

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNA TEORİSİ VE DİNAMİĞİ BİLİM DALI**

**NEWTONYEN OLMAYAN CROSS AKIŞKANININ SINIR
TABAKASI İÇERİSİNDEKİ DAVRANIŞININ İNCELENMESİ**

Hikmet SÜMER

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY**



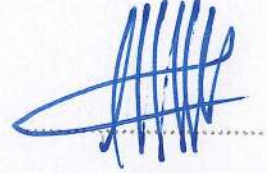
MANİSA-2019

TEZ ONAYI

Hikmet SÜMER tarafından hazırlanan "Newtonyen Olmayan Cross Akışkanının Sınır Tabakası İçerisindeki Davranışının İncelenmesi" adlı tez çalışması 26.08.2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Mehmet ÇEVİK
İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesi



Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Ali YURDDAŞ
Manisa Celal Bayar Üniversitesi



TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Hikmet SÜMER



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
1.GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	10
2.1. Literatür Özeti	10
2.1.1 Tezin Amacı.....	14
2.2. Problemin Tanımı.....	15
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	18
3.1 Momentumun Korunumu	18
3.2 Sınır Tabakası Yaklaşımı	20
3.3 Denklemlerin Simetrileri ve Adi Diferansiyel Denklemlere İndirgeme	26
3.4 Sınır Tabakası Denklemlerinin Sayısal Çözümleri	32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	35
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR	46
EKLER (Matlab Programı)	48
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

μ	Newtonyen Viskozite
GNA	Genelleştirilmiş Newtonyen Akışkan
τ	Kayma Gerilmesi Tensörü
μ_0, μ_∞	Başlangıç ve limit viskozite
$\dot{\gamma}$	Deformasyon hız tensörü
η	GNA için viskozite ya da zaman sabiti
n	power-law indeksi
U_∞	Uniform akışkan hızı
$\delta^*(x^*)$	Sınır tabakası kalınlığı
$\mathbf{u}$	Hız vektörü
P	Basınç
x^*, y^*	Kartezyen koordinat bileşenleri
u^*, v^*	Hız vektörünün bileşenleri
ρ	Yoğunluk
L	Plaka uzunluğu
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	Boyutsuz GNA parametreleri
k_1, k_2, k_3	Boyutsuz ölçeklendirilmiş GNA parametreleri
a, b, c, d, e	Ölçekleme parametreleri
β	Ölçekleme dönüşüm parametresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Paralel Plakalar arasında Akış	2
Şekil 1.2. İncelen ve kabaran akış grafikleri	4
Şekil 1.3. İncelen bir GNA' nın viskozitesinin deformasyon hızı ile değişimi ..	7
Şekil 2.1. Cross modelinin görünür viskozite ve deformasyon hızı ilişkisi.....	13
Şekil 2.2. Plaka üzerinde akış ve sınır tabakasının temsili gösterimi	15
Şekil 4.1. Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı k_1 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$)	35
Şekil 4.2. Benzerlik fonksiyonu g' nin farklı k_1 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$).....	36
Şekil 4.3. Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı k_2 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$).....	36
Şekil 4.4. Benzerlik fonksiyonu g' nin farklı k_2 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$).....	37
Şekil 4.5. Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı k_3 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $n = 1,5$).....	38
Şekil 4.6. Benzerlik fonksiyonu g 'nin farklı k_3 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $n = 1,5$).....	39
Şekil 4.7. Benzerlik fonksiyonu f' nin benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişiminin, farklı power-law indeksi n değerlerinde gösterimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $k_3 = 10$)	39
Şekil 4.8. Benzerlik fonksiyonu g' nin benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişiminin, farklı power-law indeksi n değerlerinde gösterimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $k_3 = 10$)	40
Şekil 4.9. Kayma gerilmesinin farklı k_1 değerleri ile değişimi. ($k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$).....	41
Şekil 4.10. Kayma gerilmesinin farklı k_2 değerleri ile değişimi. ($k_1 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$).....	41
Şekil 4.11. Kayma gerilmesinin farklı k_3 değerleri ile değişimi. ($k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $n = 1,5$).....	42
Şekil 4.12. Kayma gerilmesinin farklı power-law indeksi n değerleri ile değişimi. ($k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$).....	42

TEŞEKKÜR

Öncelikle Lisansüstü eğitimimin her aşamasında hem bilimsel ve hem de manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY' a, her zaman yanımda olan sevgili babam M. Fatih SÜMER, annem Sacide SÜMER, kardeşlerim M. Enes SÜMER ve Büşra EKER' e, son olarak yardımlarından ötürü saygıdeğer dostlarım Mustafa ARSLANTAŞ ve Coşkun KOÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Hikmet SÜMER
Manisa, 2019



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Newtonyen Olmayan Cross Akışkanının Sınır Tabakası İçerisindeki Davranışının İncelenmesi

Hikmet SÜMER

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yiğit AKSOY

Bu çalışmada Newtonyen olmayan bir akışkanın plaka üzerindeki akışında sınır tabakası davranışı incelenmiştir. Newtonyen olmayan akışkan Cross akışkan formülü ile modellenmiş olup, fiziksel problemimize uygun olarak seçilen kartezyen koordinatlarda momentum denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra plaka üzerinde Newtonyen olmayan bu sürtünmeli akışı tanımlayan momentum denklemlerine sınır tabakası yaklaşımı uygulanmıştır. Elde edilen bu kısmi diferansiyel momentum denklemleri, söz konusu sınır tabakası kabulü ile basitleştirilmiştir. Kabuller sonrası momentum denklemlerinin yerine geçecek sınır tabakası denklemleri yeni değişkenler vasıtasıyla boyutsuzlaştırılmıştır. Cross akışkan formülüne özgü olan bu orijinal sınır tabakası denklemlerinin simetrileri ölçekleme dönüşüm formülleri ile bulunmuştur. Bulunan simetriler vasıtası ile kısmi diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel eşdeğer denklemleri elde edilmiştir. Nihai adi diferansiyel denklemlere bir sayısal çözücü uygulanmış ve elde edilen sayısal verilerle çizilen grafiklerden Cross akışkan parametrelerinin akışkan davranışı üzerindeki etkileri yorumlanmıştır. Sonuç olarak akışkanın viskozite sabitlerinin Newtonyen viskozite ile benzer etkiler gösterdiği, diğer sabitlerinin ise bir diğer Newtonyen olmayan akışkan modeli olan power-law formülü ile benzerlikler taşıdığı saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler: (Newtonyen olmayan akışkan, sınır tabakası teorisi, Cross akışkan modeli, benzerlik çözümleri, sayısal çözümler)

2019, 49 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Boundary Layer Approach for a non-Newtonian Cross Fluid

Hikmet SÜMER

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mechanical Engineering**

Supervisor: Assist. Prof. Yiğit AKSOY

In this study, the behavior of a non-Newtonian fluid within the boundary layer is analysed. Non-Newtonian fluid is modeled with Cross fluid formula and momentum equations are obtained in selected cartesian coordinates according to our physical problem. Then, boundary layer approach is applied to momentum equations which define this non-Newtonian frictional flow on the plate. The resulting partial differential momentum equations are simplified by the adoption of the boundary layer. The boundary layer equations, which will replace the momentum equations after the assumptions, were dimensioned by means of new variables. The symmetries of these original boundary layer equations, which are specific to the Cross fluid formula, were found by scaling transformation formulas. Ordinary differential equivalent equations of partial differential equations were obtained by means of the symmetries. A numerical solver was applied to the final ordinary differential equations and the effects of Cross fluid parameters on the fluid behavior were interpreted from the graphics which drawn with the obtained numerical data. As a result, viscosity constants of the fluid have similar effects with Newtonian viscosity, while other constants have similarities with the power-law formula which is another non-Newtonian fluid model.

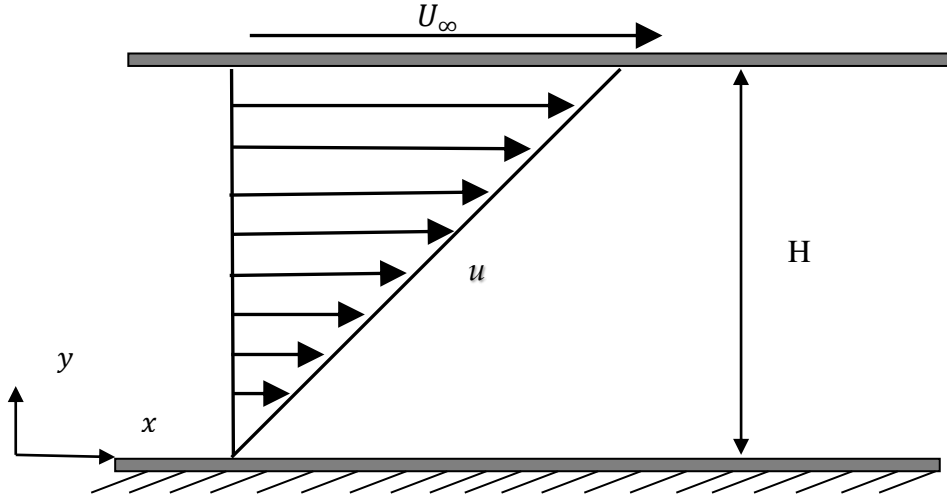
Keywords: (non-Newtonian fluid, boundary layer theory, Cross fluid model, symmetry solution, numeric solution)

2019, 49 pages

1.GİRİŞ

Katı cisimler bir dış kuvvet etkisi altında şekil değiştirebilirken, kuvvet ortadan kalktığı zaman çok kısa sürede ilk haline dönerler (elastik deformasyon) ya da şekil değiştirmiş son haline yakın bir durumu korur (plastik deformasyon). Kısaca katı cisimler şekil değişimine neden olan etkiler ortadan kalktığında, kısa sürede nihai bir şekle kavuşurken, bir akışkanın şekil değiştirmesine neden olan etkiler ortadan kalksa bile akışkan şekil değiştirmeyi sürdürür. Bu gözlemden yola çıkarak bir kuvvet etkisi altında sürekli şekil değiştiren cisimlere akışkan denebilir. Ancak, bu akışkan tanımının akışkanlar mekaniğinin gelişmesi ile eksik veya kısıtlayıcı olduğu araştırmacılar tarafından fark edilmiş ve “akma davranışı” gösteren klasik tanıma uymayan katı veya akışkan cisimler için reoloji [1] yani “akışın bilimi” geliştirilmiştir. Bundan dolayı çoğunlukla katılar ve akışkanlar arasındaki çizgi kesin olmamakla beraber, katı bir cisim olduğu halde akışkan davranışı gösteren veya akışkan olup da bazı özel durumlarda katı cisim haline dönüşen cisimler gözlemlenebilir. Bu durum sıcaklık değişiminden dolayı gerçekleşen faz dönüşümlerinden farklıdır. Örneğin bir diş macunu, tüp içerisinde ya da diş fırçasının üzerinde katı cisim halindeyken, tüp sıkıldığında ya da fırçalarken akışkan hale gelir.

Bir nehirde akan su gibi sürekli akma davranışı gösteren maddeler Isaac Newton tarafından doğrusal kayma gerilmesi-deformasyon hızı ilişkisi ile sistematik bir şekilde ilk olarak tanımlanmıştır. Bu tanıma uyan maddelere Newtonyen akışkan denmekle birlikte, akışkana uygulanan kuvvet akışkan içerisinde kayma gerilmelerine neden olur ve bu kayma gerilmelerinin büyüklüğü ile doğru orantılı olacak hızda akışkan deforme olur. Newtonyen akış aslında aralarında sürtünme bulunan çok ince üst üste binmiş akışkan plakalarının göreceli hareketinden oluşur. Bir plakayı hareket ettiren kayma gerilmesi plakalar arası sürtünmeleri ile diğer paralel plakalara aktarılır. Plakaların hızındaki değişim doğrusaldır veya başka bir deyişle plaka başına hız değişimi sabittir.



Şekil 1.1. Paralel Plakalar arasında Akış.

Söz konusu akışa örnek Şekil (1.1.)’ de betimlenen paralel plaka akışı verilebilir. Birbirlerinden H kadar uzaklıkta sonsuz uzunluktaki plakalar arasındaki hareketsiz Newtonyen akışkan üst plakanın U hızıyla çekilmesi ile hareket ettiriliyor. Kaymama koşuluna göre akışkan katı cismin hızını alır; bu yüzden alt plakada hız sıfırken üst plakada akışkan hızı U ’ dur. Üst plakaya Newtonyen akışkan tarafından uygulanan kayma gerilmesi aşağıdaki şekilde doğrusal kayma gerilmesi deformasyon hızı ilişkisi ile bulunabilir.

$$\tau_{yx} = \mu \left|_{y=H} \frac{U}{H} \right. \quad (1.1)$$

Burada μ orantı sabiti ya da akışkanın akmaya gösterdiği direnç olan viskozitedir. Herhangi bir y yüksekliğindeki akışkan plakasına etki eden kayma gerilmesi için plakanın hızlarının y koordinatına göre değişimi bilinmelidir; ya da diğer bir ifade ile;

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

kayma gerilmesi formülüne akışkan hız profili $u = u(y)$ yerleştirilerek hesaplanabilir. Newton’ un ikinci yasası, çok küçük bir akışkan prizması için üzerine etki eden kayma gerilmeleri dikkate alınarak oluşturulduğunda aşağıdaki eşitliği verir.

$$\frac{d}{dy}\tau_{yx} = 0 \quad (1.3)$$

Bu ifadeyi Denklem (1.2)' ye yerleştirilip iki kez integral alınıp kaymama koşulları $u(H) = U$ ve $u(0) = 0$ uygulanırsa;

$$u(y) = \frac{U}{h} y \quad (1.4)$$

Doğrusal hız profili elde edilir. Dikkat edilirse hız profili plakalar arasında doğrusal değişmekte ve bütün akışkan plakalarına aynı kayma gerilmesi etki etmektedir. Bu sonuç matematiksel olarak bakıldığında viskozitenin sabit olmasının bir sonucudur. Sabit viskozite durumu deneysel sonuçlarla da uyumlu olacak şekilde doğrusal değişen bir hız profiline yol açmıştır. [2]

