

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR NÜMERİK ŞEMA



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ARSLAN

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

HAZİRAN 2026

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR NÜMERİK ŞEMA**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Merve ARSLAN
(36233614006)**

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

HAZİRAN 2026

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR NÜMERİK ŞEMA

Tezi Hazırlayan: Merve ARSLAN
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle yolumu aydınlatan, sabrı ve desteğiyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY'a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Kendilerinin rehberliği, akademik bakış açımın gelişmesinde önemli katkılar sağlamıştır. Çalışma kapsamında kullanılan MATLAB programlarının yazılımında ve tez ile ilgili her sorunda yardımcı olan, desteğini esirgemeyen Sayın Hocalarım Prof.Dr. Yusuf UÇAR ve Prof.Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya, ders döneminde ve tez yazım sürecinde verdiği motivasyon ile destek olan Sayın Prof.Dr. Emine Nesligül AKSAN'a, tezin yazım ve düzenlenmesi aşamasında katkılar sağlayan ve kıymetli yönlendirmeleriyle yol gösteren Sayın Prof.Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e içtenlikle teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Hayatımın her döneminde desteğini ve sevgisini her daim hissettiren, bugüne gelmemdeki en büyük emek sahibi olan sevgili annem Melike SARICI ve babam Hakan SARICI ile kardeşlerim Kadir Safa ve Melisa'ya teşekkür ederim.

En büyük teşekkürlerden birini de yaşadığım her zorlukta bana destek olup beni motive eden, maddi ve manevi desteği ile her zaman yanımda olan yol arkadaşım, sevgili eşim Kürşad ARSLAN'a ediyorum.

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Newell-Whitehead-Segel Denkleminin Yaklaşık Çözümü İçin Bir Nümerik Şema” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Merve ARSLAN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Kapsamı ve Model Problem	1
1.2 Literatür Taraması.....	3
2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1 Sonlu Farklar Yöntemine Giriş	6
2.2 Temel Kavramlar	8
2.2.1 Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı.....	8
2.2.2 Yerel kesme hatası	9
2.2.3 Tutarlılık	9
2.2.4 Kararlılık.....	10
2.2.5 von-Neumann yöntemi	10
2.2.6 Matris yöntemi.....	12
2.2.7 Yakınsaklık	12
2.2.8 Lax'ın denklik teoremi	12
3. NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMİ İÇİN SONLU FARK ŞEMASI	13
3.1 Crank-Nicolson Tipi Sonlu Fark Şemasının Türetilmesi	13
3.2 Şemanın Yerel Kesme Hatası	16
3.3 Şemanın Kararlılık Analizi.....	18
4. ÖRNEK PROBLEMLER ve NÜMERİK SONUÇLAR.....	20
4.1 Örnek Problem 1	20
4.2 Örnek Problem 2.....	24
4.3 Örnek Problem 3.....	29
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ	37

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 : Türevler için sonlu fark formülleri.....	8
Çizelge 4.1 : Problem 1'in $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri.....	21
Çizelge 4.2 : Problem 1'in $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları.....	22
Çizelge 4.3 : Problem 1'in yaklaşık yakınsaklık mertebeleri.....	22
Çizelge 4.4 : Problem 1'in $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.....	23
Çizelge 4.5 : Problem 1'in $h = 0.01$ ve $k = 0.001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.....	24
Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $k = 0.0001$ için farklı h ve $t = 0.2(0.2)1.0$ bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri....	25
Çizelge 4.7 : Problem 2'nin $k = 0.0001$ için farklı h ve $t = 0.01, 0.1, 5, 10$ bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri....	26
Çizelge 4.8 : Problem 2'nin $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları.....	26
Çizelge 4.9 : Problem 2'nin yaklaşık yakınsaklık mertebeleri.....	27
Çizelge 4.10 : Problem 2'nin $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.....	28
Çizelge 4.11 : Problem 3'ün $k = 0.0001$ ve farklı h için L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri.	30
Çizelge 4.12 : Problem 3'ün yaklaşık yakınsaklık mertebeleri.....	30
Çizelge 4.13 : Problem 3'ün $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.....	31

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 : Grid noktalarının gösterimi.	7
Şekil 4.1 : Problem 1'in $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ için $t = 10$ 'da tam ve yaklaşık çözümlerinin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri.	24
Şekil 4.2 : Problem 2'nin $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ için $t = 10$ 'da tam ve yaklaşık çözümlerinin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri.	28
Şekil 4.3 : Problem 3'ün $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ için $t = 1$ 'de tam ve yaklaşık çözümlerinin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri.	32



SEMBOLLER VE KISALTMALAR

x	: Konum Değişkeni
t	: Zaman Değişkeni
h	: Konum Adım Büyüklüğü
k	: Zaman Adım Büyüklüğü
(x_i, t_m)	: Grid Noktası
V (x_i , t_m)	: Tam Çözüm
V_i^m	: Yaklaşık Çözüm
L₂	: Ortalama Kare Hata Normu
L_∞	: Maksimum Hata Normu
Abs	: Mutlak Hata
YKH	: Yerel Kesme Hatası
CPU(s)	: Merkezi İşlem Birimi
M(L₂)	: L_2 Hata Normundaki Yakınsaklık Mertebesi
M(L_∞)	: $L_∞$ Hata Normundaki Yakınsaklık Mertebesi
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
NWS	: Newell-Whitehead-Segel
I-EFD	: Implicit Exponential Finite Difference
FI-EFD	: Fully Implicit Exponential Finite Difference
ExBSM	: Exponential B-spline Method
UCBS	: Uniform Cubic B-spline
TCBS	: Trigonometric Cubic B-spline
ECBS	: Extended Cubic Uniform B-spline

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR NÜMERİK ŞEMA

MERVE ARSLAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

37+viii sayfa

2026

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Belirli başlangıç-sınır şartları ile verilen 1-boyutlu non-lineer Newell-Whitehead-Segel (NWS) tipi kısmi diferansiyel denklemlerin Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson tipi sonlu fark yöntemi ile yaklaşık çözümlerini bulmayı amaçlayan bu yüksek lisans tezi beş bölüm olarak planlandı.

Bölüm 1’de önce model problem olarak ele alınacak olan NWS denklemi kısaca tanıtıldıktan sonra çözümleri ile ilgili literatür taraması verildi.

Bölüm 2’de özellikle tezde kullanılacak olan Sonlu Farklar Yöntemi’nin temel prensipleri ile birlikte bazı gerekli tanım ve kavramlardan bahsedildi.

Bölüm 3’te, Bölüm 1’de NWS denklemi ile verilen model problemin Richtmyer lineerleştirmeli Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması çıkartıldı. Ayrıca bu bölümde elde edilen şemanın yakınsaklık mertebesi hesaplandı ve von-Neumann kararlılık analizi yardımıyla şemanın şartsız kararlı olduğu gösterildi.

Bölüm 4’de NWS denklemi ile verilen üç örnek problem kısaca tanıtıldı. Her bir probleme Bölüm 3’te sunulan şema uygulandı ve hesaplanan bazı yaklaşık sonuçlar kendi aralarında ve aynı zamanda literatürde var olan diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla çizelgelerde karşılaştırıldı. Ayrıca yaklaşık sonuçların sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışını sergilediklerini göstermek için bazı grafikler verildi.

Son bölüm olan Bölüm 5’de ise tezin teorik katkıları ve sayısal bulguları ile birlikte ileride yapılacak olan çalışmalar için kısa bir öneride bulunuldu.

Anahtar Kelimeler: Newell-Whitehead-Segel (NWS) Denklemi, Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi, Richtmyer Tipi Lineerleştirme, von-Neumann Kararlılık Analizi, Hata Normları, Yerel Kesme Hatası

ABSTRACT

Master Thesis

A Numerical Scheme for the Approximate
Solution of the Newell-Whitehead-Segel Equation

Merve ARSLAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

37+viii pages

2026

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

This master's thesis which aims to find approximate numerical solutions of one-dimensional nonlinear Newell-Whitehead-Segel (NWS) type partial differential equations under specific initial and boundary conditions by means of Richtmyer linearized Crank-Nicolson type finite differences method is planned in five chapters.

In Chapter 1, firstly the NWS equation to be considered as the model problem, is briefly introduced. A literature review regarding the solutions of the equation is then presented.

In Chapter 2, the fundamental principles of the finite differences method to be used in this thesis are given along with some necessary definitions and concepts.

In Chapter 3, the Crank–Nicolson-type finite difference scheme with Richtmyer linearization was derived for the model problem given by the NWS equation in Chapter 1. Furthermore, the order of convergence of the scheme obtained in this chapter was computed, and the scheme was shown to be unconditionally stable by means of von-Neumann stability analysis.

In Chapter 4, three example problems with exact solutions given by the NWS equation have been briefly introduced. The scheme presented in Chapter 3 is successfully is applied to each problem, and some computed numerical results are compared among themselves as well as with the results by other researches in the literatures using tables. Additionally, some graphs are provided to illustrate the continuity of the computed numerical results and to show that each considered problem exhibits its correct physical behaviors.

In Chapter 5, which is the final chapter of the thesis, the theoretical contributions and numerical findings of the thesis are summarized along with a brief suggestion for future research.

Keywords: Newell-Whitehead-Segel (NWS) Equation, Crank-Nicolson Finite Difference Method, Richtmyer Type Linearization, von-Neumann Stability Analysis, Error Norms, Local Truncation Error

1. GİRİŞ

1.1 Tezin Kapsamı ve Model Problem

Matematik evrende; mühendislik, teknoloji, kimya, fizik ve biyoloji gibi birçok alanın temelini oluşturmaktadır. Matematiksel model ise günlük hayatta karşılaştığımız farklı olayların herhangi bir sisteminin matematik denklemleri, dili ve kuralları kullanılarak ifade edilmesidir. Matematikte karşılaşılan denklemler genellikle cebirsel, diferansiyel ve integral denklemlerden oluşmaktadır. Bu denklemler arasında bulunan Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD); kimya, fizik ve mühendislik gibi disiplinlerde birçok fiziksel olayın modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Özellikle non-linear KDD'ler; doğada akışkanlar dinamiği, hava tahminleri, nükleer reaksiyonlar ve yer kabuğu hareketleri gibi birçok karmaşık fiziksel sürecin anlaşılmasına yardımcı olmaktadır. Mühendislikte ise yapıların dinamiği, malzeme dayanımı, elektronik devreler ve biyomedikal mühendisliği gibi alanlarda kullanılan modeller non-linear KDD'leri içermektedir. Non-linear KDD'lerin analiz edilmesi çoğu zaman zor ve karmaşıktır. Bilindiği gibi çok değişkenli fonksiyonları ve bunların kısmi türevlerini içeren bir KDD; lineer veya non-linear bir yapıda olabilir. Non-linear KDD'ler adından da anlaşılacağı gibi non-linear terimler içerir ve bu da onları daha karmaşık hale getirir [1].

Bu çalışmada ele alınacak olan 1-boyutlu non-linear Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemi ise reaksiyon-difüzyon tipi bir KDD'dir. Ayrıca bu denklem, standart ısı denklemindeki difüzyon terimine ek olarak reaksiyon kısmını da içerir.

Bu çalışmada model problem olarak

$$V_t = \alpha V_{xx} + \beta V + \gamma V^p, \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (1.1.1)$$

NWS denklemi

$$V(x, 0) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.1.2)$$

başlangıç şartı ve

$$V(a, t) = g_1(t), \quad V(b, t) = g_2(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.1.3)$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Burada $f(x)$, $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ önceden verilen tanımlı fonksiyonlardır.

Denklemden görülen V^p non-lineer terimi Richtmyer tipi lineerleştirme tekniği ile lineerleştirilerek (1.1.1)-(1.1.3) ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemi üzerine temellenmiş Crank-Nicolson tipi nümerik şeması verilecektir. Burada $p \geq 2$ bir tam sayı olup denklemden yer alan V_t terimi sistemdeki model ve örüntü değişkeninin zamana bağlı olarak değişimini, konumsal türev içeren αV_{xx} terimi ise fiziksel olarak konumsal yayılmayı ya da difüzyon yayılma mekanizmasını temsil etmektedir. Modelin lineer terimi olan βV , modelin küçük bozulmalara karşı dayanıklılığını belirlemektedir. $\beta > 0$ olması durumu sistemin kararsız hale gelmesine ve dolayısıyla bozulmasına sebep olurken, $\beta < 0$ olması durumu ise sistemi kararlı hale getirir. Denklemin non-lineer kısmını oluşturan γV^p terimi örüntünün kararlılık seviyesine ulaşmasını sağlar. Dolayısıyla denklemin oluşturan her bir terim, sistemdeki hem kararlılığı dengede tutar hem de oluşan örüntülerin konumsal ve zamansal olarak davranışını belirleyen fiziksel süreçleri belirtmektedir. NWS denklemi, literatürde eksik olan örüntü oluşumunun basitleştirilmiş ve evrensel bir matematiksel model ihtiyacını karşılamaktadır.

