} * a^{km} = a^{2k} = a^k * a^k.$$

a^k Teorem 4.2.6' dan dolayı D' de idempotent bir elemanıdır.

Durum 3:

k < m ise a'dan $a^m = a^{m+k}$ alabiliriz.

$$a^m = a^{m+k} = a^m * a^k = a^{m+k} * a^k = a^{m+2k};$$

$$a^m = a^{m+2k} = a^m * a^{2k} = a^{m+k} * a^{2k} = a^{m+3k};$$

... ..

$$a^m = a^{m+mk}.$$

m ve k doğal sayılar olduğundan, $mk \geq m$. Bu nedenle, $a^m = a^{m+mk}$ durum 1 veya durum 2' den D'de idempotent bir eleman olduğunu biliyoruz.

Teorem 4.2.8

D, * işlemine göre (D, *) neutrosophic bir ikili yarı-grup olsun. O halde

a ∈ D' ye göre,

etkisiz(etkisiz(a)) ∈ {etkisiz(a)} 'dir.

İspat:

Herhangi bir a ∈ D için, etkisiz(·) tanımına göre,

$$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = \text{etkisiz}(a)$$

$$\text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$$

bu yazılanlara göre,

$$a * \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) = a; \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) * a = a$$

elde ederiz. Buradan $\text{etkisiz}(\cdot)$ tanımına göre

$$\text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) \in \{\text{etkisiz}(a)\} \text{ olur.}$$

Teorem 4.2.9

$(D, *)$ neutrosophic bir ikili yarı-grup olsun. Sonra

1. $\forall a \in D, (\{\text{etkisiz}(a)\}, *)$, $*$ 'ye göre neutrosophic bir ikili yarı-gruptur.

2. $\forall a \in D, \{\text{etkisiz}(a)\}$ sonsuzdur.

İspat:

(1) Herhangi bir $x, y \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ için Önerme 4.2.3'e göre $x * y \in \{\text{etkisiz}(a)\}$.

Böylece, $(\{\text{etkisiz}(a)\}, *)$ bir yarı gruptur. Teorem 4.2.7'i uygularsak, $\text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ 'dır. Yani herhangi bir $x \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ için

$$y = \text{etkisiz}(\text{etkisiz}(a)) \in \{\text{etkisiz}(a)\},$$

$$x * y = y * x = x.$$

$(D, *)$ bir neutrosophic ikili kümesi olduğundan $\forall x \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ için, öyle bir $(x) \in D$ birimi yoktur. Böylece

$$x * \text{etkisiz}(x) = \text{etkisiz}(x) * x = \text{etkisiz}(x).$$

$(x) \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ birimi yoktur. Öyle ki

$$x * \text{etkisiz}(x) = \text{etkisiz}(x) * x = \text{etkisiz}(x).$$

$\forall x \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ için x ' in tersi olmadığı anlamına gelir. Dolayısıyla $(\{\text{neut}(a)\}, *)$

bir $*$ işleminin **neutrosophic ikili yarı grubudur.**

(2) (1) ve Teorem 4.2.7'i kullanarak, $\{\text{etkisiz}(a)\}$ ' nin $\forall x \in D$ için sonsuz olduğunu biliyoruz.

Tanım 4.2.10

Neutrosophic ikili yarı gruptan yola çıkarak,

$$(b * a) * c = a * c = c \Leftrightarrow b * (a * c) = b * c = b \text{ yazılır.}$$

4.3 Zayıf Neutrosophic İkili Küme ve Yarı Grup

Tanım 4.3.1

$(D, *)$ bir zayıf neutrosophic ikili kümesidir. Öyle ki $\forall a \in D$ için $a \notin \{\text{etkisiz}(a)\}$ ise $\exists a$ neutrosophic ikili $\langle a, \text{etkisiz}(a) \rangle$ vardır. $\text{etkisiz}(a) \in D$ ise birleşme özelliğine göre $(D, *)$ kümesine **zayıf bir neutrosophic ikili yarı grup** olarak adlandırılır.

Tanım 4.3.2

$(D, *)$ zayıf bir neutrosophic ikili yarı grubu sadeleştirilebilirdir.

$$\forall a, b, c \in D, a * b = a * c \Rightarrow b = c,$$

$$\forall a, b, c \in D, b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

Aşağıda sadeleştirilebilir bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.3.3

$D = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $*$ işlemi üzerinde doğal sayının çarpımı olsun. O halde

$(D, *)$ sadeleştirilebilir zayıf neutrosophic ikili yarı grubudur.

$$\forall a \in D \text{ için } \text{etkisiz}(a) = 1 \text{ olur.}$$

Örnek 4.3.4

$D = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $*$ işlemi üzerinde doğal sayı olsun. O halde $(D, *)$ bir sadeleştirilebilir zayıf neutrosophic ikili yarı grubudur.

D' deki etkisiz eleman $\text{etkisiz}(1) = 4$ ve $\{\text{ters}(1)\} = \emptyset$ dır.

Teorem 4.3.5

$(D, *)$ sadeleştirilebilir zayıf neutrosophic ikili yarı-grup olsun.

(1) $\forall a \in D, \text{etkisiz}(a)$ benzersizdir.

(2) $\forall a \in D, \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$.

(3) $\forall a \in D, \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a * a)$.

(4) $\forall a, b \in D, \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(b)$.

İspat:

(1) Herhangi bir $a \in D$ için,

Durum 1:

$a \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ ise, $a * a = a$ olur. Böylece

$a * a = a = a * \text{etkisiz}(a)$.

Tanım 4.2.2' ye göre, $a = \text{etkisiz}(a)$ vardır. Bu $\{\text{etkisiz}(a)\} = \{a\}$ olduğu anlamına gelir. Yani etkisiz(a) benzersizdir.

Durum 2:

$a \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ ise $x, y \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ olduğunu varsayalım.

$a * x = a = a * y$.

Tanım 4.2.2' den $x = y$ olduğunu biliyoruz. Bu $|\{\text{etkisiz}(a)\}| = 1$ ' dir. Yani etkisiz(a) benzersizdir.

(2) $a \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ ise (1)' den $a = \text{etkisiz}(a)$ yazılır. Yani

$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$ olduğunu elde ederiz.

$\{\text{etkisiz}(a)\} * \{\text{etkisiz}(a)\} \subseteq \{\text{etkisiz}(a)\}$.

kullanılarak

$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a)$ elde ederiz.

(3) Herhangi bir $a \in D$ için (birleşme özelliğine göre),

$(\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a)) * (a * a) = a * a$;

$(a * a) * (\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a)) = a * a$.

Bu, $\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) \in \{\text{etkisiz}(a * a)\}$ olduğu anlamına gelir.

