

**NEWTONYEN OLMAYAN KALKÜLÜS VE
GENEL KONVEKSLİK**

Muhammet ÖZBUCAK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Dr.Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

2019

Her hakkı saklıdır

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEWTONYEN OLMAYAN KALKÜLÜS VE GENEL KONVEKSİLİK

Muhammet ÖZBUCAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI

2019

Her hakkı saklıdır

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ danışmanlığında, Muhammet ÖZBUCAK tarafından hazırlanan bu çalışma 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Havva Kavurmacı ÖNALAN

İmza: 

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ahmet OCAK AKDEMİR

İmza: 

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

İmza: 

Yukarıdaki imzalar adı geçen öğretim üyelerine ait olup;

Enstitü Yönetim Kurulunun 20/09/2019 tarih ve 19. / 33.3 ... nolu kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEWTONYEN OLMAYAN KALKÜLÜS VE GENEL KONVEKSLİK

Muhammet ÖZBUCAK

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr.Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

Bu tezin temel amacı Newtonyen olmayan aritmetik ile ilgili bilgi veren ve konvekslik ile ilişkisini gösteren bir derleme oluşturmaktır. Tezde α aritmetik tanımı ile birlikte bazı bilinen aritmetikler uygulama olarak verilmiştir. Newtonyen olmayan analiz ile konvekslik ve klasik eşitsizliklerle ilgili bilgi verilmiştir. Son olarak Newtonyen olmayan analizdeki konvekslik tanımına yer verilmiştir.

2019, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, α -aritmetik, $*$ -kalkülüs, Geometrik aritmetik, Ana-geometrik aritmetik, bi-geometrik aritmetik.

ABSTRACT

Master Thesis

NON-NEWTONIAN CALCULUS AND GENERAL CONVEXITY

Muhammet ÖZBUCAK

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Dr.Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

The main purpose of this thesis is to provide a review about non-Newtonian arithmetic and its relationship with convexity. In the thesis, α arithmetic definition and some known arithmetic applications are given. Also Information about Non-Newtonian analysis, convexity and classical inequalities are given. Finally, the definition of convexity in non-Newtonian analysis is presented.

2019, 48pages

Keywords: Convexity, α -arithmetic, $*$ -calculus, Geometricarithmetic, Anageometricarithmetic, Bigeometric arithmetic.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmalarımда etkin katkısı bulunan ve tüm babacanlığı ile beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ'ye

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans sürecinde bana yardımcı olan Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e, ve değerli arkadaşım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Evrim TOKLU'ya, teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	11
3.1. α -Aritmetik	11
3.2. α -Aritmetiğin Bazı Uygulamaları	15
3.2.1. Geometrik Türev	15
3.2.2. Geometrik İntegral	16
3.2.3. Ana-geometrik Türev	18
3.2.4. Ana-geometrik İntegral	19
3.2.5. Bi-geometrik Türev	21
3.2.6. Bi-geometrik İntegral	22
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	24
4.1. Yıldızlı Aritmetik ($*$ – Aritmetik)	24
4.2. $*$ -Türev	25
4.3. $*$ - Ortalama	26
4.4. $*$ -İntegral	27
4.4. Klasik Analizle İlgisi.....	28
4.7. İki Aritmetik Arasındaki İlişki	29
4.8. Geometrik Aritmetiğin Uygulaması.....	30
4.9. Newtonyen Olmayan Konvekslik ve α –Ortalamalar	31
4.10. Genelleştirilmiş $*$ –Konveks Fonksiyon.....	35
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	38
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER DİZİNİ

f_{α}^*	f fonksiyonunun α -türevi
$f_{\alpha}^*(x_0)$	f fonksiyonunun x_0 noktasındaki α -türevi
f'	fonksiyonun klasik türevi
$[\tilde{D}f](a)$	f nin a daki geometrik türevi
$\tilde{D}f$	f fonksiyonunun geometrik türevi
$\int_r^s f$	f fonksiyonunun $[r, s]$ aralığındaki geometrik integrali
$[\tilde{D}f]$	Anageometrik türev
$\int_{\sim r}^s f$	$[r, s]$ pozitif aralığı üzerinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonun anageometrik integrali
$G_r^s f$	Pozitif bir $[r, s]$ aralığında, f nin bir anageometrik gradyeti
$[\tilde{D}f](a)$	f nin bi-geometrik türevi
$\tilde{\int}_{\sim r}^s f$	Pozitif bir $[r, s]$ aralığında tanımlı pozitif sürekli bir f fonksiyonunu bi-geometrik integrali
$\tilde{G}_r^s f$	Pozitif $[r, s]$ aralığı üzerinde tanımlı, pozitif f fonksiyonunun bi-geometrik gradyenti
${}^{\alpha}\lim$	α -limiti
R_{α}	α – reel sayılar kümesi
R_{β}	β – reel sayılar kümesi
Z_{α}	α – tamsayılar sayılar kümesi

R_{exp}	exp – reel sayılar kümesi
A_{α}	α – aritmetik ortalama
G_{α}	α – geometrik ortalama
H_{α}	α – harmonik ortalama
$\tilde{A}_{\alpha}$	α – ağırlıklı aritmetik ortalama
$\tilde{G}_{\alpha}$	α – ağırlıklı geometrik ortalama
$\tilde{H}_{\alpha}$	α – ağırlıklı harmonik ortalama
A_{exp}	çarpımsal aritmetik ortalama
G_{exp}	çarpımsal geometrik ortalama
H_{exp}	çarpımsalharmonik ortalama
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean uzay

I	$\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	I 'nın içi
f'	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks Küme	3
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	4
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon	5
Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon	7



1. GİRİŞ

Matematik tarihindeki önemli gelişmelerinden biri de Newton (1643-1727) ve Leibniz'in (1646-1716) türev ile integral arasındaki ilişkiyi çalışmalarıdır. Türev ve integral, analiz ve hesaplama için temel teşkil eder. Bunun bir sonucu olarak Kalkülüs ya da Sonsuz Küçükler Kalkülüsü geliştirilmiştir. Bu çalışmaların olduğu dönemlerde matematik evrensel bir bilim konumuna gelmiştir. Bugün Kalkülüs bilim mühendislik ekonomi vb. gibi birçok alanda yaygın bir kullanıma sahiptir. Newton ve Leibniz matematik tarihinde önemli bir yeri olan diferansiyel ve integral hesaplamaları üzerine yoğun çalışmalar yaptı. Bu ilerleme özellikle türevin, diferansiyel denklemlerle olan ilişkisinin belirlenmesi sürecine uzanmış ve çoğu bilim dalında karşılık bulmuştur. Özellikle astronomideki gelişmeler matematiği başka bir düzeye ve yeni bir döneme taşımıştır.

Kalkülüsün keşfi, matematikte ve genel olarak bilimde bütünüyle yeni ufuklar açmıştır. Bu süreçte çoğu bilim insanı sonsuz büyük ve sonsuz küçük çokluklardan mantıksal ve kavramsal sonuçlar çıkararak bunları fonksiyonlar limit ve integral kavramlarına uygulamışlardır.

1967-1988 yılları arasında JaneGrossman, Michael Grossman ve Robert Katz klasik 1967'de üretilen ve daha sonra Newtonyen olmayan Calculus adıyla anılacak bir konu üzerine bir dizi yayın yaptılar. 1972'de Grossman ve KatzNon-NewtonianCalculus adlı eserlerini yayınlamaları bu alandaki en önemli kaynağı oluşturdular. Bu kitap, tez çalışmasında'da temel kaynak olarak kullanılmıştır. Klasik hesapta kullanılan tüm kavramların Newtonyen olmayan hesap sınıfının her bir üyesi içinde karşılığı vardır. Bu ise bize günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere bakış açısını geliştirme adına yeni fikirler verecektir.

Newtonyen olmayan Kalkülüsün temeli üreteç adı verilen fonksiyonlar yardımıyla aritmetik operasyonların yeniden oluşturulmasına dayanır. Böyle farklı üreteçlerin seçilmesiyle birçok yeni aritmetik üretilmiştir. Bunların en önemlisi çarpımsal (geometrik) aritmetiktir.

Konvekslik kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard’ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi’ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (Hardy et al. 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır (BeckenbachandBellman 1961).

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “SelectedTopics on Hermite-HadamardInequalitiesand Applications” isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (DragomirandPearce 2000). Günümüzde de konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan birçok değerli araştırmacı vardır.