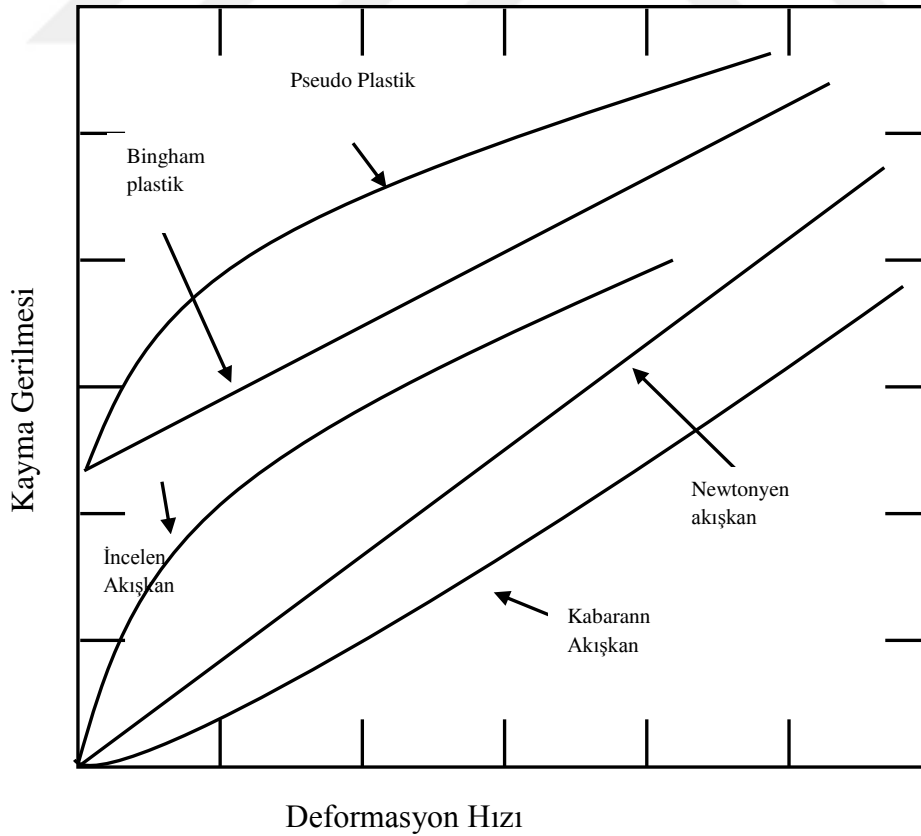
Doğada gözlemlenen her akışkan yukarıdaki Newtonyen davranışa uymamaktadır. Bu davranışa uymayan akışkanlara Newtonyen olmayan (non-Newtonyen) akışkan denir. Newtonyen akışkanlar, doğrusal kayma gerilmesi deformasyon hızı ilişkisi ile tanımlanırken, Newtonyen olmayan akışkanların tümü için tek bir özellik belirlemek mümkün değildir. Bu çalışma kapsamında incelenecek olan akışkan tipi non-Newtonyen özelliğini doğrusal olmayan kayma gerilmesi deformasyon hızı ilişkisine borçlu olduğu için viskozitenin sabit değil, deformasyon hızına bağlı olduğu ‘genelleştirilmiş Newtonyen akışkan’ (GNA) modelleri üzerinde durulacaktır. Kısaca viskozite;

$$\mu = \mu\left(\frac{du}{dy}\right) \quad (1.5)$$

deformasyon hız gradyeninin fonksiyonu olacak şekilde örnekte verdiğimiz tek boyutlu bir problem için yazılabilir. Dikkat edilirse bu viskozite eşitliğini Denklem (1.2) ve ardından Denklem (1.3)' de kullanıp hız profillerine ulaşmamız için,

viskozitenin hız gradyenine bağı açık halini bilmemiz gerekir. Newtonyen akışkanın doğrusal ilişkisinin aksine Newtonyen olmayan akışkanlarda doğrusal olmayan viskozite ve hız gradyeni ilişkisi bulunacağı aşikârdır. Matematiksel olarak doğrusal bir ilişkinin matematiksel formu tek iken doğrusal olmayan ilişkilerde böyle bir şey söz konusu olmamakla birlikte sayısız seçenek bulunmaktadır. Aynı durum Newtonyen olmayan akışkan ilişkileri içinde geçerlidir. Bu zamana kadar farklı tipteki Newtonyen olmayan akışkan davranışları için deneysel gözlemler sonucu farklı matematiksel modeller geliştirilmiştir.

Genelleştirilmiş Newtonyen akışkanlardan bahsedildiği zaman, viskozitenin deformasyon hızına ya da başka bir deyişle hız gradyenine bağı olduğu daha önce bahsedilmişti. Dolayısıyla Newtonyen olmayan akışkanlarda viskozite sabit olmak yerine hız gradyenine bağı olarak bir şekilde artacak ya da azalacaktır. Bu bahsedilen viskozitenin hız gradyenine bağılığı, genelleştirilmiş Newtonyen akışkanları birbirlerinden ayıran özelliğidir.

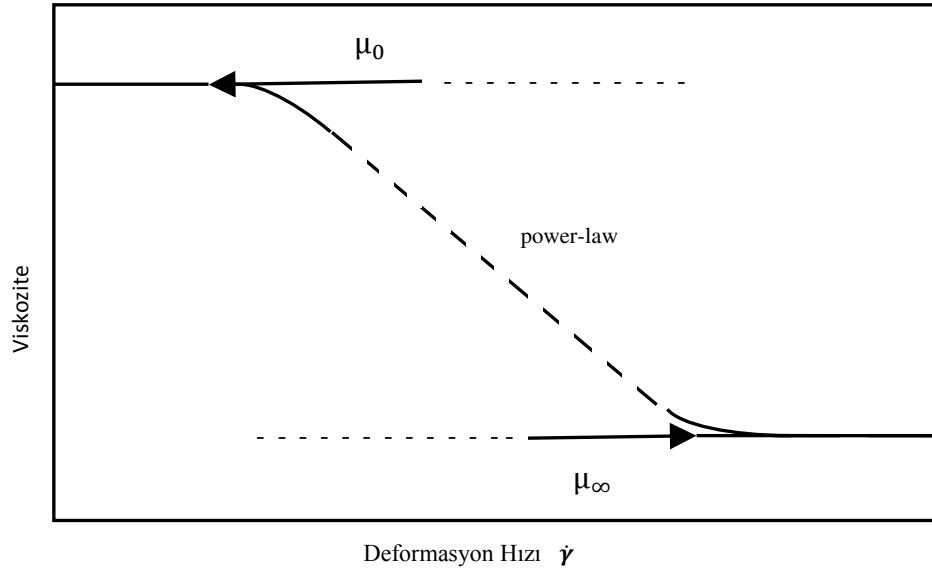


Şekil 1.2. İncelen ve kabaran akış grafikleri.

Şekil (1.2)' de farklı Newtonyen olmayan akışkanların kayma gerilmesi hız gradyeni ilişkisi verilmiştir. Artan deformasyon hızı (hız gradyeni) ile daha akıcı yani daha kolay akabilen akışkanlara incelen (shear thinning) akışkan denir. Diş macunu, her türlü endüstriyel boyalar, ketçap, mayonez gibi gıda ürünleri ve biyolojik sıvılar bu kategori altında değerlendirilebilir. Tam tersi şekilde artan hız gradyeni ile akışı zorlaşan ve hatta katı hale yakın formlara ulaşan akışkanlara ise kabaran (shear thickening) akışkan denir. Yüksek hızlarda karıştırma sonucu hamur kıvamına gelen mısır nişastası unu ve su karışımı bu akışkanlar sınıfına dahil edilebilir. Hamur üzerindeki karıştırma ya da yoğurma işlemi ortadan kalktığında kendi ağırlığının etkisi ile tekrar akışkan hale geleceğini ayrıca söylenmelidir. İncelen ve kabaran akışkanlarda farklı olarak da akma davranışı için yenilmesi gereken bir ön gerilme değerine ihtiyaç duyan akışkanlara Bingham plastik akışkanı denir. Bu gerilme değerinden önce akışkan katı haldedir. Daha büyük gerilmelerde ise madde sabit bir viskozite ile akar. Kıl süspansiyonları ve sondaj çamuru gibi toprak-su karışımları bu davranışı gösterir. Ancak incelen, kabaran ve Bingham plastiği arasında iç içe geçmiş özelliklere sahip akışkanlar da bulunur. Örneğin daha önce bahsettiğimiz diş macunu, ketçap ve mayonez gibi maddeler her ne kadar incelen akışkan kategorisine girse de Bingham plastik gibi akmak için yenmesi gereken bir ön gerilmeye ihtiyaç duyarlar. Bu sayede diş macunu fırçanın üzerinde katı halde durabilmekte ve ketçap, mayonez gibi maddeler de sıkılmadan kendi ağırlığı ile tüpünden dışarı çıkamamaktadır. Akma gerilmesi geçildikten sonra incelen akışkan davranışına sahip bu akışkanlara Bingham psödoplastik akışkanı denir. Bu özelliklerin matematiksel olarak açıklanabildiği genelleştirilmiş Newtonyen akışkan modellerine geçmeden önce kayma gerilmesi-deformasyon hızı ilişkisinin ötesinde özelliklere sahip Newtonyen olmayan akışkanlardan da bahsedilmelidir. Kayma gerilmesi altında viskozitenin zamana göre azaldığı ya da akışkanın zamanla daha akıcı hale geldiği Newtonyen olmayan akışkanlara “zamana göre incelen” tiksotropik akışkanlar denir. Bu tip akışkanlarda viskozite, genelleştirilmiş Newtonyen akışkanlar altında ele alınan incelen akışkanların aksine sabit deformasyon hızlarında zamanla azalır. Örneğin karıştırma sonucu sulanan yoğurtta kayma gerilmesi ortadan kalktığında madde katılaşır. Dikkat edilirse her tiksotropik akışkan aslında zamandan bağımsız olarak ele alınırsa GNA başlığında

tanıtılan incelen akışkan tanımına uyar. Gıda sanayinde ketçap gibi aslında incelen GNA olarak kabul edilip aslında tiksotropik özellik bulunduran akışkanlar bulunabilir. Ele alınan problemin kısıtlarına göre bu tarz akışkanlar tiksotropik ya da sadece incelen GNA olarak kabul edilebilir. Zamana bağlı özellikleri bulunan diğer bir tip Newtonyen olmayan akışkan grubu ise viskoelastik akışkanlardır. Bu tip akışkanlarda madde viskoz özelliklerinin yanı sıra kayma gerilmeleri ortadan kalktığında elastik davranış gereği ilk durumuna ya da geçmişteki bir şekline geri döner. Bu özelliği materyal hafızası da denir. GNA kabulünde iç gerilmeler kuvvet ortadan kalktığına bir anda yok olur, viskoelastik akışkanlarda bu durum belirli bir zaman alır. Polimer-silikon tabanlı oyuncak toplar, egzersiz hamurları bu akışkan özelliklerine sahiptir. Şimdiye kadar sayılan özellikler akışkanın sadece kayma gerilmesi altında deforme olduğu kabulüne dayanmaktadır. Bu akışkan kabulünde akışa dik ya da normal kuvvetlerin etkisi yoktur. Ancak bazı yüksek moleküler ağırlıklı polimer solüsyonlarında viskoelastik davranış olarak dönen bir mil etrafında tırmanma davranışı gözlemlenmiştir. Newtonyen akışkan, dönen bir milin etrafında atalet etkileri gereği parabolik bir şekil alırken, bu tip akışkanlarda polimer zincirleri dönme sonucunda esneyerek normal gerilmeleri oluşturur. Bu normal gerilmeler ya da kuvvetler atalet kuvvetlerine baskın gelerek akışkanın mil boyunca tırmanmasına yol açar.

Buraya kadar en çok rastlanan Newtonyen olmayan akışkanlar özetlenmiştir. Ancak tekrar üzerinde durmalıyız ki, belki de bu Newtonyen olmayan akışkan tanımı yerine Newtonyen olmayan özellik dememiz daha doğru olabilir. Nedeni ise ketçap gibi çoğu Newtonyen akışkanın aslında birden fazla grup altında sınıflandırılabilmesidir. Örneğin bir normal gerilmeleri taşıyan viskoelastik akışkan aynı zamanda incelen akışkan olabilir. Eğer akış geometrisinde normal gerilmeler oluşmayacak ve yeteri kadar yüksek deformasyon hızları mevcut ise, atalet kuvvetleri baskın duruma geçeceğinden matematiksel yapısı daha karmaşık olan viskoelastik akışkan yerine sadece incelen GNA kabulü yapılabilir. Bu çalışma kapsamında incelenecek akışkan GNA olduğu için bundan sonraki kısımlarda GNA matematiksel modelleri üzerinde durulacaktır.



Şekil 1.3. İncelen bir GNA' nın viskozitesinin deformasyon hızı ile değişimi.

Şekil (1.3)' de bir incelen GNA' nın viskozitesinin deformasyon hızı ile değişimi verilmiştir. Viskozite eğrisinde dikkat edilirse 3 farklı bölge işaretlenmiştir. Akışkan ilk bölgede μ_0 sabit viskozite değerine sahip iken artan deformasyon hızı ile viskozitenin azalma davranışı gösterdiği power-law bölgesine girer. Deformasyon hızının artması ile viskozitedeki azalış sonlanır ve limit viskozitenin yani μ_∞ ' un geçerli olduğu son bölgeye girilir. Akışkan belirli bir deformasyon hızına kadar (μ_0) ve deformasyon hızı ne kadar artarsa artsın son bölgede (μ_∞) sabit viskozite değerine sahip olduğundan bu bölgelerde akışkan, Newtonyen olarak kabul edilebilir. Viskozitenin azalma davranışı gösterdiği power-law bölgesi Newtonyen olmayan kısmı ilgilendirir. Denklem (1.2) koordinat sisteminden bağımsız olarak GNA için tensörel formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.6)$$

Yukarıdaki ifadeye herhangi bir GNA için bünye denklemi de denir. Ele alınan koordinat sistemi için akışkan parçacığının üzerine etki eden kayma gerilmelerini içerir. $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ise benzer şekilde birim uzama hızlarını ya da başka bir deyişle deformasyon hızlarının gradyenlerini içeren tensördür. (deformasyon hız tensörü)

$\mu(\dot{\gamma})$ viskozite fonksiyonu, GNA için görünür viskozitedir. Newtonyen için; $\mu(\dot{\gamma}) = \mu$ sabit olmak üzere, Denklem (1.6) $\tau = \mu \dot{\gamma}$ haline indirgenir. Matematiksel GNA modelleri ile Şekil (1.3)' de gösterilen viskozite eğrisi veya başka türlü eğriler olabildiğince doğru tahmin edilmeye çalışılmaktadır. Dikkat edilirse grafikte aynı başlangıç GNA viskozitesine sahip Newtonyen akışkan viskozitesi deformasyon hızına göre değişmemektedir. Dolayısıyla Newtonyen akışkan kabulü görünür viskoziteyi sadece dar bir bölgede sağlamaktadır. Benzer şekilde, limit viskoziteye sahip bir Newtonyen akışkan ise sadece son bölgede görünür viskozite ile benzer sonuçlar verir. Bu kavramdan yola çıkan araştırmacılar Newtonyen akışkan viskozitesinin hiçbir şekilde geçerli olmayacağı power-law bölgesi için Ostwald-de Waele GNA modelini önerdi.[3]

$$\mu(\dot{\gamma}) = \eta |\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (1.7)$$

Burada η , GNA için viskozite sabitini, n power-law indeksini ve $|\dot{\gamma}|$ ise $\dot{\gamma}$ tensörünün şiddetini temsil eder. Denklem (1.7) görünür viskozitesi ile ilişkilendirilen GNA ayrıca power-law akışkan olarak da bilinir. Power-law ifadesi dikkat edilirse $n = 1$ için, Newtonyen akışkan modeline dönüşür. $n < 1$ ve $n > 1$ için sırasıyla incelen ve kabaran akışkanları temsil eder. İncelen akışkanlarda deformasyon hızı arttıkça, $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, görünür viskozite sıfırlanır, $\mu \rightarrow 0$. Çok düşük deformasyon hızlarında ise, $\dot{\gamma} \approx 0$, görünür viskozite sonsuza yaklaşır, $\mu \rightarrow \infty$. Ancak gerçekte hiçbir akışkanın viskozitesi ne sıfır ne de sonsuz olur. Aynı durumlar kabaran akışkanlar içinde geçerli olup power-law akışkan modelinin başlangıç ve limit viskozite değerlerinde başarılı olmadığı açıkça bellidir. Bu yüzden araştırmacılar tarafından limit viskozite değerlerinde de başarılı sonuçlar verebilecek modeller geliştirilmiştir. Bu modeller içerisindeki en çok bilinenlerden biri aşağıdaki Cross akışkan modelidir.

