

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN
CEBİRSEL VE TOPOLOJİK ALTYAPISI

YÜKSEK LİSANS

Emre ÇIVGIN

HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN
CEBİRSEL VE TOPOLOJİK ALTYAPISI**

**THE ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL FOUNDATIONS
OF NON-NEWTONIAN ANALYSIS**

YÜKSEK LİSANS

Emre ÇIVGIN

**HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE**



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN
CEBİRSEL VE TOPOLOJİK ALTYAPISI

THE ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL FOUNDATIONS
OF NON-NEWTONIAN ANALYSIS

YÜKSEK LİSANS

Emre ÇIVGIN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN

HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Newtonyen Olmayan Analizin Cebirsel ve Topolojik Altyapısı**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

17/06/2025

.....
Emre ÇIVGIN

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında sağladığı katkılarla bana yol gösteren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN’a, bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK’e tüm içtenliğimle teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde benden desteklerini esirgemeyen aileme minnettarım.

Emre ÇIVGIN
GÜMÜŞHANE – 2025

ÖZET

Bu tez çalışması, Newtonyen (klasik) analizde yer alan cebirsel ve topolojik yapılar ile sınır kavramlarını temel alarak, Newtonyen olmayan analizin cebirsel ve topolojik altyapısını sistematik ve bütüncül bir yaklaşımla ortaya koymayı amaçlamaktadır. Tez çalışmasının başlangıcında, Newtonyen olmayan analiz kapsamında üreteç fonksiyonu alfa (α) olan sayı kümeleri ve bu kümeler üzerinde tanımlı işlemler verilmiştir. Bunu takiben, klasik analizde olduğu gibi, Newtonyen olmayan analizde de cebirsel ve topolojik altyapı sistematik bir biçimde ele alınmıştır. Cebirsel yönden, alfa reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan grup ve cisim yapılarının yanı sıra, bu küme üzerinde oluşturulan vektör uzayı yapısı incelenmiş ve ilgili cebirsel bağıntılar ortaya konmuştur. Çalışmanın devamında, Newtonyen olmayan analizin topolojik altyapısına ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu çerçevede, alfa aralıklar, alfa komşuluklar, alfa yuvarlar ve alfa metrik uzay gibi kavramlar tanımlanmış; söz konusu yapıların karakteristik özellikleri analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen olmayan analiz, alfa işlemler, Cebirsel altyapı, Topolojik altyapı.

SUMMARY

This thesis aims to construct the algebraic and topological foundation of non-Newtonian analysis through a systematic and comprehensive approach, grounded in the foundational structures and boundedness concepts of Newtonian (classical) analysis. At the beginning of the study, sets of numbers generated by a generator function α and the operations defined on these sets are given in the context of non-Newtonian analysis. Subsequently, analogous to the classical case, the algebraic and topological structures underlying non-Newtonian analysis are rigorously developed. From an algebraic standpoint, group and field structures defined over the set of α -real numbers are investigated, followed by the construction and examination of a corresponding vector space defined over the classical field of real numbers. In the ensuing sections, fundamental definitions and theorems concerning the topological infrastructure of non-Newtonian analysis are presented. In this context, key notions such as α -intervals, α -neighborhoods, α -open balls, and α -metric spaces are formally defined, and their structural properties are analyzed in depth.

Keywords: Non-Newtonian analysis, alpha operations, Algebraic foundation, Topological foundation..

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1.GİRİŞ	1
2.LİTERATÜR ÖZETİ	3
2.1.Newtonyen (Klasik) Analizde Bazı Temel Tanım ve Kavramlar	3
2.2.Newtonyen Olmayan Analizde Bazı Temel Kavramlar.....	5
2.1.1. Alfa İşlemler.....	6
3.NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN CEBİRSEL ALTYAPISI	7
3.1. Alfa İşlemler ile Alfa Reel Sayılar Üzerinde Tanımlanan Grup ve Cisimler	7
3.1.1. Alfa Toplama ve Alfa Çarpma İşlemleri.....	7
3.1.2. Alfa Çıkarma ve Alfa Bölme İşlemleri	10
3.1.3. Alfa Reel Sayılar Cismi	14
3.2. Alfa Reel Sayıların Vektör Uzayı	15
3.2.1. Kuvvet Alma İşlemi	16
3.3. Alfa Reel Sayılar Kümesinde Sıralama, Kısmi Sıralama ve Tam Sıralama Bağıntıları.....	18
4.NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN TOPOLOJİK ALTYAPISI	21
Alfa Aralıklar ve Alfa Mutlak Değer Fonksiyonu	21
4.1. Alfa Metrik Uzay	24
4.2. Alfa Metrik Uzaylarda Küme Özellikleri	28
4.3. Alfa Diziler ve Özellikleri.....	31
5.ALFA ARİTMETİK VE YILDIZ ANALİZ.....	33
6.YILDIZ VEKTÖR UZAYLARI.....	38
7.SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	44
KAYNAKÇA.....	45
ÖZGEÇMİŞ	48

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Yıldız analizde işlem sembolleri.....	33
Tablo 2. Newtonyen olmayan analizlerde alfa ve beta üreteçleri	34



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

α	: Üreteç fonksiyonu
$\mathbb{R}_\alpha$	: Alfa reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_\alpha^+$	: Alfa pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_\alpha^-$	: Alfa negatif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_\alpha^{+,0}$	: Alfa negatif olmayan reel sayılar
$\mathbb{R}_\alpha^{-,0}$	: Alfa pozitif olmayan reel sayılar
$\mathbb{Z}_\alpha$	: Alfa tam sayılar
$\mathbb{Z}_\alpha^{+,0}$	: Alfa negatif olmayan tam sayılar
$\mathbb{Z}_\alpha^{-,0}$	: Alfa pozitif olmayan tam sayılar
$\mathbb{N}_\alpha$	: Alfa doğal sayılar
$\mathbb{Q}_\alpha$	: Alfa rasyonel sayılar
$+$	: Alfa toplama işlemi
$-$	: Alfa çıkarma işlemi
$\times$	: Alfa çarpma işlemi
$/$	: Alfa bölme işlemi
$x^{-1\alpha}$	: Alfa çarpma işlemine göre ters eleman
$\alpha(1)$	: Alfa çarpma işlemine göre birim eleman
$x^{n\alpha}$	: Alfa çarpma işlemine göre doğal sayı kuvvetleri
$\sqrt{x}^\alpha$	: Alfa karekök
$\leq, <, \geq, >$	: Alfa eşitsizlikler
$ \cdot _\alpha$	: Alfa mutlak değer
d_α	: Alfa uzaklık
(X, d_α)	: Alfa metrik uzay
$\bar{A}^\alpha$	: A kümesinin alfa kapanışı

1. GİRİŞ

Klasik analiz, reel sayılar kümesi üzerine inşa edilen kavramsal çerçeveye, limit, türev ve integral gibi temel yapıtaşlarını ortaya koyarak doğa bilimlerinden mühendisliğe kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu geleneksel yapı, genellikle Newtonyen analiz veya klasik analiz olarak anılmakta olup, süreklilik, türevlenebilirlik ve limit kavramlarını belirli aksiyomlara dayandırarak geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ancak, klasik analizin sınırlarını aşan durumlarda ya da alternatif cebirsel-topolojik yapıların gereksinimi gibi alanlarda daha esnek yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ihtiyaca yanıt olarak ortaya çıkan Newtonyen olmayan analiz, klasik yapının sınırlarını aşmak üzere farklı aksiyomatik temellere ve işlem tanımlarına dayanan, genişletilmiş bir analiz anlayışıdır. Bu bağlamda, cebirsel ve topolojik yapılar Newtonyen olmayan analizde merkezi bir role sahiptir.

Cebirsel yapılar, fonksiyonların ve elemanların birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu anlamaya yardımcı olurken, topolojik yapılar, bu sistemlerin biçimsel ve geometrik özelliklerini ortaya koyar. Cebirsel yapılar, genellikle kümeler üzerinde tanımlanan işlemlerle ilgili kurallar ve yapıları ifade eder. Matematiksel cebirsel yapılar, kümeler üzerindeki toplama, çarpma, bölme gibi işlemler ve bu işlemlerin özellikleri üzerine yoğunlaşır. Cebirsel yapılar, fonksiyonların analitik özelliklerini ortaya koymanın yeni yollarını sunabilir. Topolojik yapılar ise daha çok uzayların biçimsel özellikleriyle ilgilenir. Bir uzayın elemanlarının birbirleriyle olan ilişkileri, mesafeler ve komşuluklar üzerinden tanımlanır.

Bu tez çalışması, yedi bölümden oluşur. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm literatür özeti bölümü olup bu bölümde Newtonyen (klasik) analiz ve Newtonyen olmayan analiz ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlerin yanı sıra, alfa işlemler verilmiştir. Üçüncü bölümde Newtonyen olmayan analizin cebirsel altyapısı incelenmiştir. Bu bağlamda α reel sayılar üzerinde tanımlanan grup ve cisimler, alfa reel sayıların vektör uzayı ve α reel sayılar üzerinde sıralama bağıntıları verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Newtonyen olmayan analizin topolojik altyapısı sistematik olarak incelenmiştir. Burada α -mutlak değer ve α -metrik fonksiyonlar üzerinden oluşturulan topolojik yapı ele alınarak, α -aralıklar, yuvar kümeler, yoğunluk ve sınırlılık gibi temel topolojik kavramlar analiz edilmiştir. Beşinci bölümde, alfa-aritmetik ve yıldız analiz kavramları tanıtılmış; yıldız analizde kullanılan işlem sembolleri tablo halinde sunulmuştur. Devamında, yıldız limit, yıldız türev ve yıldız integral

kavramlarının tanımları verilmiştir. Altıncı bölümde ise, yıldız vektör uzayının aksiyomları ortaya konularak alfa-normlu uzay ve alfa-Banach uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca, bu bölümde yıldız lineer operatörler ile yıldız türev ve yıldız integral operatörleri tanımlanmış, bu operatörlerin temel özellikleri incelenmiştir. Yedinci bölüm sonuç ve değerlendirme bölümü olup çalışmanın, hem klasik analiz ile Newtonyen olmayan analiz arasındaki uyumu sistematik biçimde ortaya koymakta hem de α -üretici ile yaklaşımın gerek cebirsel gerekse topolojik düzlemde nasıl tutarlı ve genişletilebilir bir yapı sunduğunu göstermeyi hedeflemiştir. Elde edilen sonuçlar, özellikle alternatif analiz biçimlerine yönelen kuramsal çalışmalara katkı sağlayabilecek potansiyeli taşımaktadır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu başlık altında, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan Newtonyen (klasik) ve Newtonyen olmayan (non-Newtonyen) analizlerdeki bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. (Altın, 2011; Duyar, vd. 2015; Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b; Kadioğlu ve Kamali, 2013; Karaçay, 2014; Türkmen ve Başar, 2012).

2.1. Newtonyen (Klasik) Analizde Bazı Temel Tanım ve Kavramlar

Öncelikle Newtonyen (klasik) analizdeki temel kavram ve tanımları verelim.

