

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE KARIŞIK TİP
FONKSİYONLARIN YEREL YAKLAŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS

SEDA NUR YILMAZ

Temmuz 2026
GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE KARIŞIK TİP
FONKSİYONLARIN YEREL YAKLAŞIMLARI**

**LOCAL APPROXIMATIONS OF MIXED-TYPE FUNCTIONS IN NON-
NEWTONIAN ANALYSIS**

YÜKSEK LİSANS

SEDA NUR YILMAZ

**Temmuz 2026
GÜMÜŞHANE**



LEE

**GÜMÜŞHANE
ÜNİVERSİTESİ**

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE KARIŞIK TİP
FONKSİYONLARIN YEREL YAKLAŞIMLARI**

**LOCAL APPROXIMATIONS OF MIXED-TYPE FUNCTIONS IN NON-
NEWTONIAN ANALYSIS**

YÜKSEK LİSANS

SEDA NUR YILMAZ

DANIŞMAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ MUTLU DEDETÜRK

**Temmuz 2026
GÜMÜŞHANE**

KABUL VE ONAY

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK danışmanlığında, **Seda Nur YILMAZ** tarafından hazırlanan “**Newtonyen Olmayan Analizde Karışık Tip Fonksiyonların Yerel Yaklaşımları**” isimli bu çalışma, 09/07/2026 tarihinde yapılan lisansüstü tez savunma sınavı sonucunda **Oy Birliği** ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

.....

Doç. Dr. Esra DAMAR (Başkan)

.....

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK (Danışman)

.....

Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN (Üye)

Lisansüstü tez savunma sınavında başarılı bulunarak kabul edilen bu tezin ciltlenmiş hali, / / tarihli ve / sayılı Enstitü Yönetim Kurulu toplantısında görüşülmüş ve tez yazım kılavuzuna uygun bulunarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Duygu ÖZDEŞ

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Newtonyen Olmayan Analizde Karışık Tip Fonksiyonların Yerel Yaklaşımları**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, danışmanımın sorumluluğunda hazırladığımı, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

09/07/2026

.....
Seda Nur YILMAZ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde destek ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, destekleri ve anlayışlarıyla bana güç veren aileme sevgi ve minnetlerimi sunarım.

Seda Nur YILMAZ
GÜMÜŞHANE – 2026

ÖZET

Newtonyen olmayan analiz, klasik türev ve integral kavramlarının farklı üreteç fonksiyonlar aracılığıyla genelleştirilmesine dayanan ve özellikle geometrik, bigeometrik ve benzeri hızlı büyüme gösteren fonksiyonların incelenmesinde etkin sonuçlar üreten bir analiz alanıdır. Bu tez çalışmasında, klasik analiz kapsamında tanımlanan fonksiyonlar ile Newtonyen olmayan analizde farklı üreteçler kullanılarak elde edilen fonksiyonların klasik toplamları ve alfa toplamları ele alınmaktadır. Literatürde, bu tür karışık tipteki fonksiyonların yerel davranışlarını incelemek için çoğunlukla klasik Taylor yaklaşımı kullanılmakta; ancak bu yaklaşım, Newtonyen olmayan bileşenlerin doğal yapısını yeterince yansıtamamaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı, farklı üreteçlerle tanımlanan fonksiyonların Newtonyen olmayan toplamları için birinci mertebeden yeni bir yaklaşım yöntemi geliştirmektir. Önerilen yöntemde, fonksiyonun klasik ve Newtonyen olmayan bileşenleri ayrı ayrı ele alınmakta ve her bir bileşen kendi analiz çerçevesine uygun şekilde lineerleştirilmektedir. Elde edilen yeni yaklaşım, klasik birinci mertebeden Taylor yaklaşımı ile karşılaştırmalı olarak incelenmekte ve hata analizleri yapılmaktadır. Çeşitli sayısal örnekler üzerinden yöntemin etkinliği gösterilmektedir. Örneğin üstel ve çift üstel yapı içeren fonksiyonlar için daha düşük hata değerleri elde edildiği ortaya konulmaktadır. Bu yönüyle çalışmanın, Newtonyen olmayan analizde yerel yaklaşım tekniklerine katkı sağlaması beklenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Alfa toplam, Birinci mertebeden yaklaşım, Karışık tip fonksiyonlar, Newtonyen olmayan analiz, Türev

ABSTRACT

Non-Newtonian calculus is a branch of analysis based on the generalization of the classical concepts of derivative and integral through alternative generator functions. It provides effective tools, particularly for the study of rapidly growing functions such as geometric, bigeometric, and related function classes. In this thesis, classical sums and alpha sums of functions defined within classical analysis and functions generated by different generators in non-Newtonian analysis are investigated. In the existing literature, the local behavior of such mixed-type functions is generally examined using the classical Taylor approach. However, this approach does not adequately reflect the intrinsic structure of the non-Newtonian components.

The main objective of this study is to develop a new first-order approximation method for non-Newtonian sums of functions defined by different generators. In the proposed method, the classical and non-Newtonian components of a function are treated separately, and each component is linearized according to its own analytical framework. The resulting approximation is compared with the classical first-order Taylor approximation, and detailed error analyses are carried out. The effectiveness of the proposed method is demonstrated through various numerical examples. In particular, it is shown that lower approximation errors can be achieved for functions involving exponential and double-exponential structures. Therefore, the study is expected to contribute to the development of local approximation techniques in non-Newtonian analysis.

Keywords: Alpha sum, First-order approximation, Mixed-type functions, Non-Newtonian analysis, Derivative

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZLER	6
2.1. Newtonyen Olmayan Sayı Kümeleri	6
2.2. Alfa İşlemler.....	6
2.3. Üstel Analiz.....	9
2.4. Çift Üstel Analiz	9
2.5. Harmonik Analiz.....	10
2.6. Kuadratik Analiz	10
3. NEWTONYEN OLMAYAN BİRİNCİ MERTEBEDEN YAKLAŞIMLAR.....	14
3.1. Harmonik Analizde Birinci Mertebeden Yaklaşım.....	15
3.2. Kuadratik Analizde Birinci Mertebeden Yaklaşım.....	17
4. KARIŞIK TİP FONKSİYONLARIN NEWTONYEN OLMAYAN BİRİNCİ MERTEBEDEN YAKLAŞIMI	19
4.1. Klasik ve Üstel Fonksiyonların Toplamı İçin Bir Yaklaşım.....	20
4.2. Üstel ve Çift Üstel Fonsiyonların Çarpımı İçin Bir Yaklaşım.....	22
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	27
KAYNAKÇA	29
ÖZGEÇMİŞ	31

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Harmonik analiz ile yaklaşım ve klasik yaklaşımın karşılaştırılması.....	16
Tablo 2. Kuadratik analiz ile yaklaşım ve klasik yaklaşımın karşılaştırılması.....	17
Tablo 3. Klasik ve üstel fonksiyonların toplamı için bir yaklaşım	21
Tablo 4. Üstel ve çift üstel fonsiyonların çarpımı için bir yaklaşım.....	24
Tablo 5. Mutlak ve görelî hata değêrlerinin karşılaştırılması	25
Tablo 6. Hata ölçütleri.....	25

1. GİRİŞ

Fonksiyon yaklaşımı (function approximation), karmaşık veya kapalı formda ifade edilmesi zor bir fonksiyonun, daha basit ve hesaplanabilir fonksiyon sınıfları kullanılarak yaklaşık olarak temsil edilmesini amaçlar. Bu temsil; doğruluk, sayısal kararlılık ve hesaplama maliyeti gibi ölçütlere göre farklı biçimlerde seçilebilir (Atkinson, 2004; Trefethen, 2013).

Genel olarak bir fonksiyon f , aşağıdaki sınıflardan biri kullanılarak yaklaşık olarak ifade edilir:

- polinomlar,
- rasyonel fonksiyonlar,
- trigonometrik fonksiyonlar,
- parçalı polinomlar (spline'lar),
- en küçük kareler anlamında projeksiyonlar.

Yaklaşım yönteminin seçimi; fonksiyonun düzgünlüğüne, tanım aralığına (yerel–küresel), periyodik olup olmamasına ve olası tekillik davranışlarına bağlıdır (Atkinson, 2004; Trefethen, 2013).

Bir fonksiyonun yalnızca belirli bir nokta veya bu noktanın yakın çevresindeki davranışını temsil etmeyi amaçlayan yaklaşımlara *yerel yaklaşım* denir. Bu tür yaklaşımlarda yaklaşımın doğruluğu, seçilen referans noktaya yakın bölgelerde yüksektir; ancak noktadan uzaklaştıkça hata büyüyebilir.

Tanım 1.1. f bir fonksiyon ve $x_0 \in D_f$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A(x)) = 0$$

sağlanıyorsa, $A(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ 'in x_0 noktasındaki bir yerel yaklaşımı denir.