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + \eta |\dot{\gamma}|^n} \quad (1.8)$$

Dikkat edilirse yukarıdaki ifade düşük deformasyon hızlarında, $\dot{\gamma} \approx 0$, görünür viskozite başlangıç viskozitesine eşittir, $\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0$. Yüksek deformasyon

hızlarında ise, $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, $\mu(\dot{\gamma}) \rightarrow \mu_\infty$ gerçekleşir. η 'ya burada Cross akışkan modeli için viskozite ya da zaman sabiti denir. GNA modellerinin ampirik formüller ve deneysel sonuçlar ile uyumlu olacak şekilde sabitleri belirlenmelidir. Başta Cross akışkan modeli olmak üzere, GNA modelleri Newtonyen akışkana göre matematiksel olarak doğası gereği daha karmaşık yapıdadır. İncelen akışkanlar için limit viskozite başlangıç viskozitesine göre oldukça küçüktür, $\mu_0 \gg \mu_\infty$. Ayrıca limit viskozite değerinde $\eta|\dot{\gamma}| \gg 1$ olarak yüksek deformasyon hızları gerçekleşir. Bu kabuller ile aşağıda verilen basitleştirilmiş Cross tipindeki Sisko akışkan modeli [4] araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir.

$$\mu(|\dot{\gamma}|) = \mu_\infty + \frac{\mu_0}{\eta^n} \quad (1.9)$$

Sisko akışkan modeli düşük deformasyon hızlarının dışında basitlik açısından Cross modelinin yerine çoğunlukla tercih edilmektedir. Ancak power-law ve Sisko akışkanının aksine Şekil (1.3)' deki tüm bölgeleri sağlayacak bir model aranıyorsa Cross formülü tercih sebebi olmalıdır. Ayrıca Cross akışkan modeline alternatif olacak birden fazla parametreye sahip Carreau, Carreau-Yassuda, Williamson ve Philippoff akışkan modelleri GNA analizleri için de kullanılır.

Bu çalışmada yukarıdaki özetlenen GNA modellerinden Cross akışkan modelinin, aerodinamik bir problemde etkileri incelenmiştir. Plaka üzerinde gerçekleşen akışın Newtonyen olmayan kabuller ile nasıl değişeceği sorgulanacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Literatür Özeti

Hem bir önceki kısımda değinilen temel kavramlara dayanan hem de mevcut çalışmamıza referans olarak faydalanılan çalışmalardan bu kısımda bahsedilecektir. Her ne kadar bilgisayar çağında yaşadığımız için bu cihazların yeteneklerinden tam anlamıyla yararlanan sayısal yöntemler, akışkanlar mekaniği problemleri düzleminde oldukça geçerli olsa da halen daha analitik çalışmaların oluşturduğu kapsamlı öngörüler yadsınamaz. Navier-Stokes denklemleri olarak da bilinen Newtonyen akışkanların momentum eşitliklerinin analitik çözümleri sadece basit geometri ve özel akış kabullerinde bulunmaktadır. Karmaşık geometriler ve çoklu fizik problemleri için Ansys, Comsol gibi sayısal ticari yazılımlar sıklıkla kullanılmaktadır. Ancak bu yazılımların Newtonyen olmayan akışkanlar için yetkinliği oldukça sınırlıdır. Bunun en önemli nedeni Newtonyen olmayan akışkanlara ait denklemlerin birbirlerinden oldukça farklı olmaları ve tüm akışkanları temsil eden tek bir modelin olmamasıdır. Bahsi geçen belli başlı GNA modellerine ilişkin çalışmalara değinmek gerekirse ilk önce bu modelleri ortaya atan merkezde bulunan çalışmaları daha sonra da bu modelleri hem deneysel hem de teorik çalışmalarda kullanan çalışmalara değinilmelidir.

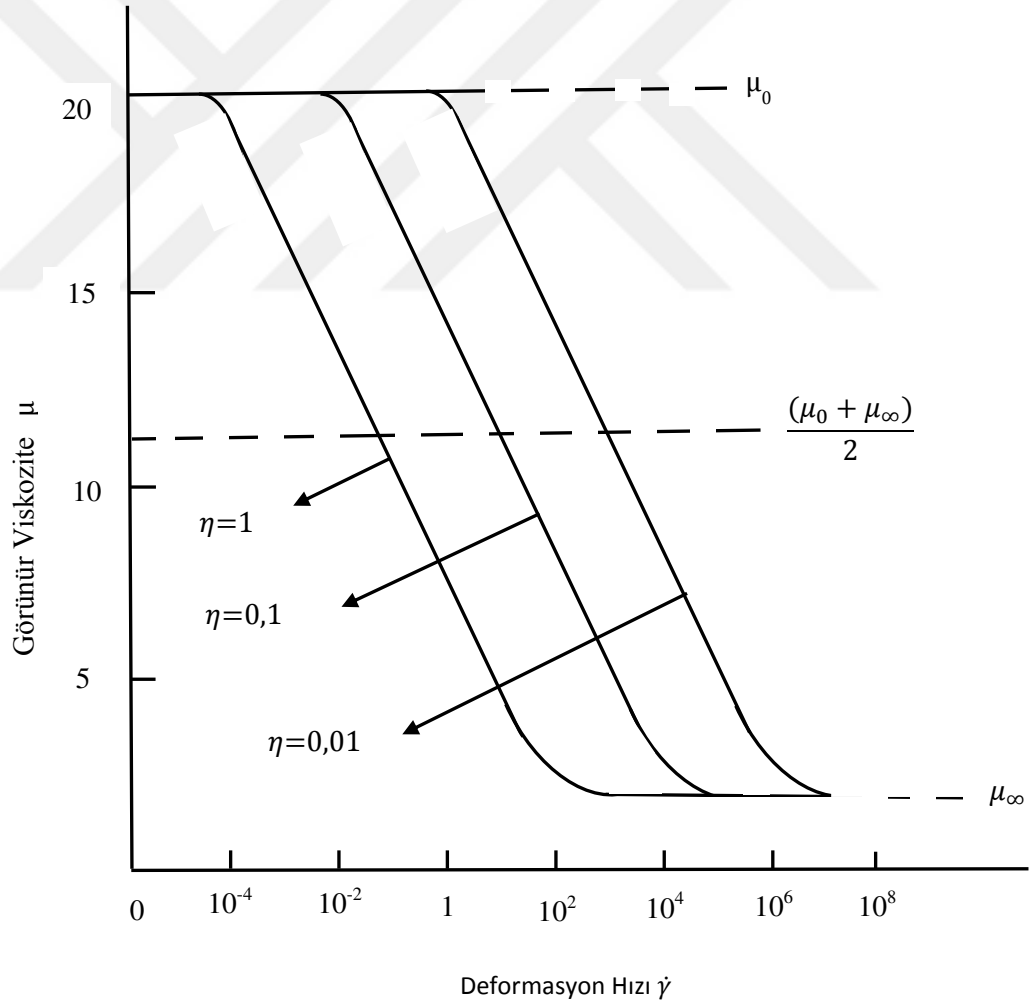
GNA dahil Newtonyen olmayan akışkanlara ait matematiksel modellerin çoğuna Bird tarafından yapılan derleme bir çalışmada [5] değinilmiştir. Bu çalışmada GNA modellerin genelde ampirik gözlemlere dayandığı ancak viskoelastisite gibi karmaşık durumlarda moleküler ve istatistiksel metotların kullanılması gerektiğinden bahsedilmiştir. Yine de kavramların modelin ortaya atıldığı gözlemsel veya matematiksel araçlar ne olursa olsun Newtonyen teori ile uyumlu olması gerektiği kaçınılmazdır. Bahsi geçen çalışmada bahsedilen birden fazla parametreye sahip GNA modellerinden biri Meter ve Bird [6] tarafından Newtonyen olmayan bir akışkanın boru içi laminar akışında kullanılmıştır. Çözümler analitik olmasına rağmen yaklaşık çözümlerdir ve tam analitik çözümü bulmak mümkün olamamıştır. Oysa ki aynı akış geometrisi için Newtonyen akışkanın tam analitik çözümleri mevcuttur. Mitsuishi ve Aoyagi [7], bünye denklemi hiperbolik ifadeler içeren bir GNA modelinin farklı kesitlere sahip kanallar içerisindeki akışını incelemişlerdir.

Araştırmacılar söz konusu çalışmada varyasyonel mekaniği Newtonyen olmayan akışkanların mekaniği ile ilişkilendirmişlerdir. Power-law akışkanının kısıtlarına sahip olmayan Ellis akışkan modelinin farklı akış geometrileri altında incelenmesi Matsuhisa ve ark. tarafından [8] sunulmuştur. Bu çalışmada momentum denklemine ek olarak ısı transfer etkilerinin incelenmesi için enerji denklemi de ele alınmıştır. Yasuda [9], viskometrik bir akışta Newtonyen olmayan bir akışkanın viskozitesini Carreau akışkan modelini temel alan çok noktalı bir viskozite formülü ile hesaplamışlardır. Bu sayede viskozite-deformasyon hızı ilişkisini geniş bir aralıkta deneysel sonuçlar ile uyumlu olacak bir şekilde göstermişlerdir. Bir çeşit silika tozunun polipropilen glikol ile oluşturduğu süspansiyonun artan deformasyon hızları ile önce incelen daha sonra kabaran, çok yüksek deformasyon hızlarında ise tekrar incelen davranış gösterir. Söz konusu GNA modelleri bu davranışı tahmin edemeyeceği için Galindo-Rosales ve ark. [10] kompozit bir viskozite modeli önermişlerdir. Üç farklı viskozite modelinden oluşan kompozit ya da diğer bir tabir ile parçalı viskozite modeli ile bütün bölgelerde ve geçişlerde süreklilik bozulmadan söz konusu akışkanın viskozitesi, eğri uydurma işlemine dayalı bir yaklaşımla modellenmiştir. Üretimde sıklıkla kullanılan plastik enjeksiyon tekniğinde kalıba enjeksiyon vasıtası ile dolan polimer bileşikli materyaller Newtonyen olmayan akışkan olarak kabul edilebilir. Sanayide sıklıkla kullanılan Moldflow gibi yazılımlarda GNA modelleri hazır olarak tanımlanmıştır. Bu modeller Koszku ve ark. [11] tarafından özel bir akış durumu için farklı materyal özellikleri ile ele alınmıştır. Araştırmacılar daha gelişmiş akışkan modellerinin daha güçlü hesaplayıcı donanımlara ihtiyaç duyduğunu ve gelişen teknoloji ile ileride kullanılabileceğimizi belirtmiştir. Abbas ve ark. [12], petrol kuyularının inşasında test amaçlı kullanılan özel bir akışkanın görünür viskozitesinin sıcaklığın fonksiyonu olarak kabul edip, farklı iki GNA modelinin bu akışkan için kullanılabilir olduğunu göstermişlerdir. Yine petrol endüstrisinde kuyuları açmak için kullanılan sondaj sıvıları toprağın içinde çamur halini alır ve GNA olarak davranır. Bu çamurlarının viskozitesi bilinmesi sondaj prosesinde karşılaşılabilecek sıkıntıları önceden öngörmemize yardımcı olur. Al-Zahrani [13] çoğu GNA akışkan modelinin bu tayinlerde kullanıldığı ancak modellerin birbirlerine göre üstünlüğü ya da eksikliklerinin bulunduğunu belirtmiştir. Bu yüzden, Al-Zahrani, modellerin güçlü taraflarını bünyesinde bulunduran daha genel bir görünür viskozite fonksiyonu önermiş ve deneysel sonuçlarla uyumlu olarak başarılı sonuçlar vereceğini göstermiştir. Raju ve ark. [14] viskometrik bir

akışın verilerini Carreau, Cross ve Ellis modellerine sağlatmaya çalışmışlardır. Araştırmacılara göre sınır viskozite değerlerinde Carreau ve Ellis modellerinin Cross modeline göre daha başarılı sonuçlar verdiği söylenmiştir. Ancak çalışmada Cross akışkan modelinin genel formunun tüm parametrelerinin aksine üstel parametre sabit bir değer ($n = 3/2$) alınmıştır. GNA akışkan modelleri görünür viskoziteyi hesaplamaktan başka momentum ve enerji denkleminde yerleştirilerek akışkanın hareketinin ve sıcaklığının tahmininde kullanılabilir. Klasik momentum ve enerji denklemleri yaklaşımına alternatif olarak akışkanlar mekaniğinde Lattice-Boltzmann denklemlerinin üzerinde son zamanlarda araştırmalar çoğalmıştır. Eulerian ya da kontrol hacmi yaklaşımından ziyade Lattice-Boltzmann denklemleri Lagrangian prensiplerine göre çalışır. Lagrangian yaklaşımda her akışkan parçacığı zaman içinde izlenmektedir. Dolayısıyla çok daha yüksek hesaplama gücüne ihtiyaç vardır. Ancak bu yaklaşım Eulerian yaklaşımı temel alan klasik tekniklerin ihtiyaç duyduğu çözüm ağlarından (mesh) bağımsızdır ve çözüm ağlarının yol açtığı hassasiyet sorunlarına sahip değildir. Boyd ve ark. [15] Casson ve Carreau-Yasuda modellerini Lattice-Boltzmann yaklaşımına uyarlamışlardır. Elde edilen sonuçlara göre Lattice-Boltzmann yaklaşımı klasik teoriye uygun sonuçlar vermiştir. GNA modellerinin kullanıldığı bir diğer alan ise yağlama teorisidir. Miller ve yataklar arasında oluşan boşlukları doldurup sürtünmeyi azaltması için kullanılan endüstriyel yağlar amaçları gereği Newtonyen akışkandan farklı davranmak zorundadır. Yağlama teorisinin ele aldığı akış geometrisi viskometrik akış tipine yakındır. Ancak yatak içinde basınç dağılımı söz konusu olduğunda viskometrik akışta yapılan kabullerin bir kısmı burada yapılmamalıdır. Özellikle akış birden fazla boyuta sahip olmalıdır. Bu kavramların bulunabileceği bir çalışma Kacou ve ark. [16] tarafından normal gerilmelere sahip üçüncü derece Newtonyen olmayan bir akışkan ele alınarak yürütülmüştür. Matematiksel olarak oldukça karmaşık olan bu akışkan modelinin yol açtığı denklemlerin yaklaşık çözümleri yapılmış ve yataklar içindeki basınç dağılımı çıkarılmıştır. Kullanılan akışkan vasıtası ile yatakların taşıma kapasitesinin büyük oranda geliştirilebildiği söylenir. GNA akışkanların ve özellikle biyolojik sıvıların aktığı ortamlar gözenekli olabilir. Gözenekli ortam ve Darcy prensipleri gereği ortam ve akışkan arasında ilişkili bir gözenekli ortama has görünür viskozite tayin edilmelidir. Bu viskozite GNA modelleri içinde bir takım farklı değişikliklere uğrar. Aksoy ve ark. [17] bir önceki çalışmada kullanılan üçüncü derece akışkanı gözenekli bir ortam için ele almışlardır. Bu çalışmada ısı transfer etkileri de ele alınmış olup,

üçüncü derece Newtonyen olmayan akışkanın söz konusu geometri için GNA olarak da kabul edilebileceği söylenebilir. Kolesterol sonucu tıkanmış damarlardaki kan akışı bir GNA akışkanı ve içi gözenekli bir ortam olan bir boru ile Dash ve ark. [18] tarafından modellenmiştir.