Tezin amacına uygun olarak Newtonyen olmayan kalkülüs için ağırlıklı ortalamalar ve daha da önemlisi *- konveks fonksiyon tanımını veren Kadak U. ve Güreffe Y. nin “A Generalization on Weighted Means and Convex Functions with respect to the Non-Newtonian Calculus” isimli makaleleri temel kaynaklardan biri olarak kullanılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

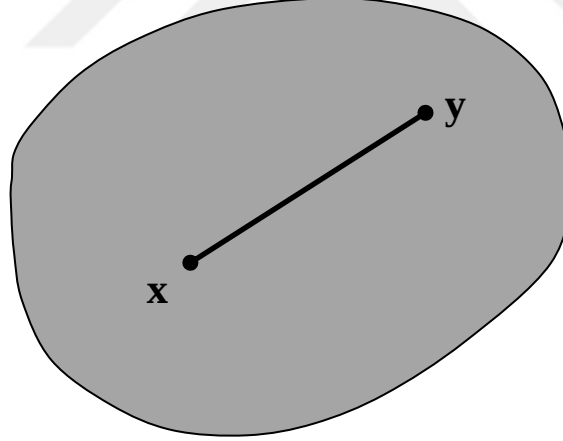
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

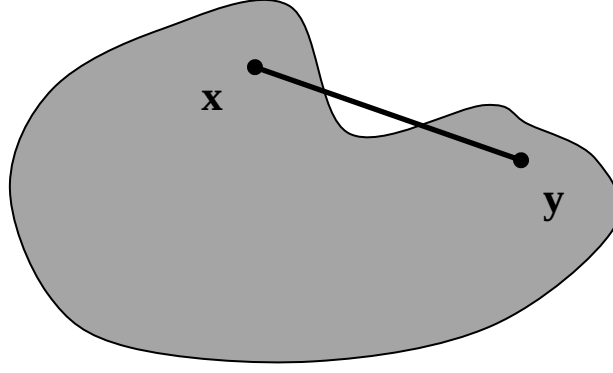
Tanım 2.1.1. Konveks Küme: L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks Küme



Şekil 2.2.Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (Pečarić *et al.* 1992).

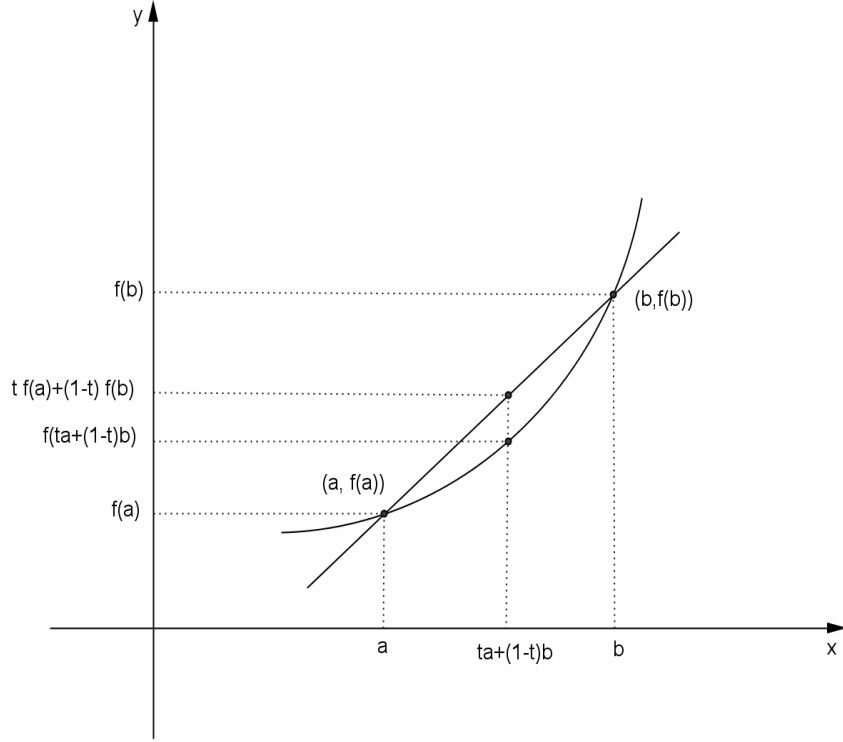
Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f ’ ye konkav (strictly konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır. Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$ ifadesi $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f 'nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.3. (Üçgen Eşitsizliği) Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.4. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.5. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = |\alpha x + (1 - \alpha)y|$$

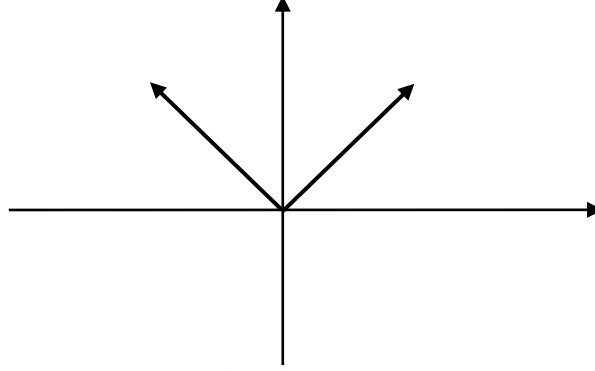
$$\leq \alpha + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden})$$

$$= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y|$$

$$= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur.

$f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.6. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir (Mitrinoviç *et al.* 1993).

Teorem 2.1.7. (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.8. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Tanım 2.1.9. (Süreklilik) $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.10. (Düzgün Süreklilik) $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. Bu durumda, $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , S 'de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.11. (Lipschitz Şartı) $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f , S 'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.12. f , S 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f , S 'de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.13. $[a, b] \subseteq I$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f , $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I 'de sürekli dir (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.14. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a, b) aralığında sürekli dir ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.15. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.16. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.17. f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvektir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.18. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° de artandır (kesin artandır) (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.19. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.20. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>) 0$$

olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. α -Aritmetik

Aritmetik, tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan tam sıralı bir cisimdir. Aritmetik sistem ise bu cisim üzerinde tanımlı cebirsel işlemlerle elde edilen yapıya denir.

Aritmetik sistemleri oluşturmaya yarayan üreteç(doğurucu) fonksiyonu, tanım kümesi reel sayılar ve değer kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan bire-bir ve örten (bijektif) bir dönüşümdür. I birim fonksiyon ve e^x fonksiyonu üreteç fonksiyonuna birer örnektir. Her bir üreteç tek bir aritmetik ürettiği gibi her aritmetikte tek bir üreteç yardımıyla üretilebilir.Şimdi farklı üreteç fonksiyonları yardımıyla yukarıda bahsi geçen aritmetik sistemleroluşturarak matematik analizin temel kavramlarının bu sistemlerdeki karşılıklarınıaraştıracacağız.

Bu kısımda Newtonyen olmayan hesap türlerinden biri olan ve tek bir üreteç fonksiyonkullanılarak elde edilen yapılar anlatılmaktadır. Özellikle metrik ve normlu uzay gibimatematik analizin temel konularının bu yapıdaki karşılıkları incelenmektedir. Ayrıcaklasik hesapta önemli bir yer tutan türev ve integral kavramlarına, farklı üreteçfonksiyonlarının nasıl bir etkisi olduğu araştırılarak bazı uygulamalar yapılmaktadır.

Şimdi α , tanım kümesi $A \subseteq R$ ve değer kümesi $R_\alpha = \{\alpha(x): x \in R\}$ olan bir üreteç (doğurucu) olsun. R_α üzerinde tanımlı $+$, $-$, $\times$ ve $/$ işlemleri ve $<$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetiğe bir α -aritmetik denir.

Bütün $x, y \in R_\alpha$ 'lar için ;

$$\alpha\text{- toplam } x+y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{- fark } x-y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{- çarpım } x \times y = \alpha\{\alpha^{-1}(x)\alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{- oran} \quad x \dot{/} y, \frac{x}{y} = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{- sıralama} \quad x \dot{<} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

Bu işlemler altında $(R_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı bir cisimdir yani bir aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu ürettiği için buna α -aritmetik denir. Her bir üreteç fonksiyonu yalnız bir aritmetik üretir ya da her bir aritmetik yalnız bir üreteç vasıtasıyla üretilir (Grossman and Katz 2006).