Tanım 2.1.1. $\delta > 0$ herhangi bir reel sayı ve $u \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre

$$K = \{t \in \mathbb{R} : |t - u| < \delta\}$$

kümesine u 'nun δ -komşuluğu denir. K' (veya $\check{K}$) = $K \setminus \{u\}$ kümesine ise u 'nun δ -delinmiş komşuluğu denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.2. $U \subset \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer u nun her delinmiş komşuluğu U nun en az bir elemanını içeriyorsa $u \in \mathbb{R}$ ya U kümesinin bir yığılma noktası denir. U kümesinin tüm yığılma noktalarından meydana gelen kümeye U nun yığılma noktalarının kümesi denir ve U' ile gösterilir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.3. (Limit) $U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve u , U nun bir yığılma noktası olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için $0 < |t - u| < \delta$ olduğunda $|f(t) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa t, u ya yaklaşıırken $f(t)$ fonksiyonunun limiti L dir denir ve

$$\lim_{t \rightarrow u} f(t) = L$$

biçiminde gösterilir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.4. (Tek Taraflı Limit) Reel değerli bir f fonksiyonunun bir u noktasındaki sağ ve sol limitleri, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$f(u^+) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} f(u + \varepsilon), \text{ sağ limit}$$

$$f(u^-) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} f(u - \varepsilon), \text{ sol limit}$$

ifadeleri ile tanımlanır (Altın, 2011).

Eğer f fonksiyonunun u noktasında limiti varsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\lim_{t \rightarrow u} f(t) = f(u^+) = f(u^-).$$

Tanım 2.1.5. (Süreklilik) $U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u \in U$ olsun. Buna göre $\varepsilon > 0$ sayısı için $|t - u| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(u)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$ varsa, f fonksiyonu u noktasında süreklidir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

u , U nun bir yığılma noktası olduğunda limit tanımlanabileceğinden bu durumda süreklilik şu şekilde tanımlanır: $U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u \in U$ olsun. Şayet,

$$\lim_{t \rightarrow u} f(t) = f(u)$$

şeklinde oluyor ise f fonksiyonu u noktasında süreklidir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.6. (Türev). $U \subset \mathbb{R}$, $u \in U$ ve f fonksiyonu U da tanımlı bir fonksiyon olsun. Şayet

$$\lim_{t \rightarrow u} \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.7. $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subset X$ olsun (Karaçay, 2014).

i) A 'nın her elemanından küçük veya eşit olan bir $x \in X$ elemanına A kümesinin bir alt sınırıdır denir.

ii) A 'nın her elemanından büyük veya eşit olan bir $x \in X$ elemanına A kümesinin bir üst sınırıdır denir.

Tanım 2.1.8. $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subset X$ olsun (Karaçay, 2014).

i) A kümesinin alt sınırlarından en büyüğüne A 'nın en büyük alt sınırı (EBAS-inf) denir.

ii) A kümesinin üst sınırlarından en küçüğüne A 'nın en küçük üst sınırı (EKÜS-sup) denir.

Tanım 2.1.9. $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subset X$ olsun (Karaçay, 2014).

i) A kümesinin hiçbir elemanından büyük olmayan bir $\kappa \in A$ elemanına A 'nın bir küçükçe (minimal) elemanı denir.

ii) A kümesinin hiçbir elemanından küçük olmayan bir $\mu \in A$ elemanına A 'nın bir büyükçe (maksimal) elemanı denir.

Tanım 2.1.10. $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subset X$ olsun (Karaçay, 2014).

i) A kümesinin en büyük alt sınırı $a = EBAS(A)$ var ve $a \in A$ ise a 'ya A 'nın en küçük (minimum) elemanı denir.

ii) A kümesinin en küçük üst sınırı $b = EKÜS(A)$ var ve $b \in A$ ise b 'ye A 'nın en büyük (maksimum) elemanı denir.

2.2. Newtonyen Olmayan Analizde Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesine tanımlı birebir ve sürekli fonksiyonlara üreteç fonksiyon denir (Duyar, vd. 2015).

Tanım 2.2.2. α bir üreteç olmak üzere Newtonyen olmayan (alfa) reel sayılar, α -tam sayılar, α -doğal sayılar kümeleri sırasıyla şu şekilde tanımlanır (Türkmen ve Başar, 2012; Çakmak ve Başar, 2012)

i) $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}\},$

ii) $\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\},$

iii) $\mathbb{N}_\alpha = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{N}\} = \{\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\}.$

α -pozitif, α -negatif sayılar ise sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır (Boruah ve Hazarika, 2018)

iv) $\mathbb{R}_\alpha^+ = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}^+\} = \{\alpha(x) | x > 0\},$

v) $\mathbb{R}_\alpha^- = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{R}^-\} = \{\alpha(x) | x < 0\},$

vi) $\mathbb{Z}_\alpha^+ = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}^+\} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x > 0\},$

vii) $\mathbb{Z}_\alpha^- = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}^-\} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x < 0\}$

Ayrıca, negatif olmayan ve pozitif olmayan α -sayılar için sırasıyla aşağıdaki gösterimleri kullanacağız.

viii) $\mathbb{R}_\alpha^{+,0} = \{\alpha(x) | x \geq 0\},$

ix) $\mathbb{R}_\alpha^{-,0} = \{\alpha(x) | x \leq 0\},$

x) $\mathbb{Z}_\alpha^{+,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\},$

xi) $\mathbb{Z}_\alpha^{-,0} = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{Z}, x \leq 0\}.$

2.1.1. Alfa İşlemler

Tanım 2.2.1.1. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde α -toplama ($\dot{+}$) ve α -çarpma ($\dot{\times}$) işlemleri $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki biçimde tanımlanır:

i) $x \dot{+} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)),$

ii) $x \dot{\times} y = \alpha(\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)),$

(Grossman ve Katz, 1972).



3. NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN CEBİRSEL ALTYAPISI

Bu bölümde (alfa işlemler ile alfa reel sayılar üzerinde tanımlanan grup ve cisimler) sırasıyla

- a) $\mathbb{R}_\alpha$ 'nın alfa toplama, alfa çarpma işlemlerinin her biri ile oluşturduğu gruplar verilmiştir;
- b) alfa çıkarma, alfa bölme işlemleri literatürden farklı olarak alfa toplama ve alfa çarpma işlemleriyle tanımlanmıştır;
- c) alfa reel sayılar cismi verilmiştir.

3.1. Alfa İşlemler ile Alfa Reel Sayılar Üzerinde Tanımlanan Grup ve Cisimler

3.1.1. Alfa Toplama ve Alfa Çarpma İşlemleri

Önerme 3.1. $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+})$ bir gruptur.

İspat: $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi α -toplama işlemine göre kapalıdır. Ayrıca α -toplama işlemi grup aksiyomlarını sağlar:

i) Birleşme özelliği: Her $\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c) \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$[\alpha(a) \dot{+} \alpha(b)] \dot{+} \alpha(c) = \alpha(a) \dot{+} [\alpha(b) \dot{+} \alpha(c)]$$

eşitliği vardır çünkü

$$\begin{aligned} [\alpha(a) \dot{+} \alpha(b)] \dot{+} \alpha(c) &= \alpha(a + b) \dot{+} \alpha(c) = \alpha((a + b) + c) \\ &= \alpha(a + (b + c)) = \alpha(a) \dot{+} \alpha(b + c) \\ [\alpha(a) \dot{+} \alpha(b)] \dot{+} \alpha(c) &= \alpha(a) \dot{+} [\alpha(b) \dot{+} \alpha(c)] \end{aligned}$$

ii) Etkisiz eleman: $\alpha(0), (\mathbb{R}_\alpha, \dot{+})$ grubunun etkisiz elemanıdır çünkü her $\alpha(a) \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\alpha(a) \dot{+} \alpha(0) = \alpha(0) \dot{+} \alpha(a) = \alpha(a)$$

eşitliği sağlanır.

iii) Ters eleman: Her bir $\alpha(a) \in \mathbb{R}_\alpha$ için $\alpha(-a) \in \mathbb{R}_\alpha$ elemanı $\alpha(a)$ elemanının α toplama işlemine göre tersidir çünkü

$$\alpha(a) \dot{+} \alpha(-a) = \alpha(-a) \dot{+} \alpha(a) = \alpha(0)$$

geçerlidir. ■

Gösterim 3.1. $x \in \mathbb{R}_\alpha$ elemanın α -toplamaya göre tersi $\dot{-} x$ ile gösterilir.

Teorem 3.1. $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+})$ bir değişmeli (abelyan) gruptur.

İspat: $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+})$ bir grup olduğu Önerme 3.1’de gösterildi. Şimdi değişme özelliğinin geçerli olduğu gösterilecektir. Her $\alpha(a), \alpha(b) \in \mathbb{R}_\alpha$ için,

$$\alpha(a) \dot{+} \alpha(b) = \alpha(b) \dot{+} \alpha(a)$$

yazılır. Buradan,

$$\alpha(a) \dot{+} \alpha(b) = \alpha(a + b) = \alpha(b + a) = \alpha(b) \dot{+} \alpha(a)$$

olduğu görülür. ■

Önerme 3.2. $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ bir gruptur.

İspat: $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi α -çarpma işlemine göre kapalıdır. Ayrıca α -çarpma işlemi grup aksiyomlarını sağlar:

i) Birleşme özelliği: Her $\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c) \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ için

$$[\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b)] \dot{\times} \alpha(c) = \alpha(a) \dot{\times} [\alpha(b) \dot{\times} \alpha(c)]$$

eşitliği geçerlidir. Çünkü

$$\begin{aligned} [\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b)] \dot{\times} \alpha(c) &= [\alpha(a \times b)] \dot{\times} \alpha(c) \\ &= \alpha[(a \times b) \times c] \\ &= \alpha[a \times (b \times c)] \\ &= \alpha(a) \dot{\times} \alpha(b \times c) \\ [\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b)] \dot{\times} \alpha(c) &= \alpha(a) \dot{\times} [\alpha(b) \dot{\times} \alpha(c)] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece birleşme özelliği sağlanır.

ii) Birim eleman: $\alpha(1)$, birim elemandır çünkü her $\alpha(a) \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ için

$$\alpha(a) \dot{\times} \alpha(1) = \alpha(1) \dot{\times} \alpha(a) = \alpha(a)$$

$$\alpha(a) \dot{\times} \alpha(1) = \alpha(a \times 1) = \alpha(1 \times a) = \alpha(a)$$

olduğu görülür. Böylece birim eleman özelliği sağlanır.

iii) Ters eleman: $\alpha(a) \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ için $\alpha(1/a) \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ elemanı $\alpha(a)$ 'nın bu işleme göre tersidir çünkü

$$\alpha(a) \dot{\times} \alpha(1/a) = \alpha(a \times 1/a) = \alpha(1)$$

$$\alpha(1/a) \dot{\times} \alpha(a) = \alpha\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \alpha(1)$$

olduğu görülür. Ters eleman özelliği de sağlanmış olup böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Gösterim 3.2. $x \in \mathbb{R}_\alpha$ elemanının α -çarpma işlemine göre tersi $x^{-1\alpha}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2. $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ bir değişmeli (abelyan) gruptur.

İspat: Önerme 3.2'de $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ 'nın bir grup olduğu ispatlandı. Şimdi değişme özelliğinin sağlandığı gösterilecektir. Her $\alpha(a), \alpha(b) \in \mathbb{R}_\alpha$ için,

$$\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b) = \alpha(b) \dot{\times} \alpha(a)$$

yazılabilir. Çünkü

$$\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b) = \alpha(a \times b) = \alpha(b \times a) = \alpha(b) \dot{\times} \alpha(a)$$

olduğu görülür. ■

Önerme 3.3. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. α -toplama ($\dot{+}$) ve α -çarpma ($\dot{\times}$) işlemleri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $\alpha^{-1}(x \dot{+} y) = \alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y),$

ii) $\alpha(a) \dot{+} \alpha(b) = \alpha(a + b)$

iii) $\alpha^{-1}(x \dot{\times} y) = \alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y),$

iv) $\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b) = \alpha(a \times b)$

(Grossman ve Katz, 1972).