Birinci mertebe Taylor polinomu bunun en yaygın örneklerinden biridir:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Bir fonksiyonun belirli bir nokta çevresinden ziyade bir aralık veya tüm tanım kümesi üzerindeki davranışını temsil etmeyi amaçlayan yaklaşımlara *küresel yaklaşım* denir. Bu yaklaşımlarda amaç, geniş bir bölgede kabul edilebilir doğruluk elde etmektir.

Örneğin, $[a, b]$ aralığında bir fonksiyonun en küçük kareler yöntemiyle elde edilen polinom yaklaşımı veya Chebyshev yaklaşımı, fonksiyonun tüm aralık üzerindeki davranışını dikkate aldığından küresel yaklaşım örnekleridir.

Klasik analizde en bilinen yaklaşım Taylor açılımlarıdır. Bir fonksiyonun a noktası civarındaki yerel davranışı, türev bilgisi kullanılarak

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

şeklinde polinomlarla temsil edilir (Atkinson, 2004).

Bu yaklaşım:

- yerel doğruluk sağlar,
- hata terimi türevler cinsinden ifade edilebilir,
- ancak geniş aralıklarda kararsızlaşabilir.

Bu sınırlamalar, özellikle yüksek dereceli polinomlar kullanıldığında ortaya çıkan osilasyonlar (Runge olgusu) ve sayısal kararsızlıklar nedeniyle alternatif yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır (Trefethen, 2013).

Yerel Taylor yaklaşımının aksine, küresel yaklaşımlar bir aralık boyunca hatayı kontrol etmeyi hedefler. Bu bağlamda ortogonal polinomlar önemli bir rol oynar.

Bir ağırlık fonksiyonu $w(x)$ altında tanımlanan iç çarpıma göre ortogonal olan Legendre, Chebyshev ve Jacobi polinomları; fonksiyonların en küçük kareler veya uniform norm anlamında en iyi yaklaşımlarını üretir (Quarteroni vd., 2007).

Özellikle:

- Legendre polinomları, L^2 normunda en iyi yaklaşımı,
- Chebyshev polinomları, uniform normda (minimax) en iyi yaklaşıma yakın sonuçları sağlar (Boyd, 2001; Trefethen, 2013).

Chebyshev polinomlarının kosinüs fonksiyonlarıyla olan

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

özdeşliği, bu yaklaşımı Fourier-kosinüs serileriyle doğrudan ilişkilendirir ve sayısal açıdan son derece verimli kılar (Boyd, 2001).

Periyodik fonksiyonlar için Fourier serileri doğal bir yaklaşım sunar. Sinüs ve kosinüs tabanlı bu temsiller, düzgün periyodik fonksiyonlar için spektral (üstel)

yakınsaklık sağlar. Ancak süreksizlik noktalarında Gibbs olgusu ortaya çıkar (Boyd, 2001).

Buna karşılık rasyonel yaklaşımlar, özellikle Padé yaklaşımları, fonksiyonun kutupsal veya tekil davranışlarını polinomlara göre çok daha başarılı biçimde modelleyebilir. Padé yaklaşımı, Taylor serisinin belirli bir mertebeye kadar katsayılarını eşleştirerek

$$f(x) \approx \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

biçiminde bir rasyonel temsil üretir ve asimptotik davranış açısından önemli avantajlar sağlar (Baker and Graves-Morris, 1996).

Spline yaklaşımları, düşük dereceli polinomların parçalı olarak birleştirilmesiyle elde edilir ve yerel kontrol avantajı sunar. Bu yöntemler, hem sayısal kararlılık hem de düzgünlük açısından klasik interpolasyon polinomlarına güçlü bir alternatiftir (Quarteroni vd., 2007).

En küçük kareler yöntemi ise özellikle gürültülü verilerde, ortalama karesel hatayı minimize eden en iyi yaklaşımı sağlar ve ortogonal polinom temelleriyle birleştirildiğinde yüksek kararlılık sunar (Atkinson, 2004).

Klasik analizde fonksiyonların yerel davranışlarının incelenmesinde Taylor polinomları temel araçlardan biridir. Ancak bu yaklaşım, özellikle üstel ve daha hızlı büyüyen fonksiyonlar için yeterli doğruluk sağlamayabilmektedir. Bu durum, alternatif türev ve yaklaşım kavramlarının geliştirilmesine yol açmıştır. Newtonyen olmayan analiz, üreteç fonksiyonlar aracılığıyla yeni aritmetik işlemler ve türev tanımları sunarak bu ihtiyaca cevap vermektedir.

Klasik (Newtonyen) sayısal analiz, türev ve integral kavramlarının toplamsal artışlara dayalı tanımları üzerine inşa edilmiştir. Ancak birçok fiziksel, biyolojik ve ekonomik süreç, doğası gereği *oransal* (*çarpımsal*) değişim sergilemekte; bu durum klasik toplamsal modellerin hem kavramsal hem de sayısal açıdan yetersiz kalmasına neden olmaktadır. Bu motivasyonla geliştirilen *Newtonyen olmayan analiz* (non-Newtonian calculus), özellikle *anageometrik*, *geometrik* ve *bigeometrik* yapılar üzerinden tanımlanan alternatif türev ve integral kavramlarıyla, bu tür süreçler için daha doğal bir matematiksel çerçeve sunmaktadır (Grossman ve Katz, 1972).

Newtonyen olmayan analiz yalnızca teorik bir genelleme değil, aynı zamanda *sayısal yöntemlerin yeniden formüle edilmesini* gerektiren bir yaklaşımdır. Klasik sayısal

yöntemlerin büyük bir bölümü —Euler, Runge–Kutta, Newton, Adams türü çok adımlı yöntemler— temelde toplamsal artışlara dayandığından, bu yöntemlerin Newtonyen olmayan analiz bağlamında yeniden tanımlanması hem zorunlu hem de araştırmaya açık bir alandır. Bu bağlamda, son yıllarda özellikle *bigeometrik* ve *çarpımsal (multiplicative)* hesap çerçevesinde geliştirilen sayısal yöntemler literatürde önemli bir yer edinmiştir.

Bu alandaki öncü çalışmalardan biri, *çarpımsal Runge–Kutta yöntemlerinin* geliştirilmesidir. Klasik Runge–Kutta şemasının çarpımsal yapıya uyarlanabileceği ve dinamik sistemlerin bigeometrik formatta etkin biçimde çözülebileceği gösterilmiştir (Aniszewska, 2007). Bu yaklaşımın kuramsal temelleri daha sonra Newtonyen olmayan analiz çerçevesinde genelleştirilmiştir (Kadak ve Özlük, 2015).

Newton tipi yöntemler de Newtonyen olmayan analizde önemli bir araştırma alanı oluşturmuştur. Klasik Newton yönteminin bigeometrik türev kavramı çerçevesinde yeniden tanımlanmasıyla *bigeometrik Newton yöntemi* geliştirilmiş ve doğrusal olmayan denklemlerin çarpımsal yapıya uygun biçimde çözümü ele alınmıştır (Yalçın ve Çelik, 2023).

Bigeometrik analizle paralel olarak, *çarpımsal (geometrik) analiz* altında geliştirilen sayısal yöntemler de literatürde geniş yer bulmuştur. Çarpımsal Taylor serileri kullanılarak geliştirilen geometrik Runge–Kutta yöntemleri, klasik yöntemlere kıyasla farklı yakınsaklık ve hata davranışları sergilemektedir (Rıza ve Aktöre, 2015). Benzer biçimde, çarpımsal fark oranlarına dayalı sonlu fark teknikleri geliştirilmiş ve bu yöntemlerin çarpımsal diferansiyel denklemler ile Volterra tip integral denklemlerine uygulanabilirliği gösterilmiştir (Rıza vd., 2009).

Çok adımlı yöntemler bağlamında, *Adams–Bashforth–Moulton türü yöntemler* Newtonyen olmayan analizde önemli bir yere sahiptir. Bu yöntemlerin çarpımsal biçimleri, predictor–corrector yaklaşımının doğal bir uzantısı olarak ele alınmış ve yakınsaklık ile kararlılık özellikleri incelenmiştir (Mısırlı ve Gürefe, 2011). Bu çerçevede, *bigeometrik Adams–Bashforth yöntemleri*, klasik çok adımlı yöntemlere güçlü bir alternatif olarak tanımlanmış; yöntemlerin teorik kuruluşu, hata kestirim formülleri ve uygulamalı örnekler ayrıntılı biçimde sunulmuştur (Yılmazer vd., 2025). Söz konusu çalışmada, klasik bir diferansiyel denklem bigeometrik çarpımsal diferansiyel denkleme dönüştürülmüş ve geliştirilen yöntemler kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Bu yönüyle çalışma, Newtonyen olmayan analizde *hata analizi içeren çok adımlı yöntemlerin* sistematik biçimde ele alınmasına önemli bir katkı sunmaktadır.