Örnek: Üreteç fonksiyon $\alpha = \exp$ olmak üzere

$$\alpha: R \rightarrow R_{exp} \subseteq R^+ \text{ ve } \alpha^{-1}: R_{exp} \rightarrow R \subseteq R$$

$$x \rightarrow \alpha(x) = e^x = y \text{ ve } y \rightarrow \alpha^{-1}(y) = \ln y = x$$

şeklinde verilsin. Bütün $x, y \in R^+$ için aşağıdaki cebirsel işlemler geçerlidir.

$$\alpha\text{- toplam} \quad x \dot{+} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x + \ln y\}} = x \cdot y$$

$$\alpha\text{- fark} \quad x \dot{-} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x - \ln y\}} = x \div y, y \neq 0$$

$$\alpha\text{- çarpım} \quad x \dot{\times} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \times \ln y\}} = x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

$$\alpha\text{- oran} \quad x \dot{/} y, \frac{x}{y} = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \div \ln y\}} = x^{\frac{1}{\ln y}}, y \neq 1$$

Her $n \in Z$ için $-\dot{n} = \dot{0} - \dot{n} = \alpha(-n)$ olmak üzere Z_α tamsayılar kümesi

$$Z_\alpha = \{\dots -\dot{2} - \dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots\} = \{\dots \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\}$$

şeklinde tarif edilir. Buna göre; α -tamsayıların Z_α kümesi,

$$Z_\alpha = \{\dot{n} / \dot{n} = \alpha(n), n \in Z\}$$

şeklindedir. Özel olarak $\alpha = \exp$ için, Z_{exp} kümesi

$$Z_\alpha = \{\dots 1/e^2, 1/e, 1, e, e^2, \dots\}$$

Burada e sayısı doğal logaritmik sayıdır.

Tanım 3.1.1. Keyfi $x \in R_\alpha$ sayısı için x 'in α -karesi $x \dot{\times} x$ şeklindedir ve x^2 notasyonu ile gösterilir. Keyfi negatif olmayan x , t reel sayılar olmak üzere $t = \alpha\{\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\}$ değeri yalnız bir olup tın α -karesi x 'e eşittir ve $t^2 = x$ 'tir. Benzer mantıkla $x \in R_\alpha$ 'nın q -uncu α -kökü ve p -inci α -kuvvetini sırasıyla $\sqrt[q]{x}$ ve x^p notasyonu ile göstereceğiz. Ayrıca aşağıdaki temel işlemler her $x \in R_\alpha$ için geçerlidir:

$$x^2 = x \dot{\times} x = \alpha\{\alpha^{-1}(x)x\alpha^{-1}(x)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^2\},$$

$$x^3 = x^2 \dot{\times} x = \alpha\{\alpha^{-1}\{\alpha[\alpha^{-1}(x)x\alpha^{-1}(x)]\}x\alpha^{-1}(x)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^3\}$$

$\vdots$

$$x^p = x^{(p-1)} \dot{\times} x = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^p\}$$

(Grossman and Katz 2006).

Tanım 3.1.2. Bir $x \in R_\alpha$ sayısının $|x|_\alpha$ Newtonyen olmayan mutlak değeri,

$$|x|_\alpha = \begin{cases} x, & x \dot{\succ} \dot{0} \\ \dot{0}, & x = \dot{0} = \alpha\{|\alpha \dot{0}^{-1}(x)|\} \\ \dot{0} \dot{\prec} \dot{x}, & x \dot{\prec} \dot{0} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. x 'in α -mutlak değeri şeklinde isimlendirilir (Grossman and Katz 2006).

Tanım 3.1.3. (α -limit ve α -türev) $\{U_n\}$, A daki sayıların sonsuz bir dizisi olsun. Bu durumda A da en fazla bir u sayısı vardır öyle ki α -içinde u yu barındıran her α -aralık $\{U_n\}$ in sonlu sayıda hemen hemen her terimini içerir. Böyle bir sayı mevcutsa $\{U_n\}$ eu ya α -yakınsak denir. Bu da $\{U_n\}$ in α -limitidir.

Açık bir $(r, s) \subset R_\alpha$ aralığında $f: (r, s) \rightarrow R_\alpha$ 'ya tanımlı bir fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (r, s)$ olmak üzere

$$\alpha\text{-}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \dot{-} f(x_0)}{x \dot{-} x_0}$$

olacak şekilde α -limiti varsa, bu değere f fonksiyonunun x_0 noktasındaki α -türevi denir ve f_α^* ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında α - türevlenebilir ise f aynı noktada α -diferensiyellenebilir. Ayrıca bu limit değeri α -üretici yardımıyla

$$\begin{aligned} f_\alpha^*(x_0) &= \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \dot{-} f(x_0)}{x \dot{-} x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}\{f(x)\} - \alpha^{-1}\{f(x_0)\}}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}\{f(x)\} - \alpha^{-1}\{f(x_0)\}}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha^{-1}f)(x) - (\alpha^{-1}f)(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha^{-1} \circ f)^l(x_0)}{(\alpha^{-1})^l(x_0)} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada f^l notasyonu fonksiyonun klasik türevi için kullanılmıştır. (Grossman and Katz 2006).

Örnek: $f: (r, s) \rightarrow R_\alpha$ olmak

üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonu

verilsin. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki α -türevi

$$\begin{aligned} f_\alpha^*(x_0) &= \alpha \left\{ \frac{(\alpha^{-1} \circ f)^l\{x_0\}}{(\alpha^{-1})^l(x_0)} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{\left(\alpha^{-1} \alpha \left\{ (\alpha^{-1}(x))^2 \right\} \right)^l\{x_0\}}{(\alpha^{-1})^l(x_0)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \frac{2(\alpha^{-1}(x_0))(\alpha^{-1})' \{x_0\}}{(\alpha^{-1})'(x_0)} \right\} \\
&= \alpha \{2\alpha^{-1}(x_0)\} = 2x_0
\end{aligned}$$

Özel olarak $\alpha = \exp$ alınırsa, $f(x) = x^2$ olmak üzere

$$f_\alpha^*(x_0) = \exp\{2\ln(x)\} = x^2$$

elde edilir

Uyarı: $f_\alpha^*(x_0)$ türev operatörü doğrusal (lineer) bir operatördür. $c \in R_\alpha$ sabit olmak üzere

$$f_\alpha^*(g+h) = f_\alpha^*g + f_\alpha^*h \text{ ve } f_\alpha^*(c \times g) = c \times f_\alpha^*g$$

eşitlikleri geçerlidir.

3.2. α -Aritmetiğin Bazı Uygulamaları

3.2.1. Geometrik Türev

Bu bölüm boyunca, f fonksiyonu en az bir aralık kendi içini kapsayan pozitif bir fonksiyon olduğuna kabul edilecektir. Eğer aşağıdaki limit var ve pozitif ise, bu limiti $[\tilde{D}f](a)$ şeklinde tanımlarız. Buna f nin a 'daki geometrik türevi deriz, f ye a da geometrik olarak diferansiyellenebilir denir.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{x-a}}$$

Yukarıdaki limitin 0 olması mümkündür. (Örneğin eğer $f(x) = \exp(-x^{1/3})$ ve $a = 0$).

$[Df](a)$ ve $[\tilde{D}f](a)$ 'nin mevcut olduğu, birinin mevcut olması ile ispatlanabilir. Yani bir türevin varlığı diğerinin var olup olmadığı hakkında bilgi verir. Ayrıca, eğer her ikisinde mevcut ise o zaman $[\tilde{D}f](a), \exp([Df](a)/f(a))$ 'ye

eşittir ve yine bu türev klasik eğim olarak bildiğimiz, $(a, f(a))$ noktasındaki tanjantına eşittir (Özdeş olarak, $[Df](a)/f(a)$ ifadesi f 'nin a 'daki logaritmik türevini ifade eder).

Bir f fonksiyonunun geometrik türevi $\tilde{D}f$ ile gösterilir. $\tilde{D}f$ öyle bir fonksiyondur ki her bir t sayısını $[\tilde{D}f](t)$ 'ye götürür (eğer türev varsa). Eğer f geometrik olarak uniform ise, $\tilde{D}ff$ 'nin geometriğeğimine eşit olan bir sabite sahiptir. Gerçekten sadece geometrik uniform fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerindeki değeri sabit olan geometrik türevleri vardır.