(1) $|\{\text{etkisiz}(a)\}| = 1$ olur. Dolayısıyla

$$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a * a).$$

(4) $\forall a, b \in D$ için birleşme özelliğine göre,

$a * \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) * b = a * b$ olur. Tanım 4.2.2' yi uygularsak,

$$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) * b = b.$$

$$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) * b = b = \text{etkisiz}(b) * b.$$

olur. Tanım 4.2.2' yi tekrar uygulayarak,

$$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) = \text{etkisiz}(b).$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) = \text{etkisiz}(a)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(b).$$

Teorem 4.3.6

$(D, *)$ zayıf neutrosophic ikili yarı-grubu sadeleştirilebilir olsun. D sonlu bir küme ise D kapalı bir kümesidir. Yani $|D| = 1$ 'dir.

İspat:

Tanım 4.2.2' e göre $\{\text{etkisiz}(a) \mid a \in D\}$ kapalı bir kümedir. $\text{etkisiz}(a) = e$ ($\forall a \in D$) ifade edilir. D ' nin sonlu bir küme olduğunu varsayalım. $x \in D$, $|D| \neq 1$ ise,

$|D| = n$, $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ' dır. Öyle ki $x \neq e$. İşlem tablosunda $*$, x ' in bulunduğu satırı göz önünde bulundurun:

$$x * a_1, x * a_2, \dots, x * a_n$$

D sadeleşebilir olduğundan $x * a_1, x * a_2, \dots, x * a_n$ birbirinden farklıdır. Böylece, $\exists a_i$ öyle ki $x * a_i = e$. $\langle x, \text{etkisiz}(x) = e \rangle$ ' in neutrosophic ikili olmadığı sonucu çıkar.

Tanım 4.3.1' i uygulayarak $x \in \{\text{etkisiz}(x)\} = \{e\}$. Yani, $x \neq e$. Bu, $x \neq e$ hipoteziyle bir daralmadır. Dolayısıyla $|D| = 1$. Teorem 4.2.6 ve tanım 4.2.10' u uygulayarak aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 4.3.7

$(D, *)$ göre neutrosophic bir ikili yarı grup olsun. O halde D sadeleştirilemez. Yani, sadeleştirilebilir neutrosophic ikili yarı grubu yoktur.

4.4 Neutrosophic Üçlü Sadeleştirilebilir (Cancellable) Gruplar

Tanım 4.4.1

$(D, *)$ bir neutrosophic üçlü küme sadeleştirilebilir (cancellable) olarak adlandırılır.

$$\forall a, b, c \in D, a * b = a * c \Rightarrow b = c,$$

$$\forall a, b, c \in D, b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

Örnek 4.4.2

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ olsun. O halde $(D, *)$ sadeleştirilebilir neutrosophic üçlü kümedir. $\text{etkisiz}(1) = \text{etkisiz}(2) = \text{etkisiz}(3) = \text{etkisiz}(4) = 1$ ve $\text{ters}(1) = 1, \text{ters}(2) = 2, \text{ters}(3) = 3, \text{ters}(4) = 4$.

Teorem 4.4.3

$(D, *)$ sadeleştirilebilir bir neutrosophic üçlü küme olsun. Sonra

(1) $\forall a \in D, \text{etkisiz}(a)$ benzersizdir.

(2) $\forall a \in D, \text{ters}(a)$ benzersizdir

(3) $\forall a, b \in D, \text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(b)$.

(4) $\forall a \in D$ için $\text{etkisiz}(a) \in D'$ dir.

İspat:

(1) $\forall a \in D$ için $x, y \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ varsayalım. O zaman $a * x = a = a * y$ olur.

Tanım 4.3.6' dan $x = y$ ye sahibiz. $|\{\text{etkisiz}(a)\}| = 1$ dir. Yani $\text{etkisiz}(a)$ sadeleştirilebilirdir.

(2) Herhangi bir $a \in D$ için (1) kullanılarak, $\text{etkisiz}(a)$ sadeleştirilebilir denilebilir.

$x, y \in \{\text{ters}(a)\}$ varsayalım, o zaman $a * x = \text{etkisiz}(a) = a * y$. Tanım 4.4.1'den $x = y$ diyebiliriz. $x, y \in \{\text{ters}(a)\}$ için $a * x = \text{etkisiz}(a) = a * y$ dir. Bu, $|\{\text{ters}(a)\}| = 1$, yani $\text{anti}(a)$ benzersizdir.

(3) Herhangi bir $a, b \in D$ için,

$$\text{etkisiz}(a) * b = \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b) * b.$$

Bundan, Tanım 4.4.1' i uygulayarak,

$$\text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b).$$

Diğer yandan

$$a * \text{etkisiz}(b) = a * \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b).$$

Buradan, Tanım 4.4.1' i tekrar uygulayarak,

$$\text{etkisiz}(b) = \text{etkisiz}(a) * \text{etkisiz}(b)$$

olur. Böylece, $\text{etkisiz}(a) = \text{etkisiz}(b)$. (4) (1) ~ (3) 'ten izler.

Tanım 4.4.4

Neutrosophic üçlü grup ve grup kavramları örtüşür. Aşağıdaki örnek, sadeleştirilemez bir neutrosophic üçlü grubunun var olduğunu göstermektedir.

Burada $\forall a \in D$ için $\text{neut}(a)$ ve $\text{anti}(a)$ benzersizdir.

Örnek 4.4.5

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ olsun. O halde $(D, *)$ sadeleştirilemez neutrosophic üçlü gruptur.

$\forall a \in D$ $\text{etkisiz}(a)$ ve $\text{etkisiz}(a)$ benzersizdir. Bu örnekte, $\text{etkisiz}(1) = \text{ters}(1) = 1$, $\text{etkisiz}(2) = \text{ters}(2) = 2$, $\text{etkisiz}(3) = \text{ters}(3) = 3$, $\text{etkisiz}(4) = \text{ters}(4) = 4$.

Tanım 4.4.6

Bir neutrosophic üçlü grup $(D, *)$ zayıf sadeleştirilebilir neutrosophic küme olarak adlandırılır.

$$\forall a, b, c \in D, (a * b = a * c \text{ ve } b * a = c * a) \Rightarrow b = c.$$

Neutrosophic üçlü grup zayıf sadeleştirilebilirdir.

Teorem 4.4.7

$(D, *)$, $*$ 'ye göre zayıf sadeleştirilebilir bir neutrosophic üçlü grup olsun. (1)' den $\forall a \in D$ için, $\text{neut}(a)$ ve (2)' den $\forall a \in D$ $\text{anti}(a)$ benzersizdir.

İspat: (1) $\forall a \in D$ için $x, y \in \{\text{etkisiz}(a)\}$ varsayalım,

$$a * x = a = a * y,$$

$$x * a = a = y * a.$$

Tanım 4.4.6 'a göre, $x = y$ 'ye sahibiz. Bu $|\{\text{etkisiz}(a)\}| = 1$ ' dir. Yani etkisiz(a) benzersizdir.