Son yıllarda Newtonyen olmayan analizde sayısal uygulamalara yönelik çalışmalar artış göstermiştir. Çarpımsal diferansiyel dönüşüm yöntemi ve çarpımsal kuvvet serileri

kullanılarak doğrusal ve doğrusal olmayan çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiştir (Yalçın ve Dedetürk, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2023). Ayrıca çarpımsal hesap çerçevesinde geliştirilen iki adımlı Newton yöntemleri (Singh ve Bhalla, 2023) ve çarpımsal integraller için sayısal yaklaşımlar (Dehghan, 2022) da literatürde önemli katkılar sunmuştur.

Bu çalışmalar, Newtonyen olmayan analizde sayısal yöntemlerin yalnızca klasik yöntemlerin biçimsel bir uyarlaması olmadığını; aksine *yeni hata analizleri*, *yakınsaklık kavramları* ve *sayısal davranışların* ortaya çıktığını göstermektedir. Dolayısıyla Newtonyen olmayan analizde sayısal yöntemlerin sistematik biçimde ele alınması, hem kuramsal hem de uygulamalı matematik açısından önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

Literatürde, geometrik (üstel) analiz, çift üstel analiz ve bunlara bağlı türev kavramları ayrıntılı biçimde ele alınmış; bu analizlerin klasik analizle ilişkileri çeşitli çalışmalarda ortaya konulmuştur (Yalçın, 2016; Güven 2024). Bununla birlikte, klasik fonksiyonlar ile Newtonyen olmayan analiz kapsamında tanımlanan fonksiyonların toplamalarına yönelik sistematik bir birinci mertebeden yaklaşım yöntemi literatürde sınırlı düzeyde ele alınmıştır. Mevcut çalışmalar çoğunlukla tek bir üreteç altında tanımlanan fonksiyonlara odaklanmakta, farklı üreteçlerle tanımlanan bileşenlerin birlikte ele alındığı durumlar yeterince incelenmemektedir. Bu tez çalışması, söz konusu boşluğu doldurmayı amaçlamaktadır.

2. NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZLER

2.1. Newtonyen Olmayan Sayı Kümeleri

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesine tanımlı birebir ve sürekli fonksiyonlara üreteç fonksiyon denir (Duyar, vd. 2015).

Tanım 2.2. α bir üreteç olmak üzere Newtonyen olmayan (alfa) reel sayılar, α -tam sayılar, α -doğal sayılar kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır (Türkmen ve Başar, 2012; Çakmak ve Başar, 2012)

- i) $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}\},$
- ii) $\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\},$
- iii) $\mathbb{N}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{N}\} = \{\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\}.$
- iv) $\mathbb{R}_\alpha^+ = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}^+\} = \{\alpha(x) | x > 0\},$
- v) $\mathbb{R}_\alpha^- = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}^-\} = \{\alpha(x) | x < 0\},$
- vi) $\mathbb{Z}_\alpha^+ = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}^+\} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x > 0\},$
- vii) $\mathbb{Z}_\alpha^- = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}^-\} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x < 0\}$
- viii) $\mathbb{R}_\alpha^{+,0} = \{\alpha(x) | x \geq 0\},$
- ix) $\mathbb{R}_\alpha^{-,0} = \{\alpha(x) | x \leq 0\},$
- x) $\mathbb{Z}_\alpha^{+,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\},$
- xi) $\mathbb{Z}_\alpha^{-,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x \leq 0\}.$

2.2. Alfa İşlemler

Tanım 2.3. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde α -işlemler $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki biçimde tanımlanır:

- i) $x \oplus_\alpha y = \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)),$
- ii) $x \ominus_\alpha y = \alpha(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)),$
- iii) $x \odot_\alpha y = \alpha(\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)),$
- iv) $x \oslash_\alpha y = \alpha(\alpha^{-1}(x) / \alpha^{-1}(y)), y \neq \alpha(0)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.4. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonsiyon olsun. α -sıralama bağıntısı ($<_\alpha$) ve ilgili diğer bağıntılar ($>_\alpha, \leq_\alpha, \geq_\alpha$) aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

- a) $x <_\alpha y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$

b) $x >_{\alpha} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) > \alpha^{-1}(y)$

c) $x \leq_{\alpha} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$

d) $x \geq_{\alpha} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) \geq \alpha^{-1}(y)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.5. $|\cdot|_{\alpha}: \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}^{+,0}$, α mutlak değer fonksiyonu

$$|x|_{\alpha} = \begin{cases} x, & x >_{\alpha} \alpha(0) \text{ veya } x = \alpha(0), \\ \alpha(0) \ominus_{\alpha} x, & x <_{\alpha} \alpha(0). \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.6. (α -aritmetik) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha} \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $(\mathbb{R}_{\alpha}, \oplus_{\alpha}, \ominus_{\alpha}, \odot_{\alpha}, \oslash_{\alpha}, \leq_{\alpha})$ tam sıralı cisim ise bu cisim, aritmetik veya α -aritmetik olarak adlandırılır. (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.7. (Yıldız Analiz) İki keyfi aritmetik α aritmetik= $(\mathbb{R}_{\alpha}, \oplus_{\alpha}, \ominus_{\alpha}, \odot_{\alpha}, \oslash_{\alpha}, \leq_{\alpha})$ ve β aritmetik= $(\mathbb{R}_{\beta}, \oplus_{\beta}, \ominus_{\beta}, \odot_{\beta}, \oslash_{\beta}, \leq_{\beta})$ olarak alınsın. $\star$ (yıldız) bu iki aritmetiğin $\star = (\alpha \text{ aritmetik}, \beta \text{ aritmetik})$ biçiminde sıralı ikilisi olarak tanımlanır.

$\star$ -analizde fonksiyonların tanım kümesi α aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_{\alpha}$ 'nın bir alt kümesi) ve değer kümesi ise β aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_{\beta}$ 'nin bir alt kümesi) olarak alınacaktır. Bu bölümde keyfi bir f fonksiyonu

$$f: \mathbb{R}_{\alpha} \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_{\beta}$$

olarak kabul edilecektir. (Grossman ve Katz, 1972).

α -aritmetik= $(\mathbb{R}_{\alpha}, \oplus_{\alpha}, \ominus_{\alpha}, \odot_{\alpha}, \oslash_{\alpha}, \leq_{\alpha})$ ve β -aritmetik= $(\mathbb{R}_{\beta}, \oplus_{\beta}, \ominus_{\beta}, \odot_{\beta}, \oslash_{\beta}, \leq_{\beta})$ tam sıralı cisim olduklarından birbirlerine izomorftur.

Tek türlü belirli olan $\iota = \beta \circ \alpha^{-1}: \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\beta}$ izomorfizması, birebir ve örten fonksiyondur bu fonksiyona iota fonksiyonu denir ve $\forall x, y \in \mathbb{R}_{\alpha}$ için aşağıdaki şartları sağlar:

i) $\iota(x \oplus_{\alpha} y) = \iota(x) \oplus_{\beta} \iota(y),$

ii) $\iota(x \ominus_{\alpha} y) = \iota(x) \ominus_{\beta} \iota(y),$

iii) $\iota(x \odot_{\alpha} y) = \iota(x) \odot_{\beta} \iota(y),$

iv) $\iota(x \oslash_{\alpha} y) = \iota(x) \oslash_{\beta} \iota(y), y \neq \alpha(0),$

v) $x \leq_{\alpha} y \Leftrightarrow \iota(x) \leq_{\beta} \iota(y)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.8. ($\star$ -Limit) Eğer her $\varepsilon \geq_\beta \beta(0)$ için $\alpha(0) <_\alpha |x \ominus_\alpha x_0|_\alpha <_\alpha \delta$ iken $|f(x) \ominus_\beta L|_\beta <_\beta \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta >_\alpha \alpha(0)$ varsa f fonksiyonunun $x, x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasına yaklaşıırken $\star$ -limiti L ’ dir denir ve

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Tekin ve Başar, 2013).

Tanım 2.9. Eğer $\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasında

$\star$ -süreklidir denir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 2.10. ($\star$ -Türev) $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki $\star$ limit var ise $x_0 \in A$ noktasında f ’nin $\star$ türevi

$$f^\star(x_0) = \star \lim_{x \rightarrow x_0} \{ [f(x) \ominus_\beta f(x_0)] \oslash_\beta [\iota(x) \ominus_\beta \iota(x_0)] \}$$

olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Gösterim 2.1. $Df = \frac{df}{dt}$, klasik türev operatörünü gösterebilir.

Tanım 2.11. α ve β iki üreteç fonksiyon olsun.

$$D_{(\alpha, \beta)} f := f^\star.$$

operatörü $\star$ türev operatörü olarak adlandırılır.

$$D_{(I, I)} = D \text{ dir.}$$

Teorem 2.1. $D_{(\alpha, \beta)}$ $\star$ -türev operatörü lineerdir ve $f, \star$ - sürekli türevlenebilir ise

$$D_{(\alpha, \beta)} f = \beta \circ D(\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) \circ \alpha^{-1}.$$

eşitliği geçerlidir (Civgin ve Yalcin, 2025).