3.1.2. Alfa Çıkarma ve Alfa Bölme İşlemleri

Önerme 3.4. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının α -toplama işlemine göre tersi için

$$\dot{-}x = \alpha[-\alpha^{-1}(x)]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\alpha[-\alpha^{-1}(x)]$ sayısının x 'in α -toplama işlemine göre tersi olduğunu göstermek için x ile sağdan ve soldan toplamının $\alpha(0)$ 'a eşit olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} x \dot{+} \alpha[-\alpha^{-1}(x)] &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) + (\alpha^{-1} \circ \alpha)[-\alpha^{-1}(x)]\} \\ &= \alpha[\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x)] \\ x \dot{+} \alpha[-\alpha^{-1}(x)] &= \alpha(0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha[-\alpha^{-1}(x)] \dot{+} x &= \alpha\{(\alpha^{-1} \circ \alpha)[-\alpha^{-1}(x)] + \alpha^{-1}(x)\} \\ &= \alpha[-\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(x)] \\ \alpha[-\alpha^{-1}(x)] \dot{+} x &= \alpha(0) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Tanım 3.1. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde α -çıkarma ($\dot{-}$) işlemi $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$x \dot{-} y = x \dot{+} (\dot{-}y)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.5. $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- i) $x \dot{-} y = \alpha[\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)]$
- ii) $\alpha^{-1}(x \dot{-} y) = \alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)$
- iii) $\alpha(a) \dot{-} \alpha(b) = \alpha(a - b)$

İspat:

- i) $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned}
x \dot{-} y &= x \dot{+} (\dot{-} y) \\
&= x \dot{+} \alpha[-\alpha^{-1}(y)] \\
&= \alpha\{\alpha^{-1}(x) + (\alpha^{-1} \circ \alpha)[- \alpha^{-1}(y)]\} \\
x \dot{-} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(x \dot{-} y) &= (\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)] \\
\alpha^{-1}(x \dot{-} y) &= \alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\alpha(a) \dot{-} \alpha(b) &= \alpha\{\alpha^{-1}[\alpha(a)] - \alpha^{-1}[\alpha(b)]\} \\
&= \alpha[(\alpha^{-1} \circ \alpha)(a) - (\alpha^{-1} \circ \alpha)(b)] \\
\alpha(a) \dot{-} \alpha(b) &= \alpha(a - b)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Önerme 3.6. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının α -toplama işlemine göre tersi için

$$\dot{-}x = \alpha(0) \dot{-} x$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için,

$$\begin{aligned}
\alpha(0) \dot{-} x &= \alpha(0) \dot{-} \alpha[\alpha^{-1}(x)] \\
&= \alpha[0 - \alpha^{-1}(x)] \\
&= \alpha[-\alpha^{-1}(x)] \\
\alpha(0) \dot{-} x &= \dot{-} x
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 3.7. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ sayısının α -çarpma işlemine göre tersi için

$$x^{-1\alpha} = \alpha[1/\alpha^{-1}(x)]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\alpha[1/\alpha^{-1}(x)]$ sayısının x 'in çarpma işlemine göre tersi olduğunu göstermek için x ile sağdan ve soldan çarpımının $\alpha(1)$ olduğunu gösterelim. Böylece,

$$\begin{aligned} x \dot{\times} \alpha[1/\alpha^{-1}(x)] &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times (\alpha^{-1} \circ \alpha)[1/\alpha^{-1}(x)]\} \\ &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times [1/\alpha^{-1}(x)]\} \\ x \dot{\times} \alpha[1/\alpha^{-1}(x)] &= \alpha(1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha[1/\alpha^{-1}(x)] \dot{\times} x &= \alpha\{(\alpha^{-1} \circ \alpha)[1/\alpha^{-1}(x)] \times \alpha^{-1}(x)\} \\ &= \alpha\{[1/\alpha^{-1}(x)] \times \alpha^{-1}(x)\} \\ \alpha[1/\alpha^{-1}(x)] \dot{\times} x &= \alpha(1) \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. ■

Tanım 3.2. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde α -bölme ($\dot{/}$) işlemi $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $y \neq \alpha(0)$ için

$$x \dot{/} y = x \dot{\times} y^{-1\alpha}$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.8. $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- i) $x \dot{/} y = \alpha[\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)]$
- ii) $\alpha^{-1}(x \dot{/} y) = \alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)$
- iii) $\alpha(a/b) = \alpha(a) \dot{/} \alpha(b)$

Burada $\alpha^{-1}(y) \neq 0$ ve $b \neq 0$ dır.

İspat:

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned}x/y &= x \dot{\times} (y^{-1}\alpha) \\&= x \dot{\times} \alpha[1/\alpha^{-1}(y)] \\&= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times (\alpha^{-1} \circ \alpha)[1/\alpha^{-1}(y)]\} \\x/y &= \alpha[\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(x/y) &= (\alpha^{-1} \circ \alpha)[\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)] \\ \alpha^{-1}(x/y) &= \alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\alpha(a)/\alpha(b) &= \alpha\{\alpha^{-1}[\alpha(a)]/\alpha^{-1}[\alpha(b)]\} \\ \alpha(a)/\alpha(b) &= \alpha(a/b)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Önerme 3.9. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ sayısının α -çarpma işlemine göre tersi için

$$x^{-1}\alpha = \alpha(1)/x$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için,

$$\begin{aligned}\alpha(1)/x &= \alpha(1)/\alpha[\alpha^{-1}(x)] \\&= \alpha[1/\alpha^{-1}(x)] \\ \alpha(1)/x &= x^{-1}\alpha\end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek: Geometrik analizde $\alpha = \exp$ olduğundan üstel toplama, üstel çıkarma, üstel çarpma ve üstel bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Çakmak ve Başar, 2012)

$\forall u, v \in \mathbb{R}_{\exp}$ için,

a) $u \oplus v = \exp[\ln(u) + \ln(v)] = e^{\ln(u)+\ln(v)} = e^{\ln(u)} \cdot e^{\ln(v)} = u \cdot v$

b) $u \ominus v = \exp[\ln(u) - \ln(v)] = e^{\ln(u)-\ln(v)} = e^{\ln(u)} \cdot e^{-\ln(v)} = \frac{u}{v}$

c) $u \odot v = \exp[\ln(u) \cdot \ln(v)] = e^{\ln(u) \cdot \ln(v)} = [e^{\ln(u)}]^{\ln(v)} = u^{\ln(v)}$

d) $u \oslash v = \exp[\ln(u) \div \ln(v)] = e^{\frac{\ln(u)}{\ln(v)}} = [e^{\ln(u)}]^{\frac{1}{\ln(v)}} = u^{\frac{1}{\ln(v)}}, v \neq 1$

3.1.3. Alfa Reel Sayılar Cismi

Önerme 3.10. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $(\mathbb{R}, +)$ grubu ile $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+})$ grubu izomorfiktir, yani $f(x) = \alpha(x)$ izomorfizması ile $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_\alpha, \dot{+})$ dir.

İspat: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ üreteç fonksiyonunun bir homomorfizma, 1 – 1 ve örten olduğu gösterilecektir.

i) $\alpha(x)$, bir homomorfizmadır: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir;

$$\alpha(a + b) = \alpha(a) \dot{+} \alpha(b)$$

ii) $\alpha(x)$, üreteç fonksiyon olduğundan örten fonksiyondur: Keyfi $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için $\alpha^{-1}(x) \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki aşağıdaki eşitlik geçerlidir;

$$\alpha(\alpha^{-1}(x)) = x$$

iii) $\alpha(x)$, üreteç fonksiyon olduğundan 1-1 fonksiyondur: $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$\alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow a = b$$

dir. ■

Önerme 3.11. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ ile $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ grupları birbirine izomorftur (eş yapılıdır). Diğer bir deyişle $f(x) = \alpha(x)$ izomorfizması ile $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times) \cong (\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ dir.

İspat: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha, f(x) = \alpha(x)$ bir homomorfizmadır: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$f(a \times b) = f(a) \dot{\times} f(b)$$

eşitliği geçerlidir. Çünkü

$$f(a \times b) = \alpha(a \times b) = \alpha(a) \dot{\times} \alpha(b) = f(a) \dot{\times} f(b)$$

eşitliği vardır. Ayrıca, önerme 3.10'dan $f(x) = \alpha(x)$, 1-1 ve örten fonksiyondur. Böylelikle $f(x) = \alpha(x)$ izomorfizması ile $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times) \cong (\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ olduğu ispatlanır.

■

Teorem 3.2: $(\mathbb{R}_\alpha, +, \dot{\times})$ bir cisimdir.

İspat: Cisim olma şartları göz önüne alındığında,

- i) $(\mathbb{R}_\alpha, +)$ grubu etkisiz elemanı $\alpha(0)$ olan bir değişmeli gruptur.
- ii) $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \dot{\times})$ grubu birim elemanı $\alpha(1)$ olan bir değişmeli gruptur.
- iii) $\dot{\times}$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır: Her $\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c) \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\alpha(a) \dot{\times} [\alpha(b) + \alpha(c)] = [\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b)] + [\alpha(a) \dot{\times} \alpha(c)]$$

geçerlidir. Çünkü

$$\begin{aligned} \alpha(a) \dot{\times} [\alpha(b) + \alpha(c)] &= \alpha(a) \dot{\times} \alpha(b + c) = \alpha[a \times (b + c)] \\ &= \alpha[(a \times b) + (a \times c)] \\ &= \alpha[(a \times b)] + \alpha[(a \times c)] \\ \alpha(a) \dot{\times} [\alpha(b) + \alpha(c)] &= [\alpha(a) \dot{\times} \alpha(b)] + [\alpha(a) \dot{\times} \alpha(c)] \end{aligned}$$

eşittir. Bu üç madde i), ii), iii) $(\mathbb{R}_\alpha, +, \dot{\times})$ 'nın bir cisim olduğunu ispatlar.

■

3.2. Alfa Reel Sayıların Vektör Uzayı

Teorem 3.3: $\mathbb{R}_\alpha$ aşağıdaki işlemlerle $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır:

- a) Vektör toplamı α -toplama işlemidir.
- b) Skalerle çarpma işlemi: $v \in \mathbb{R}_\alpha$ vektörünün $r \in \mathbb{R}$ skaler katı

$$(r, v) \mapsto r \cdot v = \alpha[r \times \alpha^{-1}(v)]$$

biçiminde yazılır.

İspat: $(\mathbb{R}_\alpha, +)$ bir değişmeli gruptur. Bu sebeple skalerle çarpma ile ilgili aksiyomların kanıtlanması ispat için yeterli olacaktır.

Her $r, s \in \mathbb{R}$ ve her $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:

i) $s \cdot (r \cdot v) = (sr) \cdot v$ eşittir:

$$\begin{aligned} s \cdot (r \cdot v) &= s \cdot \alpha[r \times \alpha^{-1}(v)] \\ &= \alpha\{s \times \alpha^{-1}(\alpha[r \times \alpha^{-1}(v)])\} \\ &= \alpha\{s \times [r \times \alpha^{-1}(v)]\} \\ &= \alpha\{(sr) \times \alpha^{-1}(v)\} \\ s \cdot (r \cdot v) &= (sr) \cdot v \end{aligned}$$

ii) $1 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ cisminde çarpmanın birim elemanı olmak üzere $1 \cdot v = v$ dir. Çünkü

$$1 \cdot v = \alpha[1 \times \alpha^{-1}(v)] = \alpha[\alpha^{-1}(v)] = v$$

elde edilir.

iii) $r \cdot (u \dot{+} v) = (r \cdot u) \dot{+} (r \cdot v)$ dir. Çünkü

$$\begin{aligned} r \cdot (u \dot{+} v) &= r \cdot \alpha[\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)] \\ &= \alpha\{r \times [\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)]\} \\ &= \alpha\{[r \times \alpha^{-1}(u)] + [r \times \alpha^{-1}(v)]\} \\ &= \alpha(r \times \alpha^{-1}(u)) \dot{+} \alpha(r \times \alpha^{-1}(v)) \\ r \cdot (u \dot{+} v) &= (r \cdot u) \dot{+} (r \cdot v) \end{aligned}$$

iv) $(r + s) \cdot v = (r \cdot v) \dot{+} (s \cdot v)$ dir. Çünkü

$$\begin{aligned} (r + s) \cdot v &= \alpha\{(r + s) \times \alpha^{-1}(v)\} \\ &= \alpha\{[r \times \alpha^{-1}(v)] + [s \times \alpha^{-1}(v)]\} \\ &= \alpha[r \times \alpha^{-1}(v)] \dot{+} \alpha[s \times \alpha^{-1}(v)] \\ (r + s) \cdot v &= (r \cdot v) \dot{+} (s \cdot v) \end{aligned}$$

yazılır. Böylelikle ispat tamamlanır.