Bu tezin amacı, yukarıda model problem olarak ele alınan başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü Crank-Nicolson sonlu farklar yöntemi ile Richtmyer tipi lineerleştirme tekniğini kullanarak elde etmektir. Buradaki amaç, denklemden non-lineer V^p terimini lineerleştirerek model problem olarak göz önüne alınan yukarıdaki başlangıç-sınır değer problemini her bir zaman adımında üç-köşegenli bir lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürmektir. Bu kapsamda, tezin ilerleyen kısımlarında aşağıdaki adımlar izlenmiştir.

Örnek Problemlerin Tanıtılması: Model problem için tam çözümü bilinen üç test problem ele alındı.

Crank-Nicolson Ayırıştırması: Zaman türevi m -inci zaman adımında $O(k)$ mertebeden ileri fark ve konum türevleri $O(h^2)$ mertebeden m -inci ve $(m+1)$ -inci zaman adımlarının ortalaması alınarak ayırıştırıldı.

Non-Linear Terimin Lineerleştirilmesi: V^p terimi Richtmyer yaklaşımı kullanılarak lineer hale getirildi.

Cebirsel Sistemin Oluşturulması: Her zaman adımında $W_i = V_i^{m+1} - V_i^m$ bilinmeyenli üç-köşegenli bir $AW = B$ lineer cebirsel denklem sistemi elde edildi.

Hata Analizi: Oluşturulan şemanın yerel kesme hatasının $O(k^2) + O(h^2)$ olduğu gösterildi.

Sayısal Deneyler: Ele alınan her üç örnek problem için denklemde görülen parametrelerle birlikte h ve k 'nin farklı değerleri kullanılarak L_2 ve L_∞ hata normları, $CPU(s)$ işlemci süreleri ve yaklaşık yakınsaklık mertebeleri hesaplandı. Hesaplanan yaklaşık sonuçların teorik değerleri ile uyumlulukları gösterildi ve ayrıca literatürdekilerle karşılaştırıldı.

Değerlendirme: Yöntemin avantajları, sınırlılıkları ve gelecekteki uygulamaları kısaca tartışıldı.

1.2 Literatür Taraması

Newell-Whitehead-Segel (NWS) denklemi; 1969 yılında Alan Newell ve John A. Whitehead isimli iki matematikçi ile biyolog Lee A. Segel'in iş birliği sonucunda ortaya çıkmıştır [2]. Genellikle reaksiyon-difüzyon sistemlerini tanımlamak için kullanılır. Bu sistemler, kimyasal veya biyolojik bileşenlerin birbirleriyle etkileşerek zamanla uzaysal örüntüler oluşmasına neden olur. NWS denklemi, bu tür etkileşimleri modellemek için kullanılan non-lineer bir KDD'dir. Genellikle biyolojik popülasyonların dinamiklerini, ekolojik dengeyi ve kimyasal reaksiyonları incelemek amacıyla kullanılmaktadır. Bu alanlardaki kullanımlarına örnek verilecek olursa biyoloji biliminde bakteri popülasyonlarının büyüme ve yayılma şekillerini modellemek için kullanılır. NWS denklemi ile bakteri kolonilerinin yüzeylerde oluşturduğu desenler analiz edilebilir. Kimya biliminde, moleküllerin belirli bir düzen ve yapı oluşturduğu kimyasal süreçlerle birlikte, kimyasal maddelerin belirli bir düzen içinde kendiliğinden reaksiyona girdiği sistemlerde kullanılmaktadır. Belousov-Zhabotinsky sistemi gibi osilasyonlu süreçler, bu sistemlere örnek olarak verilebilir. Ayrıca akışkanlar dinamiğinde, akışkanların hareketini ve bu hareketler sırasında oluşan girdap ve desenleri incelemek için bu denklemden yararlanılmaktadır. Faraday kararsızlığı gibi mekanik dalgaların incelenmesinde, tıp alanında medikal görüntüleme cihazları ile elde edilen verilerin analizinde ve ayrıca meteoroloji alanında hava tahminlerinin kesinliğini ve güvenilirliğini artırmak için de NWS denklemi tercih edilir.

NWS denkleminin çözümü analitik olarak genellikle her zaman mümkün olmamaktadır. Karmaşık yapısı ve non-lineer terimleri içermesi nedeniyle bu tür denklemlerin çözümleri çoğu zaman yalnızca yaklaşık yöntemlerle elde edilebilir. Yaklaşık yöntemler, çözümün zamanla nasıl evrildiğini gözlemlemek ve sistemin parametrelerine bağlı olarak farklı davranışlar sergileyip sergilemediğini belirlemek açısından kritik öneme sahiptir. Bu bağlamda, doğru ve

verimli yaklaşık yöntemlerin geliştirilmesi, NWS denkleminin farklı koşullarda daha geniş bir yelpazede incelenmesine olanak tanımıştır [3].

Mevcut literatür incelendiğinde, NWS denkleminin analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri açısından zengin bir araştırma alanı bulunmaktadır. Analitik yöntemler, denklemin belirli sınır ve başlangıç koşulları altında kesin sonuçlar vermesini sağlamaktadır. Bununla birlikte, birçok durumda denklemin analitik çözümünü bulmak zor olabilir. Bu tür problemlerin çözümünü elde etmek için uğraşan uygulamacılar genellikle yaklaşık yöntemler kullanırlar. Yaklaşık yöntemler, genelleştirilmiş teorik çözüm yerine var olan veriler ışığında yorum yapılmasını kolaylaştıran yöntemler olarak tanımlanabilir. Hatta analitik çözüme sahip olan problemlerin bile işlem kolaylığı gibi elemanter sebeplerden dolayı sayısal yöntemler kullanılarak çözüldüğü görülmektedir. Fakat bazı problemlerin her zaman tam çözümü imkansız veya çok zordur. Yaklaşık çözüm yöntemleri böyle durumlarda devreye girer ve bu yöntemler, karmaşık problemlerin yaklaşık çözümlerini sunar.

NWS denkleminin analitik/yarı-analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleriyle ilgili literatürde bulunan çalışmaların bazıları şunlardır: Hariharan [4], bu çalışmada Newell-Whitehead ve Allen-Chan denklemlerinin yaklaşık çözümleri için laplace dönüşüm yöntemi ve Legendre dalgacıkları yöntemini birleştiren dalgacık tabanlı birleştirilmiş bir yöntem uyguladı. Korkmaz [5], NWS ve Zeldovich denklemlerinin karmaşık ve kesin çözümlerini bulmak için homojen denge ve Sinüs Gordon yöntemlerini kullandı. Saha ve Das [6], bozulmuş ve bozulmamış genelleştirilmiş NWS denkleminin doğrusal olmayan dalga çözümlerinin dinamik davranışını, farklı sembolik araçlar (Poincare kesiti, çatallanma diyagramı, hassasiyet analizi, faz düzlemi analizi ve Lyapunov üssü) ve düzlemsel dinamik sistemlerin çatallanma teorisini kullanarak ele aldılar. İnan vd. [7], genel NWS tipi denklemleri sırasıyla birleşik yöntem ve açık üstel sonlu farklar yöntemi kullanılarak analitik ve yaklaşık olarak incelediler. Wasim vd. [8], NWS denkleminin çözümü için üstel B-spline yöntemini uyguladılar. Hilal vd. [9], çalışmalarında NWS denklemini çözmek için kapalı üstel sonlu fark yöntemi ve tamamen kapalı üstel sonlu fark yöntemi olmak üzere iki farklı yöntem sundular. Gupta vd. [10], NWS denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için He'nin Varyasyonel Yineleme Yöntemi'ni kullandılar. Liagat vd. [11], fizikteki en önemli genlik denklemlerinden olan NWS denklemlerinin yaklaşık ve kapalı form çözümlerini elde etmek için yeni bir şema sundular. Patel vd. [12], NWS denkleminin tam çözümünü değerlendirmek için güvenilir bir yarı-analitik(semi-analytical) yaklaşım önerdiler. Hussain [13], NWS denkleminin seri çözümünü bulmak için iki adımlı bir yaklaşım sundu.

Hashemi ve Mirzazadeh [14], çalışmalarında bir reaksiyon difüzyon sistemi olan stokastik NWS modelinin kesin çözümlerini elde etmek için yeni bir yöntem olan Nucci'nin indirgeme yöntemini önerdiler. Pathak vd. [15], NWS tipi denklemleri çözmek için dördüncü dereceden kübik B-spline kolokasyon yöntemini önerdiler. Alsofey ve Al-Rozbayani [16], denklemi çözmek için Elzaki dönüşümünü ve tersini homotopik bozulma yaklaşımıyla birleştirdiler. Kamaruddin ve Puzi [17], NWS denkleminin çözümlerini yaklaşık olarak belirlemek için açık üstel sonlu fark yöntemi ve açık ileri zaman merkezli uzay şemasını kullandılar. Tarei vd. [18], son yıllarda Tarei vd. çalışmalarında bir kolokasyon yöntemi ve sözde operasyonel matrisleri kullanarak genelleştirilmiş NWS problemini yaklaşık olarak çözdüler.

Bu tez çalışmasının temel amacı; literatürde mevcut olan başlangıç-sınır şartları ile verilen 1-boyutlu non-linear NWS tipi kısmi diferansiyel denklemlerin, Richtmyer lineerleştirme tekniği yardımıyla yaklaşık çözümlerini bulmaktır. Bunun için yine literatürde yaygın olarak kullanılan sonlu fark yöntemlerinden Crank-Nicolson tipi fark yaklaşımı kullanıldı. Genel olarak herhangi bir sonlu fark yönteminde olduğu gibi bu yöntem de KDD'de görülen türevler veya diferansiyel operatörlerin yerine, Taylor serisi açılımlarından elde edilen sonlu fark formülleri olarak bilinen cebirsel ifadeleri kullanarak sürekli problemi ayrıklaştırması ve böylece herhangi bir cebirsel denklem sistemine dönüştürmeyi hedefler. Sonlu fark yöntemleri, uygulama sürecinde belirli hatalar içerir. Bu hatalar, denklemin tanımlı olduğu çözüm bölgesinin düzgün bir parçalanışı sonucunda elde edilen aralıkların küçük seçilmesiyle azaltılabilir.

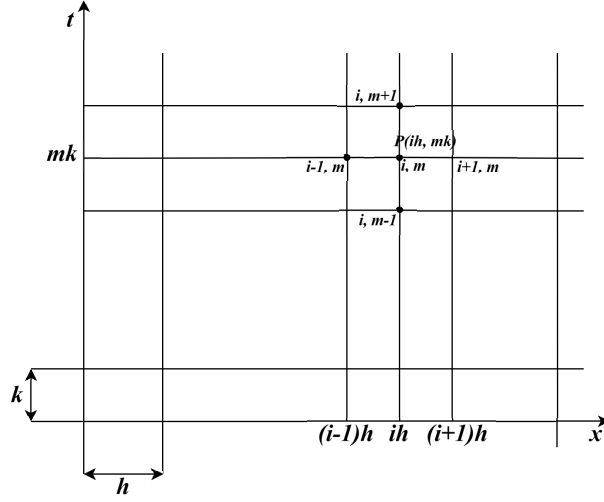
2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan sonlu farklar yöntemi ile birlikte bazı temel tanım ve kavramlar verildi. Bu bölüm, [19] no'lu referans esas alınarak hazırlandı.

2.1 Sonlu Farklar Yöntemine Giriş

Doğada ortaya çıkan pek çok fiziksel, kimyasal ve biyolojik olayın matematiksel modellemesinde kullanılan non-lineer diferansiyel denklemler, analitik olarak çözülemeyecek kadar karmaşık bir yapıya sahip olabilir. Bu nedenle bu tip denklemlerle verilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde yaklaşık yöntemler önemli bir yer tutmaktadır. Bu yöntemler arasında en yaygın ve etkili olanlardan biri sonlu farklar yöntemidir. Yöntem, hem uygulanabilir hem de hesaplamaya elverişli olduğu için ısı transferi, difüzyon, akışkanlar mekaniği ve reaksiyon-difüzyon sistemleri gibi pek çok alanda sıklıkla kullanılmaktadır.