Aşağıda incelenen 4 analizde $\alpha(x) = I(x)$ birim fonksiyona eşittir.

2.3. Üstel Analiz

Bu analizin diğer isimleri geometrik analiz veya çarpımsal analizdir. Üreteç fonksiyonu $\beta(x) = \exp(x)$ dir.

Önerme 2.1. Üstel toplama, üstel çıkarma, üstel çarpma ve üstel bölme işlemleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Çakmak ve Başar, 2012): $\forall u, v \in \mathbb{R}_{exp}$

a) $u \oplus_{exp} v = u \cdot v,$

b) $u \ominus_{exp} v = \frac{u}{v},$

c) $u \odot_{exp} v = u^{\ln(v)},$

d) $u \oslash_{exp} v = u^{\frac{1}{\ln(v)}}, v \neq 1.$

Önerme 2.2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ bir çarpımsal fonksiyon olsun. Eğer klasik ve üstel türevler tanımlı ise $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında f 'nin çarpımsal türevi için

$$D_{(I,exp)}f(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

eşitliği geçerlidir. (Stanley, 1999).

2.4. Çift Üstel Analiz

Gösterim 2.2. Bu çalışmada çift üstel (double exponential) fonksiyon

$$d: = \exp \circ \exp$$

ile gösterilecektir. Dolayısıyla

$$d(x) = \exp(\exp(x)) = e^{e^x}$$

olacaktır (Güven, 2024).

Önerme 2.3. $x, y \in \mathbb{R}_d$ olmak üzere çift üstel aritmetiğin dört temel işlemi için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Güven, 2024):

i) $x \oplus_d y = x^{\ln y}$

ii) $x \ominus_d y = x^{\frac{1}{\ln y}}$

iii) $x \odot_d y = \exp\{(\ln x)^{\ln(\ln y)}\}$

iv) $x \oslash_d y = \exp\{(\ln x)^{1/\ln(\ln y)}\}, y \neq e$

Teorem 2.2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_d$ fonksiyonu hem klasik anlamda hem de çift üstel anlamda türevlenebilir olsun. Bu durumda bu iki türev için aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Güven, 2024):

$$D_{(I,d)}f(x) = e^{\exp\left\{\frac{f'(x)}{f(x) \cdot (\ln \circ f)(x)}\right\}}.$$

2.5. Harmonik Analiz

Gösterim 2.3. Bu çalışmada ters (reciprocal) fonksiyon

$$r: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, r(x) = \frac{1}{x},$$

ile gösterilecektir.

Önerme 2.4. Harmonik toplama, harmonik çıkarma, harmonik çarpma ve Harmonik bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Çakmak ve Başar, 2012) : $\forall u, v \in \mathbb{R}_r$ için

$$\mathbf{a)} \ u \oplus_r v = \frac{1}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}$$

$$\mathbf{b)} \ u \ominus_r v = \frac{1}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}$$

$$\mathbf{c)} \ u \odot_r v = uv$$

$$\mathbf{d)} \ u \oslash_r v = \frac{u}{v}$$

Önerme 2.5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_r$ bir fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}$ noktasında f 'nin harmonik türevi için

$$D_{(I,r)}f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)}$$

eşitliği geçerlidir.

2.6. Kuadratik Analiz

$q(x)$ üreteç fonksiyonunu alalım. Burada

$$q(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

dır. Üretecin tersi,

$$q^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde olur (Grossman ve Katz, 1972).

Önerme 2.6. Kuadratik analizde üreteç fonksiyonu için

$$q(x) = \text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$$

ve üretecin tersi için

$$q^{-1}(x) = \text{sgn}(x)x^2 = x|x|$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $q(x)$ üreteç fonksiyonu için

$$q(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

olduğundan, $\text{sgn}(x)$ işaret fonksiyonu kullanılarak

$$q(x) = \text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten, $x > 0$ için $\text{sgn}(x) = 1$ ve $|x| = x$ olduğundan

$$\text{sgn}(x)\sqrt{|x|} = \sqrt{x},$$

$x = 0$ için $\text{sgn}(0) = 0$ olduğundan

$$\text{sgn}(0)\sqrt{|0|} = 0,$$

ve $x < 0$ için $\text{sgn}(x) = -1$ ve $|x| = -x$ olduğundan

$$\text{sgn}(x)\sqrt{|x|} = -\sqrt{-x}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$q(x) = \text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$$

eşitliği geçerlidir.

Benzer şekilde,

$$q^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

olduğundan

$$q^{-1}(x) = \text{sgn}(x)x^2$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $x^2 = |x|^2$ ve $\text{sgn}(x)|x| = x$ olduğundan,

$$\text{sgn}(x)x^2 = \text{sgn}(x)|x|^2 = x|x|$$

elde edilir. Böylece

$$q^{-1}(x) = \text{sgn}(x)x^2 = x|x|$$

olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Örnek 2.1.

$$\begin{aligned} 5 \oplus_q (-4) &= q(q^{-1}(5) + q^{-1}(-4)) \\ &= q(5^2 + (-(-4)^2)) \\ &= q(25 + (-16)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q(9) \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Önerme 2.7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_q$ bir fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}$ noktasında f 'nin kuadratik türevi için

$$D_{(I,q)}f(x) = \operatorname{sgn}(f'(x)) \sqrt{2|f(x)||f'(x)|}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

Öncelikle

$$(q^{-1})'(x) = \frac{d}{dx} [\operatorname{sgn}(x)x^2] = 2 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot x = 2|x|$$

olduğunu not edelim.

$$\begin{aligned}
D_{(I,q)}f(x) &= [q \circ D(q^{-1} \circ f)](x) = q\{(q^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)\} \\
&= q\{2|f(x)||f'(x)|\} \\
&= \operatorname{sgn}[2|f(x)||f'(x)|] \sqrt{2|f(x)||f'(x)|} \\
D_{(I,q)}f(x) &= \operatorname{sgn}(f'(x)) \sqrt{2|f(x)||f'(x)|}
\end{aligned}$$

3. NEWTONYEN OLMAYAN BİRİNCİ MERTEBEDEN YAKLAŞIMLAR

Klasik analizde $f(x)$ 'in birinci mertebeden yaklaşımı

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

biçiminde hesaplanır.

Newtonyen olmayan analizde birinci mertebeden yaklaşım ise $f: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ iken

$$P_\star(x) = f(x_0) \oplus_\beta [(D_{(\alpha,\beta)}f)(x_0) \odot_\beta \iota(x \ominus_\alpha x_0)]$$

biçiminde hesaplanır. Burada $\iota: \beta \circ \alpha^{-1}$ dir.

Aşağıda $\alpha(x) = I(x)$ olduğu durumda yaklaşımlar hesaplanacaktır.

$$f^\star(x) = (D_{(I,\beta)}f)(x) = [\beta \circ D(\beta^{-1} \circ f \circ I) \circ I^{-1}](x)$$

$$f^\star(x) = [\beta \circ D(\beta^{-1} \circ f)](x)$$

$$f^\star(x) = [\beta \circ (\beta^{-1} \circ f)'](x)$$

olduğundan

$$P_\star(x) = f(x_0) \oplus_\beta [(D_{(I,\beta)}f)(x_0) \odot_\beta \beta(x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = f(x_0) \oplus_\beta [\beta \circ (\beta^{-1} \circ f)'](x_0) \odot_\beta \beta(x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = f(x_0) \oplus_\beta [\beta[(\beta^{-1} \circ f)'(x_0)] \odot_\beta \beta(x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = f(x_0) \oplus_\beta [\beta[(\beta^{-1} \circ f)'(x_0)] \odot_\beta \beta(x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = f(x_0) \oplus_\beta \beta[(\beta^{-1} \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = (I \circ f)(x_0) \oplus_\beta \beta[(\beta^{-1} \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = (\beta \circ \beta^{-1} \circ f)(x_0) \oplus_\beta \beta[(\beta^{-1} \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = \beta[(\beta^{-1} \circ f)(x_0)] \oplus_\beta \beta[(\beta^{-1} \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)]$$

$$P_\star(x) = \beta\{(\beta^{-1} \circ f)(x_0) + (\beta^{-1} \circ f)'(x_0) \cdot (x - x_0)\}$$

olarak hesaplanır. Burada hatalar

$$E_{\text{klasik}}(x) = |f(x) - P_{\text{klasik}}(x)|, E_{\star}(x) = |f(x) - P_{\star}(x)|$$

olarak alınacaktır.