3.2.1. Kuvvet Alma İşlemi

Tanım 3.3. $x \in \mathbb{R}_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

i) $x^{0\alpha} = \alpha(1)$ ve $x^{1\alpha} = x$

ii) $x^{(n+1)\alpha} = x^{n\alpha} \dot{\times} x$

ile x α -sayısının, α -çarpma işlemine göre doğal sayı kuvvetleri tanımlanır.

Önerme 3.12. α -çarpma işlemine göre bir α sayının doğal sayı kuvvetleri için

$$x^{n\alpha} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^n\}$$

özelliliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} x^{n\alpha} &= \underbrace{x \dot{\times} x \dot{\times} \dots \dot{\times} x}_{n \text{ tane}} \\ x^{n\alpha} &= \alpha\{\underbrace{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x) \times \dots \times \alpha^{-1}(x)}_{n \text{ tane}}\} \\ x^{n\alpha} &= \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^n\} \end{aligned}$$

yazılır. Verilen bu eşitlik, kuvvetler, reel sayı olacak şekilde genelleştirilebilir.

Tanım 3.4. $x \in \mathbb{R}_\alpha$, $r \in \mathbb{R}$ için kuvvet alma işlemi şu şekilde verilir:

$$x^{r\alpha} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^r\}.$$

Tanım 3.5. $n \in \mathbb{N}$; $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_\alpha$ sabit α -sayılar; $x \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere

$$P(x) = c_0 \dot{+} (c_1 \dot{\times} x) \dot{+} (c_2 \dot{\times} x^{2\alpha}) \dot{+} \dots \dot{+} (c_n \dot{\times} x^{n\alpha})$$

eşitliği ile verilen $P: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonuna $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı n .dereceden α -polinom denir.

Tanım 3.6. $x \in \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$ olmak üzere x sayısının α -çarpma işlemine göre α -karekökü $\sqrt{x}^\alpha$ ile gösterilir ve

$$\sqrt{x}^\alpha = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^{\frac{1}{2}}\}$$

biçiminde tanımlanır. (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b).

Tanım 3.7. α -çarpma işlemine göre n . dereceden kökler aşağıdaki gibi tanımlanır:

i) $n \in 2\mathbb{N}, n \geq 2$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$ sayısının α -çarpma işlemine göre n . dereceden α -kökü $\sqrt[n]{x}^\alpha$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\sqrt[n]{x}^\alpha = \alpha \left\{ |\alpha^{-1}(x)|^{\frac{1}{n}} \right\}$$

ii) $n \in 2\mathbb{N} + 1, n \geq 2$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının α -çarpma işlemine göre n . dereceden α -kökü $\sqrt[n]{x}^\alpha$ ile gösterilir ve

$$\sqrt[n]{x}^\alpha = \left\{ [\alpha^{-1}(x)]^{\frac{1}{n}} \right\}$$

biçiminde tanımlanır. (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b).

3.3. Alfa Reel Sayılar Kümesinde Sıralama, Kısmi Sıralama ve Tam Sıralama Bağlılıları

Tanım 3.8: $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ birebir ve örten fonksiyon olsun. α -sıralama bağıntısı ($\dot{<}$) ve ilgili diğer bağıntılar ($\dot{>}, \dot{\leq}, \dot{\geq}$) aşağıdaki biçimde tanımlanır: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

a) $x \dot{<} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$

b) $x \dot{>} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) > \alpha^{-1}(y)$

c) $x \dot{\leq} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$

d) $x \dot{\geq} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) \geq \alpha^{-1}(y)$

(Grossman ve Katz, 1972).

Önerme 3.13. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\dot{\leq}$ α -sıralama bağıntısı verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$x \dot{\leq} y \Leftrightarrow (y \dot{-} x) \in \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$$

ifadesi geçerlidir.

İspat: $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir;

$$x \dot{\leq} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha[\alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(x)] \in \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$$

$$x \dot{\leq} y \Leftrightarrow (y \dot{-} x) \in \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$$

■

Teorem 3.4. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\leq$ sıralama bağıntısı bir kısmi sıralamadır, yani $(\mathbb{R}_\alpha, \leq)$ ikilisi kısmi sıralı kümedir: her $x, y, z \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

- i) Yansıma: $x \leq x$,
- ii) Ters-simetri: $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$,
- iii) Geçişme: $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$.

İspat: $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\leq$ sıralama bağıntısı verilsin.

- i) Her $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için yansıma özelliği geçerlidir;

$$\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(x) \Rightarrow x \leq x$$

- ii) Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için ters-simetri özelliği geçerlidir öyle ki; $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise

$$\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y) \text{ ve } \alpha^{-1}(y) \leq \alpha^{-1}(x) \Rightarrow \alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(y) \Rightarrow x = y$$

yazılır.

- iii) Her $x, y, z \in \mathbb{R}_\alpha$ için geçişme özelliği geçerlidir öyle ki; $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise

$$\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y) \text{ ve } \alpha^{-1}(y) \leq \alpha^{-1}(z) \Rightarrow \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(z) \Rightarrow x \leq z$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

■

Önerme 3.14. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin iki keyfi elemanı $\leq$ kısmi sıralamasına göre karşılaştırılabilir: Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir. (kümeden seçilen keyfi iki eleman için mutlaka biri diğerine eşit veya diğerinden küçük olmalıdır.)

İspat: $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. $x \not\leq y$ ve $y \not\leq x$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(x) \not\leq \alpha^{-1}(y) \text{ ve } \alpha^{-1}(y) \not\leq \alpha^{-1}(x) &\Rightarrow \alpha^{-1}(x) > \alpha^{-1}(y) \text{ ve } \alpha^{-1}(y) > \alpha^{-1}(x) \\ &\Rightarrow \alpha^{-1}(x) > \alpha^{-1}(x) \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Bu sebeple $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir. Böylece ispat tamamlanmıştır

■

Teorem 3.5. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde $\leq$ bağıntısı bir tam sıralama (lineer sıralama) bağıntısıdır.

İspat: $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralamadır ve $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir. Bu ise $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde $\leq$ bağıntısının bir tam sıralama bağıntısı olduğunu ispatlar. ■

Önerme 3.15. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde $\leq$ tam sıralama bağıntısı verilsin. Bu tam sıralama $\mathbb{R}_\alpha$ 'nın vektör uzay yapısı ile uyumludur (compatible): Her $x, y, z \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $r \geq 0$ için

i) $x \leq y$ ise $x+z \leq y+z$,

ii) $x \leq y$ ise $r \cdot x \leq r \cdot y$.

İspat: $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. $x \leq y$ olduğu kabul edilirse $\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$.

i) Keyfi bir $z \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısı için

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \alpha^{-1}(x) &\leq \alpha^{-1}(y) \\ \alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(z) &\leq \alpha^{-1}(y) + \alpha^{-1}(z) \\ \alpha^{-1}(x+z) &\leq \alpha^{-1}(y+z) \\ x+z &\leq y+z \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Keyfi bir $r \geq 0$ reel sayısı için

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \alpha^{-1}(x) &\leq \alpha^{-1}(y) \\ r \cdot \alpha^{-1}(x) &\leq r \cdot \alpha^{-1}(y), \\ \alpha^{-1}(r \cdot x) &\leq \alpha^{-1}(r \cdot y), \\ r \cdot x &\leq r \cdot y \end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 3.6. $(\mathbb{R}_\alpha, \leq)$ bir tam sıralı vektör uzayıdır.

İspat: $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde $\leq$ bağıntısı, bir tam sıralama bağıntısıdır. Ayrıca bu tam sıralama bağıntısı, $\mathbb{R}_\alpha$ 'nın vektör uzay yapısı ile uyumludur. Bu yüzden $(\mathbb{R}_\alpha, \leq)$ bir tam sıralı vektör uzayıdır.

4. NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZİN TOPOLOJİK ALTYAPISI

Bu bölümde klasik analizde kullanılan

- a) sayı aralıkları, mutlak değer fonksiyonu,
- b) metrik uzay,
- c) bir noktanın δ -komşuluğu,
- d) açık yuvar, kapalı yuvar,
- e) bir kümenin iç noktası, dış noktası, sınır noktası,
- f) sınırlı kümeler
- g) açık küme, kapalı küme, bir kümenin kapanışı, yoğun küme
- h) dizi, Cauchy dizisi, tam metrik uzay,
- i) bir cismin Dedekind tamlığı

kavramlarının Newtonyen olmayan analizde karşılıkları verilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

Alfa Aralıklar ve Alfa Mutlak Değer Fonksiyonu

Tanım 4.1. $\{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \leq x \leq v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$ kümesi bir α -kapalı aralık olarak adlandırılır ve

$$[u, v]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \leq x \leq v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 4.2. $\{x \in \mathbb{R}_\alpha | u < x < v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$ kümesi bir α -açık aralık olarak adlandırılır ve

$$(u, v)_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha | u < x < v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 4.3. $\{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \leq x < v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$ kümesi bir α -yarı açık aralık olarak adlandırılır ve

$$[u, v)_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha | u \leq x < v; u, v \in \mathbb{R}_\alpha\}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972).

Gösterim 4.1. α üreteç fonksiyonu verilsin. $r \in \mathbb{R}$ bir reel sayı olmak üzere $\dot{r}$ ile

$$\dot{r} = \alpha(r)$$

α -reel sayısı gösterilecektir (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 4.4. $|\cdot|_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$, α -mutlak değer fonksiyonu

$$|x|_\alpha = \begin{cases} x, & x \succ \dot{0} \text{ veya } x = \dot{0}, \\ \dot{-}x, & x \prec \dot{0}. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972). Burada “ $\dot{-}x$ ” ile $x \in \mathbb{R}_\alpha$ elemanının α -toplama işlemine göre tersi gösterilmiştir.

Önerme 4.1. $|\cdot|_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$, α -mutlak değer fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$|x|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(x)|).$$

İspat:

$$\begin{aligned} |x|_\alpha &= \begin{cases} x, & x \succ \dot{0} \text{ veya } x = \dot{0}, \\ \dot{-}x, & x \prec \dot{0}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & \alpha^{-1}(x) > 0 \text{ veya } x = \alpha(0) \\ \alpha(-\alpha^{-1}(x)), & \alpha^{-1}(x) < 0. \end{cases} \\ |x|_\alpha &= \alpha(|\alpha^{-1}(x)|) \end{aligned}$$

■

Örnek 4.1. Harmonik analizde üreteç fonksiyonu $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ dir ve α -mutlak değer fonksiyonu

$$|5|_\alpha = \frac{1}{\left|\frac{1}{5}\right|} = 5 \text{ ve } |-4|_\alpha = \frac{1}{\left|\frac{1}{-4}\right|} = 4$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.2. Kuadratik analizde üreteç fonksiyonu

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

ve üretcin ters fonksiyonu

$$\alpha^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu analizde α -mutlak değer

$$\begin{aligned} |x|_{\alpha} &= \alpha(|\alpha^{-1}(x)|) \\ &= \begin{cases} x, & \alpha^{-1}(x) > 0 \text{ veya } x = \alpha(0) \\ \alpha(-\alpha^{-1}(x)), & \alpha^{-1}(x) < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \alpha(-(-x^2)), & x < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \alpha(x^2), & x < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2}, & x < 0. \end{cases} \\ |x|_{\alpha} &= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Örneğin

$$|8|_{\alpha} = 8 \text{ iken } |-6|_{\alpha} = 6$$

olur.