Bu çalışmada GNA modeli olarak kullanılacak akışkan modeli Cross [19] tarafından oldukça geniş ölçekte bulunan Newtonyen olmayan pseudoplastik (incelen) akışkanlar, çeşitli maddelerin sulu veya susuz çözeltileri ve aynı şekilde süspansiyonları için önerilmiştir. Bu model, görünür viskozitenin, μ_0 , μ_∞ olarak her iki sınır değerini ve η zaman sabiti üzerinden bu değerlerde hangi deformasyon hız aralıklarında olacaklarını belirtir.



Şekil 2.1. Cross modelinin görünür viskozite ve deformasyon hızı ilişkisi.

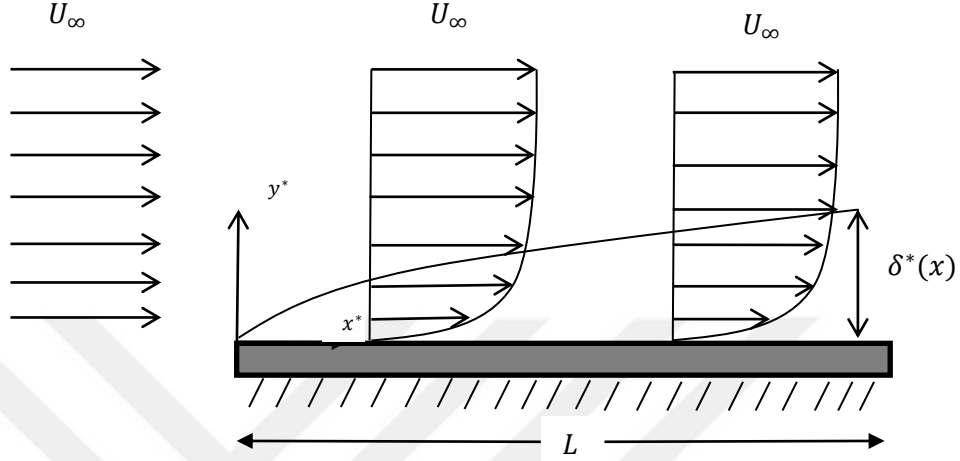
Şekil (2.1)' de temsili olarak Cross modelinin görünür viskozite ve deformasyon hızı ilişkisi verilmiştir. η sabiti küçüldükçe μ_0 ' ı geçmek için gereken maksimum deformasyon hızı artar. Buna karşılık tam tersi durumda, yani η sabiti büyüdüğü limit viskozite μ_∞ ' a daha erken deformasyon hızlarında ulaşılır. Ayrıca bu temsili teorik grafiklerde power-law indeksinin sabit bir değer alındığı söylememiz gerekir. Son yıllarda Cross modeli kullanılarak yapılmış çalışmalara değinmek gerekirse; Hayat ve ark. [20] elektriksel olarak iletken bir Newtonyen olmayan akışkanın manyetik alan etkisi ile düzlemsel bir yüzey üzerindeki akışını Cross modeli üzerinden incelemişlerdir. Khan ve ark. [21] dairesel bir plakanın radyal yönde gerdirilmesi ile oluşan bir Newtonyen olmayan akışı ısı transferi etkileri ile Cross formülü ile modellemişlerdir. Khan ve ark. [22] Cross akışkanı olarak kabul edilmiş bir Newtonyen olmayan akışkanın gerdirilmiş plaka üzerindeki akışını ısı transferi ve kimyasal reaksiyon etkileri ile incelemişlerdir. Bu çalışmada kimyasal etkiler ve aktivasyon enerjisini hesaplamak için momentum ve enerji denkleminde ek olarak konsantrasyon denklemi de ele alınmıştır. Khan ve ark. [23] Cross akışkanının konveksiyon akışında nano parçacıkların etkisini incelemişler. Nano parçacıkların etkisini akış hesabına konsantrasyon denklemi ile dahil olmuştur. Burada nano parçacıklarının ısı transferini geliştirdiği gözlemlenmiştir.

2.1.1 Tezin Amacı

Bu tez kapsamında sonsuzdan gelen uniform bir Newtonyen olmayan akışkanın akışa paralel düzlemsel plaka üzerindeki akışı incelenecektir. Akış düzlemsel plakaya değdikten sonra uniform profili bozulacak ve probleme has özel bir akış profili oluşacaktır. Akış laminar olup, Cross akışkan formülü ile modellenecektir. Bu sayede akışta Newtonyen akışkan ile GNA arasındaki farklar gözlemlenecektir. Ayrıca akışkan tarafından plakaya uygulanan kuvvet plaka üzerindeki kayma gerilmesi vasıtası ile tartışılacaktır. Newtonyen akışkanın düz plaka üzerine uyguladığı kayma gerilmesi üzerinde oldukça fazla sayıda bilimsel çalışma bulunmaktadır. Buna karşılık çok temel bir problem olan plaka üzeri akış için Newtonyen olmayan akışkanların davranışlarının çoğu bilinmemektedir. Özellikle de Cross akışkanı gibi oldukça fazla parametreye sahip akışkanlarda, bu etki daha da karmaşık hale gelmektedir. Ayrıca probleme uygulanacak matematiksel

yaklaşım ilerideki benzer çalışmalara ışık tutacaktır. Karmaşık problemi basitleştirmek için kullanacağımız teorik araçlar ve daha sonra bunların çözümleri genelleştirilmiş Newtonyen akış problemlerinde kullanılabilir.

2.2. Problemin Tanımı



Şekil 2.2. Plaka üzerinde akış ve sınır tabakasının temsili gösterimi.

Şekil (2.2)' de problemimizin fiziksel gösterimi verilmiştir. Buna göre düz bir L uzunluğundaki plaka üzerine, düzgün dağılımlı (uniform) U_∞ hızı ile sonsuzdan gelen Newtonyen olmayan akışkan plakaya temas etmekte ve kaymama şartı gereği plakaya yapışıp hızı sıfırlanmaktadır. Hareket halindeki akışkan üst üste plakalar halinde hareket edeceğinden plakaya yapışan akışkan kendinden sonraki plakayı bir miktar yavaşlatacak, dolayısıyla y^* koordinatında yukarı doğru hareket ettikçe plakaların hızı artacaktır. Bu artış y^* koordinatında hız U_∞ hızını bulduğunda sonlanacaktır. Plaka üzerindeki akışkanın hızının tekrar U_∞ hızını yakaladığı nokta δ^* olsun. Yapılan gözlemler ve deneyler sonucu plaka üzerinde x^* koordinatında ilerledikçe bu δ^* uzaklığında artış gözlemlenmektedir. Bu δ^* noktalarını birleştirdiğimizde bir $\delta^* = \delta^*(x^*)$ eğrisi oluşmaktadır. δ^* ifadesine, sınır tabakası kalınlığı denir ve x^* koordinatına göre değişmektedir. Şekil (2.2)' den de dikkat edilirse akışkanın hızı sadece δ^* eğrisi ve plaka arasında kalan bölgede değişmektedir. Bu bölgeye sınır tabaka bölgesi denir. Bu durum bize matematiksel olarak sadece değişimin olduğu bölgeyi dikkate almamızı ve değişiminin olmadığı bölgeyi ise bir şekilde göz ardı edebileceğimiz fikrini verebilir. Rüzgâr tünellerinde akım çizgisi görüntüleme teknikleri ile bu δ^* kalınlığının çok küçük bir yüksekliği

sahip olduğu gözlemlenmiştir, kısaca $\delta^* \ll 1$. Hareketli akışkan kütlesinden adeta bir parça katı yüzeye yapışmakta ve çok küçük bir mesafede de diğ er parçaları etkilemektedir. Bu kalınlığın dışında ise akışkan davranışının uniform akıştan bir farkı kalmamaktadır.

Buraya kadar anlattığımız fiziksel problem daha büyük bir problemin parçası ya da başlı başına özgün bir gerçek olabilir. Bu tip problemlerde bizi asıl ilgilendiren akışkanın plakaya ya da katı cisme uyguladığı reaksiyon kuvvetidir ki bu da plaka üzerindeki akışkanın yol açtığı kayma gerilmesi ifadesinden bulunabilir. Ayrıca problemin termal yani sıcaklığa göre değışim tarafı var ise akışkanın sınır tabakası içerisinde hızını bulmamız gerekebilir. Bu yüzden, sırayla akışkanın plakaya uyguladığı kayma gerilmesi ve akışkanın hız profili bulunmalıdır. Akışkanın hız profili için momentum denklemleri oluşturulup çözülmelidir. Ancak bu denklem yüksek derecede doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Matematiksel olarak Newtonyen akışkana ait olan denklemlerin bile çözümleri henüz tam olarak anlaşılamamışken Newtonyen olmayan akışkan denklemleri ciddi şekilde külfetlidir. Ancak, daha önce kavramsal olarak bahsettiğimiz sınır tabakası davranışına özgü kabuller ile basitleştirici sınır tabakası teorisi geliştirilmiştir. Bu teori aslında ortaya çıkan momentum denklemlerini basitleştirmemize yardımcı olan bir yaklaşımdır. Denklemleri çözerken gereken işlem hacmi ciddi miktarda azalmaktadır. Sınır tabakası teorisi sadece akışkan sınır tabakası olarak ele alınmamalıdır, termal ve konsantrasyon sınır tabakaları gibi değışimin problem uzayına göre dar bir alana sıkışmış çok çeşitli fiziksel büyüklükler için de sınır tabakası oluşturulabilir.

Plaka üzerindeki sürtünmeli akışı tanımlayan momentum denklemlerine sınır tabakası yaklaşımı uygulanarak denklemler basitleştirilecektir. Ancak yine de ele alınan denklemler kısmi diferansiyel denklemler olacağından çözümleri oldukça zordur. Bu yüzden denklemlerin simetrleri hesaplanacak ve bu simetrliler kullanılarak kısmi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenip sayısal çözümleri yapacağız. Literatürde bu çalışmadaki benzer araştırma sürecini uygulayan Newtonyen olmayan akışkanların sınır tabakası denklemleri ile ilgili çalışmalar bulunabilir. Özellikle viskoelastik Oldroyd ve Maxwell akışkanları [24,25], viskoelastik ve power-law özelliğe sahip ikinci derece akışkanlar [26,27],

GNA olarak Sisko [28], Williamson [29], Powell-Eyring [30] akışkanlarının sınır tabakası içerisindeki davranışları incelenmiştir.



3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1 Momentumun Korunumu

Sadece dış kuvvet olarak basınç gradyeni etkisi altında laminar, sıkıştırılmaz ve sürekli bir akışta Newton' un ikinci yasası bir akışkan parçacığı için yazılırsa, koordinat sisteminden bağımsız olarak aşağıdaki vektörel formdaki momentum denklemi elde edilir.

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3.1)$$

Burada ρ yoğunluk, $\mathbf{u}$ hız vektörü, P basınç ve ∇ gradyen operatörüdür. $\boldsymbol{\tau}$ daha önce belirttiğimiz gibi akışkan tipine özel, kayma gerilmelerini içeren bir tensörel büyüklüktür. Ele aldığımız probleme uygun olarak Denklem (3.1) kartezyen koordinatlar için x^* koordinatında,

$$\rho \left[u^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} \right] u^* = -\frac{\partial P}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y^*} \tau_{xy} \quad (3.2)$$

ve y^* koordinatı için;

$$\rho \left[u^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} \right] v^* = -\frac{\partial P}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y^*} \tau_{yy} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. Burada sırasıyla u^* ve v^* , x^* ve y^* doğrultusundaki hızlardır. Ayrıca kayma gerilmesi ifadelerindeki ilk indis düzlemi, ikinci indisin de doğrultuyu gösterdiği söylenmelidir. Yukarıdaki Denklem (3.2) ve Denklem (3.3) akışkan modelinden bağımsız momentum denklemleridir. Cross akışkanını temsil etmesi için denklemlerdeki kayma gerilmeleri ifadesi Denklem (1.8) kullanılarak hesaplanmalıdır. Deformasyon hızlarını ya da birim uzama hızlarını içeren $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ tensörü aşağıdaki hız vektörünün gradyeninin $\nabla \mathbf{u}$, kendisinin transpozu $(\nabla \mathbf{u})^T$ ile toplamıdır, yani

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.4)$$

Kartezyen koordinatlar için $\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^*} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y^*}$ ve $\mathbf{u} = u^* \mathbf{e}_1 + v^* \mathbf{e}_2$ olur. Burada $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$, sırasıyla x^* ve y^* yönündeki birim vektörlerdir. Skaler bir büyüklük olarak $\dot{\gamma}$ tensörünün şiddeti aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})} \quad (3.5)$$

tr ya da *trace* operatörü $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$ çarpımı ile ortaya çıkan tensörünün diyagonal elemanlarının toplamını ifade eder. Kartezyen koordinatlar için bu ifade,

$$|\dot{\gamma}| = \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

olarak hesaplanır ve Denklem (1.8)' e yerleştirilirse Cross akışkanı için görünür viskozite,

$$\mu |\dot{\gamma}| = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left(1 + \eta \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

olarak hesaplanır. Yukarıdaki Cross akışkanına özel görünür viskozite Denklem (1.6)' ya yerleştirilirse Cross denklemi için bünye denklemi elde edilir.

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left(1 + \eta \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{-1} \right) \dot{\gamma} \quad (3.8)$$

Bünye denklemlerinin bileşenleri hesaplanırken $\boldsymbol{\tau}$ ve $\dot{\gamma}$ ' nin kartezyen koordinatlardaki aşağıdaki formları kullanılmalıdır.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \text{ ve } \dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} & \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \\ \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} & 2 \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{bmatrix}$$

Böylece Denklem (3.2) ve (3.3)' deki kayma gerilmeleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\tau_{xx} = 2 \left(\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{-1} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\tau_{xy} =$$

$$\left(\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{-1} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2 \left(\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left(2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{-1} \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

(3.9)

Burada tensörün simetrik olması gerektiğinden $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ olması gerekir. Yukarıda hesaplanan kayma gerilmesi ifadeleri Denklem (3.2) ve Denklem (3.3)' e yerleştirildiğinde Cross akışkanının hareketini temsil eden momentum denklemleri elde edilecektir. Sınır tabakası ile alakalı referans çalışmalara dikkat edildiğinde sınır tabakası kabullerinin momentum denklemlerinin son haline uygulandığı görülecektir. Biz bu çalışmada sadelik açısından momentum denklemlerinin nihai halinden ziyade kayma gerilmeleri üzerinde kabuller yapıp sınır tabakası denklemlerine ulaşacağız.