3.1. Harmonik Analizde Birinci Mertebeden Yaklaşım

Harmonik analiz için yani $\alpha(x) = I(x)$, $\beta(x) = \frac{1}{x}$ olduğu durumu inceleyelim.

$$P_{\star}(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) + \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$$P_{\star}(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0)} + \left(-\frac{f'}{f^2}\right)(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$$P_{\star}(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0)} - \frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \cdot (x - x_0)}$$

$$P_{\star}(x) = \frac{1}{\frac{f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{f^2(x_0)}}$$

$$P_{\star}(x) = \frac{f^2(x_0)}{f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

elde edilir.

Örnek 3.1. $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+1}$ fonksiyonu veriliyor.

a) f fonksiyonunun $x = 0,01$ noktasındaki klasik türevini hesaplayınız. $f'(0,01) = ?$

b) f fonksiyonunun $x = 0,01$ noktasındaki harmonik- türevini (Newtonyen olmayan türevini) hesaplayınız. $f^{\star}(0,01) = ?$

c) f fonksiyonunun $x = 0,01$ civarındaki klasik 1. mertebeden Taylor polinomunu kullanarak klasik 1. mertebeden yaklaşımını hesaplayalım.

d) f fonksiyonunun $x = 0,01$ civarındaki Newtonyen olmayan Taylor polinomunu kullanarak Newtonyen olmayan 1. mertebeden yaklaşımını hesaplayalım.

Çözüm:

$$a) f'(x) = -\frac{(x^2+3x+1)'}{(x^2+3x+1)^2} = -\frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}, f'(0,01) = -\frac{3,02}{(1,0301)^2} \cong -2,84514$$

b)

$$f^*(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)} = \frac{1}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}} = -\frac{f^2(x)}{f'(x)}$$

$$f^*(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)} = \frac{1}{(x^2 + 3x + 1)'} = \frac{1}{2x + 3}$$

$$f^*(0,01) = \frac{1}{2 \cdot 0,01 + 3} = \frac{1}{3,02} \cong 0,33113$$

c)

$$P_{\text{klasik}}(x) = f(0,01) + f'(0,01) \cdot (x - 0,01)$$

$$P_{\text{klasik}}(x) = 0,97078 - 2,84514 \cdot (x - 0,01)$$

$$P_{\text{klasik}}(x) = 0,99923 - 2,84514x$$

d)

$$P_*(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) + \left(\frac{1}{f}\right)''(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$$P_*(x) = \frac{1}{x_0^2 + 3x_0 + 1 + (2x_0 + 3)(x - x_0)} \Big|_{x_0=0,01}$$

$$P_*(x) = \frac{1}{3,02x + 0,9999}$$

olarak bulunur.

Tablo 1. Harmonik analiz ile yaklaşım ve klasik yaklaşımın karşılaştırılması

x	$f(x)$	$P_{\text{klasik}}(x)$	$P_*(x)$	$E_{\text{klasik}}(x)$	$E_*(x)$
0,005	0,98517	0,98499	0,98514	$1,87 \times 10^{-4}$	$2,43 \times 10^{-5}$
0,006	0,98226	0,98216	0,98225	$1,20 \times 10^{-4}$	$1,54 \times 10^{-5}$
0,007	0,97939	0,97931	0,97938	$6,71 \times 10^{-5}$	$8,63 \times 10^{-6}$
0,008	0,97653	0,97647	0,97652	$2,98 \times 10^{-5}$	$3,81 \times 10^{-6}$
0,009	0,97365	0,97362	0,97365	$7,42 \times 10^{-6}$	$9,48 \times 10^{-7}$
0,010	0,97078	0,97078	0,97078	0	0
0,011	0,96795	0,96793	0,96795	$7,38 \times 10^{-6}$	$9,37 \times 10^{-7}$
0,012	0,96513	0,96509	0,96512	$2,95 \times 10^{-5}$	$3,73 \times 10^{-6}$
0,013	0,96232	0,96224	0,96231	$6,61 \times 10^{-5}$	$8,33 \times 10^{-6}$
0,014	0,95952	0,95940	0,95950	$1,17 \times 10^{-4}$	$1,47 \times 10^{-5}$
0,015	0,95673	0,95655	0,95671	$1,83 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^{-5}$

Burada her noktada $E_*(x) < E_{\text{klasik}}(x)$ olduğu görülmektedir.

3.2. Kuadratik Analizde Birinci Mertebeden Yaklaşım

Kuadratik Analizde yaklaşım bir örnek yardımıyla incelenecektir.

Örnek 3.2. $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 - 3}$, 9 fonksiyonu için $x_0 = 1$ civarında klasik ve Newtonyen olmayan birinci mertebeden yaklaşımları bulalım ve karşılaştıralım.

Çözüm:

Klasik lineerleştirme:

$$P_{\text{klasik}}(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 0,316228 + 15,811388(x - 1)$$

Newtonyen olmayan lineerleştirme:

$$P_{\star}(x) = q\{(q^{-1} \circ f)(1) + (q^{-1} \circ f)'(1) \cdot (x - 1)\}$$

$$P_{\star}(x) = q\{0,1 + [4x^3 + 6x^2]_{x=1}(x - 1)\}$$

$$P_{\star}(x) = q\{0,1 + 10(x - 1)\}$$

$x = 1$ civarında $0,1 + 10(x - 1) > 0$ olduğundan

$$P_{\star}(x) = \sqrt{0,1 + 10(x - 1)}$$

olarak elde edilir.

Tablo 2. Kuadratik analiz ile yaklaşım ve klasik yaklaşımın karşılaştırılması

x	$f(x)$	$P_{\text{klasik}}(x)$	$P_{\star}(x)$	$E_{\text{klasik}}(x)$	$E_{\star}(x)$
1,00	0,316228	0,316228	0,316228	0,000000	0,000000
1,01	0,447660	0,474342	0,446651	0,026682	0,001009
1,02	0,550563	0,632456	0,547254	0,081893	0,003309
1,03	0,638925	0,790569	0,632456	0,151644	0,006469
1,04	0,717217	0,948683	0,707107	0,231466	0,010110
1,05	0,788987	1,106797	0,774597	0,317810	0,014390
1,06	0,855880	1,264911	0,836660	0,409031	0,019220
1,07	0,919668	1,423025	0,894427	0,503357	0,025241
1,08	0,981441	1,581139	0,948683	0,599698	0,032758
1,09	1,041889	1,739253	1,000000	0,697364	0,041889
1,10	1,101590	1,897367	1,048809	0,795777	0,052781

Tablo 2 incelendiğinde, $x_0 = 1$ merkezinde elde edilen $\star$ -yaklaşımının tüm örnekleme noktalarında klasik lineerleştirmeye göre daha düşük hata ürettiği görülmektedir. x değeri merkezden uzaklaştıkça klasik yaklaşımın hatası hızla artarken, önerilen yaklaşımın hatası sınırlı kalmaktadır. Bu durum istatistiksel ölçütlerle de

doğrulanmaktadır. Klasik yaklaşım için maksimum ve ortalama mutlak hatalar sırasıyla 0,795777 ve 0,346793 iken, önerilen yaklaşımda bu değerler 0,052781 ve 0,018834 olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde maksimum görelî hata klasik yaklaşımda %72,24, önerilen yaklaşımda ise yalnızca %4,79'dur. Bu sonuçlar, kuadratik üreteç yardımıyla elde edilen lineerleştirmenin fonksiyonun yerel davranışını klasik Taylor lineerleştirmesine göre daha başarılı temsil ettiğini ve hem mutlak hem de görelî hata bakımından belirgin bir doğruluk üstünlüğü sağladığını göstermektedir.

4. KARIŞIK TİP FONKSİYONLARIN NEWTONYEN OLMAYAN BİRİNCİ MERTEBEDEN YAKLAŞIMI

γ, β, η, μ üreteç fonksiyonlar olsun öyle ki $(\mathbb{R}_\beta \cup \mathbb{R}_\eta) \subset \mathbb{R}_\mu$. Ayrıca $g: \mathbb{R}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}_\beta$, $h: \mathbb{R}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}_\eta$, ve $f(x) = g(x) \oplus_\mu h(x)$ olsun. Bu durumda verilen g ve h fonksiyonlarının Newtonyen olmayan birinci mertebeden yaklaşımları

$$\begin{aligned} g(x) &\approx g(x_0) \oplus_\beta [(D_{(\gamma, \beta)}g)(x_0) \odot_\beta \iota_1(x \ominus_\gamma x_0)] \\ h(x) &\approx h(x_0) \oplus_\eta [(D_{(\gamma, \eta)}h)(x_0) \odot_\eta \iota_2(x \ominus_\gamma x_0)] \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\iota_1: \beta \circ \gamma^{-1}$ ve $\iota_2: \beta \circ \eta^{-1}$ dir. Bu durumda f fonksiyonunun birinci mertebeden yaklaşımı

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \{g(x_0) \oplus_\beta [(D_{(\gamma, \beta)}g)(x_0) \odot_\beta \iota_1(x \ominus_\gamma x_0)]\} \oplus_\mu \\ &\quad \{h(x_0) \oplus_\eta [(D_{(\gamma, \eta)}h)(x_0) \odot_\eta \iota_2(x \ominus_\gamma x_0)]\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Aşağıda birkaç farklı durum ve üreteç için yaklaşımlar hesaplanacaktır.