(2) $\forall a \in D$ için (1) kullanılarak $\text{neut}(a)$ benzersizdir. $x, y \in \{\text{ters}(a)\}$ varsayalım,

$$a * x = \text{etkisiz}(a) = a * y,$$

$$x * a = \text{etkisiz}(a) = y * a.$$

Buradan $|\{\text{anti}(a)\}| = 1$, yani $\text{ters}(a)$ benzersizdir. Aşağıdaki örnek, içinde $\forall a \in D$ olan neutrosophic bir üçlü grup olduğunu gösterir.

Örnek 4.4.8

$D = \{1, 2, 3\}$ olsun. $(D, *)$ neutrosophic üçlü grubu ve $\forall a \in D$ için $\text{etkisiz}(a)$ ve $\text{ters}(a)$ benzersizdir. Ancak sadeleştirilemezdir. Çünkü

$$2 * 1 = 2 * 2, 1 * 2 = 2 * 2, 1 \neq 2$$

Bu örnekte, $\text{etkisiz}(1) = \text{ters}(1) = 1$, $\text{etkisiz}(2) = \text{ters}(2) = 2$, $\text{etkisiz}(3) = \text{ters}(3) = 2$.

Aşağıdaki örnek, değişmeli bir neutrosophic üçlü grubunun var olduğunu gösterir.

$\exists a \in D$ $\text{ters}(a)$ benzersiz değildir.

Örnek 4.4.9

$*$ 'nin klasik çarpma olduğu $(\mathbb{Z}_6, *)$ 'yi düşünelim. $\forall a \in \mathbb{Z}_6$ için $\mathbb{Z}_6$ 'da $\text{neut}(a)$ var. Yani,

$$\text{etkisiz}([0]) = [0], \text{etkisiz}([1]) = [1], \text{etkisiz}([2]) = [4],$$

$$\text{etkisiz}([3]) = [3], \text{etkisiz}([4]) = [4], \text{etkisiz}([5]) = [1];$$

$$\{\text{ters}([0])\} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\},$$

$$\{\text{ters}([1])\} = \{[1]\}, \{\text{ters}([2])\} = \{[2], [5]\},$$

$$\{\text{ters}([3])\} = \{[1], [3], [5]\},$$

$$\{\text{ters}([4])\} = \{[1], [4]\},$$

4.5 BCI-Cebirlerinde Neutrosophic Üçlüler ve Zayıf Neutrosophic İkili

Şimdi BCI-cebirini $(X \rightarrow 1)$ ele alalım.

Teorem 4.5.1

$(X \rightarrow 1)$ bir BCI-cebiri olsun. $\forall x \in X$ için,

(1) eğer $\{\text{etkisiz}(x)\} \neq \emptyset$ ve $y \in \{\text{etkisiz}(x)\}$ ise, o zaman $x \rightarrow 1 = x$, $y \rightarrow 1 = 1$ 'dir.

(2) $\forall x \in X$, eğer $\{\text{etkisiz}(x)\} \neq \emptyset$ ve $\{\text{ters}(x)\} \neq \emptyset$ ise, $\forall z \in \{\text{ters}(x)\}$ için $z \rightarrow 1 = x$ 'dir.

İspat:

(1) $y \in \{\text{etkisiz}(x)\}$ varsayalım, o zaman $x \rightarrow y = y \rightarrow x = x$ 'dır.

BCI cebirlerinin özelliklerini kullanarak,

$$x \rightarrow 1 = x \rightarrow (y \rightarrow y) = y \rightarrow (x \rightarrow y) = y \rightarrow x = x.$$

$$y \rightarrow 1 = y \rightarrow (x \rightarrow x) = x \rightarrow (y \rightarrow x) = x \rightarrow x = 1.$$

(2) $z \in \{\text{ters}(x)\}$ varsayalım, sonra

$$z \rightarrow x = x \rightarrow z = \text{etkisiz}(x).$$

(1) ve BCI-cebirlerinin özelliklerini kullanarak,

$$1 = \text{etkisiz}(x) \rightarrow 1 = (z \rightarrow x) \rightarrow 1 = (z \rightarrow 1) \rightarrow (x \rightarrow 1) = (z \rightarrow 1) \rightarrow x.$$

$$1 = \text{etkisiz}(x) \rightarrow 1 = (x \rightarrow z) \rightarrow 1 = (x \rightarrow 1) \rightarrow (z \rightarrow 1) = x \rightarrow (z \rightarrow 1).$$

Dolayısıyla $z \rightarrow 1 = x$ 'dir.

Örnek 4.5.2

$D = \{a, b, c, 1\}$ olsun. $(D, \rightarrow)$ bir BCI cebiri 4-2-2' nin ikili bir gösterimidir.

$(\langle c, 1, c \rangle (D, \rightarrow))$ deki neutrosophic bir üçlüdür.

Teorem 4.5.3

$(X; \rightarrow, 1)$ bir BCI-cebiri olsun. O halde $(X, \rightarrow)$ bir neutrosophic üçlü gruptur $\Leftrightarrow$

$(X \rightarrow 1)$ BCI-cebiridir.

İspat:

$(X \rightarrow 1)$ bir neutrosophic üçlü grup olduğunu varsayalım. O zaman $\forall x \in X$, $\{\text{etkisiz}(x)\} \neq \emptyset$. Teorem 4.5.1'e göre $x \rightarrow 1 = x$. Önerme 4.2.1'i kullanarak $(X \rightarrow 1)$ BCI-cebiridir. Tersini düşünersek, $(X \rightarrow 1)$ bir BCI cebiri olduğunu varsayalım. O halde $(X \rightarrow 1)$ bir gruptur. Dolayısıyla, $(X \rightarrow 1)$ neutrosifik bir üçlü gruptur.

Örnek 4.5.4

$D = \{a, b, c, 1\}$ olsun. O halde $(D \rightarrow 1)$ bir BCI cebiridir ([16] 'da I4-1-1'in ikili bir formudur) ve $(D \rightarrow 1)$ bir neutrosophic üçlü gruptur.

Teorem 4.5.5

$(X; \rightarrow, 1)$ bir BCI-cebiri olsun. O halde $(X \rightarrow 1)$ neutrosophic bir ikili yarı grup değildir.

İspat:

$1 = 1 \rightarrow 1$ olduğundan Teorem 4.3.6' yı uygulayarak $(X, \rightarrow 1)$ ' nin neutrosophic ikili yarı grup.

Teorem 4.5.6

$(X \rightarrow 1)$ bir BCI cebiri olsun. $(X \rightarrow 1)$ zayıf bir neutrosophic ikili yarı grubuysa

$X = \{1\}$ ' dir.

İspat:

$\exists x \in X - \{1\}$ olduğunu varsayalım. $x \rightarrow x = 1$ olduğundan yani, $x \notin \{\text{etkisiz}(x)\}$.

Bundan Tanım 4.3.1'den $\{\text{etkisiz}(x)\} \neq \emptyset$ ve Teorem 4.5.1' den $x \rightarrow 1 = x$ kullanarak,

$$x \rightarrow 1 = 1 \rightarrow x = x.$$

$$x \rightarrow (x \rightarrow 1) = (x \rightarrow 1) \rightarrow x = 1.$$

yazılır. $1 \in \{\text{etkisiz}(x)\}$, $x \rightarrow 1 \in \{\text{ters}(x)\}$ olur.