Genel olarak sonlu farklar yöntemi, sürekli değişkenlere bağlı başlangıç ve sınır şartları ile verilen diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü ayrık noktalarda cebirsel işlemler kullanılarak yaklaşık olarak elde etmeye olanak tanıyan bir yöntemdir. Bu yöntemde, türev kavramı analitik tanımından bağımsız olarak ardışık noktalardaki fonksiyon değerleri arasındaki fark oranları kullanılarak ifade edilir. Süreklilik özelliğine sahip konum ve zaman değişkenleri belirli adım büyüklükleriyle bölünerek sonlu sayıda ayrık noktadan oluşan Şekil 2.1'de görüldüğü gibi bir grid (mesh veya düğüm) yapısına dönüştürülebilir. Sonra problemdeki türevler ve sınır şartları yerine Taylor serisi yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark formülleri yazılır. Böylece başlangıç ve sınır değer probleminin çözümü, fark denklemlerinden oluşan lineer veya non-lineer bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Daha sonra cebirsel denklem sistemi ile sonuçlanan nümerik şemanın yakınsaklığı analiz edilir. Bunun için genellikle Lax'ın denklik teoreminin bir sonucu olarak şemanın tutarlılığı ve kararlılığı incelenir. Şemanın yakınsaklığı garanti edildikten sonra, elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt çözüm yöntemleri veya yinelemeli (iteratif) yöntemlerden biri yardımıyla çözülebilir. Böylece göz önüne alınan problemin istenilen düğüm noktalarında yaklaşık çözümleri elde edilir.



Şekil 2.1 : Grid noktalarının gösterimi.

Burada V , x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. x konum değişkeni, t zaman değişkeni olmak üzere, $V = V(x, t)$ bilinmeyenli kapalı formda

$$G(x, t, V, V_t, V_x, V_{xx}) = 0$$

olarak verilen 2. mertebeden 1-boyutlu kısmi diferansiyel denklemin $(x, t) \in [x_a, x_b] \times [0, T]$ çözüm bölgesinde belirli başlangıç ve sınır şartlarıyla birlikte göz önüne alındığını kabul edelim. Denklem lineer veya non-lineer olabilir. Problemin çözüm bölgesi

$x \in [x_a, x_b]$ konum aralığı $x_a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = x_b$; $h = x_{i+1} - x_i = \frac{x_b - x_a}{I}$ olacak şekilde eşit uzunluklu alt aralıklara; $t \in [0, T]$ zaman aralığı $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m < t_{m+1} < \dots < t_{M-1} < t_M = T$; $k = t_{m+1} - t_m = \frac{T}{M}$ olacak şekilde yine eşit uzunluklu alt aralıklara ayrılır. Böylece

$$x_i = x_a + i\Delta x = ih, \quad i = 0(1)N$$

$$t_m = m\Delta t = mk, \quad m = 0(1)M$$

olmak üzere, temsili bir (ih, mk) düğüm noktasında bu tez boyunca V' 'nin tam çözümü için $V(x_i, t_m)$ ve yaklaşık çözümü için ise V_i^m gösterimleri kullanılacaktır.

Sonlu fark yaklaşımlarında esas fikir bilinmeyen bir $V(x, t)$ fonksiyonun türevleri yerine fonksiyonun $V(x_i, t_m)$ gibi ayrık noktadaki yaklaşık değerlerini kullanmaktır. Bu yaklaşımlar temel olarak Taylor serisi açılımları kullanılarak kolayca elde edilebilir. Bu tezde ele alınacak olan NWS denklemi için (1.1.1)-(1.1.3) ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminde görülen türevler yerine kullanılacak olan sonlu fark formülleri Çizelge 2.1'de verildi.

Çizelge 2.1 : Türevler için sonlu fark formülleri.

Kısmi Türev	Sonlu Fark Formülü	Kesme Hatası	Yaklaşım Türü
$\frac{\partial V}{\partial t} = V_t$	$\frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k}$	$O(k)$	İleri Fark
$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x$	$\frac{V_{i+1}^m - V_{i-1}^m}{2h}$	$O(h^2)$	Merkezi Fark
$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}$	$\frac{V_{i+1}^m - 2V_i^m + V_{i-1}^m}{h^2}$	$O(h^2)$	Simetrik Fark

Burada “ O ” sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(k)$ hatanın k mertebesinde olduğunu $k \rightarrow 0$ iken k ile orantılı olarak azalacağını; $O(h^2)$ teriminin hatanın h^2 mertebesinde olduğunu $h \rightarrow 0$ iken h^2 ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir.

Kısmi türevli diferansiyel denklem ile verilen bir başlangıç-sınır değer probleminin konum ve zaman değişkenlerine göre tamamen ayrıklaştırılmasında kullanılan klasik sonlu fark yöntemleri açık (explicit), kapalı (implicit) ve Crank-Nicolson olarak bilinen yöntemlerdir. (1.1.1) ile verilen NWS denklemi için bu üç yöntem, $0 \leq \varphi \leq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k} = & \frac{\alpha}{h^2} \left[\varphi (V_{xx})_i^{m+1} + (1 - \varphi) (V_{xx})_i^m \right] \\ & + \beta \left[\varphi V_i^{m+1} + (1 - \varphi) V_i^m \right] + \gamma \left[\varphi (V^p)_i^{m+1} + (1 - \varphi) (V^p)_i^m \right] \end{aligned}$$

olarak verilen ağırlıklı averaj yaklaşımından kolayca elde edilir. Şöyle ki bu yaklaşım $\varphi = 0$ için açık yöntemi, $\varphi = 1$ için kapalı yöntemi ve $\varphi = 1/2$ için Crank-Nicolson yöntemini verir.

2.2 Temel Kavramlar

2.2.1 Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı

Bu tez çalışmasında ele alınan

$$V_t = \alpha V_{xx} + \beta V + \gamma V^p$$

NWS denklemi sonlu fark yöntemi yardımıyla konum ve zaman değişkenlerine göre tamamen ayrıklaştırıldı. Elde edilen fark denkleminde görülen $(m+1)$ -inci zaman adımındaki $(V_i^{m+1})^p$ non-lineer terimini lineerleştirmek için

$$(V_i^{m+1})^p = (V^p)_i^m + p (V^{p-1})_i^m (V_i^{m+1} - V_i^m), \quad p \geq 2 \quad (2.2.1)$$

olarak tanımlanan Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı kullanıldı. Bu yaklaşım, $V^p(x_i, t_m + k)$ fonksiyonu (x_i, t_m) noktası civarında Taylor serisine açılır ve $\frac{\partial V}{\partial t}$ yerine Çizelge 2.1’de verilen ileri fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned}
(V_i^{m+1})^p &= (V_i^m)^p + k \left(\frac{\partial V^p}{\partial t} \right)_i^m + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 V^p}{\partial t^2} \right)_i^m + \dots \\
&= (V_i^m)^p + k \left(\frac{\partial V^p}{\partial t} \right)_i^m + O(k^2) \\
&= (V_i^m)^p + k \left(\frac{\partial V^p}{\partial V} \right)_i^m \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_i^m + O(k^2) \\
&= (V_i^m)^p + kp (V^{p-1})_i^m \frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k} + O(k^2) \\
&= (V^p)_i^m + p (V^{p-1})_i^m (V_i^{m+1} - V_i^m) + O(k^2)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.2.2 Yerel kesme hatası

Yaklaşık çözümün ne kadar doğru olduğunu ölçmeye yarayan yani sonlu fark şemasının çözümlerinin ele alınan başlangıç ve sınır değer probleminin çözümüne ne kadar iyi ölçüde yaklaştığını veren önemli bir büyüklüktür. Türevlerin sonlu fark formüllerinin elde edilmesinde kullanılan temel fikir göz önünde bulundurulacak olursa kesme hataları küçüldükçe nümerik şemanın çözüm üzerindeki doğruluğunun artacağı ve hatta zaman ilerledikçe biriken hataların azalacağı beklenir.

V_i^m çözümü $V(x_i, t_m)$ tam çözümüne bir yaklaşım yani $V_i^m \simeq V(x_i, t_m)$ olduğundan F sonlu bir fark operatörü olmak üzere, (ih, mk) -inci grid noktasında bir KDD’nin herhangi bir sonlu fark şeması

$$F(V_i^m) = 0$$

ile temsil edilebilir. Bu eşitlikte V_i^m yerine $V(x_i, t_m)$ yazılırsa sonlu fark şemasının T_i^m ile gösterilen yerel kesme hatasının büyüklüğü $T_i^m = F(V(x_i, t_m))$ ifadesinden kolayca hesaplanır.

2.2.3 Tutarlılık

Herhangi bir sonlu fark şemasının tutarlı olması için h ve k adım uzunlukları sıfıra yaklaştıkça T_i^m ile gösterilen yerel kesme hatasının sıfıra yaklaşması gerekir. Yani

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} T_i^m = 0$$

ise sonlu fark şeması tutarlıdır denir.

2.2.4 Kararlılık

Herhangi bir sonlu fark şemasının kararlı olması için (x_i, t_m) düğüm noktasındaki V_i^m yaklaşık çözümü ile $V(x_i, t_m)$ tam çözümü arasındaki

$$|V_i^m - V(x_i, t_m)|$$

farkının m sonsuza giderken sınırlı kalması gerekir.

Kararlılık kavramı biraz daha açıklanacak olursa, KDD’ler verilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinde kullanılan kararlılık analizi, yaklaşık şemanın başlangıç verisinde veya çözümünde oluşan yuvarlama hatalarında meydana gelen hataların zamanla büyüüp büyümediğinin değerlendirilmesini amaçlar. Kararlı bir yaklaşık yöntem, hata bileşenlerini kontrol altında tutarak probleme uygun ve yakınsak bir çözüm elde edilmesini sağlar. Bir lineer sonlu fark yaklaşımının kararlılık analizini incelemek için genellikle Matris veya von-Neumann yöntemleri kullanılır. Şimdi bu yöntemlerden kısaca bahsedelim.

2.2.5 von-Neumann yöntemi

Literatürde oldukça sık kullanılan kararlılık analizlerinden biri von-Neumann yöntemidir. Bu yöntem Fourier seri yöntemi olarak da bilinir. Yöntemin temel amacı lineer sonlu fark şemalarının zaman değişimine bağlı olarak kararlılığını Fourier modları üzerinden incelemektir. Özellikle doğrusal denklemler için geliştirilmiş olmakla birlikte, doğrusal olmayan denklemlere de lokal lineerleştirme yoluyla uygulanabilmektedir. von-Neumann Yöntemi’nin temelinde yaklaşık çözümlerde oluşan hataların herhangi bir zamanda Fourier bileşenleri toplamı olarak varsayılmasıdır. Sonlu fark denkleminin bir çözümü Fourier serisine açılır ve aşağıda verilen güçlendirme (amplifikasyon) faktörünün büyümesi ya da küçülmesi yaklaşık çözümün kararlı olup olmadığını gösterir. Bunun için bir kısmi diferansiyel denklemi çözmek için kullanılan “değişkenlerine ayırma” yönteminde olduğu gibi $t = 0$ başlangıç zamanı için Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon ele alınır. Bilindiği gibi Fourier serileri sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yazılabildiğinden kompleks üstel formda bir fonksiyonla da temsil edilebilir. Bu

seçimin temel nedeni, kompleks üstel ifadelerin türev ve integral işlemlerinde, trigonometrik fonksiyonlara kıyasla çok daha pratik bir matematiksel zemin sunmasıdır.

Yani Fourier serisinde görölen $\sum a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ veya $\sum b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ terimleri yerine bunlara denk olan $\sum A_m e^{I\pi m x/l}$ üstel ifadeli terimi kullanılabilir. Burada $I = \sqrt{-1}$, l ise x aralığının uzunluğudur. V_i^m gösteriminin kullanılmasıyla, $\beta_m = m\pi/Nh$ ve $Nh = l$ olmak üzere ,

$$A_m e^{I\pi m x/l} = A_m e^{I\pi m i h/l} = A_m e^{I\pi m i h/Nh} = A_m e^{I\beta_m i h}$$

dir. $t = 0$ zamanındaki başlangıç değeri

$$V(ih, 0) = V_i^0, i = 0(1)N$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada $(N + 1)$ -tane denklem, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_N$ bilinmeyen sabitlerini belirlemekte yeterli olmaktadır. Bu çıkarım ise başlangıç ağ noktalarının kompleks üstel formda yazılabileceğini göstermektedir. Böylece ele alınan lineer fark denkleminin $e^{I\lambda m h}$ gibi bir başlangıç değeriinden elde edilebildiği görülür. A_m katsayısı sabit ve ihmal edilebilir. t değeriinin artışına bağılı olarak üstel dağılıma bakarsak

$$V_i^m = e^{I\lambda x} e^{a t} = e^{I\lambda i h} e^{a m k} = e^{I\lambda i h} \xi^m$$

olarak yazılır. Burada $\xi = e^{a k}$ güçlendirme faktörü olarak adlandırılır. a ise genelde karmaşık bir katsayıdır.