1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\beta$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\eta$, ve $f(x) = g(x) + h(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} g(x) &\approx g(x_0) \oplus_\beta [(D_{(I, \beta)}g)(x_0) \odot_\beta \beta(x - x_0)] \\ h(x) &\approx h(x_0) \oplus_\eta [(D_{(I, \eta)}h)(x_0) \odot_\eta \eta(x - x_0)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x_0) \oplus_\beta [(D_{(I, \beta)}g)(x_0) \odot_\beta \beta(x - x_0)] \\ &\quad + h(x_0) \oplus_\eta [(D_{(I, \eta)}h)(x_0) \odot_\eta \eta(x - x_0)] \end{aligned}$$

yaklaşımı yazılır.

2) $g: \mathbb{R}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}_\beta$, $h: \mathbb{R}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}_\eta$, ve $f(x) = g(x) + h(x)$ olsun.

$$g(x) \approx g(x_0) \oplus_\beta [(D_{(\gamma, \beta)}g)(x_0) \odot_\beta \iota_1(x \ominus_\gamma x_0)]$$

$$h(x) \approx h(x_0) \oplus_{\eta} [(D_{(\gamma, \eta)} h)(x_0) \odot_{\eta} \iota_2(x \ominus_{\gamma} x_0)]$$

Burada $\iota_1: \beta \circ \gamma^{-1}$ ve $\iota_2: \beta \circ \eta^{-1}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} f(x) \cong g(x_0) \oplus_{\beta} [(D_{(\gamma, \beta)} g)(x_0) \odot_{\beta} \iota_1(x \ominus_{\gamma} x_0)] \\ + h(x_0) \oplus_{\eta} [(D_{(\gamma, \eta)} h)(x_0) \odot_{\eta} \iota_2(x \ominus_{\gamma} x_0)] \end{aligned}$$

yaklaşımı elde edilir.

4.1. Klasik ve Üstel Fonksiyonların Toplamı İçin Bir Yaklaşım

Klasik bir fonksiyon ile üstel (geometrik) bir fonksiyonun toplamı biçiminde ifade edilebilen bir fonksiyon ele alınsın. Bu fonksiyona yaklaşımlar yaparken klasik ve geometrik kısımlarda değişimler ayrı ayrı hesaplanıp sonra eklenerek toplam değişim bulunabilir.

Örnek 4.1. $f(x) = 4x^2 + 3x + 5 + e^{x^2+2}$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun iki kısmı vardır. 1. Kısım klasik 2. Dereceden bir polinom olan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4x^2 + 3x + 5$ iken ikinci kısım ise 2. Dereceden bir üstel polinom olan $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}, h(x) = e^{x^2+2}$ dir.

Yeni teknikle fonksiyondaki değişimler iki kısımda incelenir: klasik kısımda oluşan değişim ile geometrik(üstel) kısımda meydana gelen değişim hesaplanır ve bunlar toplanır.

Klasik Taylor ile 1. mertebeden yaklaşımı hesaplayalım.

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 5 + e^{x^2+2}$$

$$f'(x) = 8x + 3 + 2xe^{x^2+2}$$

olduğundan

$$P_{klasik}(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$P_{klasik}(x) = 32,0855 + 51,1711 \cdot (x - 1)$$

elde edilir.

Newtonyen olmayan 1. mertebeden yaklaşımı hesaplayalım.

$$g(x) = 4x^2 + 3x + 5,$$

$$h(x) = e^{x^2+2}$$

olarak tanımlayalım. Bunların sırasıyla klasik ve çarpımsal türevleri

$$g'(x) = 8x + 3,$$

$$h^*(x) = e^{2x}$$

olduğundan

$$P_*(x) = g(1) + g'(1)(x - 1) + h(1) \cdot [h^*(1)]^{(x-1)}$$

$$P_*(x) = 8 + 11(x - 1) + e^3(e^2)^{(x-1)}$$

$$P_*(x) = -3 + 11x + e^{1+2x}$$

yaklaşımı elde edilir. f fonksiyonu ile $P_{klasik}(x)$ ve $P_*(x)$ yaklaşım fonksiyonlarının $x = 1 + 0,01k$; $1 \leq k \leq 10$ için değerleri ve hataları aşağıdaki tablodadır.

Tablo 3. Klasik ve üstel fonksiyonların toplamı için bir yaklaşım

x	$f(x)$	$P_{klasik}(x)$	$P_*(x)$	$E_{klasik}(x)$	$E_*(x)$
1,00	32,08554	32,08550	32,08550	0,000037	0,000037
1,01	32,60374	32,59721	32,60125	0,006530	0,002486
1,02	33,13521	33,10892	33,12521	0,026285	0,010001
1,03	33,68036	33,62063	33,65752	0,059728	0,022840
1,04	34,23964	34,13234	34,19837	0,107300	0,041278
1,05	34,81352	34,64406	34,74791	0,169461	0,065601
1,06	35,40245	35,15577	35,30634	0,246688	0,096111
1,07	36,00695	35,66748	35,87383	0,339477	0,133124
1,08	36,62753	36,17919	36,45056	0,448344	0,176972
1,09	37,26472	36,69090	37,03672	0,573824	0,228007
1,10	37,91909	37,20261	37,63249	0,716476	0,286593

Tablo 3 incelendiğinde, $P_*(x)$ yaklaşımının hata değerlerinin klasik birinci mertebeden Taylor yaklaşımına göre belirgin biçimde daha küçük olduğu görülmektedir. İncelenen noktalarda yeni yaklaşımın hatası, klasik yaklaşımın hatasına kıyasla yaklaşık 2,5 kat daha küçüktür. Bu sonuç, fonksiyonun klasik ve üstel bileşenlerinin kendi doğal analiz yapıları içinde ayrı ayrı ele alınmasının daha başarılı bir yerel yaklaşım sağladığını göstermektedir.

4.2. Üstel ve Çift Üstel Fonsiyonların Çarpımı İçin Bir Yaklaşım

$g = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_d$ olsun. Ayrıca $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

fonksiyonu verilsin. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonu için birinci mertebeden yaklaşım

$$g(x) \approx g(x_0) \oplus_{\exp} [g^*(x_0) \odot_{\exp} \exp(x - x_0)]$$

$$g(x) \approx g(x_0) \cdot [g^*(x_0)]^{(x-x_0)}$$

biçiminde ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_d$ fonksiyonu için birinci mertebeden yaklaşımı

$$h(x) \cong [h(x_0)]^{\exp\left\{\frac{h'(x_0)}{h(x_0) \cdot (\ln \circ h)(x_0)}(x-x_0)\right\}}$$

biçimindedir. $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ fonksiyonu için Newtonyen olmayan birinci mertebeden yaklaşım

$$P_*(x) = g(x_0) \cdot [g^*(x_0)]^{(x-x_0)} \cdot [h(x_0)]^{\exp\left\{\frac{h'(x_0)}{h(x_0) \cdot (\ln \circ h)(x_0)}(x-x_0)\right\}}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.2. $f(x) = e^{2 \cos(x)} \cdot e^{e^{3 \sin(x)+2}}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ deki klasik 1. mertebeden yaklaşımını ve Newtonyen olmayan 1. mertebeden yaklaşımını hesaplayalım. Ve yakın noktalarda bu fonksiyonların değerlerini ve hataları bulalım.

Çözüm:

Verilen fonksiyon $f(x) = e^{2 \cos x} \cdot e^{e^{3 \sin(x)+2}}$ dir. Bunu

$$f(x) = g(x) h(x)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$g(x) = e^{2 \cos(x)}, h(x) = e^{e^{3 \sin(x)+2}}$$

olarak alalım.

$$g^*(x) = e^{-2 \sin(x)},$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)(\ln \circ h)(x)} = \frac{e^{e^{3 \sin(x)+2}} e^{3 \sin(x)+2} (3 \cos x)}{e^{e^{3 \sin(x)+2}} e^{3 \sin(x)+2}} = 3 \cos(x)$$

olduğundan Newtonyen olmayan 1. Mertebeden yaklaşımı

$$P_{\star}(x) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[g^*\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{(x-\frac{\pi}{4})} \left[h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\exp\left[\frac{h'(\frac{\pi}{4})}{h(\frac{\pi}{4})(\ln \circ h)(\frac{\pi}{4})}(x-\frac{\pi}{4})\right]}$$

$$P_{\star}(x) = e^{\sqrt{2}} \left(e^{-\sqrt{2}}\right)^{(x-\frac{\pi}{4})} \left(e^{e^{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\exp\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})\right)}$$

$$P_{\star}(x) = e^{\sqrt{2}-\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})} e^{\left[e^{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}} \cdot e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})}\right]}$$

$$P_{\star}(x) = \exp\left\{\sqrt{2} - \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\left[2+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right\}$$

ve

$$P_{\star}(x) = \exp\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{16+12\sqrt{2}-3\sqrt{2}\pi}{8}\right)}\right)$$

elde edilir.