BÖLÜM V

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ TOPOLOJİNİN İLERİ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Bu çalışma [7], [17], [20] 'den düzenlenmiştir.

5.1 Neutrosophic Üçlü Topoloji (NTT)

Tanım 5.1.1

$H = \{(b, T(b), I(b), F(b)), b \in U\}$ a neutrosophic küme formundadır. Buradan

$T, I, F: U \rightarrow]0^-, 1^+[$ 'dır.

Tanım 5.1.2

H ikili işlemle birlikte bir küme olsun. H_T , NT kümesi olarak adlandırılır. $b \in H$, klasik cebirsel birim elemanlarından farklı olarak etkisiz(b) adında bir "b" nötr elemanı vardır ve "b" nin tersi ters(b) olarak adlandırılır. etkisiz(b) ve ters(b) H 'ye aittir. Öyle ki:

$$b * \text{etkisiz}(b) = \text{etkisiz}(b) * b = b \text{ ve } b * \text{ters}(b) = \text{ters}(b) * b = \text{etkisiz}(b)$$

olur.

Tanım 5.1.3

H_T bir NT kümesi olsun ve $H_T, P(H_T)$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. H_T , aşağıdaki koşullar:

- $\emptyset, H_T$ cinsinden H_T ,
- H_T 'daki sonlu sayıdaki kümelerin kesişimi de H_T 'dadır.
- H_T 'daki sonsuz sayıdaki kümenin birleşimi de H_T 'dadır. H_T , NTT olarak adlandırılır.

Açıklama 5.1.4

(H_T, H_T) bir NT topolojik uzayı olarak adlandırılır. H_T nin alt kümeleri olan H_T 'in elemanları (H_T, H_T) neutrosophic üçlü topolojik uzayının açık NT kümeleri olarak adlandırılır.

Örnek 5.1.5

H ve $H_T = \{\emptyset, H_T\}$ kümesi H_T nin bir NT kümesi olsun. O halde H_T, H_T için bir topolojidir. Buna **neutrosophic üçlü ayrık topoloji** denir.

Örnek 5.1.6

H_T, H 'nin bir neutrosophic üçlü kümesi ve $H_T = P(H_T)$ olsun. τ, H_T için bir topolojidir. Buna **neutrosophic üçlü ayrık topolojisi** denir.

Örnek 5.1.7

H_T bir NT kümesi olsun ve $H_T, \emptyset$ kümeleri olan H_T nin sonlu alt kümeleri olsun. Daha sonra $H_T, \text{neutrosophic üçlü eş-sonlu topoloji}$ olarak adlandırılır.

Örnek 5.1.8

Aşağıda tanımlanan ikili işlemle $H = \{b_1, b_2, b_3\}$ olsun.

O halde $(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2)$ ve (b_3, b_2, b_3) H' nin neutrosophic üçlüleridir.

$H_T = \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}$ H' nin üçlü grubu olsun.

$P(H_T) = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1)\}, \{(b_2, b_2, b_2)\}, \{(b_3, b_2, b_3)\}, \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2)\}, (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}, \{(b_1, b_3, b_1), (b_3, b_2, b_3)\}, H_T\}$ 'dir.

O halde aşağıdaki alt kümeler yazılabilir:

$$H_{\tau_1} = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1)\}, H_T\},$$

$$H_{\tau_2} = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1)\}, \{(b_2, b_2, b_2)\}, H_T\},$$

$$H_{\tau_3} = \{\emptyset, \{(b_3, b_2, b_3)\}, \{(b_1, b_3, b_1)\}, \{(b_3, b_2, b_3), (b_1, b_3, b_1)\}, H_T\}$$

dir. Bu durumda H_{τ_1} ve H_{τ_3} neutrosophic üçlü topolojileridir, H_{τ_2} ise NTT değildir.

Tanım 5.1.9

(H_T, H_τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $F \subseteq H_T$ alt kümesinin, ancak ve ancak tamamlayıcısı $H_T \setminus F$ NT açıksa, NT kapalı olduğu söylenir.

Örnek 5.1.10

$H_T = \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}$ NTT ile Örnek 5.1.8' eki gibi olsun.

$H_\tau = \{\emptyset, H_T, \{(b_3, b_2, b_3)\}, \{(b_1, b_3, b_1)\}, \{(b_3, b_2, b_3), (b_1, b_3, b_1)\}\}$.

Daha sonra $H_{T'}$ nin NT kapalı alt kümeleri

$H_T, \emptyset, \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2)\}, \{(b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}, \{(b_2, b_2, b_2)\}$.

Açıklama 5.1.11

Bir NT topolojik uzayının (H_T, H_τ) NT kapalı kümeleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $\emptyset, H_T$ NT kapalıdır.
2. NT kapalı kümelerin sonlu birleşimi NT kapalı kümedir.
3. NT kapalı kümelerin sonsuz kesişimi bir NT kapalı kümedir.

Tanım 5.1.12

NT kümesi $H_{T'}$ nin iki NT topolojisi H_{τ_1} ve H_{τ_2} nin H_T kümesinde karşılaştırılabilir. Ayrıca $H_{\tau_1} \subset H_{\tau_2}$ ve $H_{\tau_2} \subset H_{\tau_1}$ ise $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$ nin eşit olduğu söylenir. İki NT topolojisinin kesişimi her zaman bir NTT iken, iki NT topolojisinin birleşimi aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi genel olarak bir NTT değildir.

Örnek 5.1.13

$H_T = \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}$ Örnek 5.1.8' teki gibi olsun. İki neutrosophic üçlü topolojik kümeyi düşünersek:

$H_{\tau_1} = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1)\}, H_T\}$

$H_{\tau_2} = \{\emptyset, \{(b_2, b_2, b_2)\}, H_T\}$

yazılır. Sonra $H_{\tau_1} \cup H_{\tau_2} = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1)\}, \{(b_2, b_2, b_2)\}, H_T\}$ NTT değildir.

Örnek 5.1.14

(H_T, H_T) bir NT topolojik uzayı olsun. Bazıları için $(b_1, b_3, b_1) \in H_T$ ve $M \in H_T$ için $(b_1, b_2, b_3) \in M$ 'dir. M 'nin (b_1, b_2, b_3) komşuluğu olduğu görülür. Bir $L \subseteq H_T$ kümesi açıktır $\Leftrightarrow \forall (b_1, b_2, b_3) \in L$ için L 'de bulunan (b_1, b_2, b_3) 'ün bir $M_{(b_1, b_2, b_3)}$ 'in komşuluğu varsa açıktır.

Örnek 5.1.15

$H_T = \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}$ Örnek 5.2.3' teki gibi olsun. Aşağıdaki neutrosophic üçlü topolojik kümeyi ele alırsak,

$$H_{T_1} = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1)\}, H_T\}$$

kümesi NT' de (b_1, b_3, b_1) 'ün iki komşuluğu olur. Yani $\{(b_1, b_3, b_1)\}$ kümesi hem (b_2, b_2, b_2) hem de (b_3, b_2, b_3) için H_T 'de tek komşuluktur.