Örneğin, eğer f , $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif sabit bir fonksiyon olsun, bu durumda $\tilde{D}f$ her yerde 1 ' e eşittir.

$$\tilde{D}(1 + 1) \neq \tilde{D}(1) + \tilde{D}(1)$$

olduğundan dolayı $\tilde{D}$ operatörü toplamsal değildir. Fakat $\tilde{D}$ çarpımsaldır.

$$\tilde{D}(f \cdot g) = \tilde{D}(f) \cdot \tilde{D}(g)$$

dahası,

$$\tilde{D}(f)^c = (\tilde{D}f)^c, \text{ c-sabit.}$$

$\exp$ fonksiyonuna dönüp, klasik türevini hatırlayalım, $\exp[\exp x]$ fonksiyonu ise kendi geometrik türevine eşittir (Grossman and Katz 2006).

3.2.2. Geometrik İntegral

Sürekli, pozitif bir f –fonksiyon $[r, s]$ aralığındaki geometrik integrali $[\tilde{M}_r^s f]^{s-r}$ sayısı ile verilir ve $\int_r^s f$ ile gösterilir.

Geometrik integral bir ağırlıklı geometrik ortalamadır.

$$\tilde{\int}_r^s f = \tilde{M}_r^s(f^{s-r})$$

Ayrıca $\tilde{\int}_r^s f$ n' terimi aşağıdaki çarpma eşit olan yakınsak bir dizinin pozitif limitine eşittir.

$$[f(a_1)]^{k_n} \cdot [f(a_2)]^{k_n} \dots \dots \dots [f(a_{n-1})]^{k_n}$$

Burada $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ler $[r, s]$ nin parçalanışıdır. k_n ise $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}$ lerin ortak değeridir.

$\tilde{\int}_r^s f$ çarpımsal özelliğe sahiptir.

$$\tilde{\int}_r^s (f \cdot g) = \tilde{\int}_r^s f \cdot \tilde{\int}_r^s g$$

ayrıca

$$\tilde{\int}_r^s (f^c) = \left(\tilde{\int}_r^s f \right)^c, c\text{-sabit}$$

Geometrik integral aşağıdaki üç özelliğe sahip bir operatördür.

- 1.) Herhangi bir $[r, s]$ aralığı ve bu aralıktaki $h(x) = b$ pozitif sabit fonksiyonu için

$$\tilde{\int}_r^s h = b^{r-s}$$

- 2.) Herhangi bir $[r, s]$ aralığı ve bu aralıktaki tanımlı pozitif f ve g fonksiyonları için, her $x \in [r, s]$ için $f(x) \leq g(x)$ iken

$$\tilde{\int}_r^s f \leq \tilde{\int}_r^s g$$

- 3.) $r < s < t$ koşulunu sağlayan herhangi r, s, t sayıları ve $[r, s]$ aralığında sürekli herhangi bir pozitif f fonksiyonu için

$$\int_r^{\sim s} f \cdot \int_s^{\sim t} f = \int_r^{\sim t} f$$

dır.

Şimdi ise yukarıda verilen ifadelerin klasik analiz ile ilişkisini vereceğiz:

f bir pozitif fonksiyon ve

$$\bar{f}(x) = \ln f(x)$$

olsun durumda aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

$$1.) [\bar{D}f](a) = \exp\{[D\bar{f}](a)\}$$

$$2.) \tilde{M}_r^s f = \exp\{M_r^s \bar{f}\}$$

$$3.) \tilde{\int}_r^s f = \exp\{\int_r^s \bar{f}\}$$

(Grossman and Katz 2006).

3.2.3. Ana-geometrik Türev

Bu kısımda, f pozitif bir aralıkta kendi iç noktasını (interior) ihtiva eden bir fonksiyon olarak incelenecektir.

Eğer aşağıdaki limit varsa, bu limit $[Df](a)$ ile gösterilir ve f 'nin a 'daki ana-geometrik türevi olarak adlandırılır. Eğer f fonksiyonu bir a noktasında ana-geometrik olarak diferensiyellenebilirse:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\ln(x) - \ln(a)}$$

Bu $[Df](a)$ ve $[\tilde{D}f](a)$ her ikisinden birinin varlığı ile ispatlanabilir. Eğer bunlar mevcut ise

$$[\tilde{D}f](a) = \frac{[Df](a)}{[D(\ln)](a)} = a \cdot [Df](a);$$

$[\tilde{D}f](a)$ ana-geometrik uniform fonksiyonun eğimine eşittir. Bu f nin a daki klasik eğimine denk düşer. Burada $[\tilde{D}f](a)$, f fonksiyonunun $\ln$ e göre a daki klasik

türevine eşittir. Bir ana-geometrik türev $\left[\underset{\sim}{D} f \right]$ ile gösterilir. Öyle bir fonksiyondur ki eğer türev var ise her bir t sayısını $\left[\underset{\sim}{D} f \right](t)$ ye götürür. Ayrıca, $\underset{\sim}{D}$ operatörü birleşmeli ve homojendir.

$$\underset{\sim}{D}(f + g) = \underset{\sim}{D}f + \underset{\sim}{D}g$$

$$\underset{\sim}{D}(cf) = c \cdot \underset{\sim}{D}f, c \text{ sabit}$$

Eğer f bir ana-geometrik uniform bir fonksiyon ise, $\underset{\sim}{D}f$, f nin ana-geometrik eğimine eşit olan bir sabiti vardır.

Gerçekten sadece, ana-geometrik fonksiyonların, $\mathbb{R}_+$ da sabit olan ana-geometrik türevleri vardır (Grossman and Katz 2006).

Not: Eğer $h(x) = mx$ burada m bir sabit $vex > 0$ o zaman $\underset{\sim}{D}h = m$ olur.

3.2.4. Ana-geometrik İntegral

$[r, s]$ pozitif aralığı üzerinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonun ana-geometrik integrali

$$[\ln(s) - \ln(r)] \cdot \underset{\sim}{M}_r^s f$$

sayısına eşittir ve $\int_{\underset{\sim}{r}}^s f \cdot \int_{\underset{\sim}{r}}^r f = 0$ ile gösterilir.

Ana-geometrik integraller ağırlıklı ana-geometrik ortalamadır.

$$\int_{\underset{\sim}{r}}^s f = \underset{\sim}{M}_r^s \{ [\ln(s) - \ln(r)] \cdot f \}$$

ayrıca, $\int_{\underset{\sim}{r}}^s f$, n . terimi aşağıdaki toplama eşit olan yakınsak bir dizinin limitine eşittir.

$$[ln(k_n)].f(a_1) + \dots [ln(k_n)].f(a_{n-1})$$

burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ $[r, s]$ aralığında n . bölüntüleridir.

k_n ler ise $a_2/a_1, a_3/a_2, \dots, a_n/a_{n-1}$ lerin ortak değerleridir.

Bazı okuyucular, özellikle Stieltjes integrallerini bilenler $\int_{\sim_r}^s f$ ifadesini f nin $[r, s]$ aralığındaki Stieltjes integrali olduğunu farkına varacaklardır.

$$\int_{\sim_r}^s f$$

operatör toplamsal ve homojendir.

$$\begin{aligned} \int_{\sim_r}^s (f + g) &= \int_{\sim_r}^s f + \int_{\sim_r}^s f \\ \int_{\sim_r}^s (cf) &= c \int_{\sim_r}^s f \end{aligned}$$

Bu ifadelerin klasik analiz ile ilgisi:

$G_r^s f$ pozitif bir $[r, s]$ aralığında, f nin bir ana geometrik gradyeti olsun.

$\bar{f}(x) = f(e^x)$, $\bar{r} = \ln(r)$, $\bar{s} = \ln(s)$ ve $\bar{a} = \ln(a)$ olsun.

Bu durumda, ana-geometrik ve klasik operatörler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

1. $G_r^s f = G_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f}$
2. $[D f](a) = [D \bar{f}](\bar{a})$
3. $M_r^s f = M_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f}$
4. $\int_{\sim_r}^s f = \int_{\sim_{\bar{r}}}^{\bar{s}} \bar{f}$

(GrossmanandKatz 2006).

Uyarı:2. maddede de $\left[\tilde{D}f\right](a)$ nin mevcut olduğunu farz ettik. 3. ve 4. Maddelerde ise f nin $[r, s]$ de sürekli olduğunu kabul ettik.