Lax-Richtmyer tanımına göre sonlu fark denkleminin başlangıç şartını sağılayan her λ değeri, $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $i \leq N$ değeri için $|V_i^m|$ sınırlı kalıyorsa kararlılık sağılanıyor demektir.

Sonlu fark denklemlerinin kesin çözümü zaman değıştikçe üstel olarak artmıyorsa, kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1$$

olmasıdır.

2.2.6 Matris yöntemi

Sonlu fark yaklaşımlarının kararlılığını incelemeye kullanılan bir diğer yöntem ise matris yöntemidir. Sınır şartlarına bağlı denklemin sonlu fark yaklaşımına karşılık gelen matrisin özdeğerlerindeki hata dağılımını inceler. Bu yöntem, sonlu fark şemasının m -inci zamandan $(m+1)$ -inci zamana geçişi belirten cebirsel ifadeyi direkt olarak matris formda sağladığı için kararlılık, matrisin özdeğerleri ve spektral yarıçap gibi matematiksel ölçütlere dayanır. Eğer fark şemasına karşılık gelen matrisin mutlak değerce en büyük λ_i özdeğeri her i için $\max |\lambda_i| \leq 1$ ise yaklaşık şema kararlıdır denir.

2.2.7 Yakınsaklık

$h, k \rightarrow 0$ iken $V_i^m \rightarrow V(x_i, t_m)$ oluyorsa sonlu fark şeması yakınsaktır denir. Başka bir ifadeyle bir sonlu fark yöntemiyle elde edilen çözüm h ve k adım uzunlukları $h, k \rightarrow 0$ iken tam çözümle arasındaki fark sıfıra yaklaşıyorsa yani

$$|V_i^m - V(x_i, t_m)| \rightarrow 0$$

ise yöntem yakınsaktır.

2.2.8 Lax'ın denklik teoremi

Bu teorem, sayısal analizde bir sonlu fark şemasının kararlılığının incelenmesinde temel öneme sahip bir teoremdir. Bir doğrusal sonlu fark yaklaşımı verildiğinde bu yaklaşım tutarlılık koşulunu sağlıyorsa kararlılık yakınsaklık için gerekli ve yeterli koşuldur. Yani, Lax'ın denklik teoremi, eğer bir yöntem yani bir şema tutarlıysa yakınsaklık için kararlılık koşulunun sağlanması gerekir. Başka bir ifadeyle, Tutarlılık+Kararlılık $\iff$ Yakınsaklık dir.

3. NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL DENKLEMİ İÇİN SONLU FARK ŞEMASI

Tezin bu bölümünde, Bölüm 1’de (1.1.1)-(1.1.3) denklemleri ile verilen 1-boyutlu zamana bağlı 2.mertebeden non-linear başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için Crank-Nicolson tipi bir sonlu fark şeması verildi. Bu tez çalışmasında elde edilecek olan şemanın doğrusal fark denklemleri ile sonuçlandırılması amaçlandığından NWS denkleminde görülen V^P non-linear terimi Richtmyer tipi lineerleştirme tekniği ile lineerleştirildi. Ayrıca bu bölümde şemanın von-Neumann yöntemi ile kararlılık analizi incelendi ve yerel kesme hatasının mertebesi hesaplandı.

3.1 Crank-Nicolson Tipi Sonlu Fark Şemasının Türetilmesi

(1.1.1) ile verilen

$$V_t = \alpha V_{xx} + \beta V + \gamma V^P$$

NWS denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı [19]

$$\frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k} = \alpha \frac{(V_{xx})_i^{m+1} + (V_{xx})_i^m}{2} + \beta \frac{V_i^{m+1} + V_i^m}{2} + \gamma \frac{(V^P)_i^{m+1} + (V^P)_i^m}{2} \quad (3.1.1)$$

dir. Bu eşitlikte x ’e göre ikinci mertebeden türevler yerine Çizelge 2.1’de verilen $O(h^2)$ mertebeden simetrik fark formülleri hatalar ihmal edilerek yazılacak olursa, $m = 0(1)M$ ve $i = 1(1)N - 1$ olmak üzere, x ve t değişkenlerine göre tamamen ayrıklaştırılmış olan

$$\frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k} = \alpha \frac{V_{i-1}^{m+1} - 2V_i^{m+1} + V_{i+1}^{m+1} + V_{i-1}^m - 2V_i^m + V_{i+1}^m}{2h^2} + \beta \frac{V_i^{m+1} + V_i^m}{2} + \gamma \frac{(V^P)_i^{m+1} + (V^P)_i^m}{2} \quad (3.1.2)$$

non-linear sonlu fark denklemi elde edilir. Bu fark denkleminde $(V^P)_i^{m+1}$ non-linear terimi yerine (2.2.1)’de verilen

$$(V^P)_i^{m+1} = (V^P)_i^m + p (V^{P-1})_i^m (V_i^{m+1} - V_i^m)$$

Richtmyer tipi lineerleştirme yaklaşımı yazılırsa, $m = 0(1)M$ ve $i = 1(1)N - 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k} &= \frac{\alpha}{2h^2} [V_{i-1}^{m+1} + V_{i-1}^m - 2(V_i^{m+1} - V_i^m) - 4V_i^m + V_{i+1}^{m+1} + V_{i+1}^m] \\ &+ \frac{\beta}{2} [V_i^{m+1} + V_i^m] + \frac{\gamma}{2} [(V^p)_i^m + p(V^{p-1})_i^m (V_i^{m+1} - V_i^m) + (V^p)_i^m] \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

lineer fark denklemi elde edilir. Burada

$$W_i = V_i^{m+1} - V_i^m$$

alınırsa

$$W_{i-1} = V_{i-1}^{m+1} - V_{i-1}^m \text{ ve } W_{i+1} = V_{i+1}^{m+1} - V_{i+1}^m$$

olup (3.1.3) eşitliği

$$\begin{aligned} \frac{W_i}{k} &= \frac{\alpha}{2h^2} [W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1} + 2V_{i-1}^m - 4V_i^m + 2V_{i+1}^m] \\ &+ \frac{\beta}{2} [W_i + 2V_i^m] + \frac{\gamma}{2} [(V^p)_i^{m+1} + (V^p)_i^m] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlik indislere göre düzenlenirse, $m = 0(1)M$ ve $i = 1(1)N - 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &-\frac{\alpha}{2h^2} W_{i-1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} p (V^{p-1})_i^m \right] W_i - \frac{\alpha}{2h^2} W_{i+1} \\ &= \frac{\alpha}{h^2} V_{i-1}^m - \left[\frac{4\alpha}{2h^2} - \beta - \gamma (V^{p-1})_i^m \right] V_i^m + \frac{\alpha}{h^2} V_{i+1}^m \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

lineer fark denklemi elde edilir.

Problemde verilen sol ve sağ sınır şartlarından

$$V_0^m = g_1(t_m) , V_0^{m+1} = g_1(t_{m+1})$$

$$V_i^m = g_2(t_m) , V_i^{m+1} = g_2(t_{m+1})$$

olup

$$W_0 = V_0^{m+1} - V_0^m = g_1(t_{m+1}) - g_1(t_m)$$

$$W_i = V_i^{m+1} - V_i^m = g_2(t_{m+1}) - g_2(t_m)$$

dir. Bu eşitlikler (3.1.5) fark denkleminde kullanılırsa

$i = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} p(V^{p-1})_1^m \right] W_i - \frac{\alpha}{2h^2} W_{i+1} \\ &= - \left[\frac{2\alpha}{h^2} - \beta - \gamma(V^{p-1})_i^m \right] V_i^m + \frac{\alpha}{h^2} V_{i+1}^m + \frac{\alpha}{2h^2} g_1(t_m) + \frac{\alpha}{2h^2} g_1(t_{m+1}) \end{aligned}$$

$i = 2(1)N - 2$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha}{2h^2} W_{i-1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} p(V^{p-1})_i^m \right] W_i - \frac{\alpha}{2h^2} W_{i+1} \\ &= \frac{\alpha}{h^2} V_{i-1}^m - \left[\frac{2\alpha}{h^2} - \beta - \gamma(V^{p-1})_i^m \right] V_i^m + \frac{\alpha}{h^2} V_{i+1}^m \end{aligned}$$

$i = N - 1$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha}{2h^2} W_{i-1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} p(V^{p-1})_i^m \right] W_i - \frac{\alpha}{2h^2} W_{i+1} \\ &= \frac{\alpha}{h^2} V_{i-1}^m - \left[\frac{2\alpha}{h^2} - \beta - \gamma(V^{p-1})_i^m \right] V_i^m + \frac{\alpha}{h^2} g_2(t_m) - \frac{\alpha}{2h^2} g_2(t_{m+1}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu lineer cebirsel denklem sistemi kapalı formda kısaca

$$AW = B$$

olarak gösterilebilir. Burada A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & & & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-4 \ N-3} & a_{N-3 \ N-3} & a_{N-3 \ N-2} & & \\ & & & & & & a_{N-2 \ N-3} & a_{N-2 \ N-2} & a_{N-2 \ N-1} & \\ & & & & & & & a_{N-1 \ N-2} & a_{N-1 \ N-1} & \end{bmatrix}$$

olup girişleri, $i = 2(1)N - 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} p(V^{p-1})_1^m, a_{12} = -\frac{\alpha}{2h^2}, a_{i,i-1} = -\frac{\alpha}{2h^2}, a_{i,i} = \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} p(V^{p-1})_i^m, \\ a_{i,i+1} &= -\frac{\alpha}{2h^2}; \end{aligned}$$

W matrisi

$$W = [W_1 \ W_2 \ W_3 \ \cdots \ W_{N-3} \ W_{N-2} \ W_{N-1}]^T$$

ve B matrisi

$$B = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \cdots \ b_{N-3} \ b_{N-2} \ b_{N-1}]^T$$

olup girişleri

$$b_1 = - \left[\frac{2\alpha}{h^2} - \beta - \gamma (V^{p-1})_1^m \right] V_1^m + \frac{\alpha}{h^2} V_2^m + \frac{\alpha}{2h^2} g_1(t_m) + \frac{\alpha}{2h^2} g_1(t_{m+1}),$$

$$b_i = \frac{\alpha}{h^2} V_{i-1}^m - \left[\frac{2\alpha}{h^2} - \beta - \gamma (V^{p-1})_i^m \right] V_i^m + \frac{\alpha}{h^2} V_{i+1}^m, i = 2(1)N-2$$

$$b_{N-1} = \frac{\alpha}{h^2} V_{N-2}^m - \left[\frac{2\alpha}{h^2} - \beta - \gamma (V^{p-1})_{N-1}^m \right] V_{N-1}^m + \frac{\alpha}{2h^2} g_2(t_m) - \frac{\alpha}{2h^2} g_2(t_{m+1})$$

dir.

3.2 Şemanın Yerel Kesme Hatası

Bu kısımda (3.1.2) eşitliği ile verilen Crank-Nicolson tipi sonlu fark yaklaşımının yerel kesme hatasının mertebesi hesaplandı. Bunun için Bölüm 2’de

$$YKH = F[V(x_i, t_m)]$$

olarak verilen YKH ’nin mertebesi tanımından (3.1.2) fark yaklaşımında V_i^m yaklaşık çözümü yerine KDD’nin $V(x_i, t_m)$ tam çözümü yazılır ve ortaya çıkan $V(x_{i-1}, t_{m+1}), V(x_{i-1}, t_m), V(x_i, t_{m+1}), V(x_{i+1}, t_m), V(x_{i+1}, t_{m+1})$ ve $V^P(x_i, t_{m+1})$ terimleri yerine Taylor seri açılımlarından elde edilen

$$\begin{aligned} V(x_{i-1}, t_{m+1}) &\equiv V\{(i-1)h, (m+1)k\} \equiv V(x_i - h, t_m + 1) = [V - hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} \\ &\quad - \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left(V - hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} - \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(V - hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} - \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots \right)](x_i, t_m) + \dots \end{aligned}$$

$$V(x_{i-1}, t_m) \equiv V\{(i-1)h, mk\} \equiv V(x_i - h, t_m) = V - hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} - \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots$$

$$V(x_i, t_{m+1}) \equiv V\{ih, (m+1)k\} \equiv V(x_i, t_m + 1) = V + kV_x + \frac{k^2}{2}V_{xx} + \frac{k^3}{6}V_{3x} + \dots$$

$$V(x_{i+1}, t_m) \equiv V\{(i+1)h, mk\} \equiv V(x_i + h, t_m) = V + hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} + \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots$$