3.2 Sınır Tabakası Yaklaşımı

Sınır tabakası daha önce değindiğimiz gibi değişimin gerçekleştiği dar bir bölgeyi temsil etmektedir. Bu değişimin gerçekleştiği dar bölgeye ilişkin kabuller GNA modelleri için devasa büyüklükteki momentum denklemlerini ciddi şekilde basitleştirir. Kısaca bu kabuller ve ilişkili matematiksel hallerine değinelim. Sınır tabakası kalınlığı oldukça küçük bir büyüklüktür;

$$\delta^* \ll 1$$

Dolayısıyla y^* koordinatı da çok küçük olmalıdır ya da diğer bir deyişle y^* , δ^* mertebesinde;

$$y^* \sim O(\delta^*),$$

plaka doğrultusundaki koordinat ise küçük olmamakla birlikte 1 mertebesinde;

$$x^* \sim O(1)$$

Kütlenin korunumu prensibi gereği süreklilik denklemi şu şekildedir;

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.10)$$

Süreklilik denklemindeki terimler, kütlenin korunumu gereği aynı mertebede olmalıdırlar bu yüzden;

$$u^* \sim O(1) \text{ ve } v^* \sim O(\delta^*)$$

olmalıdır. Bu yapılan kabuller ile önceki kısımdaki ifadelerin içerisindeki hız gradyenlerinin mertebeleri hakkında aşağıdaki şekilde bilgi sahibi olabilir;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &\sim O(1) \\ \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &\sim O\left(\frac{1}{\delta^*}\right) \\ \frac{\partial v^*}{\partial x^*} &\sim O(\delta^*) \\ \frac{1}{\delta^*} &\gg 1 \gg \delta^* \end{aligned}$$

olarak mertebe hiyerarşisi gereği en büyük terim tutulup, diğer terimler elimine edilirse görünür viskozite;

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n\right)^{-1} \quad (3.11)$$

olarak basitleştirilir. Bu ifade sınır tabakası içerisindeki görünür viskozitedir. Aynı şekilde Denklem (3.9) ile verilen kayma gerilmeleri sınır tabakası için düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2 \left(\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n\right)^{-1} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \\ \tau_{xy} &= \left(\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n\right)^{-1} \right) \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \\ \tau_{yy} &= 2 \left(\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + \eta \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n\right)^{-1} \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. x^* momentum denklemi de benzer olarak,

$$\rho \left[u^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} \right] u^* = -\frac{\partial P}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \tau_{xy} \quad (3.13)$$

mertebe hiyerarşisi gereği sınır tabakası için basitleşir. Denklem (3.12)' deki τ_{xy} ifadesi yukarıdaki denkleme konur ve türevler hesaplanırsa;

$$\rho \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \left(\eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \frac{1 - \eta n \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n \left(1 + \eta \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n\right)^{-1}}{1 + \eta \left|\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|^n} \right) \quad (3.14)$$

olur. Sınır tabakası kalınlığı δ^* 'yı plaka uzunluğu L 'ye bölerek boyutsuz sınır tabakası δ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\delta = \frac{\delta^*}{L} \quad (3.15)$$

Aşağıdaki boyutsuz büyüklükleri tanımlayalım.

$$u = \frac{u^*}{U_\infty}, v = \frac{v^*}{\delta U_\infty}, x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{\delta L} \text{ ve } p = \frac{P}{\rho U_\infty^2} \quad (3.16)$$

Klasik boyutsuzlaştırma işlemlerinin aksine burada δ^* mertebesindeki büyüklükleri ön plana çıkarabilmemiz için genellikle kayıp olmaksızın bazı paydalara δ ' yı ekledik. Daha iyi anlaşılması için yukarıdaki eşitliklerdeki boyutlu terimleri aşağıdaki şekilde çekelim.

$$u^* = U_\infty u, v^* = \delta U_\infty v, x^* = xL \text{ ve } y^* = \delta Ly \text{ ve } P = \rho U_\infty^2 p$$

Bu ifadeler Denklem (3.14)' de yerine konur ve düzenlenirse;

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\eta_\infty}{\delta^2 U_\infty L \rho} + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty)}{\delta^2 U_\infty L \rho} \frac{1 - \frac{\eta U_\infty^n}{\delta^n L^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \left(1 + \frac{\eta U_\infty^n}{\delta^n L^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \right)^{-1}}{1 + \frac{\eta U_\infty^n}{\delta^n L^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n} \right) \quad (3.17)$$

elde edilir. İşlemler sonucu yukarıdaki denklemdeki terimlerin katsayıları boyutsuz hale getirilmiştir. Bu katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\epsilon_1 = \frac{\eta_0}{U_\infty L \rho}, \quad \epsilon_2 = \frac{\eta_\infty}{U_\infty L \rho} \text{ ve } \epsilon_3 = \frac{\eta U_\infty^n}{L^n} \quad (3.18)$$

Boyutsuz parametreler cinsinden Denklem (3.17) aşağıdaki şekilde tekrar düzenlenir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\epsilon_2}{\delta^2} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\delta^2} \frac{1 - \frac{\epsilon_3}{\delta^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \left(1 + \frac{\epsilon_3}{\delta^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \right)^{-1}}{1 + \frac{\epsilon_3}{\delta^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n} \right) \quad (3.19)$$

Yukarıdaki denklemde sol taraftaki terimler ivme terimleri olup $O(1)$ mertebesidirler. Ancak sağ taraftaki $\frac{1}{\delta^2}$ diğer terimlere göre çok küçük olup önceki kısımlardaki gibi ihmal edilmesi gerekir. Bu sınır tabakası içinde gerçekleşen bir akış için çok doğru bir önerme olmaz. Dolayısıyla bu ivme terimlerinin kaybolmaması için sağdaki terimlerin de 1 mertebesi olması gerekir. Ya da;

$$\epsilon_1 \sim O(\delta^2), \epsilon_2 \sim O(\delta^2) \text{ ve } \epsilon_3 \sim O(\delta^n)$$

kabullerinde bu istenen sağlanır. Bu yüzden;

$$\epsilon_1 = \delta^2 k_1, \epsilon_2 = \delta^2 k_2 \text{ ve } \epsilon_3 = \delta^n k_3$$

dönüşümlerini yaparsak Denklem (3.19)' un son hali şu şekildedir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(k_2 + (k_1 - k_2) \frac{1-n k_3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \left(1+k_3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \right)^{-1}}{1+k_3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n} \right) \quad (3.20)$$

x momentum denkleminin üzerinde uygulanan sınır tabakası kabullerinden gelen $\eta_0 \sim O(\delta^{*2})$, $\eta_\infty \sim O(\delta^{*2})$ ve $\eta \sim O(\delta^{*n})$ sonuçları gereği y yönündeki momentum denkleminin boyutsuz son hali aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.21)$$

Bu sonuç bize basıncın sadece plaka doğrultusunda değiştiğini söyler, ya da $p = p(x)$ ' dir. Potansiyel yani sürtünmesiz teori gereği sonsuzdaki akış için Bernoulli denkleminde basınç hesaplanır.

$$p = -\frac{1}{2} U_\infty^2 + \text{sabit} \quad (3.22)$$

Bu ifadenin x ' e göre türevi alınırsa,

$$\frac{dp}{dx} = -U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \quad (3.23)$$

hesaplanır. Bu ifade Denklem (3.20)' ye yerleştirilirse sınır tabakası içerisindeki x doğrultusundaki boyutsuz momentum denklemi elde edilir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(k_2 + (k_1 - k_2) \frac{1-n k_3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \left(1+k_3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \right)^{-1}}{1+k_3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n} \right) \quad (3.24)$$

Boyutsuz süreklilik denklemi ise;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

olur. Denklem (3.24) ve (3.25)' i çözmek için gerekli sınır şartları; plaka üzerinde akışkanın hız bileşenleri kaymama koşulu gereği sıfırdır.

$$u^*(x^*, 0) = v^*(x^*, 0) = 0 \quad (3.26)$$

Yeteri kadar plakadan yukarda akışkan hızının x^* bileşeni sonsuzdan gelen akışın hızına eşittir;

$$u^*(x^*, \infty) = U_{\infty} \quad (3.27)$$

ve bu şartın gerçekleşmesi ile alakalı olarak akışkan hızının x^* bileşeni yönündeki artışın durması,

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*}(x^*, \infty) = 0 \quad (3.28)$$

olarak yazılabilir. Bu şartlar Denklem (3.16)' da verilen boyutsuz değişkenler cinsinden tekrar yazılabilir.

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, u(x, \infty) = 1 \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, \infty) = 0 \quad (3.29)$$

Bu kısımda sınır tabakası içerisindeki akışı tanımlayan boyutsuz kısmi diferansiyel formda Denklem (3.24) ve (3.25), Denklem (3.29)' da ki sınır şartları altında elde edilmiştir. Bundan sonraki kısımda bu denklemlerin değişmez kaldığı yeni değişkenler üzerinde adi diferansiyel denklem formlarını elde edilip edilemeyeceği tartışılacaktır.

3.3 Denklemlerin Simetrileri ve Adi Diferansiyel Denklemlere İndirgeme

Bir denklemin simetrileri, orjinal denkleme yerleştirildiğinde denklemin değişmez (invariant) kalmasını sağlayan yeni değişkenleridir. Hazır olarak öteleme, ölçekleme, spiral dönüşümler, simetriler olduğu gibi Lie grubu analizleri ile denklemin kabul ettiği tüm simetrik yapılar elde edilebilir. Adi diferansiyel denklemlerde bu simetriler denklemin kanonik formda çözmeye olanak tanırken kısmi diferansiyel denklemler için, adi denklemlere indirgemedi kullanılır.

Bu çalışma kapsamında sadece sınır tabakası denklemlerinin kabul ettiği ölçekleme dönüşümleri incelenecektir. Ölçekleme dönüşümüne uygun olarak aşağıdaki yeni değişkenlerimizi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \beta^a x \rightarrow x = \beta^{-a} \bar{x} \\ \bar{y} &= \beta^b y \rightarrow y = \beta^{-b} \bar{y} \\ \bar{u} &= \beta^c u \rightarrow u = \beta^{-c} \bar{u} \\ \bar{v} &= \beta^d v \rightarrow v = \beta^{-d} \bar{v} \\ \bar{U}_\infty &= \beta^e U_\infty \rightarrow U_\infty = \beta^{-e} \bar{U}_\infty \end{aligned} \quad (3.30)$$

Yukarıdaki denklemlerde okun sol tarafı yeni değişkenlerimizi, sağ tarafı ise sınır tabakası denklemlerine yerleştireceğimiz orijinal değişkenlerimizin yeni değişkenler cinsinden eşitini verir. Burada a, b, c, d, e ve β ölçekleme dönüşümüne ait parametrelerdir. Simetriler için a, b, c, d, e parametrelerinin hangi özel değerlerinde

Denklem (3.30)' da verilen değişkenler orijinal denklemlere yerleştirildiğinde denklemler değişmez kalacak sorusunu araştıracağız.

Denklem (3.24)' ü Denklem (3.30)' da verilen değişkenler cinsinden tekrar yazalım ve sol taraftaki ilk terimin katsayısı 1 olacak şekilde düzenlersek;

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \beta^{c-a+d+b} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \beta^{2c-2e} \bar{U}_{\infty} \frac{\partial \bar{U}_{\infty}}{\partial \bar{x}} + \\ &+ \left(k_2 + (k_1 - k_2) \cdot \frac{1-nk_3 \left(\beta^{-c+b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^n \left[1+k_3 \left(\beta^{-c+b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^n \right]^{-1}}{\left[1+k_3 \left(\beta^{-c+b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^n \right]} \right) \beta^{c-a+2b} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. Aynı değişkenler cinsinden süreklilik denklemi yani Denklem (3.25) düzenlenirse;

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \beta^{-d+b+c-a} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.32)$$

bulunur. Dikkat edilirse yukarıdaki denklemlerin orijinal denklemlere dönüşebilmesi için β katsayıların 1'e eşit olması gerekmektedir. Dolayısıyla katsayılarda bulunan β ifadelerinin üstlerinin sıfır olması gerekmektedir. Bunun için momentum denkleminde;

$$c - a - d + b = 0$$

$$c - e = 0$$

$$c - a + 2b = 0$$

$$-c + b = 0$$

$$(3.33)$$

ve süreklilik denkleminde;

$$-d + b + c - a = 0 \quad (3.34)$$

elde edilir. Yukarıdaki süreklilik denkleminde gelen ifade momentum denkleminde ilki ile aynıdır. Dolayısıyla 5 bilinmeyen 4 denklem olup, sistem lineer bağımlıdır. Tek bir parametre cinsinden diğer simetri parametrelerini bulabiliriz. c cinsinden diğer parametreler şu şekilde bulunur.

$$e = c$$

$$b = c$$

$$a = 3c$$

$$d = -c$$

(3.35)

Simetriler ve orijinal değişkenler arasında aşağıdaki diferansiyel formların eşitliği ilkesi yazılabilir.

$$\frac{d\bar{x}}{a\bar{x}} = \frac{d\bar{y}}{b\bar{y}} = \frac{d\bar{u}}{c\bar{u}} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{v}} = \frac{d\bar{u}_\infty}{e\bar{u}_\infty} \quad (3.36)$$

Bu ifade Denklem (3.35)' deki ifadeler yerleştirilir ve c ' ler sadeleştirilirse,

$$\frac{d\bar{x}}{3\bar{x}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = \frac{d\bar{v}}{-\bar{v}} = \frac{d\bar{u}_\infty}{\bar{u}_\infty} \quad (3.37)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede kısmi diferansiyel denklemleri adi denkleme indirgemek için gerekli benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları elde edilir. Benzerlik değişkeni için,

$$\frac{d\bar{x}}{3\bar{x}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y}} \quad (3.38)$$

ele alalım. Her iki tarafında integrali alındığında integral sabiti benzerlik değişkenimiz olur.

$$\ln x^{\frac{1}{3}} + \ln \xi = \ln y \quad (3.39)$$

Sol taraf tek $\ln$ fonksiyonu içinde toplayalım.

$$\ln \xi x^{\frac{1}{3}} = \ln y \quad (3.40)$$

İçler eşitlenip benzer değişkeni ξ çekilirse;

$$\xi = x^{-\frac{1}{3}} y \quad (3.41)$$

bulunur. Benzer şekilde Denklem (3.37)' den ilk benzerlik fonksiyonumuzu bulalım.

$$\frac{d\bar{x}}{3\bar{x}} = \frac{d\bar{u}}{\bar{u}} \quad (3.42)$$

Her iki tarafında integralini alırsak $\bar{u}$ ile ilişkili ilk benzerlik fonksiyonumuz integral sabitinden gelecektir. Buradan;

$$f(\xi) = x^{-\frac{1}{3}} \bar{u} \quad (3.43)$$

bulunur. $\bar{v}$ ile ilişkili benzerlik fonksiyonu için Denklem (3.37)' nin aşağıdaki kısmını alalım.

$$\frac{d\bar{v}}{\bar{v}} = \frac{d\bar{x}}{-3\bar{x}} \quad (3.44)$$

Her iki tarafın integrali alınır ve integral sabiti olarak son benzerlik fonksiyonumuz çekilirse;

$$g(\xi) = x^{\frac{1}{3}} \bar{v} \quad (3.45)$$

bulunur. Son olarak $\bar{U}_{\infty}$ fonksiyonuna ait benzerlik değişkenimiz aşağıdan bulunur.

$$\frac{d\bar{x}}{3\bar{x}} = \frac{d\bar{U}_\infty}{\bar{U}_\infty} \quad (3.46)$$