Örnek 4.3. Geometrik analizde üretç fonksiyonu $\alpha(x) = \exp(x) = e^x$ ve üretcin tersi $\alpha^{-1}(x) = \ln x$ dir. Bu analizde α -mutlak değer

$$|x|_{\exp} = e^{|\ln(x)|} = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

ve örnek için aşağıdaki iki sayının mutlak değeri

$$|9|_{\exp} = 9 \text{ ve } \left| \frac{1}{2} \right|_{\exp} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

olarak hesaplanır.

Önerme 4.2. $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere α -mutlak değer fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Bashirov vd. 2008).

- i) Negatif olmama: $|x|_\alpha \geq 0$,
- ii) Noktaların ayrılması: $|x|_\alpha = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- iii) Çarpımsallık: $|x \times y|_\alpha = |x|_\alpha \times |y|_\alpha$,
- iv) Alt toplamsallık: $|x + y|_\alpha \leq |x|_\alpha + |y|_\alpha$

4.1. Alfa Metrik Uzay

Tanım 4.5. (α –Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme ve $d_\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$, X üzerinde bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için eğer d_α fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise bu fonksiyona α -metrik denir (Çakmak ve Başar, 2012):

- i) Ayırt edilemezlik: $d_\alpha(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii) Simetri: $d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$,
- iii) Üçgen eşitsizliği: $d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y)$.

Tanım 4.6. X boştan farklı bir küme ve d_α , X üzerinde bir α -metrik olsun. Bu taktirde (X, d_α) ikilisine α -metrik uzay denir (Çakmak ve Başar, 2012).

Önerme 4.3. $d_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$,

$$d_\alpha(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}_\alpha$ ’ da bir α -metriktir. Bu metriğe α -ayrık metrik denir.

İspat:

$$d_\alpha(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Simetri özelliği

$$\begin{aligned} d_\alpha(x, y) &= \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y = x \\ 1, & y \neq x \end{cases} \\ d_\alpha(x, y) &= d_\alpha(y, x) \end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliği: İki durumda incelenecektir.

Birinci durumda $y = x$ ise

$$d_{\alpha}(x, y) = d_{\alpha}(x, x) = 0$$

ve

$$0 \leq d_{\alpha}(x, z) + d_{\alpha}(z, y)$$

olduğundan

$$d_{\alpha}(x, y) \leq d_{\alpha}(x, z) + d_{\alpha}(z, y)$$

üçgen eşitsizliği elde edilmiştir.

İkinci durumda $y \neq x$ ise ya $y \neq z$ dir veya $x \neq z$ dir. Bu durumda

$$d_{\alpha}(x, y) = 1$$

ve

$$1 \leq d_{\alpha}(x, z) + d_{\alpha}(z, y)$$

olduğundan yine

$$d_{\alpha}(x, y) \leq d_{\alpha}(x, z) + d_{\alpha}(z, y)$$

üçgen eşitsizliği elde edilmiştir. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır. ■

Önerme 4.4. $d_{\alpha}: \mathbb{R}_{\alpha} \times \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}^{+,0}$ fonksiyonu

$$d_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \alpha(0), & x = y \\ |x|_{\alpha} + |y|_{\alpha}, & x \neq y \end{cases}$$

biçiminde verilsin. d_{α} , $\mathbb{R}_{\alpha}$ üzerinde bir α -metriktir ve bu metrik α -postane metriği olarak isimlendirilir.

İspat: Her $x, y, z \in \mathbb{R}_{\alpha}$ için

i) Ayırt edilemezlik:

$$d_\alpha(x, y) = \alpha(0) \Leftrightarrow x = y$$

ii) Simetri:

$$\begin{aligned} d_\alpha(x, y) &= \begin{cases} \alpha(0), & x = y \\ |x|_\alpha + |y|_\alpha, & x \neq y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(0), & y = x \\ |y|_\alpha + |x|_\alpha, & y \neq x \end{cases} \\ d_\alpha(x, y) &= d_\alpha(y, x) \end{aligned}$$

iii) Üçgen eşitsizliği:

$$d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y)$$

aşağıdaki durumlar için geçerlidir.

(a) $x = y$ ise

$$\alpha(0) = d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y)$$

(b) $x \neq y, x \neq z$ ve $y \neq z$ ise

$$|x|_\alpha + |y|_\alpha = d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y) = |x|_\alpha + |y|_\alpha + \alpha(2) \times |z|_\alpha$$

(c) $z = x \neq y$ ise $d_\alpha(x, z) = \alpha(0)$ ve

$$\begin{aligned} d_\alpha(x, y) &= d_\alpha(z, y) \\ d_\alpha(x, y) &\leq d_\alpha(x, z) + d_\alpha(z, y) \end{aligned}$$

(d) $x = y \neq z$ ((c) şıkkına benzer şekilde gösterilir).

■

Tanım 4.7. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $d(a, b) = |a - b|$, $(\mathbb{R}, d)$ klasik metrik uzayında uzaklık fonksiyonu olsun. $d_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^{+,0}$ fonksiyonu $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$d_{\alpha}(x, y) = \alpha\{d[\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)]\}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda d_{α} fonksiyonuna $(\mathbb{R}_{\alpha}, d_{\alpha})$ α -metrik uzayında α -uzaklık fonksiyonu denir. $d_{\alpha}(x, y)$ değerine x ile y arasındaki α -uzaklık denir (Çakmak ve Başar, 2012).

Önerme 4.5. Bir boyutlu uzayda α -uzaklık fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}_{\alpha}$ için $d_{\alpha}(x, y) = |x \dot{-} y|_{\alpha}$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $d_{\alpha}(\dot{a}, \dot{b}) = \alpha(|a - b|)$

İspat: $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $(\mathbb{R}, d)$ klasik metrik uzayında uzaklık fonksiyonu olmak üzere

a)

$$\begin{aligned} d_{\alpha}(x, y) &= \alpha\{d[\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)]\} \\ &= \alpha(|\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)|) \\ &= \alpha(|\alpha^{-1}(x \dot{-} y)|) \\ d_{\alpha}(x, y) &= |x \dot{-} y|_{\alpha} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} d_{\alpha}(\dot{a}, \dot{b}) &= \alpha\{d[\alpha^{-1}(\dot{a}), \alpha^{-1}(\dot{b})]\} \\ &= \alpha\{d[a, b]\} \\ d_{\alpha}(\dot{a}, \dot{b}) &= \alpha(|a - b|) \end{aligned}$$

Önerme 4.6. $d_{\alpha}: \mathbb{R}_{\alpha} \times \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}^{+,0}$, α -uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}_{\alpha}$ ' da bir α -metriktir.

İspat:

Ayırt edilemezlik özelliği

$$d_{\alpha}(x, y) = \dot{0} \Leftrightarrow |y \dot{-} x|_{\alpha} = \dot{0} \Leftrightarrow y \dot{-} x = \dot{0} \Leftrightarrow y = x$$

Simetri özelliği

$$d_{\alpha}(x, y) = |y \dot{-} x|_{\alpha} = |x \dot{-} y|_{\alpha} = d_{\alpha}(y, x)$$

Üçgen eşitsizliği

$$d_{\alpha}(x, y) = |y \dot{-} x|_{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= |y \dot{-} z \dot{+} z \dot{-} x|_{\alpha} \\
&\leq |z \dot{-} x|_{\alpha} \dot{+} |y \dot{-} z|_{\alpha} \\
d_{\alpha}(x, y) &\leq d_{\alpha}(x, z) \dot{+} d_{\alpha}(z, y)
\end{aligned}$$

Böylelikle $\mathbb{R}_{\alpha}$ ' da tanımlı α -uzaklık fonksiyonunun $\mathbb{R}_{\alpha}$ ' da bir α -metrik olduğu görülür. ■

Çalışmanın devamında aksi belirtilmedikçe d_{α} ile α -uzaklık fonksiyonu gösterilecektir.

4.2. Alfa Metrik Uzaylarda Küme Özellikleri

Tanım 4.8. $\delta > 0$ herhangi bir α -reel sayı ve $u \in \mathbb{R}_{\alpha}$ olsun. Buna göre

$$K = B_{\alpha}(u, \delta) = \{t \in \mathbb{R}_{\alpha} : |t \dot{-} u|_{\alpha} < \delta\}$$

kümesine $(\mathbb{R}_{\alpha}, d_{\alpha})$ uzayında u merkezli δ yarıçaplı α -komşuluk denir (Çakmak ve Başar, 2012). $K \setminus \{u\}$ kümesine ise u merkezli δ yarıçaplı α -delinmiş komşuluk denir.

Tanım 4.9. (X, d_{α}) bir α -metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $r \in \mathbb{R}_{\alpha}$ için

(a) x_0 merkezli r yarıçaplı açık α -yuvar

$$B_{\alpha}(x_0, r) = \{x \in X | d_{\alpha}(x, x_0) < r\}$$

(b) x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı α -yuvar

$$B_{\alpha}[x_0, r] = \{x \in X | d_{\alpha}(x, x_0) \leq r\}$$

(c) x_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş α -yuvar

$$B'_{\alpha}(x_0, r) = \{x \in X | 0 < d_{\alpha}(x, x_0) < r\}$$

(d) x_0 merkezli r yarıçaplı α -yuvar yüzeyi

$$S_{\alpha}(x_0, r) = \{x \in X | d_{\alpha}(x, x_0) = r\}$$

olarak tanımlanır (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 4.10. (X, d_α) bir α -metrik uzay olsun. Ayrıca $x_0 \in X$ bu uzayda bir nokta olsun. Eğer x_0 merkezli r yarıçaplı bir $B_\alpha(x_0, r)$ açık yuvarı için $B_\alpha(x_0, r) \subset N$ olacak şekilde $N \subset X$ varsa, N açık kümesine x_0 noktasının bir (açık) komşuluğu denir (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 4.11. x_0 merkezli 1 yarıçaplı kapalı α -yuvar, x_0 merkezli birim α -yuvar olarak adlandırılır.

Tanım 4.12. (X, d_α) bir α -metrik uzay olsun. Ayrıca $x_0 \in X$ bu uzayda bir nokta ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

- (a) Eğer en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $B_\alpha(x_0, \varepsilon) \subset A$ ise x_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A 'nın tüm iç noktalarının oluşturduğu kümeye A 'nın içi denir ve $\text{int}(A)$ ile gösterilir.
- (b) Eğer en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $B_\alpha(x_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ise x_0 noktasına A kümesinin bir dış noktası denir. A 'nın tüm dış noktalarının oluşturduğu kümeye A 'nın dışı denir ve $\text{ext}(A)$ ile gösterilir.
- (c) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $B_\alpha(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ve $B_\alpha(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ ise x_0 noktasına A kümesinin bir sınır noktası denir (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 4.13: (X, d_α) bir α -metrik uzay olsun. Ayrıca $x_0 \in X$ bu uzayda bir nokta ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

- (a) Eğer A 'nın bütün noktaları iç nokta ise A 'ya X uzayının bir α -açık kümesi denir.
- (b) Eğer $X \setminus A$ (A kümesinin tümleyeni) α -açık bir küme ise A kümesine α -kapalı küme denir.
- (c) A 'nın tüm sınır noktalarının oluşturduğu kümeye A 'nın α -sınırı denir ve $\partial_\alpha A$ ile gösterilir (Duyar, vd. 2015).