5. 2 Neutrosophic Üçlü Topolojisinin (NTT) Neutrosophic Üçlü Tabanı

Tanım 5.2.1

(H_T, H_T) bir NT topolojik uzayı olsun. Bir $H_T \subset H_T$ kümesi, H_T 'nin her bir NT açık alt kümesi ve $H(\beta)$ elemanlarının birleşimi ise H_T için **neutrosophic üçlü tabanı** olarak adlandırılır. $H(\beta)$ üyelerine **H_T topolojisinin temel açık kümeleri** denir.

Örnek 5.2.2

H_T herhangi bir neutrosophic üçlü kümesi olsun. H_T 'nin tüm neutrosophic üçlü alt kümelerinin toplamı H_T üzerinde ayrık topolojidir.

Örnek 5.2.3

$H_T = \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}$ NTT ile Örnek 5.1.8 'teki gibi olsun.

$H_T = \{\emptyset, \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3), H_T\}$ olsun. O halde

(H_T, H_T) için;

$H(\beta) = \{(b_3, b_2, b_3)\}, \{(b_1, b_3, b_1)\}, H_T\}$ kümesi, neutrosophic üçlü tabanıdır.

Teorem 5.2.4

(H_τ, H_τ) bir NT topolojik uzayı olsun. $H(\beta) \subseteq H_\tau$ 'dir. H_τ için bir NT tabandır $\Leftrightarrow$

$\forall H(O) \in H_\tau$ ve $(b_0, b_0, b_0) \in H(O)$ vardır. $H(I) \in H(\beta)$ 'dir. Böylece

$(b_0, b_0, b_0) H(I) \subseteq H(O)$ olur.

İspat:

$H(\beta)$ 'nin NTT τ için bir NT tabanı olduğunu varsayalım. $\forall H(O) \in H_\tau$ elemanıdır.

$$H(O) = \cup \{H(I_\alpha) : H(I_\alpha) \in H(\beta)\}.$$

Eğer $(b_0, b_0, b_0) \in H(O)$ 'nun keyfi bir NT noktası ise, (b_0, b_0, b_0) birleşmedeki en az bir $H(I_\alpha)$ 'ya aittir

$$U_\alpha H(I_\alpha) = H(O).$$

Bu nedenle

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_\alpha) \subseteq U_\alpha H(I_\alpha) = H(O).$$

Böylece

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_\alpha) \subseteq H(O).$$

Tersine, varsayalım ki her biri için $(b_0, b_0, b_0) \in H(O)$ olsun. Böylece

$$H(O) = \cup \{(b_0, b_0, b_0) : (b_0, b_0, b_0) \in H(O)\}$$

$$\subseteq \cup \{H(I_{(b_0, b_0, b_0)}) : (b_0, b_0, b_0) \in H(O)\} \subseteq H(O)$$

olur. Bu nedenle

$$H(O) = \cup \{H(I_{(b_0, b_0, b_0)}) : (b_0, b_0, b_0) \in H(O)\}.$$

yazılır. Böylece $H(O)$, $H(\beta)$ üyelerinin bir birleşimidir. Bu nedenle $H(\beta)$, τ için bir NT tabanıdır.

Teorem 5.2.5

Bir neutrosophic üçlü küme olan $H(\beta)$ kümesi neutrosophic üçlü kümenin alt kümesidir.

H_T , bazı NTT' ler için bir neutrosophic üçlü tabandır $\Leftrightarrow H_T$ aşağıdaki koşulları yerine getirilmelidir:

(1) H_T ' de $\forall \in (b_0, b_0, b_0)$ tabanı bulunur.

$$H(I) \in H(\beta)$$

Yani,

$$H_T = \cup \{H(I): H(I) \in H(\beta)\}.$$

$H(\beta)$ kesişimine ait herhangi bir $H(I_1)$, $H(I_2)$ için

$$H(I_1) \cap H(I_2)$$

$H(\beta)$ elemanlarının kesişimidir. Eşit olarak, her biri için

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_1) \cap H(I_2)$$

Buradan,

$$H(I_3) \in H(\beta)$$

yazılır. Öyle ki

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_3) \subseteq H(I_1) \cap H(I_2).$$

İspat:

NT kümeleri H_T ' nin bir alt kümesi olan $H(\beta)$ kümesinin bazı NTT kümeleri için NT tabanı olduğunu varsayalım. $H_T \in H_T$ olduğu için NT tabanı tanımına göre H_T , elemanlarının birleşimi olarak $H(\beta)$ yazılabilir.

Şimdi $H(I_1)$, $H(I_2) \in H(\beta)$ 'nin elemanı olsun. O halde $H(I_1)$, $H(I_2) \in NT$ kümeleridir. Bu nedenle $H(I_1) \cap H(I_2)$ olur. Teorem 5.2.4 'e göre,

$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_1) \cap H(I_2)$ vardır. $H(I_3) \in H(\beta)$ öyle ki

$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_3) \subseteq H(I_1) \cap H(I_2)$ olur.

Tersine, (1) ve (2) koşullarının ikisinin de geçerli olduğunu varsayalım. H_τ , H_τ' nin NT alt kümelerinin ailesi olsun. $H(\beta)$ üyelerinin birleşimi alınarak elde edilir. H_τ' in H_τ üzerinde bir NTT olduğunu varsayalım. NTT koşullarının H_τ üyesi tarafından ifade edildiğini göstermemiz gerekir.

$H_\tau = \{H(O_\alpha): \alpha \in \Omega\}$ kümesi olsun. $\forall H(O_\alpha)$, $H(\beta)$ elemanlarının birleşimidir. Bu nedenle $\cup \{H(O_\alpha): \alpha \in \Omega\}$ yazılır. Aynı zamanda $H(\beta)$ elemanlarının birleşimidir. Bu nedenle $\bigcup_{\alpha \in \Omega} H(O_\alpha) \in H_\tau$ olur. Varsayalım ki $H(O_1)$, $H(O_2) \in H_\tau$, buradan $H(O_1) \cap H(O_2) \in H_\tau'$ dir.

$(b_0, b_0, b_0) \in H(O_1) \cap H(O_2)$ olsun. $H(\beta)$ içinde $H(I_1)$, $H(I_2)$ kümeleri vardır. Öyle ki

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_1) \subset H(O_1)$$

ve

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_2) \subset H(O_2)$$

olur. $H(I_{23}), \in H(\beta)$ olsun:

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_3) \subset H(I_1) \cap H(I_{22}).$$

Sonra

$$(b_0, b_0, b_0) \in H(I_3) \subset H(I_3) \cap H(I_2) \subset H(O_1) \cap H(O_2)$$

buradan

$$H(O_1) \cap H(O_2)$$

τ' a aittir. (1) tarafından

$$H_\tau = \cup \{H(I): H(I) \in H(\beta)\}$$

dir. Böylece $H_\tau \in H_\tau$ olur. Ayrıca, $H(\beta)$ 'nin boş küme elemanlarının birleşimini alırsak $\emptyset \in H_\tau$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla H_τ , H_τ üzerinde bir topolojidir.