3.2.5. Bi-geometrik Türev

Bu kısımda f fonksiyonu pozitif ve en az bir a iç noktasını ihtiva eden aralıkta tanımlanan bir fonksiyon olarak ele alınacaktır. Eğer aşağıdaki limit var ve pozitif ise, f nin bi-geometrik türevi $\left[\tilde{D}f\right](a)$ ile gösterilir ve f nin a da bi-geometrik olarak diferansiyellenmesi aşağıdaki limit ile ifade edilir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{f(a)} \right]^{1/[\ln(x) - \ln(a)]}$$

burada $\left[\tilde{D}f\right](a)$ nin pozitif olma gereksinimini daha sonra belirteceğiz. $[Df](a)$ ve $\left[\tilde{D}f\right](a)$ mevcut ise $\left[\tilde{D}f\right](a) = \exp\{a \cdot [Df](a)/f(a)\}$ ve $\left[\tilde{D}f\right](a)$, eşit-bi-geometrik uniform fonksiyonun eğime eşittir. Bu klasik analizdeki f nin $(a, f(a))$ noktasındaki tanjantı (eğim) olarak bilinir.

Bi-geometrik türev, $\tilde{D}$ ile verilir. $\tilde{D}$ şöyle bir fonksiyondur ki eğer mevcut ise her bir f yi $\left[\tilde{D}f\right](t)$ ye götürür.

$\tilde{D}$ operatörü çarpımsallık özelliğine sahiptir.

$$\tilde{D}(f \cdot g) = \tilde{D}(f) \cdot \tilde{D}(g)$$

ayrıca

$$\tilde{D}(f^c) = (\tilde{D}f)^c, \text{ c-sabit}$$

(GrossmanandKatz 2006).

3.2.6. Bi-geometrik İntegral

Pozitif bir $[r, s]$ aralığında tanımlı pozitif sürekli bir f fonksiyonunu bi-geometrik integrali

$$\left[\tilde{M}_r^s f \right]^{[\ln s - \ln r]}$$

sayısına eşittir, ve $\tilde{\int}_{\sim r}^s f$ ile $\tilde{\int}_{\sim r}^r f = 1$ ile gösterilir.

Bi-geometrik integral, ağırlıklı bi-geometrik ortalama olduğundan

$$\tilde{\int}_{\sim r}^s f = \left[\tilde{M}_r^s f \right]^{[\ln s - \ln r]}$$

Ayrıca, $\tilde{\int}_{\sim r}^s f$ n. terimi aşağıda verilen yakınsak ve limiti pozitif olan bir dizinin limitidir.

$$[f(a_1)]^{\ln(k_n)} \cdot [f(a_2)]^{\ln(k_n)} \dots [f(a_{n-1})]^{\ln(k_n)}$$

burada, $a_1, a_2 \dots a_n$, $[r, s]$ aralığında geometrik bölüntüleri ve k_n de

$a_2/a_1, a_3/a_2, \dots, a_n/a_{n-1}$ lerin eşit değerleridir.

$\tilde{\int}_{\sim r}^s f$ değişmelidir (dağılma)

$$\tilde{\int}_{\sim r}^s (f \cdot g) = \tilde{\int}_{\sim r}^s f \cdot \tilde{\int}_{\sim r}^s g$$

ayrıca

$$\tilde{\int}_{\sim r}^s (f^c) = \left(\tilde{\int}_{\sim r}^s f \right)^c, \text{ c-sabit}$$

Bi-geometrik integral aşağıdaki özelliklere sahip bir operatördür.

1. Pozitif bir $[r, s]$ aralığı ve bu aralıkta tanımlı pozitif $h(x) = b$ sabit fonksiyonu için

$$\tilde{\int}_{\sim r}^s h = b^{\ln(s) - \ln(r)}$$

2. $[r, s]$ pozitif aralığında tanımlı pozitif ve sürekli f, g fonksiyonları için eğer $\forall x \in [r, s] \text{ i} \tilde{\int} f(x) \leq g(x)$ ise

$$\tilde{\int}_{\sim r}^s f \leq \tilde{\int}_{\sim r}^s g$$

3. $0 < r < s < t$ şartını sağlayan herhangi r, s ve t sayıları ve $[r, s]$ üzerinde tanımlı pozitif sürekli f , fonksiyonu için

$$\tilde{\int}_{\sim r}^s f. \tilde{\int}_{\sim s}^t f = \tilde{\int}_{\sim r}^t f$$

Yukarıda verilen ifadelerin klasik analiz ile ilişkisi:

$\tilde{\int}_{\sim r}^s f$, pozitif $[r, s]$ aralığı üzerinde tanımlı, pozitif f fonksiyonunun bi-geometrik gradyenti olsun. Bu,

$$\bar{f}(x) = \ln(f(e^x)), \quad \bar{r} = \ln(r), \quad \bar{s} = \ln(s), \quad \bar{a} = \ln(a)$$

olarak verilsin. Bu durumda klasik analiz ile bi-geometrik analizdeki operatörler arasında aşağıdaki düzenli ilişkiler vardır.

$$1. \quad [\tilde{D}f](a) = \exp\{[D\bar{f}](\bar{a})\}$$

$$2. \quad \tilde{M}_r^s f = \exp\{M_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f}\}$$

$$3. \quad \tilde{\int}_{\sim r}^s f = \exp\left\{\int_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f}\right\}$$

(Grossman and Katz 2006).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yıldızlı Aritmetik (* – Aritmetik)

Bu çalışmanınkalanı için, α ve β gelişigüzel seçilen üretkenlerdir ve $*$ sıralanan aritmetik çiftidir (α – aritmetik, β – aritmetik).

	α – aritmetik	β – aritmetik
Küme	A	B
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

Anlaşılabacağı üzere önceki bölümdeki bütün tanımlamalar eşit bir şekilde β – aritmetiğine uygulanır. Örneğin β – yakınsaklık, β – aralık ve β – iç kullanılarak tanımlanır. $*$ – hesabında ve α – aritmetik, argümanlarda ve β – aritmetik değerlerde kullanılır. $*$ – kullulusun operatörleri sadece argümanları A ’da ve değerleri B ’ de olan fonksiyonlara uygulanır. Bu yüzden aksi belirtilmedikçe bütün fonksiyonlar bu karakterde kabul edilecektir.

f fonksiyonunun A daki bir a sayısındaki $*$ -limiti – eğer mevcutsa- B deki tek bir b sayısıdır, öyle ki f in a dan farklı argümanlarının her sonsuz $\{a_n\}$ dizisi için eğer $\{a_n\}$ a ya α - yakınsaksa $\{f(a_n)\}$ b ye β -yakınsaktır.

$$* - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

şeklinde ifade edilir.

f fonksiyonunun A daki bir a sayısında $*$ -sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$* - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

olmasıdır.

α ve β birim fonksiyon ise $*$ -limit ve $*$ -süreklielik kavramları klasik limit ve klasik sürekliliğe denktir.

α -aritmetikten β -aritmetiğe tanımlı izomorfizm aşağıdaki üç şartı sağlayan tek bir ι (iota) fonksiyonudur:

1. ι , 1-1'dir.
2. ι , A dan B ye içine fonksiyondur.
3. Adaki her u ve v sayısı için,

$$\iota(u \dot{+} v) = \iota(u) \dot{+} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{-} v) = \iota(u) \dot{-} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{\times} v) = \iota(u) \dot{\times} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{/} v) = \iota(u) \dot{/} \iota(v), v \neq \dot{0}$$

$$u \dot{<} v \Leftrightarrow \iota(u) \dot{<} \iota(v).$$

Görülebilir ki A daki her x sayısı için $\iota(x) = \beta\{\alpha^{-1}(x)\}$ ve her n için $\iota(\dot{n}) = \dot{n}$ dir. Örneğin $u \dot{+} v = \iota^{-1}\{\iota(u) \dot{+} \iota(v)\}$ olduğundan açıktır ki α -aritmetikteki her önerme kolayca β -aritmetiğe dönüştürülebilir (Grossman and Katz 2006).