Tanım 4.14. (X, d_α) bir α -metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \cup \partial_\alpha A$ birleşim kümesine A 'nın α -kapanışı denir ve $\bar{A}^\alpha$ ile gösterilir (Duyar, vd. 2015).

Tanım 4.15. Bir A kümesi, X α -uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer A 'nın α -kapanışı $\bar{A}^\alpha$, X uzayının tamamını kapsıyorsa (diğer bir deyişle $\bar{A}^\alpha = X$ ise) A kümesi X 'de α -yoğun bir küme olarak adlandırılır.

A, X uzayında yoğun bir küme ise her $x \in X$ için, x 'in her komşuluğunda A kümesine ait en az bir nokta vardır.

Örnek 4.4. $\mathbb{Q}_\alpha = \{\alpha(r) | r \in \mathbb{Q}\}$ α -rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}_\alpha$ uzayında α -yoğun bir kümedir.

İspat: α -rasyonel sayılar, α -reel sayılar ($\mathbb{R}_\alpha$) üzerinde α -yoğun bir küme olduğu gösterilmek istenmektedir. Bu, her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $x \dot{<} y$ için x ile y arasında bir α -rasyonel sayı ($\rho \in \mathbb{Q}_\alpha$) bulunduğu anlamına gelir.

Yoğunluk özelliğini göstermek için şu ifadeyi ispatlayacağız:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha, x \dot{<} y \Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{Q}_\alpha \text{ öyle ki } x \dot{<} \rho \dot{<} y.$$

$x \dot{<} y$ olacak şekilde keyfi $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ alalım. α -sıralamanın tanımından

$$x \dot{<} y \Rightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

yazılır. $\alpha^{-1}(x)$, $\alpha^{-1}(y)$ reel sayıları için $\alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$ ve klasik analizde rasyonel sayılar reel sayılar üzerinde yoğun bir küme olduğundan

$$\alpha^{-1}(x) < r < \alpha^{-1}(y)$$

olacak şekilde $r \in \mathbb{Q}$ vardır. α -sıralamanın tanımından

$$\alpha(\alpha^{-1}(x)) \dot{<} \alpha(r) \dot{<} \alpha(\alpha^{-1}(y))$$

yazılır. $\rho = \alpha(r) \in \mathbb{Q}_\alpha$ için

$$x \dot{<} \rho \dot{<} y$$

elde edilir.

Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $x \dot{<} y$ için $x \dot{<} \rho \dot{<} y$ koşulunu sağlayan bir $\rho \in \mathbb{Q}_\alpha$ olduğundan, $\mathbb{Q}_\alpha, \mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α -yoğun bir kümedir. ■

Tanım 4.16. (X, d_α) bir α -metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$d_\alpha(x, y) \dot{\leq} r$$

olacak şekilde bir $r \dot{>} 0$ α -reel sayısı varsa A kümesine α -sınırlıdır denir. Aksi halde A ya α -sınırsızdır denir. Bu şekildeki r sayılarının en büyük alt sınırına A nın çapı denir ve $\text{çap}(A)$ ile gösterilir.

$$\text{çap}(A) = \inf\{r \geq 0 \mid x, y \in A \text{ için } d_\alpha(x, y) \leq r\}$$

biçiminde yazılır. Uzayın kendisi α -sınırlı ise d_α ya α -sınırlı metrik denir.

4.3. Alfa Diziler ve Özellikleri

Tanım 4.17. (X, d_α) bir α metrik uzayı olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $X \subset \mathbb{R}_\alpha$ kümesine tanımlı bir fonksiyona α -dizisi denir ve her $x_n \in X$ olmak üzere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ile gösterilir (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 4.18. (X, d_α) bir α -metrik uzayı ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda bir α -dizi olsun.

- a) Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N_0$ iken $d_\alpha(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı ve $x \in X$ noktası varsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $(x$ noktasına) α -yakınsaktır denir,
- b) Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N_0$ iken $d_\alpha(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $N_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir α -Cauchy dizisidir denir,
- c) (X, d_α) uzayındaki her α -Cauchy dizisi bu uzaydaki bir $x \in X$ noktasına α -yakınsıyor ise (X, d_α) uzayına tam α -metrik uzay denir (Çakmak ve Başar, 2012).

Teorem 4.1. $\mathbb{R}_\alpha$ tam sıralı cismi üzerinde bir d_α α -metriği tanımlı olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ tam sıralı cismi d_α α -metriğine göre Dedekind tamdır (Çakmak ve Başar, 2012).

İspat: $\mathbb{R}_\alpha$, tam sıralı bir cisimdir. $S \subset \mathbb{R}_\alpha$, üstten sınırlı bir alt küme olsun. S 'nin herhangi bir üst sınırını $x \in \mathbb{R}_\alpha$ alalım, yani

$$s \leq x, \forall s \in S$$

$S \subset \mathbb{R}_\alpha$ olduğundan, $\alpha^{-1}(S) = \{\alpha^{-1}(s) \mid s \in S\} \subset \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz. α -eşitsizliğin tanımından şunu elde ederiz:

$$\alpha^{-1}(s) \leq \alpha^{-1}(x), \forall \alpha^{-1}(s) \in \alpha^{-1}(S)$$

Böylece $\alpha^{-1}(x)$, $\mathbb{R}$ içinde S için bir üst sınırdır. $\mathbb{R}$, Dedekind tam olduğu için, S için bir supremum (en küçük üst sınır) vardır. Bunu r olarak adlandıralım.

$$\alpha^{-1}(s) \leq r, \forall \alpha^{-1}(s) \in \alpha^{-1}(S), r \leq \alpha^{-1}(x)$$

α -eşitsizliğin tanımından, şunu elde ederiz:

$$s \leq \alpha(r), \forall s \in S, \alpha(r) \leq x$$

Böylece $\alpha(r)$, S için bir üst sınırdır ve bu, S 'nin herhangi bir üst sınırından küçük ya da ona eşittir. Dolayısıyla $\alpha(r)$, S 'nin supremumudur. Böylece, $S \subset \mathbb{R}_\alpha$ 'nin üstten sınırlı

herhangi bir alt kümesinin supremumunu bulmuş olduk. Sonuç olarak, R_α , Dedekind tamdır.



5. ALFA ARİTMETİK VE YILDIZ ANALİZ

Tanım 5.1.(α -aritmetik) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha \subset \mathbb{R}$ bir üreteç fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı cisim ise bu cisim, aritmetik veya α -aritmetik olarak adlandırılır (Grossman ve Katz, 1972).

Tanım 5.2.(Yıldız Analiz)

İki keyfi aritmetik α aritmetik= $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve β aritmetik= $(\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ olarak alınsın. $\star$ (yıldız) ise bu iki aritmetiğin $\star = (\alpha \text{ aritmetik}, \beta \text{ aritmetik})$ biçiminde sıralı ikilisi olsun. $\star$ -analizde fonksiyonların tanım kümesi α aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_\alpha$ 'nın bir alt kümesi) ve değer kümesi ise β aritmetikte bir küme ($\mathbb{R}_\beta$ 'nin bir alt kümesi) olarak alınacaktır. Bu bölümde keyfi bir f fonksiyonu

$$f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$$

olarak kabul edilecektir. $\star$ -analizde işlem sembolleri aşağıdaki tabloda verilmiştir (Grossman ve Katz, 1972).

Tablo 1. Yıldız analizde işlem sembolleri

	α -aritmetik	β -aritmetik
Evren	$\mathbb{R}_\alpha$	$\mathbb{R}_\beta$
Toplama işlemi	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma işlemi	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma işlemi	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme işlemi	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

α -aritmetik= $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve β -aritmetik= $(\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ tam sıralı cisim olduklarından birbirlerine izomorftur.

Tek türlü belirli olan $\iota: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ izomorfizması, birebir ve örten fonksiyondur bu fonksiyona iota fonksiyonu denir ve $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki şartları sağlar:

- i) $\iota(x \dot{+} y) = \iota(x) \ddot{+} \iota(y)$,
- ii) $\iota(x \dot{-} y) = \iota(x) \ddot{-} \iota(y)$,
- iii) $\iota(x \dot{\times} y) = \iota(x) \ddot{\times} \iota(y)$,

$$\text{iv)} \iota(x/y) = \iota(x)/\iota(y), y \neq 0,$$

$$\text{v)} x \dot{<} y \Leftrightarrow \iota(x) \dot{<} \iota(y)$$

(Grossman ve Katz, 1972).

Alfa ve beta üreteçlerinin özel seçimleriyle, klasik, geometrik, anageometrik ve bigeometrik analiz türleri aşağıdaki tabloda verilmiştir (Grossman ve Katz, 1972).

Tablo 2. Newtonyen olmayan analizlerde alfa ve beta üreteçleri

Analiz Türü	α	β
Klasik analiz	I	I
Geometrik analiz	I	exp
Anageometrik analiz	exp	I
Bigeometrik analiz	exp	exp

Tanım 5.3. ($\star$ -Limit) Eğer her $\varepsilon \dot{>} 0$ için $0 \dot{<} |x - x_0|_\alpha \dot{<} \delta$ iken $|f(x) - L|_\beta \dot{<} \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta \dot{>} 0$ varsa f fonksiyonunun $x, x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasına yaklaşırken $\star$ -limiti L dir denir ve

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir (Tekin ve Başar, 2013).

Tanım 5.4. Eğer $\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ noktasında

$\star$ -süreklidir denir (Grossman ve Katz, 1972).

Önerme 5.1. $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x, x_0 \in A$ noktasına yaklaşırken aşağıdaki $\star$ -limiti var ve

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$$

ise ve ayrıca $\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(x_0) \in \alpha^{-1}(A)$ noktasına yaklaşırken

$$\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$$

klasik limiti var ise

$$\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x)) = \beta^{-1}(L_2)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\varepsilon > 0$ keyfi bir reel sayı olsun. $\varepsilon_2 = \beta(\varepsilon)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\varepsilon_2 \succ 0$ olur. Ayrıca $\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ olduğundan $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_2)$ vardır öyle ki $0 \prec |x \dot{-} x_0|_\alpha \prec \delta_1$ iken $|f(x) \dot{-} L_2|_\beta \prec \varepsilon_2$ yazılır. Bu ise $0 < |\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)| < \alpha^{-1}(\delta_1)$ iken $|\beta^{-1}(f(x)) - \beta^{-1}(L_2)| < \beta^{-1}(\varepsilon_2) = \varepsilon$ olması demektir. $\delta = \alpha^{-1}(\delta_1)$ seçilirse $0 < |\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)| < \delta$ iken $|(\beta^{-1} \circ f)(x) - \beta^{-1}(L_2)| < \varepsilon$ kalır. Yani

$$\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x)) = \beta^{-1}(L_2)$$

olduğu görülür.

Teorem 5.1. $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x, x_0 \in A$ noktasına yaklaşırken

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$\star$ -limiti ve $\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(x_0) \in \alpha^{-1}(A)$ noktasına yaklaşırken

$$\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x))$$

klasik limiti var ise

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \beta \left[\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x)) \right]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonunun $x, x_0 \in A$ noktasına yaklaşırken $\star$ -limiti var ve bu limit

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$$

olsun. Bu durumda yukarıdaki önermeden

$$\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x)) = \beta^{-1}(L_2)$$

olur. Her iki tarafın β altında görüntüsü alınır

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \beta \left[\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x)) \right]$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 5.5. ($\star$ -Türev) $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki $\star$ limit var ise $x_0 \in A$ noktasında f 'nin $\star$ türevi

$$f^\star(x_0) = \star \lim_{x \rightarrow x_0} \{ [f(x) \ddot{-} f(x_0)] / [\iota(x) \ddot{-} \iota(x_0)] \}$$

olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972).