H_τ 'ın her bir eleman tanımı gereği $H(\beta)$ üyelerinin birleşimi olduğundan $H(\beta)$, H_τ için NT tabanlıdır.

5.3 Neutrosophic Üçlü Kümelerin Kapanışı

Tanım 5.3.1

(H_τ, τ) bir NT topolojik uzayı olsun. $H(I)$, $H_{\tau'}$ nin herhangi bir NT alt kümesi olsun.

Bir NT $(b_0, b_0, b_0) \in H_{\tau'}$ nin her NT komşuluğu $(b_0, b_0, b_0) \in H(I)$ ' nında bir NT elemanının içeriyorsa, $H(I)$ 'ye bağlı NT olduğunu söyleyebiliriz. $H(I)$ 'ye bağlı olan $H_{\tau'}$ nin her NT noktalarının NT kümesine **NT kapanışı** denir. $H(I)$ 'nin NT kapanışı, $H(I)$ 'nin en küçük NT kapalı kümesidir. Neutrosophic üçlü kapanma

$H(I)$, $H(\bar{I})$ veya H ile gösterilir.

Açıklama 5.3.2

$$H(I) \subset H(\bar{I})$$

dir.

Teorem 5.3.3

$H(I) = H(\bar{I}) \Leftrightarrow H(I)$ ise neutrosophic üçlü küme kapalıdır.

İspat:

$H(I)$ 'nin kapalı bir NT olduğunu varsayalım. O halde $H(I)$ kapalı bir kümedir. Böylece, $H(\bar{I}) \subset H(I)$ alt kümesidir. Tanım gereği $H(I) \subset H(\bar{I})$ 'nin alt kümesidir.

$$H(\bar{I}) = H(I)$$

olur. Tersini varsayalım ki $H(I) = H(\bar{I})$ olsun. $H(\bar{I})$, $H(I)$ 'nin en küçük NT kümesi olduğundan $H(\bar{I})$ kapalı değildir. Bu da $H(I)$ 'nin kapalı olmadığı anlamına gelir.

Teorem 5.3.4

(H_τ, H_τ) bir NT topolojik uzay olsun. $H(I_1)$ ve $H(I_2)$ $H_{\tau'}$ nin NT alt kümeleri olsun.

$$(1) \bar{\varphi} = \varphi$$

$$(2) \overline{H_\tau} = H_\tau$$

$$(3) \overline{H(I_1) \cup H(I_2)} = \overline{H(I_1)} \cup \overline{H(I_2)}$$

$$(4) \overline{H(I_1) \cap H(I_2)} = \overline{H(I_1)} \cap \overline{H(I_2)}$$

$$(5) \overline{\overline{H(I_1)}} = \overline{H(I_1)}$$

$$(6) H(I_1) \subset H(I_2) \text{ ise } \overline{H(I_1)} \subset \overline{H(I_2)}$$

İspat:

(1) Açıkça görülür.

(2) H_T ve $\overline{H_T}$ 'nin ikisi de kapalı kümelerdir ve bu nedenle Teorem 5.3.3'e göre

$$H_T = \overline{H_T}$$

dir.

(3) $(b_o, b_o, b_o) \in \overline{H(I_1)}$ olsun. (b_o, b_o, b_o) 'nun her NT komşuluğu $H_{(b_o, b_o, b_o)}$ kümesi $H(I_1)$ noktası içerir. Bu nedenle $H_{(b_o, b_o, b_o)}$, $H(I_1 \cup I_2)$ 'nin bir noktasını

içerir. Böylece $(b_o, b_o, b_o) \in \overline{H(I_1) \cup H(I_2)}$ olur. Dolayısıyla

$\overline{H(I_1)} \subset \overline{H(I_1) \cup H(I_2)}$ olur. Benzer şekilde $\overline{H(I_2)} \subset \overline{H(I_1) \cup H(I_2)}$ 'dir.

Böylece

$$\overline{H(I_1)} \cup \overline{H(I_2)} \subset \overline{H(I_1 \cup I_2)}$$

olur. Tersini düşünersek, tanım gereği $H(I_1) \subset \overline{H(I_1)}$ ve $H(I_2) \subset \overline{H(I_2)}$ 'ye sahibiz.

Buradan $H(I_1 \cup I_2) \subset \overline{H(I_1) \cup H(I_2)}$ olur. $\overline{H(I_1) \cup H(I_2)}$ kümesi $H(I_1 \cup I_2)$ elemanında içeren kapalı bir kümedir. Böylece

$$\overline{H(I_1) \cup H(I_2)} = \overline{H(I_1)} \cup \overline{H(I_2)}$$

olur.

(4) $H(I_1) \subset \overline{H(I_1)}$ ve $H(I_2) \subset \overline{H(I_2)}$ 'den $H(I_1) \cap H(I_2) \subset \overline{H(I_1)} \cap \overline{H(I_2)}$ yazabiliriz. $\overline{H(I_1)} \cap \overline{H(I_2)}$, NT kümesinde kapalı bir kümedir. Teorem 5.3.3 tarafından

$$H(I_1) \cap H(I_2) \subset \overline{H(I_1) \cap H(I_2)}$$

$$H(I_1) \cap H(I_2) \subset \overline{H(I_1)} \cap \overline{H(I_2)}$$

yazılır. Böylece

$$\overline{H(I_1) \cap H(I_2)} \subset \overline{H(I_1)} \cap \overline{H(I_2)}$$

olur.

(5)

Teorem 5.3.3 ‘den $\overline{H(I_1)}$, NT ‘de kapalı bir kümedir. Buradan

$$\overline{\overline{H(I_1)}} = \overline{H(I_1)}$$

yazılır.

(6)

$$H(I_1) \subset H(I_2)$$

5.4 Neutrosophic Üçlü Kümelerin Alt Uzayı

Tanım 5.4.1

(H_T, H_T) bir NT topolojik uzay ve $H(Y) \subset H_T$ olsun. Burada $H(Y) \neq \emptyset$ olsun. Sonra

$\tau_{H(Y)} = \{H(V) \cap H(Y) : H(V) \in H_T\}$ $H(Y)$ üzerindeki NTT, **neutrosophic üçlü kümelerin alt uzay topolojisi** olarak adlandırılır. $H(Y)$ 'deki açık kümeler, $H(Y)$ ile H_T ‘nin açık kümelerin tüm kesişimlerinden oluşur.

$H_{\tau_{H(Y)}}$ koleksiyonun $H(Y)$ üzerinde bir NTT olduğunu kontrol edelim. $H_{\tau_{H(Y)}}$ $H(Y)$ üzerindeki bir NT topolojisinin üç özelliğini karşılar.