Buradan gelecek son benzerlik fonksiyonumuz;

$$h(\xi) = x^{-\frac{1}{3}}\bar{U}_\infty \quad (3.47)$$

olur. Yukarıda bulduğumuz tüm yeni benzerlik değişkeni ve benzerlik fonksiyonları kısmi diferansiyel denklemin adi denkleme indirgedikten sonra içereceği fonksiyonlar ve değişkenler olacaktır. Özetle Denklem (3.24) ve (3.25)'de bulunan değişkenleri benzerlik fonksiyonu ve benzerlik değişkeni cinsinden yazalım;

$$\begin{aligned} u &= x^{\frac{1}{3}} f(\xi) \\ v &= x^{-\frac{1}{3}} g(\xi) \\ U_\infty &= x^{\frac{1}{3}} h(\xi) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Referans verilen çalışmaların ışığında genellikle kayıp olmaksızın U_∞ ile ilişkili benzerlik fonksiyonu $h(\xi) = 1$ alınabilir. Denklem (3.24) ve (3.25) için türev operatörleri de benzerlik değişkeni ve fonksiyonları cinsinden yazılmalıdır. Öncelikle benzerlik değişkeninin türevlerini aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = x^{-\frac{1}{3}} \quad (3.49)$$

Türev operatörleri ise şu şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = x^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = x^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Bu operatörlerin yardımı ile sınır tabakası içerisindeki terimleri hesaplayalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(\xi) - \frac{1}{3}x^{-1}\frac{df}{d\xi}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x^{-\frac{2}{3}}\frac{dg}{d\xi}$$

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

(3.51)

Denklem (3.24)' ün tüm terimleri buraya kadar simetri parametreleri ile hesaplanan benzerlik değişkeni ve fonksiyonları cinsinden bulunmuştur. Hesaplanan terimleri Denklem (3.24)' e yerleştirelim;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}f^2(\xi) - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}yf(\xi)f'(\xi) + x^{-\frac{1}{3}}g(\xi)f'(\xi) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ & + \left(k_2 + (k_1 - k_2) \frac{1-n k_3 (f'(\xi))^n (1+k_3 (f'(\xi))^n)^{-1}}{(1+k_3 (f'(\xi))^n)} \right) x^{-\frac{1}{3}}f''(\xi) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Denklemin her iki tarafını $3x^{\frac{1}{3}}$ ile çarpalım ve sol taraftaki ikinci terimde kalan değişken katsayılarının benzerlik değişkenine eşit olduğunu dikkat ederek;

$$\begin{aligned} & f^2(\xi) - \xi f(\xi)f'(\xi) + 3g(\xi)f'(\xi) = \\ & 1 + 3 \left(k_2 + (k_1 - k_2) \frac{1-n k_3 |f'(\xi)|^n (1+k_3 |f'(\xi)|^n)^{-1}}{(1+k_3 |f'(\xi)|^n)} \right) f''(\xi) \end{aligned} \quad (3.53)$$

olarak hesaplayalım. Aynı işlemler süreklilik denkleminde de uygulanırsa;

$$f(\xi) - \xi f(\xi)f'(\xi) + 3g'(\xi) = 0 \quad (3.54)$$

elde edilir. Dönüştürülmüş sınır şartları ise;

$$f(0) = 0$$

$$g(0) = 0$$

$$f(\infty) = 1$$

$$f'(\infty) = 0$$

(3.55)

olarak bulunur. Dikkat edilirse, indirgenmiş denklemlerde orijinal değişkenlerin tümü kaybolmuş, yeni benzerlik değişkeni ve fonksiyonları ortaya çıkarmıştır. Bu sayede denklemlerin simetrileri kabul edip, dönüşümün başarı ile gerçekleştiği söylenebilir. Bundan sonraki kısımda ise, adi diferansiyel denklem forma indirgenmiş sınır tabakası denklemlerine sayısal çözüm uygulanacaktır.

3.4 Sınır Tabakası Denklemlerinin Sayısal Çözümleri

Denklem (3.53) ve (3.54)' ün sayısal çözümlemeye uygun hale getirebilmek için ilk olarak sistemi birinci mertebe diferansiyel denklem haline getirelim. Bunun için aşağıdaki yeni değişkenlerimizi tanımlayalım.

$$f(\xi) = f_1(\xi), \quad f'(\xi) = f_2(\xi) \text{ ve } g(\xi) = f_3(\xi) \quad (3.56)$$

Yukarıdaki ifadeyi bir kez türevini alalım.

$$f'(\xi) = f_1'(\xi), \quad f''(\xi) = f_2'(\xi) \text{ ve } g'(\xi) = f_3'(\xi) \quad (3.57)$$

Dikkat edilirse yukarıdaki yeni değişkenler sayesinde Denklem (3.53) ve (3.54) aşağıdaki birinci mertebe diferansiyel denklem sistemi haline indirgenir.

$$\begin{aligned}
f_1' &= f_2 \\
f_2' &= \frac{(f_1^2 - \xi f_1 f_2 + 3 f_3 f_2 - 1)}{3 \left(k_2 + (k_1 - k_2) \frac{1-n k_3 |f_2|^n (1+k_3 |f_2|^n)^{-1}}{(1+k_3 |f_2|^n)} \right)} \\
f_3' &= \frac{f_1 - \xi f_2}{-3}
\end{aligned}
\tag{3.58}$$

Sınır şartlarımız ise;

$$\begin{aligned}
f_1(0) &= 0 \\
f_1(\infty) &= 1 \\
f_3(0) &= 0 \\
f_2(\infty) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.59}$$

Denklem (3.58)' de verilen diferansiyel denklem sistemi Denklem (3.59) şartları altında Matlab programının bir sonlu farklar çözücüsü olan *bvp4c* kullanılarak çözülmüştür. Matlab yazılımının *bvp4c* komutu standart halde ele aldığımız problemin her değerinde hata toleransını sağlamış ve başarılı sonuçlar verdiğiinden herhangi bir sonlu farklar algoritmasının bilgisayar programı uyarlamasına gerek duyulmamıştır.

Sınır tabakası akışında, plakaya uygulanan kuvvet plaka üzerindeki kayma gerilmesinin alan boyunca integrasyonu ile bulunur. Dolayısıyla plakaya etki eden sürüklenme kuvveti katı yüzeydeki kayma gerilmesi ile ilişkilidir. Denklem (3.12)' de verilen kayma gerilmesi τ_{xy} sınır tabakası değişkenleri cinsinden boyutsuz olarak plaka üzerinde;

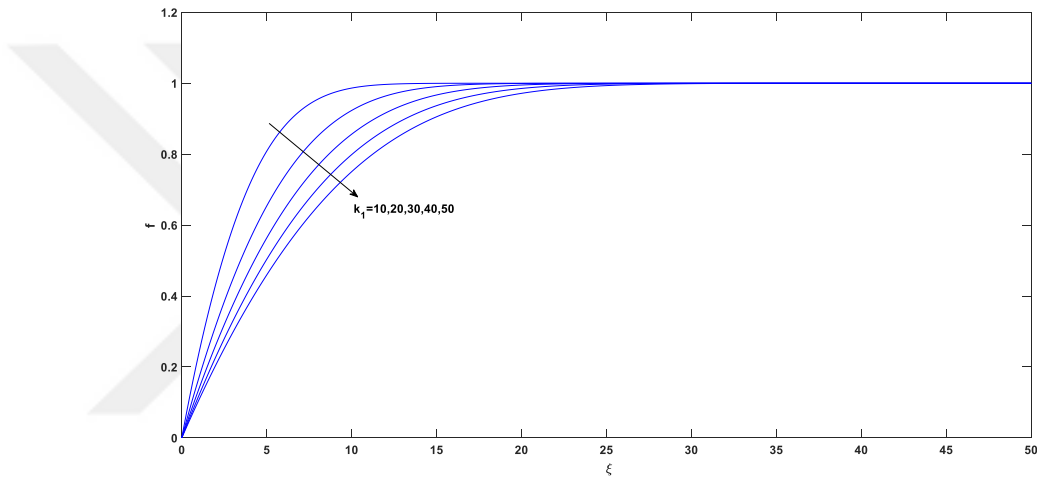
$$\tau^* = k_2 f'(0) + (k_1 - k_2) (1 + k_3 |f'(0)|^n)^{-1} f'(0)
\tag{3.60}$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Yukarıdaki kayma gerilmesinin tayini için Denklem (3.58)' de verilen sistemin çözüm matrislerinin ikinci satırının ilk elemanı yani $f_2(0)$ kullanılmadır, kısaca $f'(0) = f_2(0)$ ' dir.



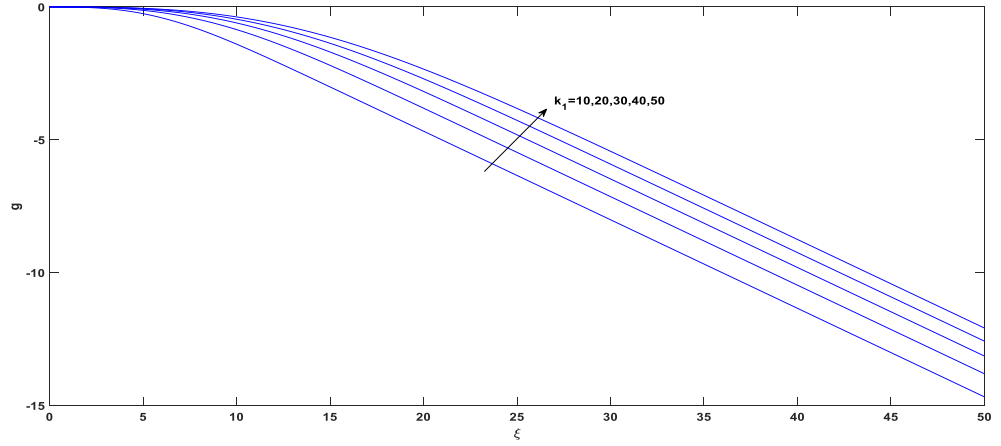
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri sonucu oluşturulmuş grafikler vasıtası ile Cross akışkan parametrelerinin sınır tabakası davranışı üzerindeki etkileri tartışılacaktır. Cross akışkan ve Newtonyen akışkan arasındaki farklar sınır tabakasının değişimi üzerinden karşılaştırılacaktır. Kısmi diferansiyel denklemleri çözmek yerine çok daha kolay olan adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine ulaşılmıştır. Tüm grafikler Matlab ortamında *bvp4c* komutunun verdiği sayısal çıktılar kullanılarak çizdirilmiştir.



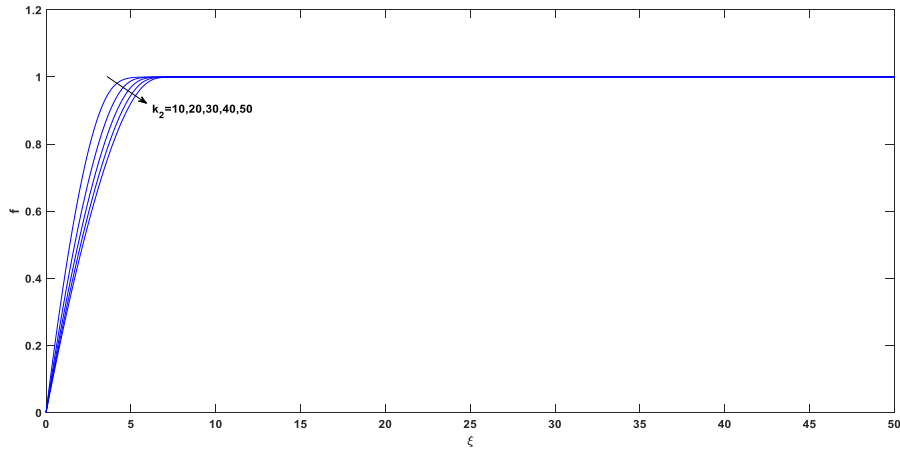
Şekil 4.1. Benzerlik fonksiyonu f' nin farklı k_1 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$)

Şekil (4.1)' de farklı k_1 değerlerinde akışkan hızının plaka doğrultusunda bileşeniyle alakalı benzerlik fonksiyonu f' in benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi verilmiştir. Benzerlik fonksiyonunun yapısı gereği f deki artış u hızındaki artış ile ilişkilendirilebilir. k_1 Cross akışkan özelliğinin artan değerlerinde akışkan hızının, f değerindeki azalış dolayısıyla azaldığı söylenebilir. Azalan akışkan hızı momentumun korunumu gereği daha kalın sınır tabakasına işaret etmektedir. Başka türlü, sınır tabakası içerisindeki bir noktada k_1 değeri arttığında akışkan hızı azalacaktır. Bu demek oluyor ki, hızı az olan noktadan uniform ya da en yüksek hıza ulaşmak için daha çok akışkan tabakası geçmemiz gerekmektedir. Dolayısıyla o noktadaki sınır tabakası kalınlığı daha büyük olmalıdır.



Şekil 4.2. Benzerlik fonksiyonu g ' nin farklı k_1 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$)

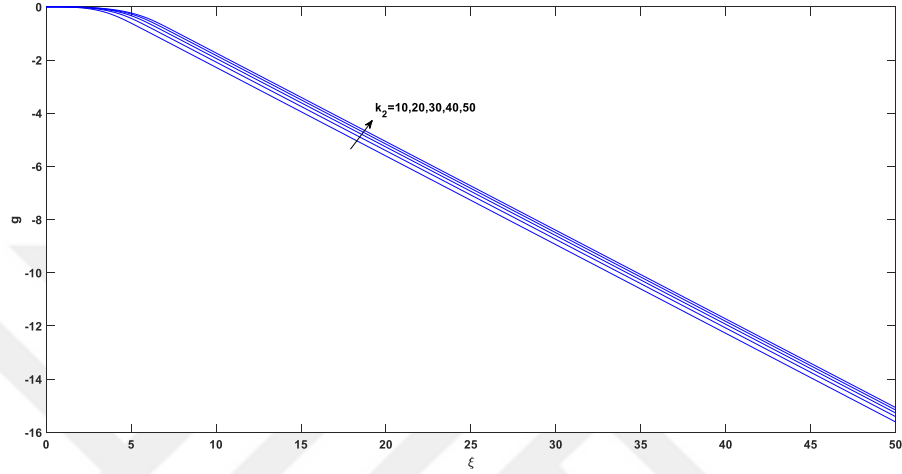
Şekil (4.2)' de akışkan hızının düşey bileşeni ile alakalı benzerlik fonksiyonu g ' nin benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi verilmiştir. Akışkan hızının dikey bileşeninin sınır tabakası içerisinde yatay bileşene kıyasla oldukça küçük olduğu önceki kısımlarda bahsedilmişti. Dolayısıyla bu eğrilerin yapısı sınır tabakası kalınlığı ile doğrudan bağlantılı değildir. Ancak yine de süreklilik denklemi üzerinden sınır tabakası kalınlığına etki eder. Önceki grafiğe benzer şekilde Artan k_1 değerlerinde akışkan hızının azaldığı söylenebilir.