Klasik 1. mertebeden Taylor yaklaşımını hesaplayalım

$$f(x) = \exp(2 \cos(x) + e^{3 \sin(x)+2}),$$

$$f'(x) = f(x)(-2 \sin(x) + 3e^{3 \sin(x)+2} \cos(x))$$

fonksiyonları ile

$$P(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P(x) = \exp\left(\sqrt{2} + e^{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}}\right) + \exp\left(\sqrt{2} + e^{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}}\right)\left(-\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

olarak elde edilir. Aşağıda $x = \pi/4$ civarında yaklaşım fonksiyonların değerlerini veren bir karşılaştırma tablosu verelim.

Tablo 4. Üstel ve çift üstel fonksiyonların çarpımı için bir yaklaşım

x	$f(x)$	$P_{klasik}(x)$	$P_*(x)$
$\frac{\pi}{4} - 0,0005$	$2,269180 \times 10^{27}$	$2,266260 \times 10^{27}$	$2,269200 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0004$	$2,299110 \times 10^{27}$	$2,297600 \times 10^{27}$	$2,299120 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0003$	$2,329440 \times 10^{27}$	$2,328940 \times 10^{27}$	$2,329440 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0002$	$2,360170 \times 10^{27}$	$2,360280 \times 10^{27}$	$2,360170 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0001$	$2,391310 \times 10^{27}$	$2,391620 \times 10^{27}$	$2,391310 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4}$	$2,422960 \times 10^{27}$	$2,422960 \times 10^{27}$	$2,422960 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0001$	$2,455110 \times 10^{27}$	$2,454300 \times 10^{27}$	$2,455110 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0002$	$2,487790 \times 10^{27}$	$2,485640 \times 10^{27}$	$2,487790 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0003$	$2,520990 \times 10^{27}$	$2,516980 \times 10^{27}$	$2,521000 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0004$	$2,554740 \times 10^{27}$	$2,548320 \times 10^{27}$	$2,554750 \times 10^{27}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0005$	$2,589040 \times 10^{27}$	$2,579660 \times 10^{27}$	$2,589060 \times 10^{27}$

Görelî hataları

$$R_{klasik}(x) = \frac{|f(x) - P_{klasik}(x)|}{|f(x)|},$$

$$R_*(x) = \frac{|f(x) - P_*(x)|}{|f(x)|}$$

veya yüzde olarak

$$R_{klasik}(x) = \frac{|f(x) - P_{klasik}(x)|}{|f(x)|} \times \%100,$$

$$R_*(x) = \frac{|f(x) - P_*(x)|}{|f(x)|} \times \%100$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi $x = \pi/4$ civarında yaklaşım fonksiyonların hatalarını karşılaştırmak için bir tablo verelim.

Tablo 5. Mutlak ve görelı hata değęrlerinin karşılaştırılması

x	$E_{\text{klasik}}(x)$	$R_{\text{klasik}}(\%)$	$E_*(x)$	$R_*(\%)$
$\frac{\pi}{4} - 0,0005$	$2,91689 \times 10^{24}$	$1,285 \times 10^{-1}$	$1,80257 \times 10^{22}$	$7,943 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0004$	$1,50686 \times 10^{24}$	$6,554 \times 10^{-2}$	$1,15362 \times 10^{22}$	$5,017 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0003$	$5,02310 \times 10^{23}$	$2,156 \times 10^{-2}$	$6,48626 \times 10^{21}$	$2,784 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0002$	$1,10284 \times 10^{23}$	$4,673 \times 10^{-3}$	$2,88335 \times 10^{21}$	$1,222 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} - 0,0001$	$3,06051 \times 10^{23}$	$1,280 \times 10^{-2}$	$7,21654 \times 10^{20}$	$3,018 \times 10^{-5}$
$\frac{\pi}{4}$	0	0	0	0
$\frac{\pi}{4} + 0,0001$	$8,11049 \times 10^{23}$	$3,303 \times 10^{-2}$	$7,28969 \times 10^{20}$	$2,969 \times 10^{-5}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0002$	$2,14612 \times 10^{24}$	$8,626 \times 10^{-2}$	$2,91856 \times 10^{21}$	$1,173 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0003$	$4,00546 \times 10^{24}$	$1,589 \times 10^{-1}$	$6,57957 \times 10^{21}$	$2,610 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0004$	$6,41640 \times 10^{24}$	$2,512 \times 10^{-1}$	$1,17079 \times 10^{22}$	$4,583 \times 10^{-4}$
$\frac{\pi}{4} + 0,0005$	$9,40658 \times 10^{24}$	$3,633 \times 10^{-1}$	$1,83019 \times 10^{22}$	$7,069 \times 10^{-4}$

Tablo 4 ve Tablo 5 birlikte incelendiğinde, her iki yaklaşımın da merkez noktası $x_0 = \pi/4$ 'te geręek fonksiyon değęrini tam olarak verdiği görölmektedir. Bununla birlikte, x değęri merkez noktadan uzaklařtıķķa önerilen yaklaşımın geręek fonksiyon değęrlerine klasik birinci mertebe Taylor yaklaşımına göre daha yakın kaldığı açıkķa görölmektedir.

Mutlak hata ve görelı hata değęrleri karşılaştırıldığında, önerilen yaklaşımın tüm değęrlendirme noktalarında klasik Taylor yaklaşımından daha başarılı olduğu anlaşılmaktadır. Özellikle fonksiyonun üstel bileşenlerinden kaynaklanan hızlı değışim, klasik lineerleştirmenin hata değęrlerinin daha hızlı büyümesine neden olurken, önerilen yaklaşım fonksiyonun çarpımsal ve üstel yapısını koruduğundan hata artışı oldukça sınırlı kalmaktadır.

İncelenen aralıkta elde edilen hata ölçütleri aşağıda özetlenmiştir.

Tablo 6. Hata ölçütleri

Ölçüt	Klasik Taylor	Önerilen yaklaşım
Maksimum mutlak hata	$9,40658 \times 10^{24}$	$1,83019 \times 10^{22}$
Ortalama mutlak hata	$2,18877 \times 10^{24}$	$7,49686 \times 10^{21}$
Maksimum görelı hata	$3,633 \times 10^{-1}\%$	$7,943 \times 10^{-4}\%$
Ortalama görelı hata	$9,618 \times 10^{-2}\%$	$2,774 \times 10^{-4}\%$

Bu sonuçlara göre önerilen yaklaşımın maksimum mutlak hatası klasik Taylor yaklaşımına göre yaklaşık 514 kat, ortalama mutlak hatası ise yaklaşık 292 kat daha küçüktür. Benzer şekilde maksimum görelı hata yaklaşık 458 kat, ortalama görelı hata ise

yaklaşık 347 kat azalmaktadır. Bu durum, önerilen yaklaşımın özellikle üstel ve çift üstel yapı içeren karma fonksiyonlarda klasik birinci mertebe Taylor yaklaşımına göre belirgin biçimde daha yüksek doğruluk sağladığını göstermektedir. Bu örnek, önerilen yöntemin yalnızca merkez noktası çevresinde değil, merkezin yakın komşuluğunda da doğruluğunu büyük ölçüde koruduğunu ortaya koymaktadır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, Newtonyen olmayan analiz kapsamında tanımlanan farklı üreteçlere ait fonksiyonların klasik toplamaları ve Newtonyen olmayan toplamaları için yeni bir birinci mertebeden yerel yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir. Literatürde yaygın olarak kullanılan klasik Taylor lineerleştirilmesi, tüm fonksiyonu tek bir klasik yapı altında ele almakta ve özellikle üstel, çift üstel veya daha hızlı büyüyen Newtonyen olmayan bileşenlerin doğal davranışını yeterince yansıtamamaktadır. Bu çalışmada ise her fonksiyon bileşeni kendi ait olduğu analiz çerçevesinde lineerleştirilmiş ve daha sonra uygun toplama işlemi kullanılarak yeni bir yaklaşım fonksiyonu elde edilmiştir.

Çalışmanın ilk aşamasında Newtonyen olmayan analizin temel kavramları ele alınmış; alfa aritmetiği, yıldız analiz, Newtonyen olmayan türev ve farklı üreteç fonksiyonlarına karşılık gelen analiz türleri incelenmiştir. Özellikle harmonik, üstel, çift üstel ve kuadratik analizler için türev ifadeleri verilmiş ve bunlara karşılık gelen birinci mertebeden yaklaşım fonksiyonları elde edilmiştir. Böylece klasik Taylor yaklaşımının Newtonyen olmayan analiz içerisindeki karşılıkları sistematik biçimde ortaya konulmuştur.