Teorem 5.2. $f: \mathbb{R}_\alpha \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında $\star$ türevlenebilir ve $(\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)$ bileşke fonksiyonu $\alpha^{-1}(x_0)$ noktasında klasik (Newtonyen) anlamda türevlenebilir ise

$$f^\star(x_0) = [\beta \circ (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)' \circ \alpha^{-1}](x_0)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$g(x) = [f(x) \ddot{-} f(x_0)] / [\iota(x) \ddot{-} \iota(x_0)]$ ve $t = \alpha^{-1}(x) \in \alpha^{-1}(A)$, $t_0 = \alpha^{-1}(x_0) \in \alpha^{-1}(A)$ olarak tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned} f^\star(x_0) &= \star \lim_{x \rightarrow x_0} \{ [f(x) \ddot{-} f(x_0)] / [\iota(x) \ddot{-} \iota(x_0)] \} \\ &= \star \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ &= \beta \left[\lim_{\alpha^{-1}(x) \rightarrow \alpha^{-1}(x_0)} (\beta^{-1} \circ g \circ \alpha) (\alpha^{-1}(x)) \right] \\ &= \beta \left[\lim_{t \rightarrow t_0} (\beta^{-1} \circ g \circ \alpha) (t) \right] \\ &= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \beta^{-1} [g(\alpha(t))] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \beta^{-1} [f(\alpha(t)) \dot{-} f(x_0)] / [\iota(\alpha(t)) \dot{-} \iota(x_0)] \right\} \\
&= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \beta^{-1} [f(\alpha(t)) \dot{-} f(\alpha(t_0))] / [\iota(\alpha(t)) \dot{-} \iota(\alpha(t_0))] \right\} \\
&= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \beta^{-1} [(f \circ \alpha)(t) \dot{-} (f \circ \alpha)(t_0)] / [(\iota \circ \alpha)(t) \dot{-} (\iota \circ \alpha)(t_0)] \right\} \\
&= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} \beta^{-1} [(f \circ \alpha)(t) \dot{-} (f \circ \alpha)(t_0)] / [\beta(t) \dot{-} \beta(t_0)] \right\} \\
&= \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0} [(\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)(t) - (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)(t_0)] / [t - t_0] \right\} \\
&= \beta \{ (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)'(t_0) \} \\
&= \beta \{ (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)'(\alpha^{-1}(x_0)) \} \\
f^*(x_0) &= [\beta \circ (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)' \circ \alpha^{-1}](x_0)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Yıldız İntegral

Tanım 5.6. ($\star$ -Riemann İntegrali):

α ve β üreteçleri verilsin. $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ ilgili vektör uzaylar ve $f: \mathbb{R}_\alpha \supset [a, b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [(\beta^{-1} \circ f)(x_k) \times \alpha^{-1}(x_{k+1} \dot{-} x_k)]$$

limiti varsa f fonksiyonuna $[a, b]_\alpha$ aralığında $\star$ -Riemann integrallenebilirdir denir. Bu durumda

$$\beta \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [(\beta^{-1} \circ f)(x_k) \times \alpha^{-1}(x_{k+1} \dot{-} x_k)] \right]$$

β sayısına f' nin $[a, b]_\alpha$ aralığındaki $\star$ -Riemann integrali denir ve

$$\int_{[a, b]_\alpha}^* f(x) dx = \beta \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [(\beta^{-1} \circ f)(x_k) \times \alpha^{-1}(x_{k+1} \dot{-} x_k)] \right]$$

şeklinde gösterilir.

6. YILDIZ VEKTÖR UZAYLARI

Teorem 6.1. $\mathbb{R}_\beta$ aşağıdaki işlemlerle $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{\times})$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır:

a) Vektör toplamı $\dot{+}$ ile gösterilen β -toplama işlemidir.

b) Skalerle çarpma işlemi: $v \in \mathbb{R}_\beta$ vektörünün $r \in \mathbb{R}_\alpha$ skaler katı

$$(r, v) \mapsto r \cdot v = \beta[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)] = (\beta \circ \alpha^{-1})(r) \ddot{\times} v$$

yazılır.

İspat: $(\mathbb{R}_\beta, \dot{+})$ bir değişmeli gruptur. Bu sebeple skalerle çarpma ile ilgili aksiyomların kanıtlanması ispat için yeterli olacaktır.

Her $r, s \in \mathbb{R}_\alpha$ ve her $u, v \in \mathbb{R}_\beta$ için aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:

i) $s \cdot (r \cdot v) = (s \dot{\times} r) \cdot v$ eşitliği geçerlidir:

$$\begin{aligned} s \cdot (r \cdot v) &= s \cdot \beta[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)] = s \cdot [(\beta \circ \alpha^{-1})(r) \ddot{\times} v] \\ &= (\beta \circ \alpha^{-1})(s) \ddot{\times} \{(\beta \circ \alpha^{-1})(r) \ddot{\times} v\} \\ &= \beta\{\alpha^{-1}(s) \times \alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)\} \\ &= \beta\{\alpha^{-1}(s \dot{\times} r) \times \beta^{-1}(v)\} \\ s \cdot (r \cdot v) &= (s \dot{\times} r) \cdot v \end{aligned}$$

ii) $\dot{1} \in \mathbb{R}_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ cisminde α -çarpmanın birim elemanı olmak üzere $\dot{1} \cdot v = v$ dir. Çünkü

$$\dot{1} \cdot v = \beta[\alpha^{-1}(\dot{1}) \times \beta^{-1}(v)] = \beta[1 \times \beta^{-1}(v)] = \beta[\beta^{-1}(v)] = v$$

yazılır.

iii) $r \cdot (u \dot{+} v) = (r \cdot u) \dot{+} (r \cdot v)$ eşitliği geçerlidir:

$$\begin{aligned} r \cdot (u \dot{+} v) &= \beta[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(u \dot{+} v)] \\ &= \beta\{\alpha^{-1}(r) \times [\beta^{-1}(u) + \beta^{-1}(v)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta\{[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(u)] + [\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)]\} \\
&= \beta[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(u)] \dot{+} \beta[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)] \\
r \cdot (u \dot{+} v) &= (r \cdot u) \dot{+} (r \cdot v)
\end{aligned}$$

iv) $(r \dot{+} s) \cdot v = (r \cdot v) \dot{+} (s \cdot v)$ eşitliği geçerlidir. Çünkü

$$\begin{aligned}
(r \dot{+} s) \cdot v &= \beta[\alpha^{-1}(r \dot{+} s) \times \beta^{-1}(v)] \\
&= \beta\{[\alpha^{-1}(r) + \alpha^{-1}(s)] \times \beta^{-1}(v)\} \\
&= \beta\{[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)] + [\alpha^{-1}(s) \times \beta^{-1}(v)]\} \\
&= \beta[\alpha^{-1}(r) \times \beta^{-1}(v)] \dot{+} \beta[\alpha^{-1}(s) \times \beta^{-1}(v)] \\
(r \dot{+} s) \cdot v &= (r \cdot v) \dot{+} (s \cdot v)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Tanım 6.1. $\star = (\alpha \text{ aritmetik}, \beta \text{ aritmetik})$ olsun. $\mathbb{R}_\beta$ kümesinin $\dot{+}, \beta$ vektör toplama işlemi ve $\cdot$, skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{\times})$ oluşturduğu vektör uzayına $\star$ -vektör uzayı denir.

Tanım 6.2. (α -normlu uzay)

$X, \mathbb{R}_\alpha$ üzerinde bir α -metrik uzay olsun. Şayet $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\|\cdot\|_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise $\|\cdot\|_\alpha$ ifadesine X üzerinde bir α -norm denir ve $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ ikilisine de α -normlu uzay denir (Çakmak ve Başar, 2012).

i) $\|x\|_\alpha = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{0}$

ii) $\|\lambda \dot{\times} x\|_\alpha = |\lambda|_\alpha \dot{\times} \|x\|_\alpha$

iii) $\|x \dot{+} y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \dot{+} \|y\|_\alpha$

Burada X üzerinde her $\|\cdot\|_\alpha$, α -normun $x, y \in X$ olmak üzere

$$d_\alpha(x, y) = \|x \dot{-} y\|_\alpha,$$

eşitliğiyle X kümesi üzerinde bir d_α , α -metriğini ürettiği kolayca görülür (Çakmak ve Başar, 2012).

Tanım 6.3. (α -Banach uzayı)

Bir $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ α -normlu uzayındaki her α -Cauchy dizisinin X kümesinde bir limiti varsa (yakınsak ise) bu $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ α -normlu uzayına α -Banach uzayı (tam α -normlu uzay) denir.

$(X, \|\cdot\|_\alpha)$ α -normlu uzayının tamlığını veya α -Banach uzayı olduğunu ispatlamak için X kümesinde keyfi bir (x_n) α -Cauchy dizisinin X kümesinde α -yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda şayet, $d_\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$, $\|\cdot\|_\alpha$ normunun indirgediği bir α -metrik ve (X, d_α) α -metrik uzayı tam ise $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ α -normlu uzayının bir α -Banach uzayı olduğu açıktır.

$\star$ -Lineer Operatörler

Tanım 6.4. $\mathbb{R}_\alpha$, $\mathbb{R}_\beta$ iki tane α -normlu vektör uzayı ve $\star = (\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ sıralı ikilisi olsun. $T: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ dönüşümüne $\mathbb{R}_\alpha$ 'dan $\mathbb{R}_\beta$ 'ya bir $\star$ -operatör denir.

Tanım 6.5. $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ aynı $\mathbb{R}_\gamma$ cismi üzerine tanımlı iki tane α -normlu vektör uzayı, $\star = (\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ sıralı ikilisi ve $T: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ bir $\star$ -operatör olsun. Eğer $\forall x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}_\gamma$ için

$$T(a \cdot x \dot{+} b \cdot y) = a \cdot T(x) \dot{+} b \cdot T(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa $T: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ $\star$ -operatörüne $\mathbb{R}_\alpha$ 'dan $\mathbb{R}_\beta$ 'ya bir $\star$ -lineer operatör denir.

$\star$ -Türev Operatörü

Gösterim 6.1. $C_\beta[a, b]_\alpha$ ile $[a, b]_\alpha$ kapalı aralığından $\mathbb{R}_\beta$ 'ya tanımlı $\star$ -sürekli fonksiyonlar kümesini gösterelim.

Gösterim 6.2. $C_\beta^{(r)}[a, b]_\alpha$ ile $[a, b]_\alpha$ üzerinde r . mertebeden $\star$ -sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesini gösterelim. Burada $r \geq 1$ bir doğal sayıdır.

Teorem 6.2. $\mathbb{R}_\alpha$, $\mathbb{R}_\beta$ iki tane α -normlu vektör uzayı ve $\star = (\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ sıralı ikilisi olsun.

$C_\beta[a, b]_\alpha$ kümesi $\mathbb{R}_\beta$ cismi üzerinde

i) $(f \dot{+} g)(t) = f(t) \dot{+} g(t),$

ii) $(c \cdot f)(t) = c \ddot{\times} f(t), t \in [a, b]_\alpha, c \in \mathbb{R}_\beta$

işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzay $(C_\beta[a, b]_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ ile gösterilir.