Şekil 4.3. Benzerlik fonksiyonu f ' nin farklı k_2 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$)

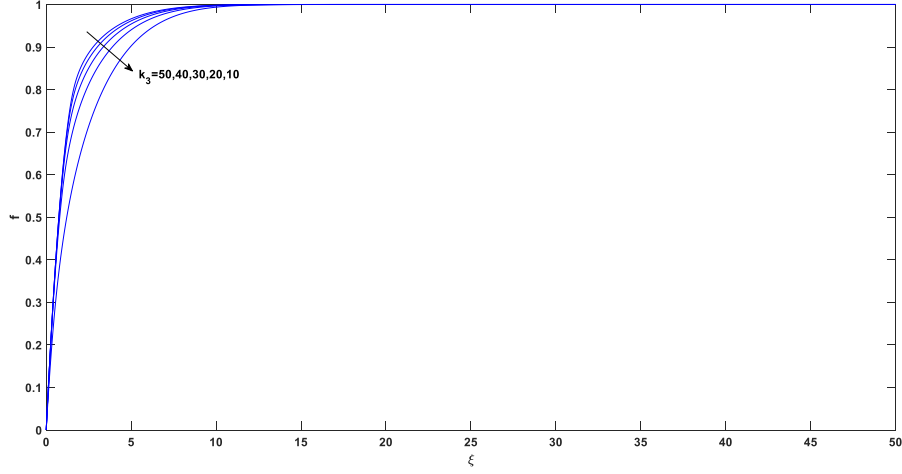
Şekil (4.3)' de benzerlik fonksiyonu f ' in farklı k_2 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi verilmiştir. k_2 parametresi aslında limit viskozite

değeri ile ilişkili olduğundan, önceki grafiklerdeki gibi arttıkça akışkan hızında azalmaya yol açacaktır. Bu da aynı şekilde daha kalın sınır tabakasına yol açar. Yalnız dikkat edilirse aynı değerlerde k_1 ile karşılaştırıldığında k_2 'nin akışkan hızı üzerindeki etkisi daha az gözükmemektedir. Bunun nedeni viskozite-deformasyon hızı grafiklerindeki power-law bölgesine daha ileride girilmesi ile açıklanabilir.



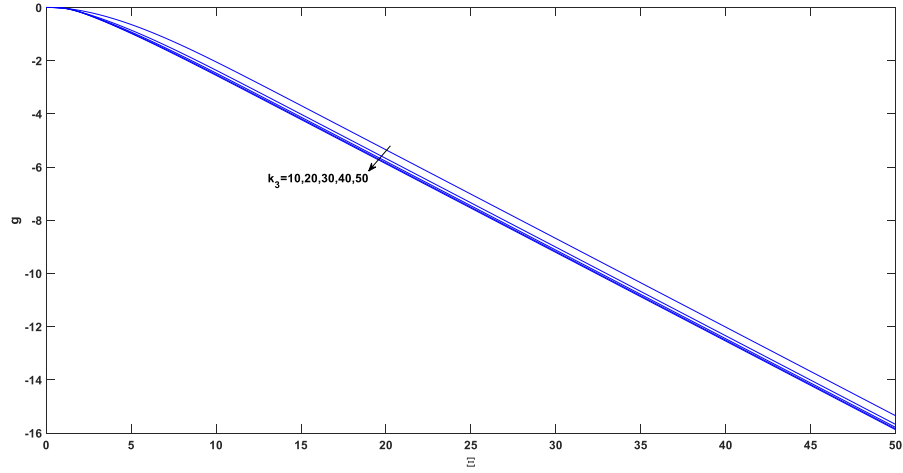
Şekil 4.4. Benzerlik fonksiyonu g' nin farklı k_2 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 1$, $k_3 = 1$, $n = 1,5$)

Şekil (4.4)'de ise aynı değerlerde benzerlik fonksiyonu g' nin davranışı çizilmiştir. k_1 durumundaki benzer davranışlar bu grafikte de verilmiş ve yine k_1 'e göre daha az bir etki gözlemlenmiştir.



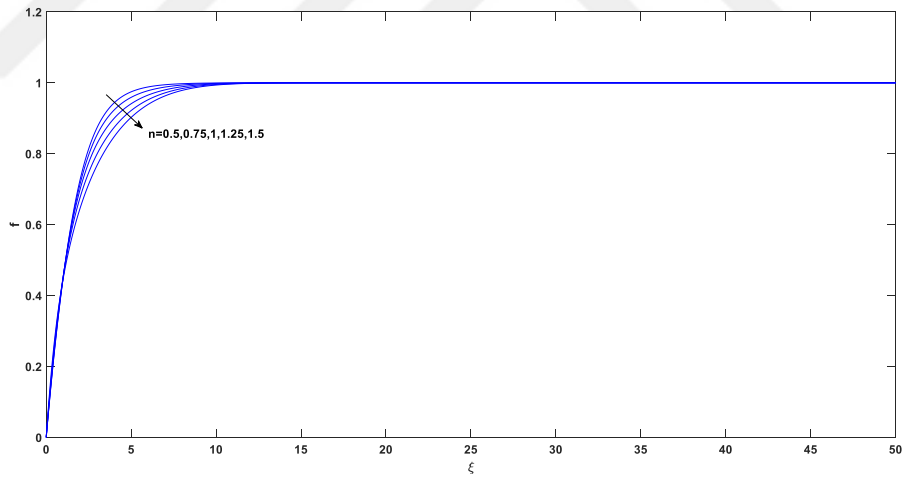
Şekil 4.5. Benzerlik fonksiyonu f' 'nin farklı k_3 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $n = 1,5$)

Şekil (4.5)' de akışkan hızının yatay bileşeni ile alakalı benzerlik fonksiyonu f' 'nin farklı k_3 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi verilmiştir. k_1 ve k_2 parametrelerinin viskozite ilişkilerinin aksine k_3 parametresi power-law bölgesinin davranışını belirleyen zaman sabiti ile ilişkilidir. Dikkat edilirse nihai denklemlerden, akışkan modelinin power-law kısmını çarpan etkisi ile kontrol edenin k_3 parametresi olduğu görülür. Bu matematiksel gözlemlerin uyumlu olarak da k_1 ve k_2 parametrelerinin aksine k_3 değerlerinde artışla birlikte akışkan hızı artmakta ve sınır tabakası daha ince hale gelmektedir. k_3 parametresinin artışı limit değerlerin ya da k_1 ve k_2 'nin akışkan davranışı üzerindeki etkisini azaltmaktadır.



Şekil 4.6. Benzerlik fonksiyonu g 'nin farklı k_3 değerleri için benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $n = 1,5$).

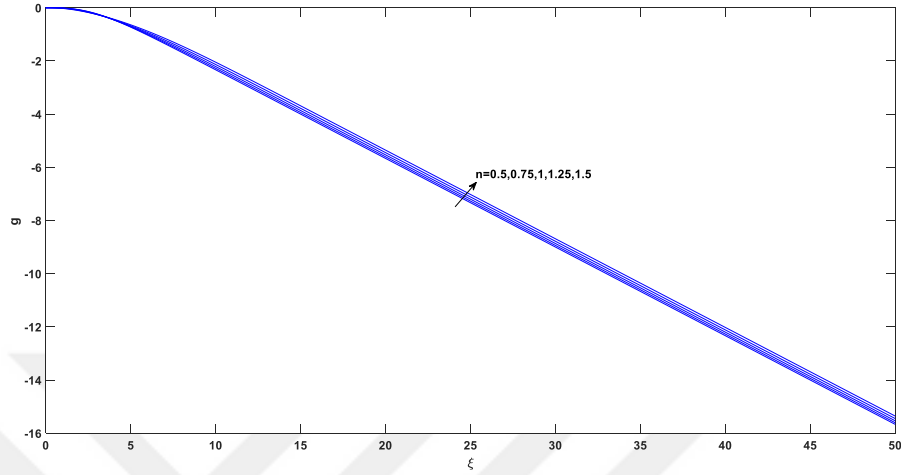
Bu ilk iki parametreye aykırı durum, Şekil (4.6)' daki benzerlik fonksiyonu g 'nin değerlerindeki mutlak değer artışı olarak da yorumlanabilir.



Şekil 4.7. Benzerlik fonksiyonu f 'nin benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişiminin, farklı power-law indeksi n değerlerinde gösterimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $k_3 = 10$)

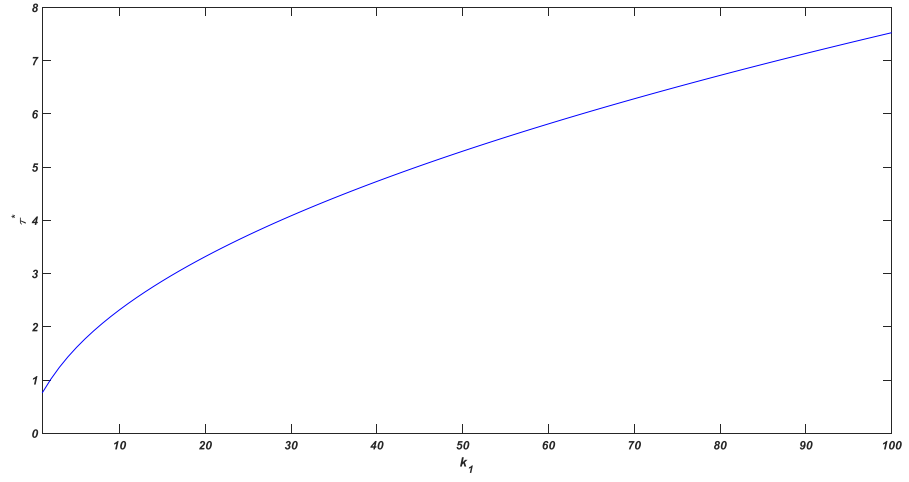
Şekil (4.7)' de akışkan hızı ile alakalı benzerlik fonksiyonumuz f 'nin benzerlik değişkeni ξ 'ye göre değişimi, farklı power-law indeksi n değerlerinde gösterilmiştir. Dikkat edilirse n değeri arttıkça akışkan hızı sadece çok dar bir bölgede değişmektedir. Bu değişim akışkan hızındaki azalış ve daha kalın sınır tabakasına işaret eder. Plakanın başlangıcı ve yakın bölgelerde akışkan davranışı n

değerine göre neredeyse hiç değişmediği, ancak düşük n değerlerinde akış hızının, sonsuzdan gelen akışkan hızını daha çabuk yakaladığı söylenir. Buradaki n değerinin artması ile akışkanın hareketinin zorlaşması Ostwald-de Waele modeli ile benzerdir.



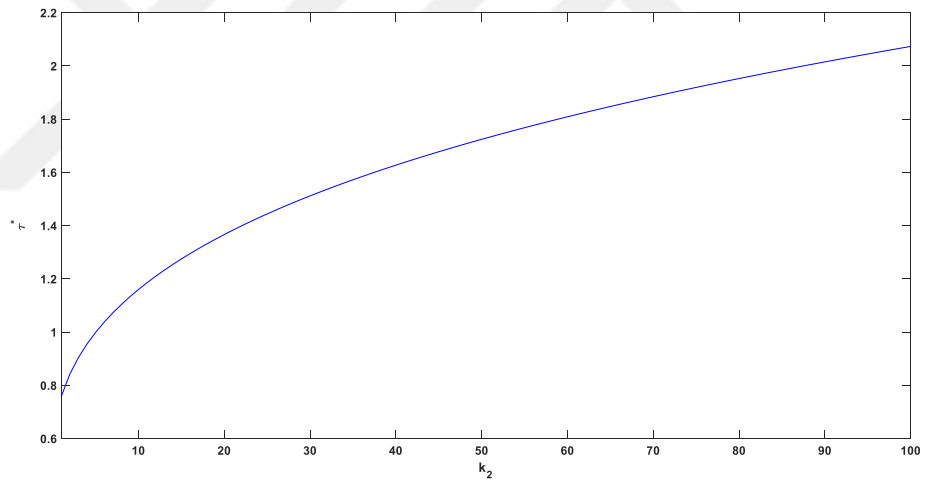
Şekil 4.8. Benzerlik fonksiyonu g ’ nin benzerlik değişkeni ξ ‘ye göre değişiminin, farklı power-law indeksi n değerlerinde gösterimi. ($k_1 = 11$, $k_2 = 1$, $k_3 = 10$).

Şekil (4.8)’ de ise bu sefer benzerlik fonksiyonu g ’ nin üzerindeki n değerinin etkisi tartışılmıştır. g fonksiyonu üzerindeki n değerinin etkisi, önceki akışkan hızını düşüren parametrelerin etki ettiği gibi ξ boyunca azaltmaktadır. Ancak bu etki grafikten görüldüğü üzere benzerlik değişkeni f ile karşılaştırıldığında oldukça sınırlı kalmaktadır.



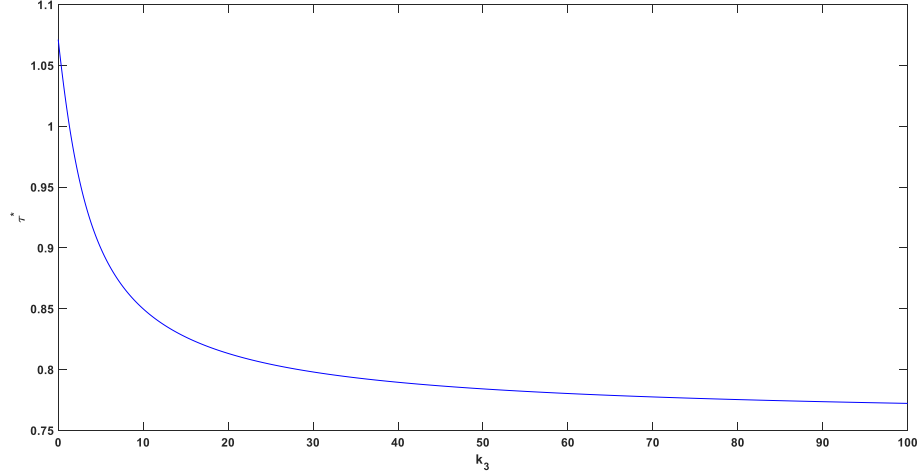
Şekil 4.9. Kayma gerilmesinin k_1 değerleri ile değişimi.

$$(k_2 = 1, k_3 = 1, n = 1,5)$$



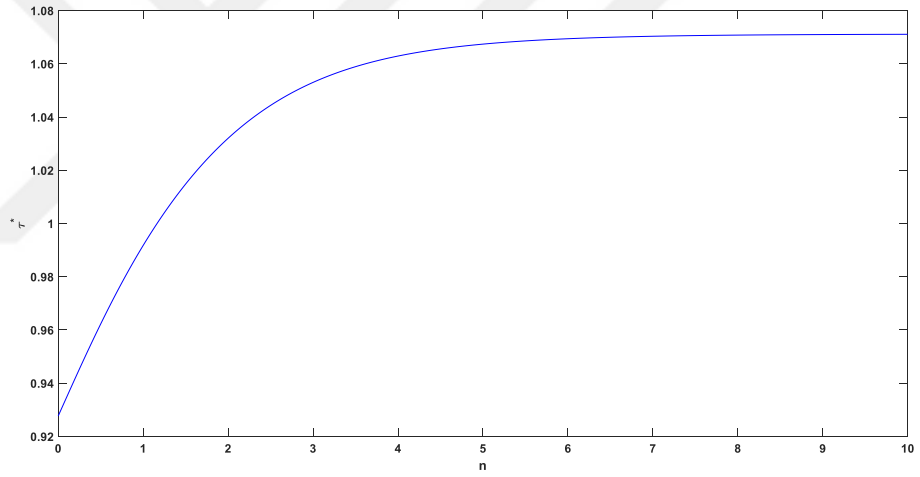
Şekil 4.10. Kayma gerilmesinin k_2 değerleri ile değişimi.