T_1 : Varsayalım ki

$$H(O_1), H(O_2), \dots, H(O_H)$$

$H_{\tau_{H(Y)}}$ 'ye $H(Y)$ aittir.

Daha sonra, H_T 'ye ait H_T 'nin $H(U_1), H(U_2), \dots, H(U_H)$ alt kümeleri vardır, öyle ki

$$H(O_i) = H(Y) \cap H(U_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Şimdi } H(O_1) \cap H(O_2) \dots$$

$$H(O_n) = (H(Y) \cap H(U_1)) \cap (H(Y) \cap H(U_2)) \dots \cap (H(Y) \cap H(U_n))$$

$$= H(Y) \cap (H(U_1) \cap H(U_2) \dots \cap H(U_n))$$

$H(Y)$ 'de bir NT açık küme, çünkü

$$H(U_1) \cap H(U_2) \dots \cap H(U_n) \in \tau_{H(Y)}$$

$$\text{dir. Bu nedenle } H(O_1) \cap H(O_2) \dots H(O_n) \in \tau_{H(Y)}.$$

$H\tau H(Y)$ üyelerinin bu sonlu kesişim noktası yine $\tau_{H(Y)}$ 'dir.

T_2 : $\{H(O_\alpha): \alpha \in \Omega\}$, $H\tau H(Y)$ üyelerinin rastgele bir ailesi olsun. O halde, $H\tau$ üyesi bir $\{U_\alpha: \alpha \in \Omega\}$ ailesi vardır, öyle ki tüm $\alpha \in \Omega$ için $H(O_\alpha) = H(Y) \cap H(U_\alpha)$. Bu nedenle,

$$U_{\alpha \in \Omega} H(O_\alpha) = U_{\alpha \in \Omega} (H(Y) \cap H(U_\alpha)) = H(Y) \cap (U_{\alpha \in \Omega} U_\alpha)$$

dir. $H\tau$, $H(Y)$ üzerinde bir NTT olduğu için; $T, U \{H(U_\alpha): \alpha \in \Omega\} \tau$ içindedir. Bu nedenle $H(Y) \cap (U_{\alpha \in \Omega} U_\alpha) \in H_{\tau_{H(Y)}}$ 'dır.

Dolayısıyla, $U_\alpha \in \Omega H(O_\alpha) \tau_{H(Y)}$ 'ya aittir. Dolayısıyla, $H_{\tau_{H(Y)}}$ üyelerinin keyfî birliği de $H_{\tau_{H(Y)}}$ içindedir.

T_3 : $H(Y)$ ve φ , $H_{\tau_{H(Y)}}$ 'ye aittir. Çünkü $H(Y) \cap H\tau = H(Y)$ ve $H(Y) \cap \varphi = \varphi$

Dolayısıyla, $H_{\tau_{H(Y)}}$

$H(Y)$ üzerinde bir NTT' dir.

Örnek 5.4.2

$H\tau = \{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2), (b_3, b_2, b_3)\}$ NTT ile Örnek 5.2.3' teki gibi olsun.

$H\tau = \{\varphi, \{(b_1, b_3, b_1)\}, \{(b_2, b_2, b_2)\}, \{(b_2, b_2, b_2), (b_1, b_3, b_1)\}, H\tau\}$

ve $H(Y) = \{(b_1, b_3, b_1), (b_3, b_2, b_3)\}$ T' nin her bir üyesinin $H(Y)$ ile kesişimini almak. Sonra

$$\varphi \cap H(Y) = \varphi$$

$$\{(b_1, b_3, b_1)\} \cap H(Y) = \{(b_3, b_2, b_3)\}$$

$$\{(b_2, b_2, b_2)\} \cap H(Y) = \varphi$$

$$\{(b_1, b_3, b_1), (b_2, b_2, b_2)\} \cap H(Y) = \{(b_1, b_3, b_1)\}$$

$$H_T \cap H(Y) = H(Y)$$

$$\tau_{H(Y)} = \{\varphi, \{(b_1, b_3, b_1)\}, H(Y)\}.$$

5.6 Uygulamalar

Matematikte topoloji; esneme, bükülme, buruşma ve eğilme gibi sürekli formasyonlar üzerinde kullanılır. Topoloji gibi, NTT de neutrosophic üçlü kümeler fikrini kullanarak bir kümenin elemanlarının uzamsal olarak bir birleriyle nasıl daha kapsamlı bir şekilde ilişkilendirildiğini anlatır. Biyoloji, bilgisayar bilimi, fizik, robotik, oyunlar, bulmacalar ve fiber sanatı vb. gibi farklı birçok alanda uygulanabilir. Burada NTT' nin biyolojideki uygulamasını inceliyoruz. Diyelim ki, belirli bir DNA tipimiz var ve NT kümeler fikrini kullanarak I_1, I_2, I_3 gibi belirli enzimlerin seçilen DNA üzerindeki kombine etkilerini tartışacağız. Bu enzimler DNA' yı keser, bükür ve yeniden bağlayarak gözlenebilir etkilerle düğümlenmeye neden olur. $H = \{I_1, I_2, I_3\}$ kümesini varsayın ve birbirleri üzerindeki karşılıklı etkilerinin aşağıdaki tabloda gösterildiğini varsayalım. O halde $(I_1, I_3, I_1), (I_2, I_2, I_2)$ ve (I_3, I_2, I_3) H'nin neutrosophic üçlüleridir. Burada (I_1, I_3, I_1) enzimlerin I_1, I_3 birbirlerinin ters ve etkisiz elemanların rolünü üstlendiği anlamına gelir. (I_2, I_2, I_2) enzim I_2 ' nin etkisiz ve ters içermediği ve I_1, I_3 'ün ters olduğu ve farklı durumlarda birbirlerinden bağımsız.

$$H_T = \{(I_1, I_3, I_1), (I_2, I_2, I_2), (I_3, I_2, I_3)\} \text{ H' nin üçlü kümesi olsun.}$$

$$P(H_T) = \{\emptyset, \{(I_1, I_3, I_1)\}, \{(I_2, I_2, I_2)\}, \{(I_3, I_2, I_3)\}, \{(I_1, I_3, I_1), (I_2, I_2, I_2)\}, \\ \{(I_2, I_2, I_2), (I_3, I_2, I_3)\}, \{(I_1, I_3, I_1), (I_3, I_2, I_3)\}, H_T\}.$$

Burada $P(H_T)$ 'nin ters ve etkisiz elemanların tüm olası sonuçlarını tartışılır.

Aşağıdaki iki $P(H_T)$ alt kümesini düşünelim:

$\tau_1 = \{\emptyset, \{(I_1, I_3, I_1)\}, H_T\}$ ve

$\tau_2 = \{\emptyset, \{(I_3, I_2, I_3)\}, \{(I_1, I_3, I_1)\}, \{(I_3, I_2, I_3), (I_1, I_3, I_1)\}, H_T\}$ olur.