4.2. $*$ -Türev

Eğer aşağıdaki $*$ -limit mevcutsa bunu $[D^*f](a)$ ile gösteririz ve f in a daki türevi olarak ifade ederiz ve f in a da türevlenebildiğini söyleriz.

$$* - \lim_{x \rightarrow a} \{ [f(x) \dot{-} f(a)] \dot{/} [\iota(x) \dot{-} \iota(a)] \}$$

Eğer mevcutsa $[D^*f](a)$ mutlaka B dedir.

$[D^*f]$ ile gösterilen f in $*$ -türevi A daki her t sayısını, eğer mevcutsa $[D^*f](t)$ sayısına eşler.

D^* operatörü, β –toplamsal ve β –homojendir.

$$D^*(f \ddot{+} g) = D^*f \ddot{+} D^*g$$

$$D^*(c \ddot{\times} f) = c \ddot{\times} D^*f$$

(c, B de sabittir).

4.3. *- Ortalama

$[r, s]$ deki $*$ -süreklif fonksiyonunun $*$ - ortalaması $M_r^s f$ ile gösterilir ve n inci terimi $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ in β – ortalaması olan, β – yakınsak dizinin β –limiti olarak tanımlanır. Burada $a_1, \dots, a_n$, $[r, s]$ in n -katlı α -bölüntüsüdür.

$[r, s]$ de $*$ - uniform fonksiyonun $*$ - ortalaması r ve s deki değerlerinin β – ortalamasına eşittir.

$*$ - ortalama aşağıdaki üç özelliğe sahip tek operatördür.

1. Her α –aralığı $[r, s]$ ve $[r, s]$ deki her sabit $h(x) = b$ fonksiyonu için

$$M_r^s f = b.$$

2. Her $[r, s]$ aralığı ve $[r, s]$ 'de $*$ -süreklif her f ve g fonksiyonu için $[r, s]$ de sürekli her x sayısı için eğer $f(x) \ddot{\leq} g(x)$ ise

$$M_r^s f \ddot{\leq} M_r^s g.$$

3. A da $r < s < t$ şartını sağlayan r, s, t sayıları ve $[r, t]$ deki bir $*$ -süreklif f fonksiyonu için

$$[\imath(s) \ddot{-} \imath(r)] \ddot{\times} M_r^s f \ddot{+} [\imath(t) \ddot{-} \imath(s)] \ddot{\times} M_s^t f$$

$$= [\iota(t) \dot{-} \iota(l)] \dot{\times} M_r^{*t} f.$$

(Grossman and Katz 2006).

4.4. *-İntegral

${}^*\int_r^s$ ile gösterilen $[r, s]$ de *- süreklif fonksiyonun *-integrali, B de bulunanaşağıdaki sayıdır:

$$[\iota(s) \dot{-} \iota(r)] \dot{\times} M_r^{*s} f.$$

Böylece $\int_r^r f = \ddot{0}$.

*- integral ağırlıklı *- aritmetik ortalamadır. Çünkü

$${}^*\int_r^s f = M_r^{*s} \{ [\iota(s) \dot{-} \iota(r)] \dot{\times} M_r^{*s} f \}.$$

Ayrıca, ${}^*\int_r^s f$, n'inci terimi

$$[\iota(k_n) \dot{\times} f(a_1)] \dot{+} \dots \dot{+} [\iota(k_n) \dot{\times} f(a_{n-1})],$$

olan β -yakınsak dizinin β -limitine eşittir. Burada $a_1, \dots, a_n$, $[r, s]$ nin n -katlı α bölüntüsüdür ve k_n , $a_2 \dot{-} a_1, a_3 \dot{-} a_2, \dots, a_n \dot{-} a_{n-1}$ lerin ortak değeridir (Eğer a klasik olarak sürekliyse ve $\beta = I$ ise *-integral Stieltjes integraldir).

*- integral β -toplamsal ve β -homojendirve aşağıdaki şu özelliğe sahip tek operatördür.

1. Her α -aralığı $[r, s]$ ve $[r, s]$ de sabit fonksiyon $h(x) = b$ için

$${}^*\int_r^s h = [\iota(s) \dot{-} \iota(r)] \dot{\times} b.$$

2. Her α -aralığı $[r, s]$ ve $[r, s]$ de *-süreklili olan f ve g fonksiyonları için, $[r, s]$ deki her x sayısı için eğer $f(x) \dot{\leq} g(x)$ ise

$${}^*\int_r^s f \preceq \int_r^s g.$$

3. A da $r < s < t$ şartını sağlayan r, s, t sayıları ve $[r, t]$ deki bir $*$ -sürekli f fonksiyonu için

$${}^*\int_r^s f \preceq {}^*\int_s^t f = {}^*\int_r^t f.$$

4.4. Klasik Analizle İlgisi

Bu bölümde $*$ -hesaplamanın karşılık gelen kavramları ve klasik hesaplama arasındaki uniform ilişkileri belirteceğiz.

A'da her bir a sayısı için $\bar{a} = \alpha^{-1}(a)$ alalım. f argümanları A da ve değerleri B deolan bir fonksiyon olsun ve $\bar{f}(t) = \beta^{-1}\{f(\alpha(t))\}$ alalım. Ayrıca, $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $*-\lim_{t \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(t)$ birlikte mevcut olsun. Bu durumda

$$*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(t) \right\}$$

olur. Ayrıca, f in a 'da $*$ -sürekli olması için gerek ve yeter şart $\bar{f}$ 'nin, $\bar{a}$ 'da klasik sürekli olmasıdır. $[D^*f](a)$ ve $[D\bar{f}](\bar{a})$ türevleri birlikte mevcutsa

$$[D^*f](a) = \beta \{ [D\bar{f}](\bar{a}) \}$$

olur. Ve eğer f , $[r, s]$ 'de $*$ - sürekli ise

$$M_r^{*s} f = \beta \{ M_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f} \}$$

$${}^*\int_r^s f = \beta \left\{ \int_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f} \right\}.$$

$a \in A$ ve $b \in B$ olsun. Eğer sırasıyla α ve β $\alpha^{-1}(a)$ ve $\beta^{-1}(b)$ 'de klasik sürekliyse

$$*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Eğer α ve β sırasıyla $\alpha^{-1}(a)$ ve $\beta^{-1}(f(a))$ da klasik sürekli ise f, a 'da $*$ -süreklidir.

4.7. İki Aritmetik Arasındaki İlişki

Bu bölümde verilen herhangi iki kalkülüsün $*$ -kalkülüs ve $\bar{*}$ -kalkülüs aralarındaki uniform ilişkiyi belirteceğiz. $*$ -kalkülüs için, A ve B bölgelerindeki aritmetikleri üreten iki üreteç vardır. α ve β . Bütün aritmetikler izomorfik olduğu için, α -aritmetikten $\bar{\alpha}$ -aritmetiğine tek bir izomorfizm T_1 vardır ve β -aritmetikten $\bar{\beta}$ -aritmetiğine tek bir izomorfizm T_2 vardır.

A 'daki her bir x sayısı için, $\bar{A}$ 'da $T_1(x)$ sayısı ve B 'deki her bir y sayısı için $\bar{B}$ de bir $T_2(y)$ sayısı olsun. Argümanları A da ve değerleri B de olan her bir f fonksiyonu için, $(x, y)f$ de keyfi sıralı ikili iken bütün sıralı $(\bar{x}, \bar{y})$ ikililerini içeren fonksiyon $\bar{f}$ olsun. Açıkça $\bar{f}$ nin argümanları $\bar{A}$ de ve değerleri $\bar{B}$ dedir.

Aşağıdaki notasyonlar da ayrıca kullanılacaktır.

	$*$ – Calculus	$\bar{*}$ – Calculus
Bölgeler	A	B
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$

Sıralama

$\dot{<}$

$\ddot{<}$

ve

$*-lim$

$\bar{*}-lim$

Gradyanlar

$*G$

$\bar{*}G$

Türevler

$*D$

$*D$

Ortalamalar

$*M$

$\bar{*}M$

İntegraller

$*\int$

$\bar{*}\int$

f , Argümanları A da ve değerleri B de olan bir fonksiyon olsun ve a , A da bir sayı olsun. Daha sonra aşağıdakiler birlikte ortaya çıkar.

$$*-lim_{x \rightarrow a} f(x) , \bar{*}-lim_{t \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(t) ;$$

ve eğer mevcutsa

$$\overline{*-lim_{x \rightarrow a} f(x)} , \bar{*}-lim_{t \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(t) ;$$

Buna ilaveten f in a da $*$ –süreklili olması için gerek ve yeter şart $\bar{f}$ nin $\bar{a}$ de $\bar{*}$ –süreklili olmasıdır.