Daha sonra harmonik ve kuadratik analizler için geliştirilen yaklaşım yöntemleri çeşitli örnekler üzerinde uygulanmıştır. Her iki analiz türünde de önerilen yaklaşımın merkez nokta çevresinde klasik birinci mertebe Taylor yaklaşımına göre daha düşük mutlak hata ürettiği görülmüştür. Özellikle kuadratik analiz örneğinde maksimum ve ortalama mutlak hata ile maksimum ve ortalama göreceli hata değerlerinin klasik lineerleştirmeye göre belirgin biçimde azaldığı gösterilmiş, böylece önerilen yöntemin yalnızca teorik olarak değil sayısal açıdan da daha başarılı olduğu ortaya konmuştur.

Tezin temel katkısı ise farklı üreteçlerle tanımlanan fonksiyonların birlikte yer aldığı karışık tip fonksiyonlar için geliştirilen yeni yaklaşım yöntemidir. Bu kapsamda klasik, üstel ve çift üstel analiz bileşenlerini aynı fonksiyon içerisinde ele alan genel bir yaklaşım modeli önerilmiş; her bileşenin kendi Newtonyen olmayan türevi kullanılarak bağımsız biçimde lineerleştirilmesi ve daha sonra uygun işlem altında birleştirilmesi esas alınmıştır. Böylece klasik Taylor yaklaşımının tek tip lineerleştirme anlayışı yerine, fonksiyonun yapısını koruyan daha doğal bir yerel yaklaşım elde edilmiştir.

Önerilen yöntemin etkinliği, klasik fonksiyon ile üstel fonksiyonun toplamı ve üstel ile çift üstel fonksiyonların çarpımı biçimindeki örnekler üzerinde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Sayısal sonuçlar, özellikle hızlı büyüyen üstel bileşenlerin bulunduğu

fonksiyonlarda klasik Taylor yaklaşımının hata değerlerinin merkez noktadan uzaklaştıkça hızla arttığını, buna karşılık önerilen yaklaşımın fonksiyonun doğal büyüme yapısını koruması nedeniyle çok daha düşük hata ürettiğini göstermiştir. Son örnekte maksimum mutlak hata, ortalama mutlak hata, maksimum göreceli hata ve ortalama göreceli hata bakımından önerilen yaklaşımın klasik yaklaşıma göre yüzlerce kat daha iyi sonuç verdiği ortaya konmuştur. Bu bulgular, geliştirilen yöntemin özellikle Newtonyen olmayan yapıya sahip fonksiyonların yerel davranışlarının modellenmesinde önemli bir doğruluk avantajı sağladığını göstermektedir.

Bu çalışma, Newtonyen olmayan analizde yerel yaklaşım yöntemleri üzerine yapılan araştırmalara yeni bir bakış açısı kazandırmaktadır. Geliştirilen yöntem yalnızca tek bir analiz türü için değil, farklı üreteçlerle tanımlanan fonksiyonların birlikte bulunduğu karma yapılara da uygulanabilmektedir. Bu yönüyle önerilen yaklaşımın, Newtonyen olmayan analizde Taylor serileri, sayısal diferansiyel denklem çözümleri, optimizasyon algoritmaları ve hata analizi gibi birçok alanda kullanılabilecek genel bir yaklaşım çerçevesi sunduğu değerlendirilmektedir.

Gelecekte yapılacak çalışmalarda önerilen yöntemin ikinci ve daha yüksek mertebeden yaklaşımları geliştirilebilir. Ayrıca yöntemin farklı Newtonyen olmayan analiz türlerine, çok değişkenli fonksiyonlara, diferansiyel denklemlere ve Newtonyen olmayan optimizasyon problemlerine uygulanması önemli araştırma konuları arasında yer almaktadır. Bunun yanında önerilen yaklaşımın yakınsaklık analizi, hata sınırları ve teorik doğruluk mertebesinin ayrıntılı olarak incelenmesi de yöntemin matematiksel temelini daha da güçlendirecek çalışmalar olacaktır.

Sonuç olarak bu tezde geliştirilen birinci mertebeden yaklaşım yöntemi, klasik Taylor yaklaşımının Newtonyen olmayan bileşenleri temsil etmedeki sınırlılıklarını önemli ölçüde azaltmakta ve özellikle farklı üreteçlerle tanımlanan karışık tip fonksiyonların yerel modellenmesinde daha yüksek doğruluk sağlayan yeni ve sistematik bir yaklaşım sunmaktadır. Bu nedenle elde edilen sonuçların, Newtonyen olmayan analiz literatürüne hem kuramsal hem de sayısal yöntemler açısından anlamlı bir katkı sağlayacağı değerlendirilmektedir.

KAYNAKÇA

- Aniszewska, D. (2007). Multiplicative Runge–Kutta methods. *Nonlinear Dynamics*, 50, 265–272. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9156-3>
- Atkinson, K. E. (1989). *An introduction to numerical analysis* (2. Baskı). John Wiley & Sons.
- Baker Jr, G. A. ve Graves-Morris, P. (1996). *Padé approximants* (2. Baskı), Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 59, Cambridge University Press.
- Boyd, J. P. (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods* (2. Baskı). Dover Publications.
- Civgin, E. ve Yalcin, N. (2025). Algebraic and topological foundations of non-Newtonian analysis via generator functions. *AIMS Mathematics*, 10 (11), 26633-26661.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 228.
- Dehghan, R. (2022). Numerical approximation of multiplicative integral based on exponential interpolation. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8, 2. <https://doi.org/10.1007/s40819-021-01201-4>
- Duyar, C., Sagır, B. ve Ogur, O. (2015). Some basic topological properties on non-Newtonian real line. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 9(4), 296-302.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA
- Güven, Y. (2024). *Çift üstel analiz* (Tez No. 848414) [Yayımlanmış yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=weFMBHaUra8rsS5wi2bmHGIZReHYBAsBwdCX5x0_FD7AFMldgIfwYJLWhcsC4gEL
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge–Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, 594685. <https://doi.org/10.1155/2015/594685>
- Mısırlı, E. ve Güreffe, Y. (2011). Multiplicative Adams–Bashforth–Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57, 425–439. <https://doi.org/10.1007/s11075-010-9437-2>
- Quarteroni, A., Sacco, R. ve Saleri, F. (2000), *Numerical mathematics*, Texts in Applied Mathematics, 37, Springer.

- Rıza, M. ve Aktöre, H. (2015). The Runge–Kutta method in geometric multiplicative calculus. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 18, 539–554. <https://doi.org/10.1112/S1461157015000145>
- Rıza, M., Özyapıcı, A. ve Mısırlı, E. (2009). Multiplicative finite difference methods. *Quarterly of Applied Mathematics*, 67, 745–754. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-09-01158-2>
- Singh, G. ve Bhalla, S. (2023). Two step Newton’s method with multiplicative calculus to solve nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 31, 171–179.
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Tekin, S. ve Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, Makale 739319.
- Trefethen, L. N. (2013). Approximation theory and approximation practice. *SIAM*.
- Turkmen, C. ve Basar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 61(2), 17-34. https://doi.org/10.1501/Commua1_00000000677
- Yalçın, N. (2016). *Çarpımsal (multiplikatif) türev ve çarpımsal lineer diferensiyel denklemler* (Tez No. 434858) [Yayımlanmış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi].
YÖK Tez Merkezi.
<https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=cbOXH84ZayrLjc0tI-QXKnZlwAdnszI4mLEZGwS0-cFJswDpZ7Bc3a7D3Sdlj8n6>
- Yalçın, N. ve Çelik, E. (2023). A new approach for the bigeometric Newton method. *MANAS Journal of Engineering*, 11, 235–240. <https://doi.org/10.51354/mjen.1372839>
- Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *AIMS Mathematics*, 6, 3393–3409. <https://doi.org/10.3934/math.2021203>
- Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative linear differential equations via the multiplicative power series method. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 41, 837–847. <https://doi.org/10.14744/sigma.2023.0009>
- Yılmaz, M. C., Göktaş, S., Yılmaz, E. ve Et, M. (2025). Adams-Bashforth methods on bigeometric calculus. *AIMS Mathematics*, 10(8), 18627–18640.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Seda Nur YILMAZ

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Trabzon Üniversitesi / Fatih Eğitim Fakültesi
/ İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans Öğrenimi : Gümüşhane Üniversitesi / Lisansüstü Eğitim
Enstitüsü / Matematik Mühendisliği

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetler ve :
Yayınlar

İş Deneyimi

Stajlar :

Projeler :

Çalıştığı Kurumlar : Final Koleji,
Yenimahalle Belediyesi

Tarih : 09/07/2026