O halde τ_1 ve τ_2 , neutrosophic üçlü topolojileridir ve DNA' yı etkileyen enzimlerin kombinasyonunu temsil eder.

$\tau_3 = \{\emptyset, \{(I_3, I_2, I_3)\}, \{(I_2, I_2, I_2)\}, H_T\}$ NTT değildir ve şu kombinasyonun kısaltmasıdır:

$\{(I_3, I_2, I_3)\}, \{(I_2, I_2, I_2)\}$ birleşimi olarak DNA' yı etkilemeyen enzimler τ_3 'e ait değildir.

τ_1 ve τ_2 neutrosophic üçlü topolojileri gibi $\tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1$ ve $\tau_1 \cup \tau_2 = \tau_2$ yine bir neutrosophictir. DNA' yı etkileyen üçlü topolojidir.

NTT kümesi $\emptyset$ gibi herhangi bir yanıt alamadığımız enzimlerin kombinasyonunu temsil ederken, neutrosophic üçlü topoloji $P(H_T)$, en güçlü durumudur. DNA'yı etkileyen enzimlerin kombinasyonudur. Şimdi, bu problem hakkında daha fazla fikir edinmek istiyorsak NT kümeleri gibi diğer kavramları kullanabiliriz. Öte yandan Leonhard Euler, bir rota bulmanın imkansız olduğunu problem gösterdi. Yedi köprüsünün her birini tam olarak bir kez geçecek olan kasabanın içinden rotası herhangi bir fiziksel senaryoya bağlı olmadığından, ancak köprüler arasındaki uzamsal bağlantıya bağlı olduğundan, bu problem bizi NTT kavramını kullanan NT grafik teorisine götürür.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu çalışmanın birinci bölümünde, neutrosophic üçlü kümelerin tarihsel gelişim sürecinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bulanık kümeler ve neutrosophic kümelerin tanım ve teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, neutrosophic üçlü halka tanımlanmıştır. Ayrıca sıfır bölen, neutrosophic üçlü alt halkası, neutrosophic üçlü ideal, üstel sıfır, integral neutrosophic üçlü alanı, neutrosophic üçlü halka homomorfizmasını ve son olarak neutrosophic üçlü cisimler tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, neutrosophic üçlü yarı grubunun olmadığı ispatlanmıştır. Neutrosophic ikili zayıf yarı gruplar tanıtılmıştır. Neutrosophic üçlü sadeleştirilebilir yarı-gruplar ispatlanmıştır. Son olarak, BCI cebirlerinde neutrosophic üçlüleri ve zayıf neutrosophic ikililer tanımlanmıştır. Beşinci bölümde, neutrosophic üçlü topoloji tanımlanmıştır. Bazı özellikleri ve tanım teoremleri verilmiştir. NT kapanışı ve NT alt uzayı tanımlanmıştır. Son olarak NTT ile çok değişmeli karar verme uygulaması tartışılmıştır.

Gelecekte, neutrosophic üçlü halka, neutrosophic üçlü sadeleştirilebilir yarı-grup ve neutrosophic üçlü topolojiyi daha çok geliştirebiliriz.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control. *Fuzzy sets*. **8(3)**, 338-335.
- [2] Atanassov, T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets, Systems*. **20**, 87-96.
- [3] Smarandache, F. (1998). Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set, Logic. Rehoboth: American Research Press. 1-158.
- [4] Wang, H., Smarandache, F., Zang, Y., Sunderraman, R. (2010). Single valued neutrosophic sets. *Multispace and Multistructure*. **4**, 410-413.
- [5] Kandasamy, W., Smarandache, F. (2004). *Basic Neutrosophic Algebraic Structures, Their Applications to Fuzzy, Neutrosophic Models*. Frontigan, France.
- [6] Smarandache, F., Ali, M. (2018). Neutrosophic triplet group. *Neural Computing and Applications*. **29(7)**, 595-601.
- [7] Smarandache, F. (2017). *Neutrosophic Perspectives: Triplets, Duplets, Multisets, Hybrid Operators, Modal Logic, Hedge Algebras. Applications. Second extended and improved edition*.
- [8] Kandasamy, W., Smarandache, F. (2006). *Some Neutrosophic Algebraic Structures and Neutrosophic N-Algebraic Structures*.
- [9] Baykal, N., Beyan , T. (2004). *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*. Bıçaklar Kitapevi. Matematik dizisi No:1.
- [10] Despi, I., Opriş, D., Yalcin, E. (2013). *Generalised Atanassov Intuitionistic Fuzzy Sets*.
- [11] Li, D., Cheng, C. (2002). *New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions*. *Pattern Recognition Letters*.
- [12] Peng, Juan-juan, Wang, Jian-qiang, Chen, Xiao-hong, Wu, Xiao-hui. (2015). Multi-valued Neutrosophic Sets and Power Aggregation Operators with Their Applications in Multi-criteria Group Decision-making problems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*. **8(2)**, 345-363.

- [13] Iseki, K. (1966). *An algebra related with a propositional calculus. Proc. Jpn. Acad.* **42**, 26-29.
- [14] Zhang, X. H. (2008). *Fuzzy Logics and Algebraic Analysis; Science Press.* Beijing, China.
- [15] Huang, Y. (2006). *BCL- Algebra.* Beijing, China.
- [16] Zhang, X., Jun, Y. (2014). Anti-Grouped Pseudo-BCI Algebras and Anti-Grouped Pseudo-BCI Filters. *Fuzzy Sets. Math.* **28**, 21-33.
- [17] Zhang, X., Smarandache, F., Liang, X. (2017). Neutrosophic duplet semi-group and cancellable neutrosophic triplet groups. **9(11)**, 275.
- [18] Zhang, H., Wang, J., Chen, X. (2014). Interval neutrosophic sets and their application in multi criteria decision making problems. *The Scientific World Journal.* **288**, 55-72.
- [19] Smarandache, F. (2005). *Neutrosophic set- A generalization of the intuitionistic fuzzy sets. Int. J. Pure Appl. Math* **24(3)**
- [20] Sahin, M., Kargin, A., Smarandache, F. (2019). *Neutrosophic Triplet Topology, Neutrosophic Triplet Structures; Pons Editions Brussels.* Brussels, Belgium. **1(4)**, 43-54.
- [21] Zhang, X., Smarandache, F., Ali, M., Liang, X. (2018). Commutative neutrosophic triplet group and neutro-homomorphism basic theorem. *Ital. J. Pure Appl. Math.* **40**, 353-375.

ÖZGEÇMİŞ

İsim: Güler

Soyisim: ATAŞ

Eğitim Bilgileri:

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Yıl
Yüksek Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2021
Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2017
Lise	Sayısal	Mimar Sinan Lisesi	2013

Katılımlar

İKSAD ve Gaziantep Üniversitesi TBMYO tarafından Gaziantep’ te düzenlenen III. Uluslararası Mesleki ve Teknik Bilimler Kongresi

EJONS 5.Uluslararası Matematik Kongresi, Mühendislik, Natural ve Tıbbi Bilimler