$$\begin{aligned} V(x_{i+1}, t_{m+1}) &\equiv V\{(i+1)h, (m+1)k\} \equiv V(x_i + h, t_m + k) = [V + hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} \\ &+ \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots + k\frac{\partial}{\partial t}\left(V + hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} + \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots\right) + \\ &+ \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(V + hV_x + \frac{h^2}{2}V_{xx} + \frac{h^3}{6}V_{3x} + \dots\right)](x_i, t_m) + \dots \end{aligned}$$

ve

$$V^P(x_i, t_{m+1}) \equiv V^P\{ih, (m+1)k\} \equiv V^P(x_i, t_m + k) = V^P + kV_t^P + \frac{k^2}{2}V_{tt}^P + \frac{k^3}{6}V_{3t}^P + \dots$$

yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} YKH &= [V_t + \frac{k}{2}V_{tt} + \frac{k^2}{6}V_{3t} + \frac{k^3}{24}V_{4t} + \dots \\ &\frac{-\alpha}{h^2}\left(V + kV_t + \frac{k^2}{2}V_{tt}\right) + \frac{k^2}{4h}V_x - \frac{k^2\alpha}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(V_x + V_{xx}) \\ &- \alpha V_{xx} - k\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(3V_{xx} + \frac{1}{12}V_{4x}\right) \\ &- \beta\left(V + \frac{k}{2}V_t + \frac{k^2}{4}V_{tt} + \frac{k^3}{12}V_{3t} + \frac{k^4}{48}V_{4t} + \dots\right) \\ &- \gamma\left(V^P + \frac{k}{2}V_t^P + \frac{k^2}{4}V_{tt}^P + \frac{k^3}{12}V_{3t}^P + \dots\right)](x_i, t_m) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

bulunur. (3.2.1) eşitliğinde gerekli cebirsel düzenlemelerle birlikte birtakım gruptandırma yapılırsa

$$\begin{aligned} YKH &= [V_t - \alpha V_{xx} - \beta V - \gamma V^P](x_i, t_m) + \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[V_t - \alpha V_{xx} - \beta V - \gamma V^P](x_i, t_m) \\ &+ k^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{6}V_t - \frac{\alpha}{4}V_{xx} - \beta V - \frac{\gamma}{4}V^P\right](x_i, t_m) + h^2\left[\frac{-\alpha}{12}V_{4x} - \frac{k^2\alpha}{96}V_{4x} - \frac{k\alpha}{24}V_{4xt}\right](x_i, t_m) \\ &+ k^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left[\frac{1}{24}V_t - \frac{\beta}{12}V - \frac{\gamma}{12}V^P\right](x_i, t_m) + \dots \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

elde edilir. $V(x_i, t_m)$ verilen KDD'nin tam çözümü olduğundan

$$[V_t - \alpha V_{xx} - \beta V - \gamma V^p](x_i, t_m) = 0$$

ve

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (V_t - \alpha V_{xx} - \beta V - \gamma V^p) \right] (x_i, t_m) = 0$$

dir. Bunlar (3.2.2)'de kullanılırsa YKH 'nin esas kısmı h ve k değerlerinin kuvvetleri ve (x_i, t_m) noktasında kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü $V(x_i, t_m)$ nin kısmi türevleri cinsinden

$$YKH = k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{6} V_t - \frac{\alpha}{4} V_{xx} - \beta V - \frac{\gamma}{4} V^p \right] (x_i, t_m) + h^2 \left[\frac{-\alpha}{12} V_{4x} - \frac{k^2 \alpha}{96} V_{4x} - \frac{k \alpha}{24} V_{4xt} \right] (x_i, t_m) + \dots$$

Yerel Kesme Hatasının Esas Kısmı

olarak bulunur. Böylece NWS denkleminin (3.1.2) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımının yerel kesme hatasının mertebesi

$$O(k^2) + O(h^2)$$

dir.

3.3 Şemanın Kararlılık Analizi

Bu kısımda, (1.1.1) ile verilen NWS denkleminin (3.1.2) ile verilen CNFS şemasının kararlılık analizi von-Neumann yöntemi ile incelenecektir. Bu inceleme, yaklaşık yöntemin güvenilirliği açısından önemli bir kriter olan kararlılık kavramının değerlendirilmesini içermektedir. Kararlılık analizi, genel anlamda bir yaklaşık çözüm sürecinde herhangi bir zaman adımında ortaya çıkan hata terimlerinin, sonraki zaman adımlarına nasıl aktarıldığını ve zaman içinde nasıl değiştiğini belirlemeye yönelik bir yaklaşımdır.

(1.1.1) NWS denklemi

$$V_t = \alpha V_{xx} + V(\beta + \gamma V^{p-1}) \quad (3.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. C bir lokal sabit olmak üzere, $V^{p-1} = C$ olduğu varsayımı yukarıda verilen denklemde yerine yazılırsa

$$V_t = \alpha V_{xx} + V(\beta + \gamma C)$$

denklemini elde edilir. Lineerleştirilmiş bu denklemin Crank-Nicolson sonlu fark şeması

$$\frac{V_i^{m+1} - V_i^m}{k} = \frac{\alpha}{2h^2} [V_{i-1}^{m+1} - 2V_i^{m+1} + V_{i+1}^{m+1} + V_{i-1}^m - 2V_i^m + V_{i+1}^m] + \left(\frac{\beta + \gamma C}{2} \right) [V_i^{m+1} + V_i^m] \quad (3.3.2)$$

olarak bulunur.

von-Neumann yöntemine göre kararlılığın incelenmesinde (3.3.2) şemasında V_i^m yerine, ξ güçlendirme faktörü, λ mod sayısı ve $I = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$V_i^m = \xi^m e^{I\lambda ih}$$

eşitliği yazılır ve sonra bir takım cebirsel işlemlerle birlikte bazı trigonometrik ifadeler kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa ξ güçlendirme faktörü

$$\xi = \frac{1 + \frac{k(\beta + \gamma C)}{2} - \frac{k\alpha}{h^2} \sin^2 \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{k(\beta + \gamma C)}{2} + \frac{k\alpha}{h^2} \sin^2 \frac{\lambda h}{2}}$$

olarak bulunur. Bu ise $A = -\frac{k(\beta + \gamma C)}{2} + \frac{k\alpha}{h^2} \sin^2 \frac{\lambda h}{2}$ olmak üzere,

$$\xi = \frac{1 - A}{1 + A}$$

olarak yazılabilir. Şemanın kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. $|\xi| \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanması ancak ve ancak $A \geq 1$ olması ile mümkündür. Örnek problemlerde alınan α , β ve γ katsayılarının bütün değerleri için $A \geq 1$ dir. Böylece $|\xi| \leq 1$ olup sunulan şema şartsız kararlıdır.

4. ÖRNEK PROBLEMLER ve NÜMERİK SONUÇLAR

Tezin bu bölümünde (1.1.1)-(1.1.3) denklemleriyle verilen model problem farklı parametreler ve başlangıç-sınır şartlarıyla ele alındı. Bölüm 3'te sunulan şemanın doğruluğu ve performansı aşağıda verilen 3 örnek problem üzerinde test edildi. Şemadan hesaplanan yaklaşık sonuçlar kendi aralarında ve aynı parametre değerleri için literatürdeki başka çalışmalarda verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Hesaplanan sonuçların doğruluğunu ve güvenilirliğini kontrol etmek için

$$\begin{aligned} L_2 &= \|V(x_i, t_m) - V_i^m\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^{N-1} |V(x_i, t_m) - V_i^m|^2} \\ L_\infty &= \|V(x_i, t_m) - V_i^m\|_\infty = \max_i |V(x_i, t_m) - V_i^m| \\ Abs &= |V_i^m - V(x_i, t_m)| \end{aligned}$$

olarak verilen hata büyüklükleri hesaplandı. Ayrıca şemanın L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yaklaşık yakınsaklık mertebesi bulmak için

$$M(L) = \log_2 \left[\frac{L(2h, 2k)}{L(h, k)} \right], (L = L_2, L_\infty)$$

formülü kullanıldı.

Elde edilen tüm hesaplamalarda 11.Nesil Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz (2.42 GHz), 64 bit işletim sistemine sahip dizüstü bilgisayar ve MATLAB (R2011a) sürümü kullanıldı.

4.1 Örnek Problem 1

Bu örnek problem için çözüm bölgesi $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ ve parametreler $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$ ve $p = 2$ olarak seçildi. Böylece

$$V_t = V_{xx} + V - V^2, (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$$

NWS denklemi

$$V(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2}, x \in [0, 1]$$

başlangıç şartı ve

$$V(0,t) = \frac{1}{(1 + e^{-\frac{5}{6}t})^2}, \quad V(1,t) = \frac{1}{(1 + e^{\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t})^2}, \quad t \in [0, T]$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$V(x,t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{5}{6}t}\right)^2}$$

dir [4].

Bu örnek problem için ilk olarak zaman adım uzunluğu $k = 0.0001$ sabit tutularak, h konum adım uzunluğunun $h = 0.1$ 'den $h = 0.00625$ 'e kadar yarılanarak küçülen beş farklı değeri için $[0, T] = [0, 10]$ zaman aralığında $t = 0.01, 0.1, 5, 10$ anlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile $CPU(s)$ işlemci süreleri Çizelge 4.1'de sunuldu. Çizelgedeki veriler incelendiğinde, h küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da gittikçe küçüldüğü ve böylece yaklaşık çözümlerin beklenen kararlılığı sağlayarak gittikçe tam çözüme yaklaştığı ve ayrıca artan bitiş zamanlarında elde edilen hata normlarının giderek azaldığı gözlenmektedir. Bu bulgular, önerilen şemanın büyük bitiş zamanlarında da güvenilir bir biçimde kullanılabileceğinin önemli bir göstergesidir. Çizelgeden h küçüldükçe ve bitiş zamanı büyüdükçe hesaplama maliyeti artacağından CPU işlemci sürelerinin de gittikçe büyüdüğü görülmektedir.

Çizelge 4.1 : Problem 1'in $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri.

t		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
0.01	L_2	$0.5533E-7$	$0.1394E-7$	$0.3489E-8$	$0.8718E-9$	$0.2171E-9$
	L_∞	$0.6423E-7$	$0.1608E-7$	$0.4021E-8$	$0.1004E-8$	$0.2501E-9$
	$CPU(s)$	0.040150	0.047464	0.048787	0.068541	0.085504
0.1	L_2	$0.3665E-6$	$0.9192E-7$	$0.2299E-7$	$0.5743E-8$	$0.1430E-8$
	L_∞	$0.4939E-6$	$0.1239E-6$	$0.3099E-7$	$0.7744E-8$	$0.1928E-8$
	$CPU(s)$	0.068411	0.081721	0.094020	0.223555	0.448269
5	L_2	$0.4499E-7$	$0.1125E-7$	$0.2812E-8$	$0.7016E-9$	$0.1741E-9$
	L_∞	$0.6151E-7$	$0.1538E-7$	$0.3844E-8$	$0.9593E-9$	$0.2381E-9$
	$CPU(s)$	1.544494	1.776271	2.529014	6.583229	20.085137
10	L_2	$0.1221E-8$	$0.3052E-9$	$0.7629E-10$	$0.1905E-10$	$0.4746E-11$
	L_∞	$0.1669E-8$	$0.4174E-9$	$0.1044E-9$	$0.2608E-10$	$0.6498E-11$
	$CPU(s)$	4.065665	4.608990	5.341556	14.790477	30.124025

İkinci olarak, konumsal adım büyüklüğü $h = 0.05$ ve zamansal adım büyüklüğü $k = 0.0001$ için $t = 0.01, 0.1, 5, 10$ bitiş zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Çizelge 4.2’de [9] çalışmasında verilen sonuçlarla mukayese edildi. Çizelgedeki değerler incelendiğinde, önerilen şema ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının zaman ilerledikçe azaldığı ve söz konusu literatürdeki çalışmaya kıyasla daha üstün sonuçlar ürettiği açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.2 : Problem 1’in $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları.

Yöntem	Mevcut		I-EFD [9]		FI-EFD [9]	
t	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.01	$0.1394E-7$	$0.1609E-7$	$0.55E-5$	$0.151E-4$	$0.54E-5$	$0.150E-4$
0.1	$0.9192E-7$	$0.1239E-6$	$0.132E-4$	$0.200E-4$	$0.126E-4$	$0.198E-4$
5	$0.1125E-7$	$0.1538E-7$	$0.2933E-2$	$0.4021E-2$	$0.293E-2$	$0.402E-2$
10	$0.3052E-9$	$0.4174E-9$	$0.483E-4$	$0.662E-4$	$0.483E-4$	$0.662E-4$

Üçüncü olarak, $h = k$ adım büyüklüklerinin 0.1’den 0.00625’e kadar yarılanarak azalan beş farklı değeri için $t = 5, 10$ bitiş anlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yaklaşık yakınsaklık mertebeleri Çizelge 4.3’te sunuldu. Mevcut yöntemle elde edilen yakınsaklık mertebelerinin, teorik yakınsaklık mertebesi olan 2 ile yüksek düzeyde uyum sergilediği görülmektedir. Bu sonuçlar, yaklaşık yöntemin performansının teorik öngörülerle örtüştüğünü ve üretilen çözümlerin hedeflenen doğruluk düzeyinde olduğunu teyit etmektedir.