4.8. GeometrikAritmetiğin Uygulaması

α ve β yı uygun şekilde seçersek daha önce değindiğimiz kalkülüsleri $*$ – kalkülüs ile üretebiliriz.

Hesaplamalar

α

β

Klasik	I	I
Geometrik	I	exp
Anageometrik	exp	I
Bigeometrik	exp	exp

Bu yüzden geometrik aritmetiği, geometrik hesaplamadaki fonksiyon değerlerinde ana-geometrik hesaplamada fonksiyon ispatlarında ve bi-geometrik hesaplamada hem ispatlamada hem de değerlerde kullanılır.

4.9. Newtonyen Olmayan Konvekslik ve α – Ortalamalar

Tanım4.9.1. (α -aritmetik ortalama) n tane pozitif reel sayı $x_1, x_2, \dots, x_n$ verilmiş olsun. A_α olarak gösterilen α ortalama, her n için x_n lerin α toplamının n ile bölümüdür. Yani:

$$A_\alpha = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(x_k)}{n} \right\}}{n} = \alpha \left\{ \frac{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \dots + \alpha^{-1}(x_n)}{n} \right\}$$

$\alpha = exp$ alınırsa:

$$A_{exp} = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

Elde edilir. Benzer şekilde $\alpha = q_p$ için şunu elde ederiz

$$A_p = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A_{exp} ve A_p sırasıyla çarpımsal aritmetik ortalama ve p aritmetik ortalama (genellikle p ortalama olarak bilinir) olarak adlandırılır. $A_p, p = 1$ ve $p = -1$ için sırasıyla bildiğimiz aritmetik ve harmonik ortalamaya dönüşür (Kadak ve Gürefe 2016).

Sonuç4.9.2.Açıktır ki Tanım 4.9.1 farklı üreteçler kullanılarak yazılabilir. Özel olarak çeşitli üretkenler kullanılarak yazılabileceği açıktır. Özellikle, eğer α aritmetik yerine β aritmetik alınırsa bu ortalama aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$A_{\beta} = \sum_{k=1}^n x_k / n.$$

(Kadak ve Gürefe 2016).

Tanım4.9.3.(α -geometrik ortalama) $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ G_{α} olarak adlandırılan,

α –geometrik ortalama , x_n lerin α çarpımının n inci dereceden α köküdür:

$$\begin{aligned} G_{\alpha} &= \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)_{\alpha}} = \alpha \left\{ \left(\prod_{k=1}^n \alpha^{-1}(x_k) \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \\ &= \alpha \left\{ (\alpha^{-1}(x_1) \cdot \alpha^{-1}(x_2) \cdot \dots \cdot \alpha^{-1}(x_n))^{\frac{1}{n}} \right\}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde, şu sonuca varırız; üreteçleri $\alpha = \exp$ veya $\alpha = q_p$ aldığımızda α –geometrik ortalama'yı aşağıdaki şekilde yorumlayabiliriz:

$$G_{\exp} = \exp \left\{ (\ln x_1 \cdot \ln x_2 \dots \ln x_n)^{\frac{1}{n}} \right\}, \quad (x_{\alpha} > 1)$$

$$G_p = \left\{ (x_1^p x_2^p \dots x_n^p)^{\frac{1}{n}} \right\}^{\frac{1}{p}} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}, \quad (p \neq 0)$$

$G_{\exp}$ ve G_p sırasıyla çarpımsal geometrik ortalama ve p –geometrik ortalama olarak adlandırılır. Açıkça, $p = 1$ için $G_p = A_{\exp}$ olur (Kadak ve Gürefe 2016).

Tanım4.9.4.(α –harmonik ortalama) $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ ve $\alpha^{-1}(x_n) \neq 0$ alalım. Her $n \in N$ için α –harmonik ortalama H_{α} şöyle tanımlanır.

$$\begin{aligned} H_{\alpha} &= \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha^{-1}(x_k)}} = \frac{n}{\frac{1}{\alpha^{-1}(x_1)} + \frac{1}{\alpha^{-1}(x_2)} + \dots + \frac{1}{\alpha^{-1}(x_n)}} \\ &= \alpha \left\{ \frac{n}{\frac{1}{\alpha^{-1}(x_1)} + \frac{1}{\alpha^{-1}(x_2)} + \dots + \frac{1}{\alpha^{-1}(x_n)}} \right\} \end{aligned}$$

benzer şekilde şunu da elde edebiliriz

$$H_{exp} = \exp \left\{ \frac{n}{\frac{1}{\ln(x_1)} + \frac{1}{\ln(x_2)} + \dots + \frac{1}{\ln(x_n)}} \right\}, \quad (x_n > 1)$$

$$H_p = \left\{ \frac{n}{\frac{1}{(x_1)^p} + \frac{1}{(x_2)^p} + \dots + \frac{1}{(x_n)^p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

H_{exp} ve H_p sırasıyla çarpımsal harmonik ortalama ve p -harmonik ortalama olarak adlandırılır. Görüldüğü üzere bu tanım $p = 1$ ve $p = -1$ için sırasıyla sıradan harmonik ortalama ve sıradan harmonik ortalamaya indirgenmiştir (Kadak ve Güreffe 2016).

Tanım 4.9.5. (Ağırlıklı α -aritmetik ortalama) Boş olmayan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümenin, Negatif olmayan $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ağırlıklarıyla, ağırlıklı α -aritmetik ortalaması aşağıdaki niceliktir:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \dot{w}_i}{\sum_{i=1}^n \dot{w}_i} = \frac{x_1 \dot{w}_1 + x_2 \dot{w}_2 + \dots + x_n \dot{w}_n}{\dot{w}_1 + \dot{w}_2 + \dots + \dot{w}_n} \\ &= \alpha \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n w_i \alpha^{-1}(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ağırlıklar standartlaştırıldığında, formüller sadeleşir. Yani;

$$\sum_{i=1}^n \dot{w}_i = 1$$

ayrıca eğer bütün ağırlıklar eşitse, ağırlıklı α -aritmetik ortalama, α -aritmetik ortalama ile aynıdır.

$\alpha = \exp$ ve $\alpha = q_p$ olacak ağırlıklı α -aritmetik ortalama ağırlıklarla birlikte verilebilir aşağıda olduğu gibi,

$$\tilde{A}_{exp} = \exp \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \ln(x_i) w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right\} = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \right)^{1/\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (x_n > 1)$$

$$\tilde{A}_{q_p} = \left\{ \frac{w_1(x_1)^p + w_2(x_2)^p + \dots + w_n(x_n)^p}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$\tilde{A}_{exp}$ ve $\tilde{A}_p$ sırasıyla ağırlıklı aritmetik ortalama ve ağırlıklı p – aritmetik ortalama olarak adlandırılır. $\tilde{A}_{exp}$ sıradan ağırlıklı geometrik ortalamaya denk olur. Hemde, kolayca anlaşılabilirki, $\tilde{A}_p$, $p = 1$ ve $p = -1$ için sırasıyla sıradan ağırlıklı aritmetik ortalama ve ağırlıklı harmonik ortalama indirgenir (Kadak ve Gürefe 2016).

Tanım 4.9.6. (Ağırlıklı α -geometrik ortalama) Verilen bir pozitif gerçekteki sayılar kümesi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve karşılık gelen ağırlıklar $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ için ağırlıklı α -geometrik ortalama $\tilde{G}_\alpha$ şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha &= \left\{ \prod_{i=1}^n x_i \right\}^{\left(\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \right)_\alpha} \\ &= x_1^{\left(\frac{w_1}{w_1+w_2+\dots+w_n} \right)_\alpha} \times x_2^{\left(\frac{w_2}{w_1+w_2+\dots+w_n} \right)_\alpha} \dots \times x_n^{\left(\frac{w_n}{w_1+w_2+\dots+w_n} \right)_\alpha} \\ &= \alpha \left\{ [\alpha^{-1}(x_1)]^{\frac{w_1}{w_1+w_2+\dots+w_n}} [\alpha^{-1}(x_2)]^{\frac{w_2}{w_1+w_2+\dots+w_n}} \dots [\alpha^{-1}(x_n)]^{\frac{w_n}{w_1+w_2+\dots+w_n}} \right\} \end{aligned}$$

(Kadak ve Gürefe 2016).