İspat:

i. $f \dot{+} g = g \dot{+} f$

ii. $f \dot{+} (g \dot{+} h) = (f \dot{+} g) \dot{+} h$

iii. $0_\beta(t) = \ddot{0}$ fonksiyonu $f \dot{+} 0_\beta = f$ özelliğini sağlayan tek fonksiyondur.

iv. Keyfi $f \in V$ için $\ddot{f} = 0_\beta \ddot{f}$ ile tanımlı fonksiyon $f \ddot{+} (\ddot{f}) = 0_\beta$ eşitliğini sağlayan V ' ye ait tek fonksiyondur.

v. $1_\beta(t) = \dot{1}$ olmak üzere her $f \in V$ için $1_\beta \ddot{\times} f = f$ eşitliği geçerlidir.

vi. $a \cdot (f \ddot{+} g) = (a \cdot f) \ddot{+} (a \cdot g)$

vii. $(a \ddot{+} b) \cdot f = (a \cdot f) \ddot{+} (b \cdot f)$

viii. $(a \ddot{\times} b) \cdot f = a \ddot{\times} (b \cdot f)$

Teorem 6.3. $\mathbb{R}_\beta$ cismi üzerinde tanımlı $C_\beta[a, b]_\alpha$ vektör uzayı

$$\|f\|_{C_\beta[a, b]_\alpha} = \max\{|f(t)|_\beta : t \in [a, b]_\alpha\}$$

α -normu ile bir α -normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzay $(C_\beta[a, b]_\alpha, \|\cdot\|_{C_\beta[a, b]_\alpha})$ ile gösterilir.

Teorem 6.4. $\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta$ iki tane α -normlu vektör uzayı ve $\star = (\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ sıralı ikilisi olsun.

$C_\beta^{*(r)}[a, b]_\alpha$ kümesi $\mathbb{R}_\beta$ cismi üzerinde

i) $(f \ddot{+} g)(t) = f(t) \ddot{+} g(t),$

ii) $(a \cdot f)(t) = a \ddot{\times} f(t), t \in [a, b], a \in \mathbb{R}_\beta$

işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzay $(C_\beta^{*(r)}[a, b]_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ ile gösterilir.

Tanım 6.6. $x_i \in \mathbb{R}_\alpha, 0 \leq i \leq n$ olmak üzere α -toplam operatörü

$$\sum_{0 \leq i \leq n}^\alpha x_i = x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \cdots \dot{+} x_n$$

ile tanımlanır.

Tanım 6.7. $y_i \in \mathbb{R}_\beta, 0 \leq i \leq n$ olmak üzere β -toplam operatörü

$$\sum_{0 \leq i \leq n}^\beta y_i = y_1 \ddot{+} y_2 \ddot{+} \cdots \ddot{+} y_n$$

ile tanımlanır.

Teorem 6.5. $\mathbb{R}_\beta$ cismi üzerinde tanımlı $C_\beta^{*(r)}[a, b]_\alpha$ vektör uzayı,

$$\|f\|_{C_\beta^{*(r)}[a,b]_\alpha} = \sum_{0 \leq i \leq r}^\beta \|f^{*(i)}\|_{C_\beta^{*(r)}[a,b]_\alpha}$$

şeklindeki β -normu ile bir β -normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzay

$$\left(C_\beta^{*(r)}[a,b]_\alpha, \|\cdot\|_{C_\beta^{*(r)}[a,b]_\alpha} \right)$$

ile gösterilir.

Tanım 6.8. $A: D(A) = \left(C_\beta^*[a,b]_\alpha, \|\cdot\|_{C_\beta^*[a,b]_\alpha} \right) \rightarrow \left(C_\beta[a,b]_\alpha, \|\cdot\|_{C_\beta[a,b]_\alpha} \right)$ tanımlı

$$Af(t) = f^*(t), t \in [a,b]_\alpha$$

operatörüne $\star$ -türev operatörü denir.

Yukarıda tanımı verilen $\star$ -türev operatörü lineerdir (doğrusaldır) fakat sınırlı bir operatör değildir.

Yıldız İntegral Operatörleri

Gösterim 6.3. $\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha$ ile $[a,b]_\alpha$ aralığında $\star$ -Riemann integrallenebilir fonksiyonlar kümesini gösterelim.

Teorem 6.6. $\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta$ iki tane α -normlu vektör uzayı ve $\star = (\mathbb{R}_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ sıralı ikilisi olsun.

$\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha$ kümesi $\mathbb{R}_\beta$ cismi üzerinde

$$\text{iii) } (f \ddot{+} g)(t) = f(t) \ddot{+} g(t),$$

$$\text{iv) } (c \cdot f)(t) = c \ddot{\times} f(t), t \in [a,b]_\alpha, c \in \mathbb{R}_\beta$$

işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzay $(\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha, \mathbb{R}_\beta)$ ile gösterilir.

Teorem 6.7. $\mathbb{R}_\beta$ cismi üzerinde tanımlı $\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha$ vektör uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha} = \int_{[a,b]_\alpha}^* |f(x)|_\beta dx$$

α -normu ile bir α -normlu vektör uzayı oluşturur. Bu uzay $(\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{R}_\beta[a,b]_\alpha})$ ile gösterilir.

Tanım 6.9. $\mathcal{J}: \mathcal{R}_*[a, b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ tanımlı

$$\mathcal{J}_{[a,b]}f(x) = \int_{[a,b]_\alpha}^* f(t)dt$$

operatörüne $\star$ -Fredholm integral operatörü denir.

Tanım 6.10. $x \in [a, b]$ olmak üzere $K: \mathcal{R}_*[a, b]_\alpha \rightarrow \mathcal{R}_*[a, b]_\alpha$ tanımlı

$$Kf(x) = \int_{[a,x]_\alpha}^* f(t)dt$$

operatörüne $\star$ -Volterra integral operatörü denir.

7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, Newtonyen olmayan analizde cebirsel ve topolojik kavramların temelini oluşturan bazı tanım, teorem ve özellikler, kapsamlı bir literatür taraması eşliğinde sunulmuştur. Konuyla ilgili mevcut çalışmaların büyük bir kısmı incelenmiş ve elde edilen bulgular derleyici nitelikte sistematik bir biçimde bir araya getirilmiştir.

Bu çalışma, Newtonyen olmayan analizde cebirsel ve topolojik yapıları incelemeyi amaçlamaktadır. Klasik (Newtonyen) analizde olduğu gibi, Newtonyen olmayan analizde de cebirsel ve topolojik yapıların temellerini oluşturan bazı tanım, teorem ve özellikler sunulmuştur. Literatür taraması bölümünde, hem Newtonyen analizde hem de Newtonyen olmayan analizde yer alan bazı anahtar kavramlar ve teoremler ele alınmış, özellikle alfa işlemleri üzerine yapılan çalışmalar verilmiştir. Ardından, Newtonyen olmayan analizdeki cebirsel yapılar incelenerek, alfa reel sayılar üzerinde tanımlı grup ve cisim yapıları ele alınmış ve bu yapıların vektör uzayı oluşturma kapasitesi araştırılmıştır. Çalışmanın devamında, Newtonyen olmayan topolojik yapılar üzerine yoğunlaşmış, alfa aralıklar, alfa mutlak değer ve alfa metrik uzay kavramları formel bir şekilde tanımlanmış ve bu yapıların temel özellikleri analiz edilmiştir. Böylelikle, Newtonyen olmayan analizdeki cebirsel ve topolojik altyapının klasik analizdeki cebirsel ve topolojik altyapı ile uyumlu olduğu gözlemlenmiştir.

KAYNAKÇA

- Altın, A. (2011). *Fourier analizi*. Gazi Kitabevi.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of mathematical analysis and applications*, 337(1), 36-48.
- Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. ve Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26(4), 425-438.
- Binbaşıoğlu, D., Demiriz, S. ve Türkoğlu, D. (2016). Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 18, 213-224.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018a). G-calculus. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 8(1), 94-105.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018b). Bigeometric integral calculus. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 8(2), 374-385.
- Boruah, K., Hazarika, B. ve Bashirov, A. E. (2018). Solvability of bigeometric differential equations by numerical methods. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 39(2), 203-222.
- Campbell, D. (1999). Multiplicative calculus and student projects. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 327-332.
- Córdova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics. *TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica*, 2(3).
- Cordova-Lepe, F., Robledo, G. ve Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. *Journal of Biological Systems*, 23(supp01), 135-149.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-17.
- Çevik, C., & Özek, Ç. C. (2016). Completion of Multiplicative Metric Spaces. *Gazi University Journal of Science*, 29(3).
- Demir S. (2019). *Reel sayılarda Newtonyen olmayan Lebesgue ölçüsünün bazı özellikleri. Yüksek lisans tezi, Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (575462).*
- Duyar, C., Sagır, B. ve Ogur, O. (2015). Some basic topological properties on non-Newtonian real line. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 9(4), 300-307.

- Duyar, C. ve Oğur, O. (2017). A note on topology of non-Newtonian real numbers. *Journal of Mathematics*, 13(6), 11-14.
- Duyar, C. ve Sağır, B. (2017). Non-Newtonian Comment of Lebesgue Measure in Real Numbers. *Journal of Mathematics*, 2017(1), 6507013.
- Erdoğan F. (2016). *Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizileri ve serileri. Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (775511).*
- Erdoğan M. (2016). *Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller. Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (437950).*
- Filip, D. A. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth.
- Florack, L. ve van Assen, H. (2012). Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA
- Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10(4), 525-528.
- Grossman, M. (1983). *Bigeometric calculus: a system with a scale-free derivative*. Archimedes Foundation.
- Gürefe, Y. (2009). *Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.*
- Kadak, U., & Efe, H. (2014). The Construction of Hilbert Spaces over the Non-Newtonian Field. *International Journal of Analysis*, 2014(1), 746059.
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2015). Hindawi.
- Kadioğlu E. ve Kamali, M., (2013). *Genel Matematik*. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye.
- Karaçay, T. (2014). *Soyut matematik: akıl yürütmenin başlangıcı*. Seçkin
- Kasprzak, W., Lysik, B. ve Rybaczuk, M. (2004). Measurements, dimensions, invariant models and fractals. *Ukrainian Society on Fracture Mechanics*, SPOLOM, Wroclaw-Lviv, Poland.
- Kirisci, M. U. R. A. T. (2017). Topological structures of non-Newtonian metric spaces. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 5(2), 156-169.
- Misirli, E. ve Gürefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57(4), 425-439.

- Misirli, E. ve Ozyapici, A. (2009). Exponential approximations on multiplicative calculus. *In Proc. Jangjeon Math. Soc.* 12(2), 227-236.
- Özavşar, M. (2017). Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces. *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 2(2), 65-79.
- Rybaczuk, M. ve Stoppel, P. (2000). The fractal growth of fatigue defects in materials. *International Journal of Fracture*, 103(1), 71-94.
- Rybaczuk, M. ve Cetera, A. (2001). Non-homogeneous fractal growth of fatigue defects in materials. *SAE Technical Paper* (No. 2001-01-4057).
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Tekin, S. ve Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013, No. 1, p. 739319). Hindawi Publishing Corporation.
- Turan, B., & Çevik, C. (2017). A Note on The Equivalence of Some Metric and Non-Newtonian Metric Results. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 7, 56-58.
- Türkmen, C. (2011). *Some new sequence spaces with multiplicative calculus (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü)*.
- Turkmen, C., ve Basar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 1, 17-34.
- Türkmen, C. ve Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, 18-21 Ekim 2012, Gümüşhane.

ÖZGEÇMİŞ

İlköğretim ve liseyi Ayancıkta okudu. Liseyi Ayancık Atatürk Anadolu lisesinde 2009 yılında tamamladı. 2014 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2016 yılından itibaren de Milli Eğitim Bakanlığına Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı.