Çizelge 4.3 : Problem 1’in yaklaşık yakınsaklık mertebeleri.

t	$h = k$	L_2	$M(L_2)$	L_∞	$M(L_\infty)$
5	0.1	$0.1682E-5$	—	$0.2301E-5$	—
	0.05	$0.4209E-6$	1.9987	$0.5757E-6$	1.9988
	0.025	$0.1052E-6$	1.9997	$0.1441E-6$	1.9981
	0.0125	$0.2631E-7$	1.9999	$0.3603E-7$	1.9998
	0.00625	$0.6578E-8$	1.9999	$0.9009E-8$	1.9998
10	0.1	$0.2441E-3$	—	$0.3338E-7$	—
	0.05	$0.6108E-8$	1.9987	$0.8352E-8$	1.9988
	0.025	$0.1527E-9$	1.9997	$0.2091E-8$	1.9983
	0.0125	$0.3818E-9$	1.9998	$0.5227E-9$	1.9996
	0.00625	$0.9551E-10$	1.9992	$0.1308E-9$	1.9992

Dördüncü olarak, $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ değerleri için $t = 0.2(0.2)1.0$ bitiş anlarında hesaplanan mutlak hata değerleri [9,20] referanslarında sunulan çeşitli yöntemlerden elde edilen

sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgedeki verilere bakıldığında, sunulan yöntemin karşılaştırılan bu yöntemlere kıyasla daha üstün sonuçlar ürettiği açıkça görülmektedir.

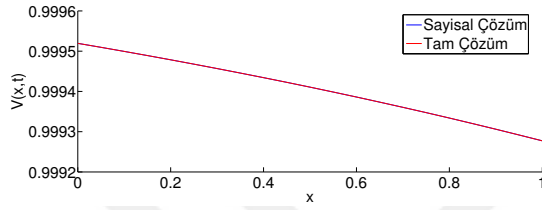
Çizelge 4.4 : Problem 1'in $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.

x/t	Yöntem	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1.0$
0.2	Mevcut	$0.6586E-8$	$0.6329E-8$	$0.4490E-8$	$0.2100E-8$	$0.3678E-9$
	I-EFD [9]	$0.194E-4$	$0.225E-4$	$0.238E-4$	$0.243E-4$	$0.244E-4$
	FI-EFD [9]	$0.186E-4$	$0.217E-4$	$0.231E-4$	$0.238E-4$	$0.240E-4$
	UCBS [20]	$0.2810E-3$	$0.3030E-3$	$0.2480E-3$	$0.1660E-3$	$0.7410E-4$
	TCBS [20]	$0.2716E-3$	$0.3249E-3$	$0.2341E-3$	$0.1506E-3$	$0.5793E-4$
	ECBS [20]	$0.6909E-3$	$0.6760E-3$	$0.5184E-3$	$0.3196E-3$	$0.1094E-3$
0.4	Mevcut	$0.1009E-7$	$0.1005E-7$	$0.7449E-8$	$0.3905E-8$	$0.1383E-9$
	I-EFD [9]	$0.171E-4$	$0.216E-4$	$0.232E-4$	$0.240E-4$	$0.242E-4$
	FI-EFD [9]	$0.160E-4$	$0.204E-4$	$0.221E-4$	$0.231E-4$	$0.237E-4$
	UCBS [20]	$0.4270E-3$	$0.4740E-3$	$0.3970E-3$	$0.2760E-3$	$0.1390E-3$
	TCBS [20]	$0.4126E-3$	$0.4551E-3$	$0.3764E-3$	$0.2536E-3$	$0.1148E-3$
	ECBS [20]	$0.1056E-2$	$0.1059E-2$	$0.8328E-3$	$0.5384E-3$	$0.2226E-3$
0.6	Mevcut	$0.1032E-7$	$0.1048E-7$	$0.8021E-8$	$0.4530E-8$	$0.7279E-9$
	I-EFD [9]	$0.162E-4$	$0.209E-4$	$0.227E-4$	$0.237E-4$	$0.242E-4$
	FI-EFD [9]	$0.151E-4$	$0.196E-4$	$0.216E-4$	$0.228E-4$	$0.235E-4$
	UCBS [20]	$0.4380E-3$	$0.4910E-3$	$0.4180E-3$	$0.2990E-3$	$0.1620E-3$
	TCBS [20]	$0.4247E-3$	$0.4723E-3$	$0.3972E-3$	$0.2765E-3$	$0.1381E-3$
	ECBS [20]	$0.1085E-2$	$0.1099E-2$	$0.8799E-3$	$0.5897E-3$	$0.2744E-3$
0.8	Mevcut	$0.7048E-8$	$0.7192E-8$	$0.5629E-8$	$0.3345E-8$	$0.8040E-9$
	I-EFD [20]	$0.167E-4$	$0.204E-4$	$0.222E-4$	$0.234E-4$	$0.241E-4$
	FI-EFD [20]	$0.159E-4$	$0.195E-4$	$0.214E-4$	$0.228E-4$	$0.237E-4$
	UCBS [20]	$0.3050E-3$	$0.3370E-3$	$0.2890E-3$	$0.2110E-3$	$0.1200E-3$
	TCBS [20]	$0.2959E-3$	$0.2905E-3$	$0.2755E-3$	$0.1962E-3$	$0.1044E-3$
	ECBS [20]	$0.7482E-3$	$0.7547E-3$	$0.6123E-3$	$0.4219E-3$	$0.2127E-3$

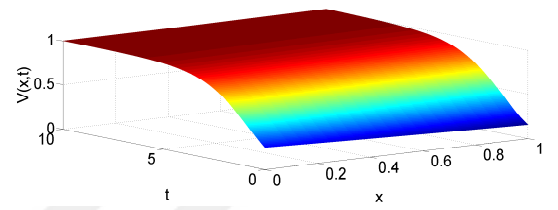
Beşinci olarak, $h = 0.01$ ve $k = 0.001$ için $t = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ bitiş zamanlarında hesaplanan mutlak hata değerleri [15] referansında verilen sonuçlarla Çizelge 4.5'te mukayese edildi. Çizelgedeki veriler detaylıca incelendiğinde, sunulan şemadan elde edilen sonuçların yeterince küçük kaldığı ve karşılaştırılan sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.5 : Problem 1'in $h = 0.01$ ve $k = 0.001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.

x/t	Yöntem	$t = 0.5$	$t = 1.0$	$t = 2.0$	$t = 5.0$
0.50	Mevcut	$0.3960E-8$	$0.2259E-8$	$0.7939E-8$	$0.3789E-9$
	[15]	$0.55E-8$	$0.85E-8$	$0.12E-7$	$0.26E-8$
0.75	Mevcut	$0.3261E-8$	$0.1356E-8$	$0.6043E-8$	$0.2855E-9$
	[15]	$0.68E-8$	$0.11E-7$	$0.17E-7$	$0.38E-8$



(a)



(b)

Şekil 4.1 : Problem 1'in $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ için $t = 10$ 'da tam ve yaklaşık çözümlerinin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri.

Son olarak, hesaplanan yaklaşık çözümlerin sürekliliğini ve tam çözüme ne kadar yakın olduğunu göstermek amacıyla, $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ parametreleri için $t = 10$ zamanında yaklaşık ve tam çözümlerine ait (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri Şekil 4.1'de verildi. Grafikler incelendiğinde, yaklaşık ve tam çözümlerin birbirlerine oldukça yakın değerler olduğu ve bu nedenle grafiklerinin ayırt edilemeyecek kadar üst üste geldiği görülmektedir.

4.2 Örnek Problem 2

Bu örnek problem için çözüm bölgesi $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ ve parametreler $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$ ve $p = 4$ olarak alındı. Böylece

$$V_t = V_{xx} + V - V^4, (x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$$

NWS denklemi

$$V(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}}, x \in [0, 1]$$

başlangıç şartı ve

$$V(0,t) = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{21}{20} t \right) \right]^{\frac{2}{3}}, V(1,t) = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{3\sqrt{10}}{20} t \right) \right]^{\frac{2}{3}}, t \in [0, T]$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$V(x,t) = \left[\frac{1}{2} \tanh \left(\frac{-3}{2\sqrt{10}} \left(x - \frac{7}{\sqrt{10}} t \right) \right) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{2}{3}}$$

dir [4].

İlk olarak, $k = 0.0001$ sabit zaman adım büyüklüğü ve h konum adım büyüklüğünün 0.1’den 0.00625’e kadar yarılanarak küçülen beş farklı değeri için $[0, 1]$ zaman aralığında $t = 0.2(0.2)1.0$ bitiş anlarında ve $[0, 10]$ zaman aralığında $t = 0.01, 0.1, 5, 10$ bitiş anlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile $CPU(s)$ işlemci süreleri sırasıyla Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7’de sunuldu. Çizelgedeki verilere bakıldığında, h küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normunun gittikçe azaldığı görülmektedir. Bu durum önerilen yaklaşık şemanın beklenen kararlılık özelliğini sergilediğini ve yaklaşık çözümlerin tam çözüme giderek yakınsadığını ortaya koymaktadır. Bu bulgular, söz konusu şemanın güvenilir bir biçimde kullanılabileceğinin önemli kanıtlarıdır.

Çizelge 4.6 : Problem 2’nin $k = 0.0001$ için farklı h ve $t = 0.2(0.2)1.0$ bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri.

t		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
0.2	L_2	0.8577E-6	0.2152E-6	0.5391E-7	0.1355E-7	0.3459E-8
	L_∞	0.1424E-5	0.3571E-6	0.8998E-7	0.2260E-7	0.5748E-8
	$CPU(s)$	0.106387	0.111256	0.143769	0.263906	0.646063
0.4	L_2	0.3426E-5	0.8578E-6	0.2146E-6	0.5378E-7	0.1356E-7
	L_∞	0.4678E-5	0.1183E-5	0.2961E-6	0.7419E-7	0.1871E-7
	$CPU(s)$	0.158576	0.179481	0.219686	0.455844	1.154521
0.6	L_2	0.4658E-5	0.1165E-5	0.2914E-6	0.7297E-7	0.1837E-7
	L_∞	0.6399E-5	0.1600E-5	0.4003E-6	0.1003E-6	0.2524E-7
	$CPU(s)$	0.213485	0.245007	0.310939	0.677440	1.696179
0.8	L_2	0.3912E-5	0.9777E-6	0.2445E-6	0.6124E-7	0.1542E-7
	L_∞	0.5359E-5	0.1352E-5	0.3381E-6	0.8466E-7	0.2131E-7
	$CPU(s)$	0.247846	0.300292	0.397895	0.863835	2.230456
1.0	L_2	0.2211E-5	0.5503E-6	0.1381E-6	0.3461E-7	0.8735E-8
	L_∞	0.3083E-5	0.7701E-6	0.1931E-6	0.4838E-7	0.1221E-7
	$CPU(s)$	0.305339	0.354214	0.468093	1.105186	2.806708

Çizelge 4.7 : Problem 2'nin $k = 0.0001$ için farklı h ve $t = 0.01, 0.1, 5, 10$ bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri.

t		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
0.01	L_2	0.2058E-6	0.5229E-7	0.1312E-7	0.3279E-8	0.8167E-9
	L_∞	0.3484E-6	0.8851E-7	0.2222E-7	0.5559E-8	0.1385E-8
	$CPU(s)$	0.055074	0.056204	0.068826	0.132037	0.288317
0.1	L_2	0.6062E-6	0.1517E-6	0.3791E-7	0.9454E-8	0.2340E-8
	L_∞	0.9963E-6	0.2544E-6	0.6357E-7	0.1585E-7	0.3913E-8
	$CPU(s)$	0.062209	0.068622	0.098502	0.152945	0.390046
5	L_2	0.1702E-8	0.4259E-9	0.1065E-9	0.2661E-10	0.6638E-11
	L_∞	0.2313E-8	0.5828E-9	0.1457E-9	0.3642E-10	0.9085E-11
	$CPU(s)$	1.406538	1.617586	2.761798	5.990516	16.658556
10	L_2	0.4689E-13	0.1178E-13	0.1941E-14	0.6673E-15	0.3632E-15
	L_∞	0.6384E-13	0.1610E-13	0.2553E-14	0.9992E-15	0.7772E-15
	$CPU(s)$	2.710363	3.170738	5.413236	11.841962	34.364064

Ayrıca $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ için $t = 0.01, 0.1, 5, 10$ bitiş zamanlarında hesaplanan hata normları [9] referansında verilen sonuçlarla Çizelge 4.8'de karşılaştırıldı. Çizelgeden önerilen şemanın literatürdeki mevcut çalışmaya kıyasla çok daha hassas ve başarılı sonuçlar ortaya koyduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.8 : Problem 2'nin $h = 0.05$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları.