$$(k_1 = 1, k_3 = 1, n = 1,5)$$



Şekil 4.11. Kayma gerilmesinin k_3 değerleri ile değişimi.

$$(k_1 = 2, k_2 = 1, n = 1,5)$$



Şekil 4.12. Kayma gerilmesinin power-law indeksi n değerleri ile değişimi.

$$(k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1)$$

Şekil (4.9)-(4.12)' plaka üzerindeki boyutsuz kayma gerilmesinin Cross akışkan parametreleri ile değişimi verilmiştir. Şekil (4.9) ve (4.10)' da limit viskoziteler ile ilişkili k_1 ve k_2 parametreleri Newtonyen akışkanlarda olduğu gibi daha viskoz bir akışa yol açarak plaka üzerindeki kayma gerilmesini önce exponansiyel ve daha sonra doğrusala yakın bir şekilde arttırmaktadır. Zaman sabiti ile ilgili boyutsuz parametremiz k_3 ' ün kayma gerilmesi üzerindeki etkisi Şekil (4.11)' de verilmiştir. Kayma gerilmesi k_3 ' e göre exponansiyel bir şekilde azalmaktadır. Benzer şekilde artan k_3 değerleri akışkan hızını arttırdığından daha

ince bir sınır tabakasına yol açmaktaydı. İnce sınır tabakası akışkanın plakaya daha az bir kuvvet uyguladığına işaret etmektedir. Şekil (4.12)' de power-law indeksinin kayma gerilmesi üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Artan power-law indeksi ile akışkanın aynı miktarda deforme edebilmek için daha yüksek deformasyona maruz bırakmamız gerekir. Dolayısıyla akışkanın kabaran davranışı ortaya çıkmakta ve hızı azalmaktadır. Böylece artan n değerleri için plaka üzerinde kayma gerilmesi artmaktadır. Bu nihai artış, bir limit viskozite ile sonlandırılması gerektiğinden söz konusu artış bir değere yakınsayacak şekilde eksponansiyel olacaktır.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada sonsuzdan uniform hızla gelen Newtonyen olmayan bir akışkanın, akışa paralel katı bir yüzeye temas ettikten sonra oluşan davranışı incelenmiştir. Akışımız kararlı, laminar, sürtünmeli ve iki boyutludur. Sonsuzdan gelen akışın sürtünmesiz ve potansiyel akış teorisine uyduğu kabul edilmiştir. Problemden cevap olarak aranan plaka üzerinde akışkanın nasıl davrandığı ve akışkan parametrelerinin bu davranışa etkileridir. Ayrıca akışkanın plakaya olan etkisini uyguladığı kayma gerilmesi ile ilişkilendirmektir. Bütün bu soruların cevapları için akışkanın hareketini temsil eden momentum denklemlerinin elimizde olması gerekir. Problemden ele aldığımız akışkan Newtonyen olarak kabul edilseydi söz konusu denklemler Navier-Stokes denklemleri olacaktı. Bu yüzden bir Newtonyen olmayan akışkana ait daha genel denklemleri türetebilmek için Cross akışkan modeli ele alınmıştır. Bu model Newtonyen olmayan akışkanlara ait doğrusal olmayan görünür viskozite ve deformasyon hızı ilişkisini oldukça geniş bir deformasyon hızı aralığında başarı ile tahmin eder. Başlangıç, limit viskozite, zaman sabiti ve power-law indeksini içeren bu dört parametreye sahip modelin kayma gerilmeleri problemimiz için en uygun olan kartezyen koordinatlarda çıkarılmıştır. Bu hesaplanan kayma gerilmeleri ile oluşturulacak momentum denklemini çözmek için gerekecek işlem hacmi oldukça fazla olduğu için denklemler sınır tabakası teorisi kullanılarak sadeleştirilmiştir. Sınır tabakası teorisi kısaca fiziksel olarak baskın terimleri tutup, göz ardı edilecek terimleri ihmal etme üzerine kuruludur. Oluşturulan sınır tabakası denklemlerinin Cross akışkan ile ilgili tüm parametreleri içermekte ve Newtonyen akışkanların sınır tabaka davranışını sağladığı görülmüştür. Elde edilen sınır tabakası denklemleri kısmi diferansiyel olduğu için çözümleri oldukça karmaşık ve zorlayıcı olmaktadır. Bu yüzden denklemlerin değişmez kaldığı simetriler bulunarak, sistem adi diferansiyel denklemlere indirgenmiştir. Kullanılan simetriler Lie gruplarının bir alt kümesi olan ölçekleme dönüşümleridir. Ölçekleme dönüşümleri sınır tabakası problemlerinde genelde başarılı sonuçlar verdiği için öteleme, spiral dönüşüm yerine kullanılmıştır. Ölçekleme dönüşümü sonrası ortaya çıkan simetriler başarılı bir şekilde ele alınan momentum ve süreklilik denklemlerini adi diferansiyel denklemlere indirgemıştır. Daha sonra ortaya çıkan denklemler Matlab yazılımının hazır komutu olan `bvp4c` sınır değer problemleri için sonlu farklar çözücüsü ile çözülmüştür. Çözümlerin sayısal çıktılarından grafikler

oluşturulmuş ve akışkan parametrelerinin akış davranışı ve sınır tabakası kalınlığı üzerindeki etkileri tartışılmıştır. Son olarak bu çalışma kapsamında gerçekleştirilen teorik analiz ve sayısal çözümlerden aşağıdaki sonuçlar özetlenebilir.

Cross akışkanına ait viskozite terimlerinin artması ile akışkan hızı azalmakta ve sınır tabakası kalınlığı azalmaktadır. Akışkanın power-law ya da incelen davranışı ile alakalı zaman sabiti, akışkanın viskozitelerinin yol açtığı akış hızını azaltan davranışını engellemektedir. Dolayısı ile artan zaman sabiti değerlerinde akışkanın hızı artmakta ve sınır tabakası incelmektedir. İncelen davranışı temsil etmek için en önemli parametre olan üstel ya da power-law indeksi azaldıkça daha akışkan daha akıcı hale gelmekte hızı artmaktadır. Bu davranış klasik power-law akışkanı ile uyumludur. Dolayısıyla power-law indeksi azaldıkça akışkanın hızı artmakta ve sınır tabakası incelmektedir. Tam tersi durumda ise yani indeksin artan değerlerinde akışkan hızı yavaşlamakta ve sınır tabakası kalınlaşmaktadır. Son olarak plaka üzerindeki kayma gerilmesi başlangıç ve limit viskozite değerleri ile ilişkili boyutsuz parametrelerin artışı ile artmakta, zaman sabiti ile ilişkili boyutsuz parametrenin artışı ile de azalmaktadır. Viskozite ile ilgili boyutsuz parametrelere benzer şekilde artan power-law indeksi değerlerinde kayma gerilmesi artmakta, ancak bu artış viskozite parametrelerindeki doğrusal artıştan farklı olarak sonsuz bir değer yerine yerine sonlu bir değere eksponansiyel yakınsayarak sonlanmaktadır.

Bu çalışmada sıcaklık ve ısı transferi etkileri göz ardı edilmiştir. Probleme termal koşullar önerilerek benzer şekilde ısıl sınır tabaka davranışındaki akışkan etkileri incelenebilir. Akışa neden olan sonsuzdan gelen potansiyel akış yerine manyetik alan etkisi ile hareket veya hareketli düzlem koşulları alınabilir. Bu şartların altında sınır tabakasının davranışı incelenebilir. Sınır tabaka denklemlerini adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek yerine, direk olarak sonlu elemanlar veya sonlu farklar algoritmaları ile çözümleri yapılabilir. Bu çalışmada bulunan simetriler sadece ölçekleme dönüşümlerinden elde edilmiştir. Spiral, öteleme ve hatta Lie grup analizi ile en genel simetriler elde edilebilir. Bu simetriler kullanılarak dönüştürülmüş adi diferansiyel denklem sistemi üzerinde çeşitli sonlu farklar algoritmaları denenip çözücülerin hassasiyetleri tartışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Morrison, F.A. Understanding Rheology, Oxford University Press, Newyork ABD, 2001, 446.
2. Morrison, F.A. An Introduction of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, Newyork ABD, 2013, 946.
3. Zhou, E., Bayazitoğlu, Y. Developing laminar convection of power law fluids in vertical open ended channel. 2019, 128, 354-362.
4. Molati, M., Hayat, T., Mahomed, F. Rayleigh problem for MHD Sisko fluid. nonlinear analysis: Real World Applications 2019, 10, 3428-3434.
5. R.B., Bird. Usefull Non-newtonian models. Annual Review of Fluid Mechanics. 197, 8, 13-34.
6. D.M., Meter., R. B., Bird. Tube flow of non-Newtonian polymer solutions: Part I Laminar Flow and rheological models. A. I. Ch. E Journal. 1964, 10(6), 878-881.
7. Mitsuishi, N., Aoyagi, Y. non-Newtonian flow in non-circular ducts. Chemical Engineering Science. 1969, 24, 309-319.
8. Matsuhisa, S., Bird, R.B. Analytical and numerical solutions for laminar flow of the non-Newtonian ellis fluid. American Institute of Chemical Engineers Journal. 1965, 11(4), 588-595.
9. Yasuda, K. A MultiMode viscosity model and its applicability to non-Newtonian Fluids. Journal of Textile Engineering. 2006, 52(4), 171-173.
10. Galindo-Rosales, F.J., Rubio-Hernandez, F.J., Sevilla, A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids. Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011, 166(5-6), 321-325
11. Koszkuł, J., Nabiaćek, J. Selected methods of modelling of polymer during the injection moulding process. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. 2007, 24(1), 253-259.
12. Abbas, G., Irawan, S., Kumar, S., Memon, K.R., Khalwar, S.A. Characteristics of oil well cement slurry using hydroxypropylmethylcellulose. Journal of Applied Sciences. 2014, 14, 1154-1160.
13. Al –Zahrani, S.M., Al-Fariss, T.F. A general model for the viscosity of waxy oils. Chemical Engineering and Processing. 1998, 37, 433-437
14. Raju, K.V.S.N., Krishna, D., Rama Devi, G., Reddy, P. J., Yaseen, M. Assesment of applicability of Carreau, Ellis, and Cross Models to the viscosity data of resin solutions*. Journal of Applied Polymer Science. 1993, 48, 2101-2112.
15. Boyd, J., Buick, M.J., Green, S. Analysis of the Casson and Carreau-Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flow using the Lattice-Boltzmann method. Physics of Fluids. 2007, 19(093103), 1-13
16. Kacou, A., Rajagopal, K. R., Szeri, A. Z. Flow of a fluid of the differential type in a journal bearing. Journal of Tribology. 1987, 109, 101-107.
17. Aksoy, Y., Pakdemirli M. Approximate analytical solutions for flow of a third-grade fluid through a parallel-plate channel filled with a porous medium. Transport in Porous Media. 2010, 83(2), 375-395.
18. Dash, R. K., Mehta, K. N. Casson fluid flow in a pipe filled with a homogeneous porous medium. International Journal of Engineering Science. 1996, 4(10), 1145-1156.
19. Cross. M. M. Rheology of non-Newtonian Fluids: A new flow equation For pseudoplastic Systems. Journal of Colloid Science. 1965, 20(5), 417-437

20. Hayat, T., Khan, M.I., Tamoor, M., Waqas, M., Alsaedi, A. Numerical simulation of heat transfer in MHD stagnation point flow of Cross fluid model towards a stretched surface. *Results in Physics*, 2017, (7), 1824-1827.
21. Khan, M., Manzur, M., Rahman, M. On axisymmetric flow and heat transfer of Cross fluid over a radially stretching sheet. *Results in Physics*, 2017, 7, 3762-3772
22. Khan, M.I., Waqas, M., Hayat, T., Alsaedi, A. Magneto-hydrodynamical numerical simulation of heat transfer in MHD stagnation point flow of Cross fluid model towards a stretched surface. *Physics and Chemistry of Liquids*. 2018, 56(5), 584-595.
23. Khan, M.I., Hayat, T., Khan, M.I., Alsaedi, A. Activation energy impact in nonlinear radiative stagnation point flow of Cross nanofluid. *International Communication in Heat and Mass Transfer*. 2018, 91, 216-224.
24. Pakdemirli, M., Hayat, T., Aksoy Y. Group-theoretic approach to boundary layer equations of an Oldroyd-B fluid. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2013, 68(12), 785-790.
25. Deger, G., Pakdemirli, M., Aksoy, Y. Symmetry analysis boundary layer equations of an upper convected Maxwell fluid with magnetohydrodynamic flow. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2011, 66(5), 321-328.
26. Aksoy Y., Pakdemirli, M., Khalique C.M. Boundary layer equations and stretching sheet solutions for the modified second grade fluid. *International Journal of Engineering Science*. 2007, 45(10), 829-841.
27. Pakdemirli, M., Aksoy, Y., Yürüsoy, M., Khalique C.M. Symmetries of boundary layer equations of power-law fluids of second grade. *Acta Mechanica Sinica*. 2008, 24 (6), 661-670
28. Sarı, G., Pakdemirli, M., Aksoy, Y. Boundary layer equations and Lie group analysis of a Sisko fluid. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, 2012(259608), 1-9.
29. Aksoy, Y., Hayat, T., Pakdemirli, M. Boundary layer theory and symmetry analysis of a Williamson fluid. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2012, (67A), 363-368.
30. Hayat, T., Pakdemirli, M., Aksoy, Y. Similarity solutions for boundary layer equations of a Powell-Eyring fluid. *Mathematical and Computational Applications*. 2013, 18(1), 62-70.

EKLER (Matlab Programı)

```
tic
clear all
global n k1 k2 k3
n=1.5;
k1=2;
k2=1;
k3=1;
solinit = bvpinit(linspace(0,50,100),[1 0 0]);
i=0;
range=0:0.01:10;
for n=range
    i=i+1;
    sol = bvp4c(@blp,@fsbc,solinit);
    x = sol.x;
    y = sol.y;
    % plot(x,y(1,:));
    K(i)=y(2,1);
    stress(i)=k2*y(2,1)+(k1-
    k2)*((1+k3*abs(y(2,1)))^n)^-1)*y(2,1);
    % hold on
end
plot(range,stress)
toc
```

```
function fprime= blp(x,f)
global n k1 k2 k3
fprime= [ f(2)
          (f(1)^2-x*f(1)*f(2)+3*f(3)*f(2)-
          1)/(3*(k2+(k1-k2)*(1-
          n*k3*(abs(f(2))^n)*(1+k3*abs(f(2))^n)^-
          1)*((1+k3*abs(f(2))^n)^-1)))
          (f(1)-x*f(2))/-3];
end
```

```
function res = fsbc(fa,fb)
res = [fa(1)
        fa(3)
        fb(1)-1];
end
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hikmet SÜMER

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1986

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sumerhikmet@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Karşıyaka Anadolu Lisesi, 2004

Lisans : Dicle Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2008

Mesleki Deneyim

Adnan Menderes Havalimanı Çelebi Hava Servisi 2009-2009

Bayraklı İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü 2009-2010

Gençlik ve Spor Bakanlığı İzmir GHSİM 2011-2015

İzmir Gıda Kontrol Laboratuvar Müdürlüğü 2015-Halen