Tanım 4.9.7. (Ağırlıklı α -harmonik ortalama) Eğer ağırlıkların bir kümesi $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ veri kümesi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile birlikte verilirse ağırlıklı α -harmonik ortalama şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha &= \frac{\sum_{k=1}^n w_k}{\sum_{k=1}^n \frac{w_k}{x_k}} = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \dots + \frac{w_n}{x_n}} \\ &= \alpha \left\{ \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{\alpha^{-1}(x_1)} + \frac{w_2}{\alpha^{-1}(x_2)} + \dots + \frac{w_n}{\alpha^{-1}(x_n)}} \right\} \end{aligned}$$

$\alpha = exp$ ve $\alpha = q_p$ olarak alındığında, $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ ağırlıklarıyla ağırlıklı α -harmonik ortalama aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\tilde{H}_{exp} = exp \left\{ \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{\ln(x_1)} + \frac{w_2}{\ln(x_2)} + \dots + \frac{w_n}{\ln(x_n)}} \right\}, \quad (x_n > 1)$$

$$\tilde{H}_p = \left\{ \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{\frac{w_1}{(x_1)^p} + \frac{w_2}{(x_2)^p} + \dots + \frac{w_n}{(x_n)^p}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

(Kadak ve Gürefe 2016).

4.10. Genelleştirilmiş * –Konveks Fonksiyon

Bu bölümde, Newtonyen olmayan konvekslik kavramı fonksiyonları, farklı üreteçler kullanılarak verilecektir. Ayrıca, konvekslik ve newtonyen olmayan ağırlıklı ortalama arasındaki ilişki tanımlanacaktır.

Tanım 4.10.1. (Genelleştirilmiş *-konveks fonksiyon) I_α, R_α da bir aralık olsun. Bu durumda, eğer

$$f(\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y}) \preceq \mu_1 \ddot{f}(x) + \mu_2 \ddot{f}(y), \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ ve} \quad (3)$$

$$\mu_1 + \mu_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$$

Şartı sağlanırsa $f: I_\alpha \rightarrow R_\beta$ nin konveks olduğu söylenir. Böylece bunu α ve β üretkenleriyle birleştirerek şu sonuca varırız:

$$f(\alpha\{\alpha^{-1}(\lambda_1). \alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(\lambda_2). \alpha^{-1}(y)\}) \leq \beta\{\beta^{-1}(\mu_1). \beta^{-1}f(x) + \beta^{-1}(\mu_2). \beta^{-1}f(y)\} \quad (4)$$

Eğer (4) bütün $x \neq y$ için strictly değilse, f in açıkça konveks olduğu söylenir. Eğer (4) deki eşitsizlik tersine çevrilirse, f in konkav olduğu söylenir. Bunun yanı sıra, (4) ağırlıklı α -aritmetik ortalamaya uyarak (2) de şu şekilde yazılabilir:

$$f(\tilde{A}_\alpha\{x, y\}) \preceq \tilde{A}_\beta\{f(x), f(y)\}$$

(Kadak ve Gürefe 2016).

Sonuç 4.10.2. α ve β nın özel seçimleriyle aşağıdaki gibi farklı konvekslik sınıfları elde edilebilir:

Durum 1:

a. Eğer $\alpha = \beta = \exp$ ve $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ alırsak (4) de

$$f(x^{\ln \lambda_1} y^{\ln \lambda_2}) \leq f(x)^{\ln \lambda_1} f(y)^{\ln \lambda_2} , \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in [1, e])$$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = e$ ve $f: I_{\exp} \rightarrow R_{\exp} = (0, \infty)$ bu fonksiyon bi-geometrik konveks fonksiyonu olarak adlandırılır. Eşit şekilde, $\ln f(x)$ sıradan konveks fonksiyonsa f bi-geometrik konvektir.

b. $\alpha = \exp$ ve $\beta = I$ için

$$f(x^{\ln \lambda_1} y^{\ln \lambda_2}) \leq \mu_1 f(x) + \mu_2 f(y) , \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in [1, e]; \mu_1, \mu_2 \in [0, 1])$$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = e$ ve $\mu_1 + \mu_2 = 1$ bu durumda, fonksiyon $f: I_{\exp} \rightarrow R$ geometrik konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Her geometrik konveks fonksiyon aynı zamanda konvektir.

c. $\alpha = I$ ve $\beta = \exp$ olarak şunu elde ederiz

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq f(x)^{\ln \mu_1} \cdot f(y)^{\ln \mu_2} , \quad (\mu_1, \mu_2 \in [1, e]; \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1])$$

$\mu_1 \cdot \mu_2 = e$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ve $f: I \rightarrow R_{\exp}$ ana-geometrik konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

Durum 2:

a) Eğer $\alpha = \beta = q_p$ ve $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ alırsak (4) de $f\left(\left((\lambda_1 x)^p + (\lambda_2 y)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leq \left(\left(\lambda_1 f(x)\right)^p + \left(\lambda_2 f(y)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $(p \in R^+)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1^p + \lambda_2^p = 1$ ve $f: I_{\mu_p} \rightarrow R_{\mu_p}$ QQ-konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

b) $\alpha = q_p$ ve $\beta = 1$

$$f\left(\left((\lambda_1 x)^p + (\lambda_2 y)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leq \mu_1 f(x) + \mu_2 f(y) , \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in [0,1])$$

$\lambda_1^p + \lambda_2^p = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ve $f: I_{\mu_p} \rightarrow R_{\mu_p}$ RQI-konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

c) $\alpha = 1$ ve $\beta = q_p$ olarak şunu elde ederiz

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq \left((\mu_1 f(x))^p + (\mu_2 f(y))^p\right)^{\frac{1}{p}} , \quad (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in [0,1])$$

$\mu_1^p + \mu_2^p = 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ve $f: I \rightarrow R_{q_p}$ IQ-konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

$f: I_\alpha \rightarrow R_\beta$ fonksiyonunun *-konveksliği geometrik olarak şu anlama gelir: f in grafiğinin *- noktaları, her $a, b \in I_\alpha$ için newtonsallı olmayan koordinasyon sisteminde, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ uç noktalarını birleştiren kirişin altındadır (Kadak ve Gürefe 2016).

Lemma (Jensen eşitsizliği): Bir I_α aralığında tanımlanan A_β -reel değerli f fonksiyonunun *-konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu_k f(x_k)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \text{ ve } \sum_{k=1}^n \mu_k = 1, \lambda_k \in [0, 1] \text{ ve } \mu_k \in [0, 1]$$

olmasıdır (Kadak ve Gürefe 2016).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, Konvekslik ve eşitsizlikler ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve Newtonyen olmayan kalkülüs incelenmiş temel özellikleri farklı aritmetik uygulamaları ve örneklerle verilmiştir. Ayrıca Bu kalkülüs sistemi için ağırlıklı ortalamalar ve Newtonyen olmayan konvekslik tanımı da gösterilmiştir.

Bu tez çalışması konuyla ilgili araştırmacılar için kaynak oluşturacak bir derleme niteliği taşımaktadır.



KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus a Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294-1308.
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Balcı, M., 2012. Matematik Analiz-1. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, Türkiye.
- Bayın, S., 2004. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Ders Kitapları A.Ş., 458 s, Ankara.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasiconvex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.
- Grossman, M., Katz, R., Non-Newtonian Calculus, ISBN:0-912938-01-3, 1978.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.
- Kadak U., and Güreffe, Y., A Generalization on Weighted Means and Convex Functions with respect to the Non-Newtonian Calculus, International Journal of Analysis, vol. 2016, 2016.
- Kadioğlu, E. ve Kamali, M., 2013. Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Niculescu, C.P., Persson L.E., Convex functions and their applications, A Contemporary Approach, Springer, 2006.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. And Ilić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300 pp, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Ordu'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ordu'da tamamladı. 1998 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2002 yılında mezun oldu. 29.09.2004 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Dalında tezsiz yüksek lisans öğrenimine başladı ve 02.02.2006 yılında başarı ile tamamladı. Şuan ise Ordu Üniversitesinde başlamış olduğu Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa İbrahim Çeçen Üniversitesinde devam etmektedir. Aynı zamanda AğrıFen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.