Yöntem	Mevcut		I-EFD [9]		FI-EFD [9]	
t	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.01	0.5229E-7	0.8851E-7	0.128E-4	0.317E-4	0.128E-4	0.317E-4
0.1	0.1517E-6	0.2544E-6	0.296E-4	0.414E-4	0.290E-4	0.411E-4
5	0.4259E-9	0.5828E-9	0.66E-5	0.91E-5	0.66E-5	0.91E-5
10	0.118E-13	0.161E-13	0.181E-9	0.249E-9	0.182E-9	0.250E-9

İkinci olarak, konum ve zaman adım büyüklüklerinin $h = k$ olmak üzere, 0.1'den başlayarak 0.00625'e ulaşıncaya kadar her adımda yarılanmak suretiyle beş farklı değeri için $t = 0.8$ ve $t = 1.0$ bitiş anlarında hesaplanan L_2 ile L_∞ hata normlarına ait yaklaşık yakınsaklık mertebeleri Çizelge 4.9'da verildi. Çizelgeden, hesaplanan bu yaklaşık mertebelerin teorik değer olan 2 ile oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

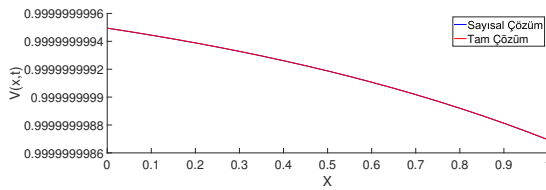
Çizelge 4.9 : Problem 2'nin yaklaşık yakınsaklık mertebeleri.

t	$h = k$	L_2	$M(L_2)$	L_∞	$M(L_\infty)$
0.8	0.1	$0.1463E-3$	—	$0.2003E-3$	—
	0.05	$0.3675E-4$	1.9937	$0.5030E-4$	1.9932
	0.025	$0.9212E-6$	1.9960	$0.1264E-4$	1.9925
	0.0125	$0.2306E-5$	1.9978	$0.3165E-5$	1.9979
	0.00625	$0.5771E-6$	1.9989	$0.7918E-6$	1.9989
1.0	0.1	$0.1107E-3$	—	$0.1512E-3$	—
	0.05	$0.2781E-4$	1.9936	$0.3815E-4$	1.9872
	0.025	$0.6967E-5$	1.9969	$0.9562E-5$	1.9963
	0.0125	$0.1744E-5$	1.9984	$0.2394E-5$	1.9979
	0.00625	$0.4362E-6$	1.9992	$0.5988E-6$	1.9992

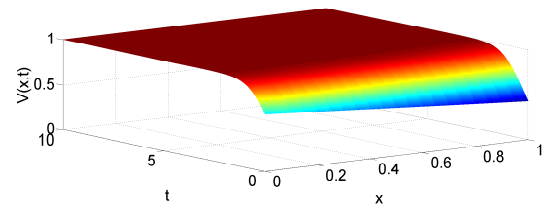
Üçüncü olarak, $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ parametreleri kullanılarak, $t = 0.2(0.2)1.0$ bitiş zamanlarında şemadan hesaplanan mutlak hata değerleri, [9, 20] referanslarında verilen sonuçlarla Çizelge 4.10'da karşılaştırıldı. Çizelgeden mevcut şemadan elde edilen sonuçların yeterince küçük olduğu ve karşılaştırılan sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.10 : Problem 2'nin $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.

x/t	Yöntem	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1.0$
0.2	Mevcut	$0.2122E-7$	$0.5265E-7$	$0.6162E-7$	$0.4706E-7$	$0.2396E-7$
	I-EFD [9]	$0.366E-4$	$0.346E-4$	$0.278E-4$	$0.208E-4$	$0.149E-4$
	FI-EFD [9]	$0.364E-4$	$0.355E-4$	$0.298E-4$	$0.233E-4$	$0.173E-4$
	UCBS [20]	$0.3880E-3$	$0.8190E-3$	$0.1112E-2$	$0.1184E-2$	$0.1080E-2$
	TCBS [20]	$0.3951E-3$	$0.8362E-3$	$0.1130E-2$	$0.1204E-2$	$0.1103E-2$
	ECBS [20]	$0.9673E-3$	$0.1900E-2$	$0.2446E-2$	$0.2519E-2$	$0.2251E-2$
0.4	Mevcut	$0.1965E-7$	$0.7339E-7$	$0.9513E-7$	$0.7733E-7$	$0.4218E-7$
	I-EFD [9]	$0.352E-4$	$0.367E-4$	$0.304E-4$	$0.231E-4$	$0.166E-4$
	FI-EFD [9]	$0.345E-4$	$0.376E-4$	$0.330E-4$	$0.266E-4$	$0.203E-4$
	UCBS [20]	$0.4230E-3$	$0.1111E-2$	$0.1613E-2$	$0.1777E-2$	$0.1658E-2$
	TCBS [20]	$0.4448E-3$	$0.1137E-2$	$0.1640E-2$	$0.1806E-2$	$0.1688E-2$
	ECBS [20]	$0.1159E-2$	$0.2641E-2$	$0.3587E-2$	$0.3805E-2$	$0.3462E-2$
0.6	Mevcut	$0.8297E-8$	$0.6760E-7$	$0.9714E-7$	$0.8361E-7$	$0.4826E-7$
	I-EFD [9]	$0.365E-4$	$0.392E-4$	$0.335E-4$	$0.262E-4$	$0.194E-4$
	FI-EFD [9]	$0.355E-4$	$0.399E-4$	$0.360E-4$	$0.298E-4$	$0.231E-4$
	UCBS [20]	$0.2890E-3$	$0.1008E-2$	$0.1569E-2$	$0.1789E-2$	$0.1703E-2$
	TCBS [20]	$0.3111E-3$	$0.1034E-2$	$0.1596E-2$	$0.1818E-2$	$0.1734E-2$
	ECBS [20]	$0.8863E-3$	$0.2444E-2$	$0.3512E-2$	$0.3838E-2$	$0.3558E-2$
0.8	Mevcut	$0.1095E-8$	$0.4133E-7$	$0.6558E-7$	$0.5946E-7$	$0.3601E-7$
	I-EFD [9]	$0.403E-4$	$0.420E-4$	$0.372E-4$	$0.302E-4$	$0.232E-4$
	FI-EFD [9]	$0.395E-4$	$0.423E-4$	$0.387E-4$	$0.326E-4$	$0.257E-4$
	UCBS [20]	$0.1120E-3$	$0.6120E-3$	$0.1024E-2$	$0.1206E-2$	$0.1172E-2$
	TCBS [20]	$0.1270E-3$	$0.6300E-3$	$1.042E-3$	$1.225E-3$	$1.192E-3$
	ECBS [20]	$0.4224E-3$	$0.1505E-2$	$0.2293E-2$	$0.2583E-2$	$0.2441E-2$



(a)



(b)

Şekil 4.2 : Problem 2'nin $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ için $t = 10$ 'da tam ve yaklaşık çözümlerinin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri.

Son olarak, yaklaşık çözümlerin tam çözüme yakınlığını ve sürekliliğini incelemek için $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ parametre değerleri kullanıldı. Bu bağlamda, $t = 10$ zamanı için yaklaşık

ve tam çözümlere ait (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri sırasıyla Şekil 4.2’de sunuldu. Grafiklerden her iki çözümün büyük ölçüde örtüştüğü görülmektedir.

4.3 Örnek Problem 3

Bu örnek problem için çözüm bölgesi $(x, t) \in [-30, 15] \times [0, T]$ ve parametreler $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$ ve $p = 3$ olarak seçildi. Böylece

$$V_t = V_{xx} + 3V - 4V^3, (x, t) \in [-30, 15] \times [0, T]$$

NWS denklemi

$$V(x, 0) = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}}$$

başlangıç şartı ve

$$V(-30, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{1 + e^{15\sqrt{6}}}, V(15, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}, t \in [0, T]$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$V(x, t) = \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x - \frac{9}{2}t\right)}} \right)$$

dir [4].

İlk olarak, zaman adım büyüklüğü $k = 0.0001$ sabit tutularak, uzay adım büyüklüğü olan h parametresinin 0.1’den başlayıp yarılanarak 0.00625’e kadar küçülen beş farklı değeri için $[0, T] = [0, 1]$ zaman aralığında $t = 0.2(0.2)1.0$ bitiş anlarında elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri Çizelge 4.11’de sunuldu. Çizelgedeki veriler incelendiğinde, her bir bitiş anı için h değerindeki azalma ile birlikte hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının sistematik bir şekilde azaldığı gözlemlendi. Bu durum, sunulan şemanın kararlılık ve tutarlılık kriterlerini karşılama noktasında yeterli performansı sergilediğini ortaya koymaktadır.

Çizelge 4.11 : Problem 3'ün $k = 0.0001$ ve farklı h için L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $CPU(s)$ işlemci süreleri.

t		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
0.2	L_2	0.3968E-4	0.9923E-5	0.2481E-5	0.6203E-6	0.1551E-6
	L_∞	0.3453E-4	0.8652E-5	0.2162E-5	0.5393E-6	0.1336E-6
	$CPU(s)$	3.880136	25.441375	158.468637	932.494309	10619.715655
0.4	L_2	0.6203E-4	0.1551E-4	0.3875E-5	0.9668E-6	0.2398E-6
	L_∞	0.5717E-4	0.1429E-4	0.3572E-5	0.8902E-6	0.2198E-6
	$CPU(s)$	7.593454	49.707893	304.970195	1843.060909	20246.321838
0.6	L_2	0.7455E-4	0.1863E-4	0.4655E-5	0.1159E-5	0.2858E-6
	L_∞	0.6727E-4	0.1683E-4	0.4205E-5	0.1047E-5	0.2573E-6
	$CPU(s)$	11.300134	77.785326	528.660318	3013.864639	23584.671877
0.8	L_2	0.7880E-4	0.1970E-4	0.4920E-5	0.1225E-5	0.3011E-6
	L_∞	0.6493E-4	0.1625E-4	0.4056E-5	0.1008E-5	0.2457E-6
	$CPU(s)$	14.912253	107.910006	586.365963	4447.695518	8884.65020
1.0	L_2	0.7973E-4	0.1994E-4	0.4981E-5	0.1242E-5	0.3074E-6
	L_∞	0.5101E-4	0.1257E-4	0.3184E-5	0.7991E-6	0.2027E-6
	$CPU(s)$	18.547354	129.105031	792.2055	5414.374879	115243.998925

İkinci olarak, $h = k$ adım büyüklüklerinin 0.1'den 0.00625'e kadar sistematik olarak yarılanmasıyla elde edilen beş farklı değer için $t = 0.8$ ve $t = 1.0$ bitiş anlarındaki L_2 ve L_∞ hata normlarında hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebeleri Çizelge 4.12'de sunuldu. Çizelgedeki verilerden hesaplanan yakınsaklık mertebelerinin teorik değer olan 2'ye oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir.

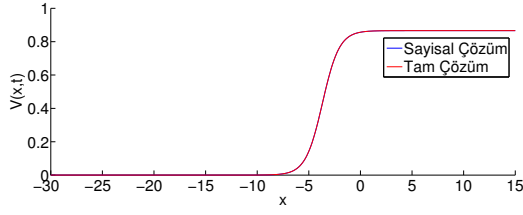
Çizelge 4.12 : Problem 3'ün yaklaşık yakınsaklık mertebeleri.

t	$h = k$	L_2	$M(L_2)$	L_∞	$M(L_\infty)$
0.8	0.1	1.8848E-1	—	8.8252E-2	—
	0.05	4.0379E-1	2.2230	2.2842E-2	1.9499
	0.025	9.3973E-3	2.1030	7.4515E-3	1.6160
	0.0125	2.3645E-3	1.9907	1.9214E-3	1.9554
	0.00625	5.9627E-4	1.9875	4.7911E-4	2.0037
1.0	0.1	1.7593E-1	—	8.0064E-2	—
	0.05	3.5875E-2	2.2940	1.8441E-2	2.1182
	0.025	9.0477E-3	1.9873	5.6076E-3	1.7175
	0.0125	2.4276E-3	1.8980	1.5644E-3	1.8418
	0.00625	6.1398E-4	1.9832	4.1409E-4	1.9175

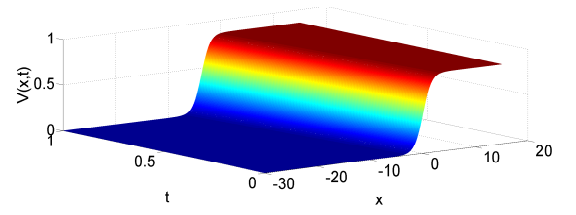
Üçüncü olarak, ele alınan problemin $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ parametreleri kullanılarak farklı konum ve zamanlarda hesaplanan mutlak hata büyüklükleri literatürdeki [8, 9, 18, 20] referanslarında verilen sonuçlarla Çizelge 4.13'te karşılaştırıldı. Çizelgeden, sunulan şema ile elde edilen sonuçların diğer çalışmalara göre daha üstün doğrulukta sonuçlar ürettiği açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.13 : Problem 3'ün $h = 0.0125$ ve $k = 0.0001$ için farklı bitiş zamanlarında mutlak hata değerleri.

x/t	Yöntem	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$	$t = 1.0$
0.2	Mevcut	0.1706E-6	0.4260E-7	0.1984E-7	0.1984E-7	0.1061E-7
	I-EFD [9]	0.584E-4	0.331E-4	0.151E-4	0.64E-5	0.9771E-3
	FI-EFD [9]	0.670E-4	0.424E-3	0.205E-4	0.90E-5	0.9771E-3
	UCBS [20]	0.6129E-1	0.7120E-1	0.4312E-1	0.4661E-1	0.1560E-1
	TCBS [20]	0.6134E-1	0.7129E-1	0.6430E-1	0.4670E-1	0.1563E-1
	ECBS [20]	0.5166E-1	0.5402E-1	0.4511E-1	0.2860E-1	0.1518E-2
	ExBSM [8]	0.1000E-2	—	—	—	0.1100E-2
	[18]	0.1187E-5	—	—	—	0.1637E-3
0.4	Mevcut	0.2286E-6	0.5148E-7	0.2870E-7	0.2723E-7	0.1443E-7
	I-EFD [9]	0.424E-4	0.235E-4	0.101E-4	0.41E-5	0.1095E-2
	FI-EFD [9]	0.553E-4	0.365E-4	0.176E-4	0.77E-5	0.1094E-2
	UCBS [20]	0.8711E-1	0.1005E-1	0.8771E-1	0.6001E-1	0.1640E-1
	TCBS [20]	0.8718E-1	0.1006E-1	0.8786E-1	0.6015E-1	0.1650E-1
	ECBS [20]	0.7224E-1	0.7421E-1	0.5888E-1	0.3321E-1	0.4323E-2
	ExBSM [8]	0.1500E-2	—	—	—	0.1500E-2
0.6	Mevcut	0.2012E-6	0.3844E-7	0.2865E-7	0.2537E-7	0.1328E-7
	I-EFD [9]	0.337E-4	0.180E-4	0.74E-5	0.30E-5	0.9066E-3
	FI-EFD [9]	0.468E-4	0.302E-4	0.144E-4	0.62E-5	0.9063E-3
	UCBS [20]	0.8030E-1	0.9072E-1	0.7637E-1	0.4899E-1	0.9878E-2
	TCBS [20]	0.8036E-1	0.9085E-1	0.7651E-1	0.4911E-1	0.9969E-2
	ECBS [20]	0.6461E-1	0.6456E-1	0.4822E-1	0.2328E-1	0.9679E-2
	ExBSM [8]	0.1500E-2	—	—	—	0.1500E-2
	[18]	0.8425E-5	—	—	—	0.8339E-3
0.8	Mevcut	0.1169E-6	0.1676E-7	0.1970E-7	0.1609E-7	0.8278E-8
	I-EFD [9]	0.323E-4	0.160E-4	0.66E-5	0.27E-5	0.5799E-3
	FI-EFD [9]	0.413E-4	0.238E-4	0.110E-4	0.47E-5	0.5798E-3
	UCBS [20]	0.4857E-1	0.5319E-1	0.6420E-1	0.2582E-1	0.2862E-2
	TCBS [20]	0.4862E-1	0.5328E-1	0.4321E-1	0.2590E-1	0.2915E-2
	ECBS [20]	0.3721E-1	0.3588E-1	0.2500E-1	0.9644E-1	0.9118E-2
	ExBSM [8]	0.9883E-3	—	—	—	0.9883E-3
	[18]	0.6311E-4	—	—	—	0.6480E-3



(a)



(b)

Şekil 4.3 : Problem 3'ün $h = 0.05$ ve $k = 0.001$ için $t = 1$ 'de tam ve yaklaşık çözümlerinin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri.

Son olarak, yaklaşık çözümlerin sürekliliğini ve tam çözüme yakınsaklığını göstermek için h ve k adım uzunlukları $k = 0.001$ ve $h = 0.05$ olarak seçildi. $t = 1$ bitiş zamanında hesaplanan yaklaşık ve tam çözümlerin (a) 2-boyutlu ve (b) 3-boyutlu grafikleri sırasıyla Şekil 4.3'te verildi. Grafikler incelendiğinde, yaklaşık ve tam çözüm eğrilerinin büyük ölçüde çakıştığı görülmekte olup bu durum kullanılan yaklaşık yöntemin doğruluğunu ve yakınsaklık performansını açıkça ortaya koymaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, non-lineer 2. mertebeden 1-boyutlu NWS tipi kısmi diferansiyel denklem ile verilen üç farklı başlangıç-sınır değer problemi ele alındı. Her bir problemin yaklaşık çözümleri Richtmyer tipi lineerleştirme tekniği ile entegre edilmiş Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile elde edildi. Bu çalışma sonucunda elde edilen teorik katkılar, sayısal bulgular ve öneriler aşağıda verildi.

Teorik Katkılar:

-Richtmyer lineerleştirilmesinin bilindiği kadarıyla NWS denkleminde literatürde ilk kez uygulanmasıyla, her zaman adımında çözülmesi gereken cebirsel denklem sisteminin lineer ve konuma göre ikinci mertebeden türev için $O(h^2)$ mertebesinde üç-nokta simetrik fark formülü kullanıldığından katsayılar matrisinin üç-köşegen yapıda kalması sağlanmıştır.

-Önerilen şemanın YKH incelenmiş ve hata mertebesinin $O(k^2) + O(h^2)$ olduğu gösterilmiştir.

Sayısal Bulgular:

-Her bir problem için seçilen farklı grid parametreleri ile yapılan testlerde h ve k değerleri küçüldükçe hata normlarının da gittikçe küçüldüğü görülmüştür.

-Hesaplanan yakınsaklık mertebeleri, teorik değer olan 2 ile mükemmel uyum göstermiştir.

-Mevcut yöntem literatürdeki diğer yöntemlerle kıyaslandığında, önerilen şemanın uygulama ve programlama kolaylığı sağladığı, ayrıca hesaplanan hata normlarının oldukça düşük seviyelerde kaldığı gözlenmiştir.

-Yaklaşık çözümler ile tam çözümler arasında yapılan grafiksel karşılaştırmalar, sunulan şemanın ne kadar iyi olduğunu ortaya koymuştur.

Öneriler:

-Önerilen şema benzer matematiksel formdaki diğer reaksiyon-difüzyon denklemlerine kolaylıkla adapte edilebilir.

-Gelecek çalışmalarda şemanın iki boyutlu versiyonları geliştirilerek daha karmaşık sistemlerin simülasyonu gerçekleştirilebilir.

-Richtmyer dışındaki farklı lineerleştirme teknikleri uygulanarak karşılaştırılmalı performans analizleri yapılabilir.

-Önerilen şemanın doğruluğu, yüksek mertebeli kompakt sonlu fark şemaları ile birleştirilerek daha da arttırılabilir.

Sonuç olarak, non-linear NWS tipi denklemlerin yaklaşık çözümlerinde teorik beklentileri karşılayan, uygulanması kolay, kararlı ve güvenilir bir yaklaşım olan mevcut şema farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen non-linear reaksiyon-difüzyon tipi bazı denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde rahatlıkla kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Evans, L.C.** (2010). Partial Differential Equations, *American Mathematical Society (Graduate Studies in Mathematics, Cilt 19)*.
- [2] **Newell, A.C. ve Whitehead, J.A.** (1969). Finite bandwidth, finite amplitude convection, *Journal of Fluid Mechanics*, 38(2), 279–303.
- [3] **Alkan, A. ve Anaç, H.** (2024). A new study on the Newell-Whitehead-Segel equation with Caputo-Fabrizio fractional derivative, *AIMS Mathematics*, 9(10), 27979–27997.
- [4] **G.Hariharan** (2014). An Efficient Legendre Wavelet-Based Approximation Method for a Few Newell–Whitehead and Allen–Cahn Equations, *The Journal of Membrane Biology*, 247(5), 371-380.
- [5] **Korkmaz, A.** (2018). Complex Wave Solutions to Mathematical Biology Models I: Newell–Whitehead–Segel and Zeldovich Equations, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 13(8), 081004.
- [6] **Saha, A.ve Das, A.** (2020). Dynamical behavior of nonlinear wave solutions of the generalized Newell–Whitehead–Segel equation, *International Journal of Modern Physics C*, 31(04), 2050059.
- [7] **Inan, B., Osman, M.S., Ak, T. ve Baleanu, D.** (2020). Analytical and numerical solutions of mathematical biology models: The Newell-Whitehead-Segel and Allen-Cahn equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(5), 2588-2600.
- [8] **Wasim, I., Abbas, M., Kashif Iqbal, M. ve Mubashir Hayat, A.** (2020). Exponential B-spline collocation method for solving the generalized Newell-Whitehead-Segel equation, *Journal of Mathematics and Computer Science*, 20(04), 313-324.
- [9] **Hilal, N., Injrou, S. ve Karroum, R.** (2020). Exponential finite difference methods for solving Newell-Whitehead-Segel equation, *Arabian Journal of Mathematics*, 9(2), 367-379.
- [10] **Gupta, S., Goyal, M. ve Prakash, A.** (2020). NUMERICAL TREATMENT OF NEWELL-WHITEHEAD-SEGEL EQUATION, *TWMS J. App. Eng. Math.* V.10, N.2, 2020, pp. 312-32.
- [11] **Liaqat, M.I., Khan, A., Alam, M.A., Pandit, M.K., Etemad, S. ve Rezapour, S.** (2022). Approximate and Closed-Form Solutions of Newell-Whitehead-Segel Equations via Modified Conformable Shehu Transform Decomposition Method, *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, 1-14.
- [12] **Patel, Y.F., Dhodiya, J.M. ve Pandit, D.** (2022). Exact solution of nonlinear Newell-Whitehead-Segel equation using semi-analytical approach, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, mma.8843.
- [13] **Hussain, J.** (2023). On the series solution of the stochastic Newell Whitehead Segel equation, *AIMS Mathematics*, 8(9), 21591-21605.

- [14] **Hashemi, M.S. ve Mirzazadeh, M.** (2023). Exact solutions of nonlinear stochastic Newell-Whitehead-Segel equation by a reduction technique, *The European Physical Journal Plus*, 138(11), 1016.
- [15] **Pathak, M., Bhatia, R., Joshi, P. ve Mittal, R.C.** (2024). A Numerical Study of Newell-Whitehead-Segel Type Equations Using Fourth Order Cubic B-spline Collocation Method, *Mathematics and Statistics*, 12(3), 270-282.
- [16] **Alsofey, M.M. ve Al-Rozbayani, A.M.** (2024). olving Newell-Whitehead-Segel Equation By using Elzaki Transform and its inverse with The Homotopy Perturbation Method, *Al-Rafidain Journal of Computer Sciences and Mathematics (RJCM)*, Vol. 18.No.1, 2024(1-6).
- [17] **Kamaruddin, M.A.A. ve Puzi, S.M.** (2024). Explicit Exponential Finite Difference Method and Explicit Forward Time Centered Space Scheme for The Newell-Whitehead-Segel Equation, *Proceedings of Science and Mathematics*, Volume 24 (2024) 106-117.
- [18] **Tarei, S., Kanaujiya, A. ve Mohapatra, J.** (2025). An efficient numerical solution to generalized Newell–Whitehead–Segel equation using Jaiswal–Laguerre functions, *Engineering Computations*, 42(5), 1845–1861.
- [19] **Smith, G.D.** (1987). *Numerical solution of partial differential equation: Finite difference methods*, Clarendon Press, Oxford.
- [20] **Zahra, W., Ouf, W. ve El-Azab, M.** (2014). Cubic B-spline collocation algorithm for the numerical solution of Newell Whitehead Segel type equations, *Electronic J.Math Anal Appl.*2:81-100.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: MERVE ARSLAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2021, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

